



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Associação Ampla entre Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais e a Universidade Federal de São João del-Rei

Implementação de Controle Não Linear para Drone Quadrirrotor com Fusão de Sensores por Filtro De Kalman.

Belo Horizonte, MG, 2018.

Waldri dos Santos Oliveira

Implementação de Controle Não Linear para Drone Quadrrirrotor
com Fusão de Sensores por Filtro De Kalman.

Dissertação apresentada à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves

Belo Horizonte, MG, 2018.

O48i Oliveira, Waldri dos Santos
Implementação de controle não linear para drone quadrirrotor com
fusão de sensores por filtro de Kalman. / Waldri dos Santos Oliveira.
– – Belo Horizonte, 2018.
114 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação
Tecnológica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica em associação ampla com a Universidade
Federal de São João Del Rei, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves

Bibliografia

1. Teoria do Controle. 2. Controle Automático. 3. Controle de Voo.
4. kalman, Filtragem de. I. Gonçalves, Eduardo Nunes. II. Centro
Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título

CDD 629.8

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais e às pessoas queridas que acreditaram em mim, as quais me apoiaram, motivando e amparando-me nos momentos difíceis.

Agradecimentos

Ao professor Dr. Eduardo Nunes Gonçalves, orientador desta dissertação, pela paciência, pelo apoio e confiança nas minhas escolhas ao longo destes anos de estudo e pesquisa.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL), associação ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ) e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), pelo suporte, sobretudo fora de sala de aula, por tudo que me ensinaram, contribuindo para meu aprimoramento.

À coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL), em especial o professor e coordenador Marcio Matias, pela acolhida, recepção e orientação desde o primeiro dia em que estive no campus como candidato, candidato à bolsa de mestrado.

Aos colegas, mestres e amigos que fiz durante as horas de estudo, intercaladas por debates e ótimas conversas, no Centro de Computação Científica (CCC), ou em nossa “salinha” de estudos, sempre regadas com um bom café, feitas por nossas adoráveis coqueiras, as quais deixo o meu profundo agradecimento pelo nosso “combustível” diário. Por aqueles que me receberam em seu convívio, pelos nossos momentos de descontração, resenhas, humor e oração.

Aos meus pais e minha família, que perto ou mesmo longe, sempre me apoiaram incondicionalmente, durante essa empreitada. Aos amigos e pessoas queridas as quais, devido a dedicação aos estudos, estive menos presente. A todos aqueles que me despedi uma ou mais vezes.

Ao grande arquiteto do universo, pelo dom da vida, saúde e principalmente por toda a sorte que tive, ao me mudar e quando estive viajando entre minha cidade na Bahia e Belo horizonte, pelas providências que pôs em meu caminho, seja na forma de pessoas, oportunidades, livramentos e até mesmo as barreiras que com fé ajudou-me a ultrapassar.

“Saber muito não lhe torna inteligente. A inteligência se traduz na forma que você recolhe, julga, maneja e, sobretudo, onde e como aplica esta informação”

Carl Sagan

Resumo

Objetivo desta dissertação de mestrado é a construção de um protótipo de quadrrorotor, um veículo aéreo não tripulado, que permita a implementação e avaliação de estratégias de controle para a estabilização e controle de seus ângulos de atitude. São descritos todos os componentes que compõem o protótipo, entre eles, motores CC *brushless* para acionamentos das hélices, sistema de controle de velocidade eletrônico dos motores, sensores e microcontrolador. Para implementação das lógicas de medição e controle, é utilizada uma plataforma aberta de *hardware*, a Arduino®. No controle de quadrrorotores é fundamental a precisão na medição dos ângulos de atitude, o que afeta a sua estabilidade e segurança. Para a medição dos ângulos de atitude é utilizada uma unidade de medição inercial, composta por um acelerômetro e um giroscópio, construída na forma de um circuito integrado utilizando a tecnologia de sistemas microeletromecânicos. É adotada uma metodologia de fusões de sinais, que utiliza o filtro de Kalman, para determinação do ângulo de atitude a partir dos sinais do giroscópio e do acelerômetro. A metodologia de medição é implementada e avaliada na plataforma Simulink® para MATLAB® para posterior implementação na plataforma Arduino®. É apresentada a modelagem matemática de quadrrorotores que é utilizada para a representação do comportamento do protótipo. Os parâmetros do modelo do protótipo de quadrrorotor são determinados a partir de cálculos baseados nos dados construtivos e por intermédio de testes experimentais. O modelo obtido é utilizado para simulação na plataforma Simulink® para MATLAB®, permitindo o projeto e a avaliação da estratégia de controle. É adotada uma técnica de controle não linear, *backstepping*, que é avaliada tanto por meio de simulação computacional como por testes experimentais no protótipo de quadrrorotor. A metodologia de controle, juntamente com a fusão de sensores pelo filtro de Kalman, são implementadas na plataforma Arduino® para o controle em tempo real do protótipo de quadrrorotor. Os parâmetros do controlador são obtidos por uma técnica de otimização disponível na plataforma Simulink®. A técnica de projeto empregada é baseada na obtenção do controlador que garante limites especificados para a resposta transitória da saída controlada. Os resultados experimentais são

compatíveis com os resultados de simulação. É verificada a adequação da técnica de controle *backstepping* para o controle de atitude. Também é comprovada a eficiência do procedimento adotado para o projeto dos parâmetros do controlador não linear.

Palavras-chave: veículo aéreo não tripulado; quadrirrotor; controle *backstepping*; fusão de sensores; filtro de Kalman.

Abstract

The objective of this master's dissertation is the construction of a prototype of quadrotor, an unmanned aerial vehicle, that allows the implementation and evaluation of control strategies for the stabilization and control of its attitude angles. All the components that make up the prototype are described, among them, brushless DC motors for propeller drives, electronic speed control system for motors, sensors and microcontroller. For the implementation of measurement and control logic, an open hardware platform, Arduino®, is applied. In the control of the quadrotor, accuracy in the measurement of attitude angles is fundamental, which affects the stability and safety. For the measurement of the attitude angles, it is applied an inertial measurement unit, composed of an accelerometer and a gyroscope, that is built in the form of an integrated circuit using microelectromechanical system technology. A signal fusion method, using the Kalman filter, is applied to determine the attitude angle from the gyroscope and accelerometer signals. The measurement methodology is implemented and evaluated on the Simulink® platform for MATLAB® for later implementation on the Arduino® platform. It is presented the mathematical modeling of quadrotor that is applied to represent the behavior of the prototype. The parameters of the quadrotor model are determined from calculations based on the constructive data and by means of experimental tests. The obtained model is applied for simulation in the Simulink® platform for MATLAB®, allowing the design and evaluation of the control strategy. A non-linear control technique, backstepping, is adopted, which is evaluated both by means of computational simulation as well by experimental tests in the quadrotor prototype. The control methodology, coupled with the fusion of sensors by the Kalman filter, are implemented in the Arduino® platform for the real-time control of the quadrotor prototype. The controller parameters are achieved by means of an optimization technique available on the Simulink® platform. The employed design technique is based on obtaining the controller that guarantees specified limits for the transient response of the controlled output. The experimental results are compatible with the simulation results. It is verified the adequacy of the backstepping control technique for the attitude control. It is also

proven the efficiency of the adopted procedure for the design of the non-linear controller parameters.

Keywords: unmanned aerial vehicle; quadroto; backstepping control; sensor fusion; Kalman filter.

Lista de figuras

Figura 2.1 – Esquema das etapas do projeto.....	26
Figura 2.2 – Tipos de drones.....	27
Figura 2.3 – três topologias de drones.....	28
Figura 2.4 – Topologias de aeronaves de asas rotativas.....	29
Figura 2.5 – Primeiro quadrirrotor Bréguet-Richet Gyroplane	30
Figura 2.6 – Quadrirrotor Oemichen.....	30
Figura 2.7 – Teste do Helicóptero Tandem de Nicolas Florine.....	31
Figura 2.8 – Curtis-Wright X-19.....	31
Figura 2.9 – Drone UNB.	32
Figura 2.10 – Drone acadêmico	33
Figura 2.11 – AR Multirotor da Parrot.	33
Figura 3.1 – Modelo de estruturas “x” e “+”	36
Figura 3.2 – Sistema de coordenadas de um quadrirrotor.	37
Figura 3.3 – Rotação 2D.....	39
Figura 3.4 – Rotação em torno de vetor unitário.....	40
Figura 3.5 – Rotação $\mathbf{p}$ ao redor de $\mathbf{z}$	41
Figura 3.6 – Eixos de rotação guinada, matriz $\mathbf{RIM}(\mathbf{z}, \psi)$	43
Figura 3.7 – Eixo de rotação arfagem, matriz $\mathbf{RIM}_{\mathbf{x}, \phi}$	43
Figura 3.8 – Eixo de rotação rolagem, matriz $\mathbf{RIM}(\mathbf{y}, \theta)$	44
Figura 3.9 – Coriolis.	46
Figura 3.10 – Momentos de inercia de quadrirrotor.....	49
Figura 3.11 – Diagrama de forças e momentos.	51
Figura 4.1 – Bateria.....	57
Figura 4.2 – Formas de onda geradas pelo ESC.	58
Figura 4.3 – Motor <i>Brushless</i>	59

Figura 4.4 – Passo de hélice.	60
Figura 4.5 – Eficiência do propulsor.....	61
Figura 4.6 – Acelerômetro.	62
Figura 4.7 – Giroscópio.....	62
Figura 4.8 – Eixos e seus graus de liberdade monitorados.....	63
Figura 4.9 – IMU proposta para o trabalho.....	64
Figura 4.10 – Rádio	65
Figura 4.11 – Canais de rádio.....	65
Figura 4.12 – Estrutura.	66
Figura 4.13 – Montagem final.	67
Figura 4.14 – Teste de propulsor empuxo.....	68
Figura 4.15 – Resultado de propulsor empuxo.....	68
Figura 4.16 – Teste de propulsor torque.	69
Figura 5.1 – Conceito de fusão sensorial.	74
Figura 5.2 – Diagrama de funcionamento do Filtro de Kalman.....	79
Figura 5.3 – <i>Backstepping</i> sistema original.....	82
Figura 5.4 – <i>Backstepping</i> sistema equivalente.....	83
Figura 5.5 – Estratégia <i>backstepping</i>	84
Figura 5.6 – Diagrama do controlador <i>backstepping</i>	88
Figura 5.7 – Janelas de otimização.....	89
Figura 5.8 – Evolução das respostas transitórias no processo de otimização.....	89
Figura 5.9 – Diagrama de lugar das raízes.....	90
Figura 5.10 – Diagrama de controle de guinada.	91
Figura 6.1 – Diagrama de blocos do sistema de medição e controle.....	92
Figura 6.2 – Esquema de conexão.	93
Figura 6.3 – Fusão de sensores implementado no Simulink®.....	93
Figura 6.4 – Resultado da fusão de sensores.....	94

Figura 6.5 – Resultado na presença de ruídos elevados.	95
Figura 6.6 – Simulação do sistema de controle implementado no Simulink®.	96
Figura 6.7 – Resposta angular simulada sem ruído de medição.	96
Figura 6.8 – Resposta angular com simulada com ruído de medição.	97
Figura 6.9 – Base para testes.	98
Figura 6.10 - Sistema de controle completo implementado em Simulink®.	99
Figura 6.11 – Resposta experimental.	99
Figura 6.12 – Resultado experimental com presença de perturbação.	100
Figura 6.13 – Ruído obtido experimentalmente.	101
Figura 6.14 – Resultado da simulação erro de rastreamento obtido pelo Simulink®.	101
Figura 6.15 – Resultado experimental do erro de rastreamento obtido pelo protótipo.	102
Figura 7.1 – Plataforma de teste 4DOF.	105

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Aplicações.	34
Tabela 4.1– Propriedades Arduino®.	70
Tabela 5.1 – Algoritmo básico do filtro de Kalman	79

Lista de Abreviações

ESC	do inglês, <i>Electronic Speed Control</i>
GPS	Sistema de Posicionamento Global (do inglês, <i>Global Positioning System</i>)
I ² C	do inglês, <i>Inter-Integrated Circuit</i>
IMU	Unidade de Medida Inercial (do inglês, <i>Inertial Measurement Unit</i>)
LMI	do inglês, <i>Linear Matrix Inequality</i>
MEMS	do inglês, <i>Micro-electro-mechanical systems</i>
MIMO	do inglês, <i>Multiple-input multiple-output</i>
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PWM	do inglês, <i>Pulse Width Modulation</i>
RPAS	do inglês, <i>Remotely Piloted Aircraft Systems</i>
SMC	do inglês, <i>Sliding Mode Control</i>
UAV	do inglês, <i>Unmanned Aerial Vehicle</i>
USB	Barramento Serial Universal (do inglês, <i>Universal Serial Bus</i>)
VANTs	Veículos Aéreos Não Tripulados
VARP	Veículo Aéreo Remotamente Pilotado
VTOL	do inglês, <i>Vertical Take-Off and Landing</i>

Lista de Símbolos

ϕ	Ângulo de atitude “ <i>phi</i> ” ou ângulo de rolagem (sobre eixo “x”).
θ	Ângulo de atitude “ <i>theta</i> ” ou ângulo de arfagem (sobre eixo “y”).
ψ	Ângulo de atitude “ <i>psi</i> ” ou ângulo de guinada (sobre eixo “z”).
η	Vetor atitude.
$\Delta\delta_*$	Comprimento de período PWM da ação de controle de atitude, sendo *= <i>x, y, z</i> .
m	Massas menores ou extremidades do drone.
M	Massa maior ou central do drone.
ℓ	Comprimento entre os centros de massas maior e menores.
R	Raio do centro de massa maior do drone.
J_*	Momento de inercia, sendo *= <i>x, y</i> e <i>z</i> .
k_f	Constante de ganho, PWM para empuxo.
k_t	Constante de ganho, PWM para torção.
f_n	Força empuxo resultante, sendo n=1...4;
τ_*	Força torque resultante, sendo *= ϕ, θ e ψ .
ξ	Vetor posição.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1.	Objetivos	22
1.1.1.	Objetivo geral	22
1.1.2.	Objetivos específicos	22
1.2.	Metodologia	23
1.3.	Sumário das contribuições	23
1.4.	Organização do texto	24
2	QUADRIRROTORES	26
2.1.	Os Drones	26
2.1.1.	Classificação dos VANTs	27
2.1.2.	Histórico dos multirrotores	29
2.1.3.	Aplicações	34
2.2.	Conclusão	35
3	MODELAGEM DO SISTEMA	36
3.1.	Lógica de operação dos quadrirrotores	36
3.2.	Sistema de coordenadas	36
3.2.1.	Referenciais	37
3.2.2.	Variáveis	38
3.3.	Teoria cinemática	39
3.3.1.	Matriz de rotação	39
3.3.2.	Modelo de cinemática	45
3.4.	Dinâmica (corpos rígidos)	46
3.4.1.	Equação de Coriolis	46
3.4.2.	Modelo de dinâmica	47
3.4.3.	Forças e momentos	50
3.5.	Simplificação de modelos	53

3.6. Conclusão	55
4 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS.....	56
4.1. Seleção dos elementos do protótipo de quadrrirrotor.....	56
4.1.1. Microcontrolador.....	56
4.1.2. Bateria	56
4.1.3. Controladores de velocidade	57
4.1.4. Motor DC <i>Brushless</i>	58
4.1.5. Propulsores.....	59
4.1.6. Sensores.....	61
4.1.7. Comunicação.....	64
4.1.8. Estrutura do protótipo de quadrrirrotor.....	66
4.1.9. Constantes de empuxo e torque	67
4.1.10. Placa processadora.....	69
4.2. Conclusão	71
5 PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE.....	72
5.1. Introdução	72
5.2. Filtro de Kalman	72
5.2.1. Problema de medição angular	73
5.2.2. Fusão de sensores.....	73
5.2.3. Abordagens de calibração	74
5.2.4. Funcionamento do filtro de Kalman	76
5.3. Teoria de estabilidade de Lyapunov.....	80
5.4. Controlador Backstepping.....	81
5.4.1. O Algoritmo <i>backstepping</i>	84
5.4.2. Projeto do controlador	87
5.4.3. Controlador de guinada	90
5.5. Conclusão	91

6	TESTES E SIMULAÇÕES	92
6.1.	Filtro de Kalman	92
6.2.	Resultados do sistema de controle.....	95
6.3.	Resultados experimentais.....	97
6.3.1.	Base de testes.....	97
6.3.2.	Resultados experimentais	98
7	CONCLUSÕES	103
7.1.	Conclusões.....	103
7.2.	Trabalhos futuros	105
7.3.	Trabalhos publicados relacionado com essa dissertação	106
	APÊNDICE A – CÓDIGO FILTRO KALMAN	107
	REFERÊNCIAS	111

1 INTRODUÇÃO

Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs), do Inglês *Unmanned Aerial Vehicle (UAV)*, são aeronaves de médio ou pequeno porte, desprovidas de piloto. Os VANTs podem ser classificados em grupos: os de asas fixas, ou aviões; os mais leves que o ar ou balões; e em destaque os de asas móveis ou helicópteros, objetivo de estudo deste trabalho, em especial os multicópteros de quatro asas móveis ou quadrotores (ou quadrirrotores). Assim como os helicópteros, os quadrirrotores são aeronaves com capacidade de decolar e pousar verticalmente (VTOL, do inglês *Vertical Take-Off and Landing*) e de pairar no espaço em uma coordenada fixa (*hovering*), habilidades de grande destaque que lhe possibilitam manobrar em pequenos espaços com maior precisão e controle. (OLIVEIRA, 2014).

O desenvolvimento dos VANTs é possível graças aos avanços tecnológicos dos sistemas microeletromecânicos (MEMS, do inglês *Micro-electro-mechanical systems*), que possibilitam a construção dos sensores essenciais ao funcionamento dos mesmos: os acelerômetros e giroscópios. Além disso, por meio da evolução da microinformática, é possível a aplicação dos microprocessadores para implementação de um sistema de controle eficiente para lidar com o grande número de variáveis envolvidas.

Outras tecnologias empregadas nos VANTs, como o Filtro de Kalman, aplicado quando se deseja atenuar o efeito de ruídos de medição via software. Este método foi criado por Rudolf Kalman e tem por objetivo “utilizar medições de grandezas realizadas ao longo do tempo (contaminadas com ruído e outras incertezas) e gerar resultados que tendam a se aproximar dos valores reais das grandezas medidas” (BISHOP & WELCH, 2001). O Filtro de Kalman é capaz de manipular e tratar os dados provenientes dos sensores para aplicação nos sistemas de controle.

No controle de VANTs, é fundamental a alta precisão e velocidade na medição dos ângulos, o que afeta a sua estabilidade e consequentemente a sua segurança, especialmente

quando estão sujeitos a vibrações e repentinas mudanças de direção, necessárias, propositais ou ocasionadas por fatores externos como o vento e outros objetos. Com os recursos de melhoramento das medições combinadas à eficientes sensores, giroscópios e acelerômetros, refinada por filtros passivos ou filtros recursivos como o Filtro de Kalman, este último empregado no trabalho de OLIVEIRA & FERNANDES (2016), para contornar os problemas ocasionados por desvios e ruídos que afetam tais sensores. Em alguns casos é até mesmo possível aplicar uma técnica mais simplificada, para estimação, como o filtro complementar, empregado por OLIVEIRA (2014).

Nota-se que a grande maioria dos trabalhos na área de controle de VANTs está concentrada aplicando técnicas de controle linear, em especial, o controle proporcional-integral-derivativo (PID), devido a sua simplicidade de implementação e sua robustez mediante a parâmetros não definidos com exatidão. Porém, em geral, para este tipo de sistema, o uso de técnicas de controle linear implicar em menor rastreabilidade, precisão inferior, baixa rejeição de distúrbios e são muito sensíveis a parâmetros não modelados, descrito por ZULU & JOHN (2014). Há vários exemplos de trabalhos usando técnica de controle PID, por exemplo, em COSTA (2012), OLIVEIRA (2014) ou em OLIVEIRA & FERNANDES (2016). Outra técnica linear também comumente aplicada é a técnica de controle H_2 e/ou por realimentação de estados baseada em projeto por formulações em desigualdade matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*), estudada, por exemplo, por ALVES (2012) e MOZELLI & NETO (2014) dentre outras de realimentação de estados.

As pesquisas a respeito de controle de quadricópteros tem se intensificado nos últimos anos, ver, por exemplo, TAVARES (2014), LIMA (2015), CONGLONG et al. (2016) e referências por eles citadas. Uma outra possibilidade, em relação às técnicas de controle lineares, é empregar técnicas de controle mais sofisticadas, como as não lineares, que são mais eficientes e que melhor atuam nos sistemas reais, que são a princípio não lineares. Sendo assim, as técnicas de controle não linear garantem maior robustez e controle sobre toda a faixa de operação, ao

contrário das técnicas lineares, que valem apenas para uma faixa de operação, ou seja, o intervalo linearizado. Outra vantagem das técnicas de controle não linear é que, a aplicação direta ao modelo não linear do sistema, faz com que os comportamentos inerentes as não linearidades sejam levados em consideração nas ações de controle.

Técnicas de controle não linear podem resultar em um melhor desempenho do sistema por serem baseadas em um modelo mais representativo do processo. Em ZULU & JOHN (2014) é apresentado um breve levantamento sobre as principais características de doze técnicas de controle, sendo seis delas não lineares, foco deste estudo. Para este trabalho, inicialmente analisou-se duas técnicas possíveis, selecionadas pelos critérios de melhor rejeição de distúrbios combinada com alta capacidade de rastreamento. Sendo elas a técnica *backstepping* e a controle por modos deslizantes (SMC, do inglês *Sliding Mode Control*), que além de contar com os benefícios comuns das técnicas não lineares, contam com grau intermediário de implementabilidade e melhor relação de gerenciamento de energia, ou menor esforço de ação de controle. Nesse trabalho foi adotada a técnica *backstepping* por esta possuir um menor esforço computacional. A técnica de controle *backstepping* será estudada em particular no Capítulo 5.

Atualmente, outras técnicas vêm sendo estudadas mais a fundo, tais como a DFL (do inglês, *Direct Feedback Linearization*), ou Dinâmica Inversa, uma das quatro técnicas abordada por DIKMEN et al. (2009), em sua pesquisa. Outro exemplo é o controle por modos deslizantes (SMC, do inglês *Sliding Mode Control*), abordada por ÁVILA (2014). E por último, em especial, a *backstepping* (de integração), estudada por GRAND et al. (2007), MIAN & DAOBO (2008), CHEN & ZHOU (2013), MONTEIRO (2015), CONGLONG (2016) e muitos outros.

Uma outra tendência que ganha destaque nos trabalhos citados no parágrafo anterior, é o uso de plataformas abertas de *hardware*, como Raspberry Pi e Arduino. Estas plataformas vêm sendo muito bem difundidas em várias áreas da comunidade acadêmica, pelo seu baixo custo, simplicidade, versatilidade e customização.

As tecnologias envolvendo o uso de multirrotores veem sendo abordadas por vários pesquisadores e consequentemente sendo aprimoradas na última década, considerando um setor ainda com grande potencial inovador e estratégico, com diversos campos de aplicação, tais como transporte, comunicação, monitoramento e inclusive de interesse dos setores de segurança, inteligência e de defesa militar. A combinação de tecnologia de controle não linear combinada com uma técnica aprimorada de tratamento de sinais, poderá garantir um elevado grau de desempenho, permitindo maior robustez e adaptabilidade dos quadrirrotores. Visto que em um futuro não muito distante prevê-se o aumento do seu emprego e dos investimentos financeiros, o que implicará em um número cada vez mais crescente de dispositivos, operando em espaços físicos cada vez menores, fenômeno típico de grandes centros urbanos. Diante de todos estes fatos, se faz necessário o aprimoramento tanto do hardware como do software na implementação dos sistemas de controle.

Como discutido, a construção de um quadrirrotor envolve diversas tecnologias de *hardware* e *software*. Para melhor dominar tais tecnologias e propor melhorias, é interessante o desenvolvimento de um protótipo simples que permita a implementação de técnicas de medição e tratamento de sinais que possibilitem a implementação e avaliação de diferentes técnicas de controle. Através da modelagem matemática desse protótipo, é possível aplicar diferentes formas de projeto de controladores que podem ser avaliados inicialmente por simulações computacionais antes de sua implementação no protótipo. Por intermédio desse protótipo será possível desenvolver novas estratégias de controle que permitam, por exemplo, aprimorar a segurança desses dispositivos ou aumentar a duração das baterias.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo geral

O objetivo principal deste projeto de dissertação de mestrado é a construção de um protótipo de veículo aéreo não tripulado (VANT), no caso um quadrrorotor, que permita a implementação e avaliação da estratégia de controle não linear para a estabilização e controle de seus ângulos de manobras de atitude.

1.1.2. Objetivos específicos

Para atingir o objetivo principal deste projeto de dissertação será necessário:

- Projetar e construir um protótipo de quadrrorotor composto por estrutura eletromecânica: motores para acionamentos das hélices, sistema de controle de velocidade dos motores, sensores e microcontrolador para implementação das lógicas de controle.
- Estudar e avaliar metodologias de medição dos ângulos, as diferentes técnicas de tratamento dos sinais dos sensores, de manobras de atitude e implementar a mais adequado no protótipo de quadrrorotor.
- Encontrar o modelo deste protótipo de quadrrorotor construído para simulação do comportamento do mesmo.
- Estudar, implementar e validar a técnica de controle *Backstepping* por meio de simulação computacional e testes experimentais no protótipo de quadrrorotor.
- Avaliar a utilização de uma técnica de otimização via Simulink® para o projeto do controlador, determinando seus parâmetros ideais.

1.2. Metodologia

Inicialmente será realizado um estudo a respeito de sistemas de controle de quadrrrotores, considerando tanto técnicas de controle linear como controle não linear, para levantamento das referências bibliográficas na área. Para implementação e avaliação das técnicas de controle estudadas será projetado e construído um protótipo de quadrrrotor. Este protótipo, que será fixo em bancada, terá um eixo rotatório que permite a avaliação das estratégias de controle.

Em seguida serão estudadas metodologia de fusões de sinais, que utilizam o filtro de Kalman, para medição dos ângulos de manobras de atitude a partir dos sinais de giroscópio e acelerômetro. A metodologia de medição será implementada e avaliada na plataforma Simulink® para MATLAB® para posterior implementação na plataforma Arduino®.

Será estudado a modelagem matemática de quadrrrotores para elaboração de um modelo que represente o comportamento do protótipo do quadrrrotor para sua simulação no MATLAB®. Uma vez construído o protótipo de quadrrrotor, será realizado o levantamento dos parâmetros do modelo do sistema.

A etapa seguinte será a síntese de sistemas de controle não linear para o modelo elaborado para o protótipo de quadrrrotor. A estratégia de controle será simulada no MATLAB®. A metodologia de controle escolhida será implementada na plataforma Arduino® para o controle em tempo real do protótipo de quadrrrotor.

Os parâmetros ideais do sistema de controle serão encontrados por uma técnica de otimização através do Simulink®, para projeto do controlador ótimo.

1.3. Sumário das contribuições

São contribuições deste projeto de dissertação de mestrado:

- Projetar e construir um protótipo de quadrrorotor que permita a implementação e avaliação de sistemas de controle dos ângulos de manobras de atitude.
- Apresentar uma metodologia de medição dos ângulos de manobras de atitude baseada na técnica do Filtro de Kalman para fusão dos sinais obtidos através de acelerômetro e giroscópio.
- Implementar na plataforma Arduino® um sistema de controle dos ângulos de manobras de atitude do protótipo de quadrrorotor.
- Validar a técnica de otimização via Simulink® para a síntese do controlador não linear a ser implementada no controle de atitude do protótipo de quadrrorotor, confrontando os resultados experimentais com os ideais simulados.

1.4. Organização do texto.

Este trabalho está dividido em sete capítulos. Aborda-se no primeiro capítulo, a introdução, os objetivos, a metodologia e relevância deste trabalho.

Em seguida, no capítulo dois, aprofunda-se sobre o histórico, desenvolvimento e aplicação dos VANTs.

O capítulo três apresenta as fórmulas que regem a dinâmica dos quadrrorotores para obtenção do modelo do sistema.

No quarto capítulo encontra-se os estudos, descrição e funcionamento dos componentes do protótipo e testes e experimentos para determinação de parâmetros.

O quinto capítulo contém os estudos teóricos da técnica de controle *backstepping* e da técnica de tratamento dos dados dos sensores, filtro de Kalman.

O sexto capítulo registra os dados e análises das simulações, e os resultados experimentais obtidos por intermédio do protótipo construído.

Por fim, no sétimo e último capítulo, encontram-se as conclusões e as perspectivas para trabalhos futuros. O Apêndice A contém o código do filtro de Kalman.

2 QUADRIROTORES

A definição da melhor estratégia de implementação é fator decisivo na aplicação de multirrotores, devido à navegação em espaços apertados ou o seu grande potencial, em caso de falhas, de causar danos materiais e risco de acidentes físicos e até mesmo letais.

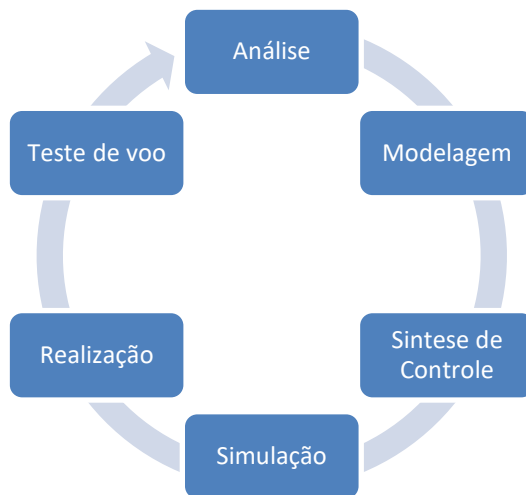


Figura 2.1 – Esquema das etapas do projeto.

A Figura 2.1 esquematiza o sequenciamento das etapas de um projeto de quadricóptero ou drone de maneira genérica. Requer uma modelagem confiável, análises detalhadas dos componentes, execução de exaustivos testes de desempenho, realização precisa do projeto, implementação de uma técnica de controle precisa muitas vezes confrontada com modelos construídos computacionalmente.

2.1. Os Drones

O termo “drone” é proveniente do inglês, existente desde a Idade Média com a grafia *dran*. Curiosamente, em seu sentido mais clássico tem uma tradução simples: “zangão, macho da abelha” (RODRIGUES, 2013). O termo “drone” é amplo e impreciso e vem sendo comumente usado para descrever desde pequenos multirrotores rádio controlados, comprados em lojas de brinquedo, até VANTs de aplicação militar, ver Figura 2.2. Ainda há outros termos utilizados, como Veículo Aéreo Remotamente Pilotado (VARP), Sistemas de Aeronaves Remotamente Pilotadas (RPAS, do inglês *Remotely Piloted Aircraft Systems*) e Veículo Aéreo

Não Tripulado (VANT), além da sigla em inglês UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*) (AGUIAR, 2013).

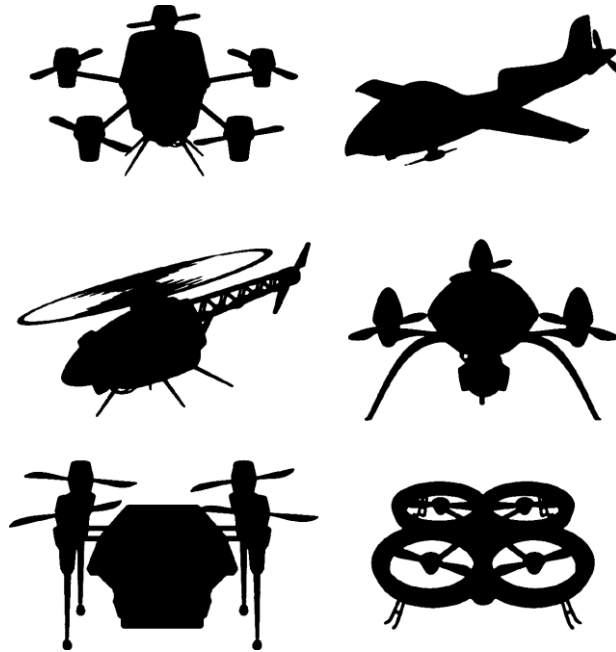


Figura 2.2 – Tipos de drones.

2.1.1. Classificação dos VANTs

Os VANTs podem ser classificados de acordo com sua topologia construtiva ou princípio de funcionamento. Comumente são subdivididos e classificados de acordo com sua envergadura ou custo e sua finalidade ou aplicação. A Figura 2.3 ilustra três tipos de VANT de acordo com a sua topologia (COSTA, 2012):

- Mais leves que o ar
- Asas fixas
- Asas móveis

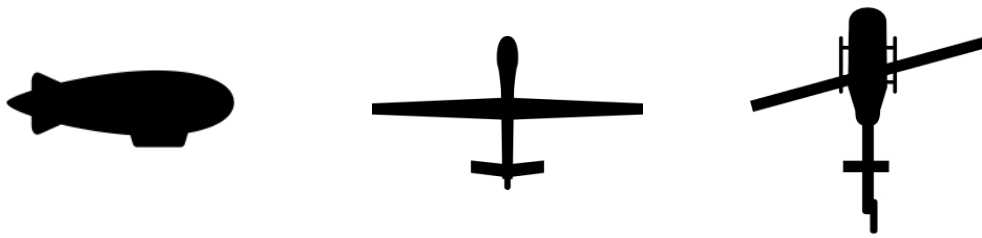


Figura 2.3 – três topologias de drones.

No primeiro grupo de classificação, de acordo com a topologia, estão os balões dirigíveis. Sua grande vantagem é poder passar longos períodos de tempo no ar com consumo de energia muito baixo devido à sustentação do seu gás interno. Uma desvantagem é que este gás é inflamável, o que pode ser perigoso. Uma segunda desvantagem é que, devido ao seu tamanho e baixa aerodinâmica, opera com velocidades baixas.

No segundo grupo estão incluídos os aviões. Sua principal característica é a capacidade de voar grandes distâncias em velocidades superiores aos demais tipos de aeronaves. Por esta razão são altamente empregados em missões de reconhecimento, mapeamento ou tomada de imagens em grandes percursos. A baixa manobrabilidade e a necessidade de pistas adequadas para pousos e decolagens são algumas de suas desvantagens.

No último grupo topológico tem-se os helicópteros e multicópteros. Estes possuem a capacidade de manobrar em pequenos espaços, capacidade de pairar em um ponto fixo no ar, manobrar em espaços menores, pousar e decolar verticalmente em terrenos adversos. Os helicópteros possuem articulação em seu rotor propulsor, para realizar manobras longitudinais, e um rotor de cauda para mudar de direção, Figura 2.4 (a), ao contrário dos multicópteros que possuem seus múltiplos rotores fixos. Nos multicópteros, o controle individual de cada motor cria inclinações que são responsáveis por suas manobras e o controle de torques atua na mudança de direção, Figura 2.4 (b,c,d). Neste projeto de dissertação, o objeto de estudo é o quadrirrotor ilustrado na Figura 2.4 (d), um tipo de multicóptero.

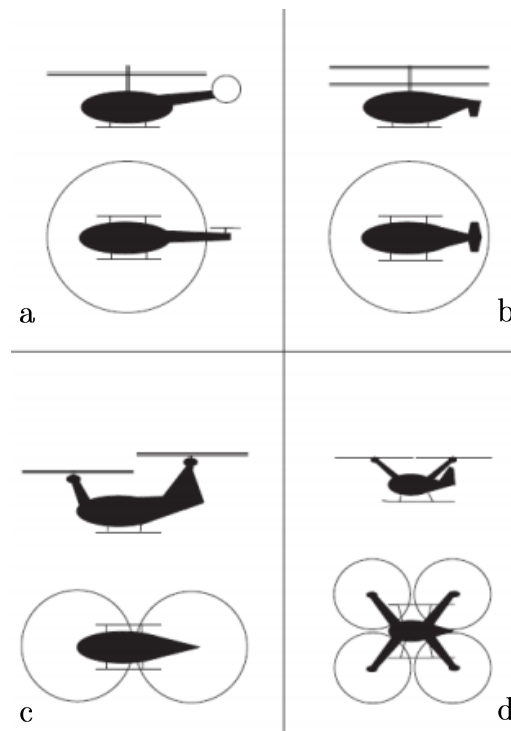


Figura 2.4 – Topologias de aeronaves de asas rotativas.

Fonte: ALVES, 2012 (adaptado)

2.1.2. Histórico dos multirrotores

Há inúmeros registros de veículos aéreos não tripulados ao longo da história, a partir de períodos remotos 424 a.C., como, por exemplo, o “pombo” de *Archytas de Tarento*, cientista grego, que criou um pássaro mecanizado ou os esquemas do famoso pintor Leonardo da Vinci do século XIV (COSTA, 2012). Os registros de VANTs foram intensificados no século XX. A grande maioria deles datam dos períodos próximos a primeira guerra mundial (1914-1918) e meados das décadas de 40, destacando seu potencial bélico (LEISHMAN, 2000). Nestes últimos anos do século XXI, esta tecnologia apresenta um especial destaque na área da engenharia elétrica, concentrada em sistemas de controle.

No ano de 1906, uma dupla de franceses, o professor e cientista Charles Robert Richet (Paris, 26 de agosto de 1850 — Paris, 4 de dezembro de 1935) e o engenheiro Louis Charles Breguet (Paris, 2 de janeiro de 1880 — Saint-Germain-en-Laye, 4 de maio de 1955), realizaram a primeira tentativa de criar uma aeronave dotada de múltiplos rotores, chamada de *Bréguet-*

Richet Gyroplan, apresentada na Figura 2.5. Infelizmente o experimento não foi bem-sucedido, elevando-se do chão apenas por meio metro. Além disso a estrutura apresentava problemas de dirigibilidade. Nos anos seguintes, ocorreu baixo aprimoramento e o projeto foi abandonado em 1909 quando foi destruído na fábrica devido a uma tempestade LEISHMAN (2016).

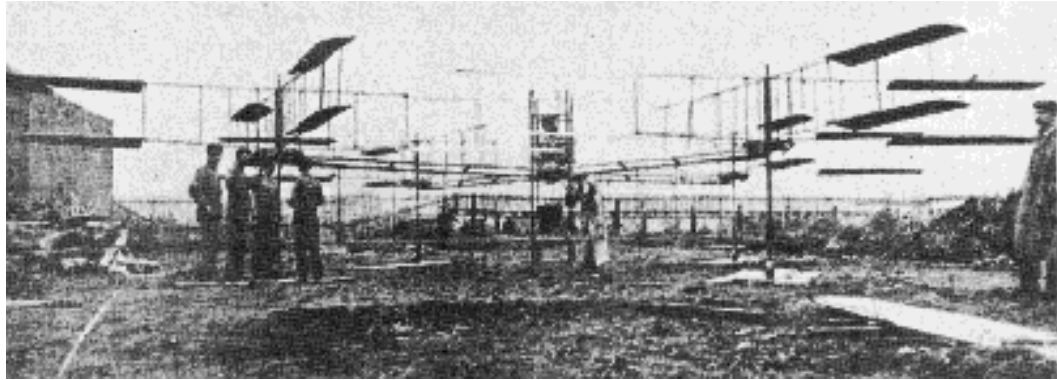


Figura 2.5 – Primeiro quadrirrotor Bréguet-Richet Gyroplane
Fonte: LEISHMAN, 2016.

Mais tarde, no ano de 1920, um jovem engenheiro da Peugeot, Etienne Oemichen (Châlons-sur-Marne, 15 de outubro de 1884 — Paris, 10 de julho de 1955) construiu o Quadrirrotor Oemichen, pesando 800kg e com um motor de 180 HP com quatro propulsores principais e outros oito menores, apresentado na Figura 2.6. Este realizou cerca de 100 voos com relevante estabilidade por cerca de 7,8 km/h à 5 metros do chão. O projeto foi cancelado devido aos baixos rendimentos em relação às especificações encomendadas pelo exército LEISHMAN (2016).

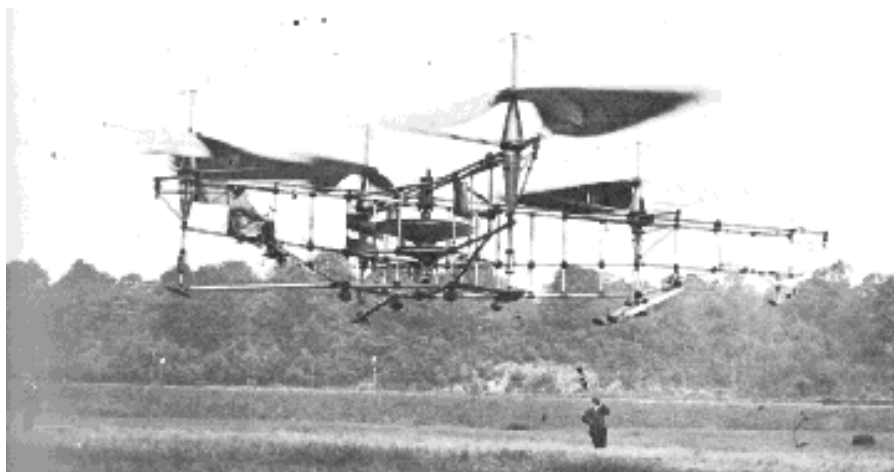


Figura 2.6 – Quadrirrotor Oemichen.
Fonte: LEISHMAN, 2016.

Já nos anos de 1929-1930, na Bélgica, um engenheiro Russo, Nicolas Florine (19 Julho 1891 – 21 Janeiro 1972) desenvolveu o Helicóptero apresentado na Figura 2.7. Este, por sua vez, possuía apenas dois rotores com momentos opostos. Voava por 9 minutos a 15 metros de altitude. O projeto foi abandonado durante a Segunda Guerra Mundial e destruído durante a guerra LEISHMAN (2016).



Figura 2.7 – Teste do Helicóptero Tandem de Nicolas Florine.

Fonte: LEISHMAN, 2016.

Em 1964, a Força Aérea Americana construiu dois protótipos da aeronave Curtis-Wright X-19, apresentada na Figura 2.8, sendo que uma delas foi completamente destruída em um acidente durante os testes. Posteriormente o projeto foi abandonado e o único protótipo encontra-se no museu da Força Aérea Americana desde 2007 MONTEIRO (2015).



Figura 2.8 – Curtis-Wright X-19.

Fonte: MONTEIRO, 2015.

Durante algumas décadas o desenvolvimento desta topologia de aeronaves foi abandonado pelos pesquisadores. Os motivos, os principais problemas comuns em todos os projetos anteriores, o controle e os sensores imprecisos. Por volta do ano 2000, foram retomados vários estudos no ambiente acadêmico, graças ao advento, durante os anos 80, da tecnologia de sistemas microeletromecânicos (MEMS), que permitiu a criação de sensores menores e mais precisos, e dos avanços tecnológicos da microeletrônica e dos microcontroladores (MELO, 2010).

No Brasil, os alunos Pedro Henrique e Marcelo Braga, do curso de Engenharia Mecatrônica da Universidade de Brasília – UnB, orientados pelo professor Geovany Borges, desenvolveram o quadricóptero apresentado na Figura 2.9. No ano de 2008, o projeto, recebeu o terceiro lugar no Prêmio Jovem Inventor na Fundação de Apoio à Pesquisa, Distrito Federal, custando em média R\$ 2.000,00 (FITTIPALDI 2008).

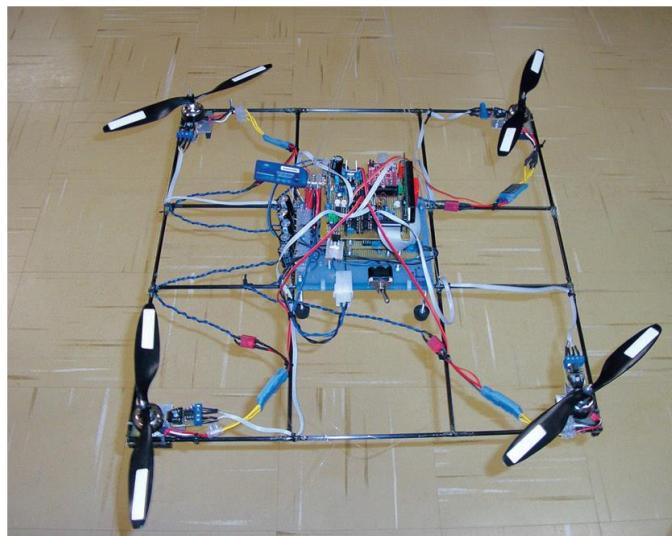


Figura 2.9 – Drone UNB.
Fonte: FITTIPALDI, 2008.

Outro exemplo de projeto de quadricóptero, desenvolvido no Brasil, é o trabalho de conclusão de curso de graduação em Engenharia de Controle e Automação, de OLIVEIRA (2014). Este projeto chegou a ser semifinalista do concurso nacional de *StartUps*, organizado

pela Associação Brasileira de Startups, daquele ano. Nesse trabalho, apresentado na Figura 2.10, foi empregado microcontroladores, sensores MEMS e a técnica de controle linear PID.



Figura 2.10 – Drone acadêmico
Fonte: OLIVEIRA, 2014.

Atualmente existem inúmeras iniciativas de fabricação comercial, com propósito de recreação, prestação de serviços especializados ou até mesmo fins militares. Uma das pioneiras é o AR Multirotor da Parrot, Figura 2.11, com 380g, dotado de câmera HD (720pixels 30fps) e controle e acesso à câmera via Wi-Fi, compatível com *tablet's* e *smartphones* (PARROT AS, 2016).



Figura 2.11 – AR Multirotor da Parrot.
Fonte: PARROT AS, 2016.

2.1.3. Aplicações

A Tabela 2.1 sintetiza as aplicações que já vem sendo executadas com o auxílio dos multirrotores. Sua utilização se concentra em aplicações que requerem pequenas cargas de equipamento, tais como câmeras e ou sensores especiais. As aplicações de transporte de grandes cargas e de passageiros se encontram em desenvolvimento.

Tabela 2.1 – Aplicações.

Campos de Aplicação	Áreas
Proteção civil	Apoio à coordenação e comando no combate a incêndios
	Operações de busca e salvamento.
Manutenção de estruturas	Inspeção de estruturas
	Planejamento de obras em fábricas
	Manutenção de estradas e autoestradas
Imagens aéreas	Cobertura jornalística de eventos
	Cinema e filmes promocionais
	Fotografia de animais selvagens
	Fotografia profissional
Segurança	Inspeção de zonas críticas
	Manutenção da ordem pública
	Patrulhamento rodoviário
	Vigilância de perímetros
Proteção ambiental	Investigação e combate de acidentes ambientais
Imobiliário	Documentação e promoção de propriedades
Militar	Vigilância e reconhecimento de áreas
Aplicação da lei	Investigação de cena de crime e coleta de informação
	Investigação de acidentes
	Análise de congestionamento e fiscalização das leis de trânsito.
	Eliminação de engenhos explosivos

Fonte: VIEIRA, 2011 (adaptado).

2.2. Conclusão

Este capítulo apresentou a terminologia e classificações relacionadas com veículos aéreos não tripulados. Foi apresentado um breve histórico do desenvolvimento de multirrotores. O levantamento histórico aponta que, apesar do grande desenvolvimento na área militar, a tendência de aplicação em diferentes áreas demanda novos desenvolvimentos. Para demonstrar a importância dos quadirrotores, são listadas várias aplicações dos mesmos e mencionadas alguns trabalhos dedicados ao estudo de técnicas de controle. No próximo capítulo é apresentada a modelagem matemática de quadirrotores, que será útil para simulação e projeto do sistema de controle de atitude estudado nesse trabalho.

3 MODELAGEM DO SISTEMA

Neste capítulo analisar-se-á o objeto de estudo, suas variáveis, forças internas e externas, com o intuito de obter um modelo do sistema. Este capítulo é desenvolvido através da compilação dos trabalhos de BEARD (2008), ALVES (2012) e AVECILLAS (2014), para os estudos da cinemática (3.2) e dinâmica (3.3), contando com outras contribuições pontuais ao longo das seções a seguir.

3.1. Lógica de operação dos quadrrrotores

O funcionamento do quadrrrotores é baseado no controle individualizado dos quatro rotores, que acionam as hélices, distribuídos sobre em uma estrutura em “x” ou “+”, como mostrado na Figura 3.1. Cada combinação de velocidades gera um grau muito variado de manobras, que será detalhado adiante.

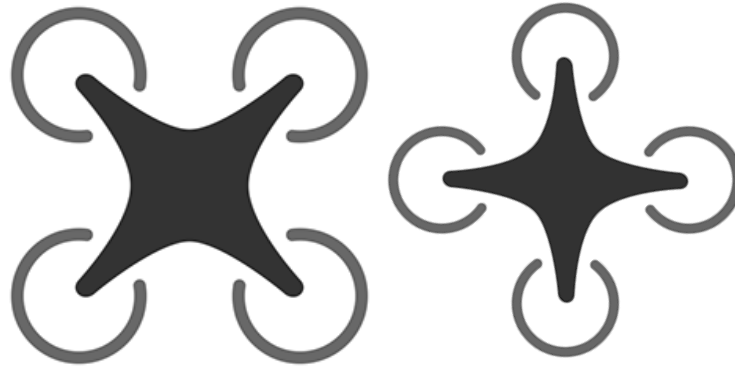


Figura 3.1 – Modelo de estruturas “x” e “+”.

3.2. Sistema de coordenadas

Inicialmente são definidos os referenciais de posição mediante a dois sistemas de coordenadas. Um sistema móvel de centro no quadrrroter, responsável por descrever sua atitude ou relação de inclinações sobre três eixos, medido em graus de rotação, e um sistema fixo no solo, ou ponto de decolagem, ditando o comportamento de posição, medido em distâncias.

3.2.1. Referenciais

Considere que $\mathcal{F}_I$ representa o referencial fixo na terra e que $\mathcal{F}_M$ representa o sistema móvel fixo ao corpo do quadrrirrotor. O referencial fixo ao solo, ou inercial, possui sua origem coincidindo com o local de decolagem, seus vetores comumente aumentam para cima, ao norte e a leste. O referencial móvel inicialmente coincide com o referencial fixo ao solo, logo após a decolagem este assume qualquer posição em relação ao inercial, que por meio de uma expressão ou modelo, terá sua posição determinada.

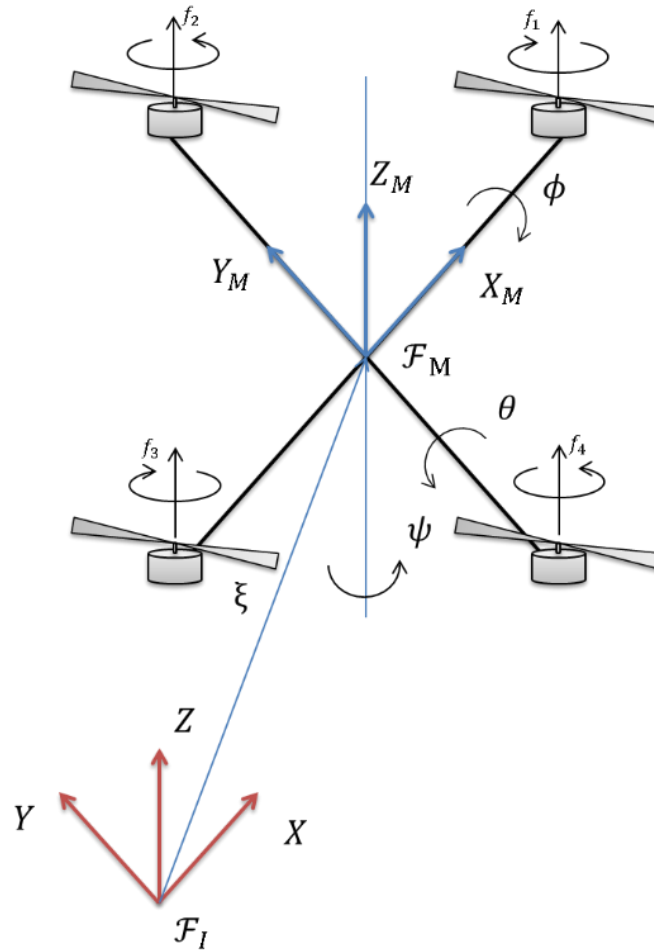


Figura 3.2 – Sistema de coordenadas de um quadrrirrotor.

Na Figura 3.2 são apresentados os referenciais de posicionamento inercial, $\mathcal{F}_I$, e , móvel, $\mathcal{F}_M$, os ângulos de rotação e translação e seus vetores, motores e seus momentos de rotação, elementos estes que serão abordados a seguir durante a modelagem do quadrrirrotor.

3.2.2. Variáveis

As variáveis dos principais sistemas de coordenadas presentes no processo são:

- Φ Ângulo Arfagem (*pitch*) em relação ao sistema $\mathcal{F}_M$
- θ Ângulo Rolagem (*roll*) em relação ao sistema $\mathcal{F}_M$
- Ψ Ângulo Guinada (*yaw*) em relação ao sistema $\mathcal{F}_M$
- p Taxa de rolagem medida no eixo X no sistema $\mathcal{F}_M$
- q Taxa de arfagem medida no eixo Y no sistema $\mathcal{F}_M$
- r Taxa de guinada medida no eixo Z no sistema $\mathcal{F}_M$
- p_n Posição inercial (norte) do quadrrirrotor ao longo de Y no sistema $\mathcal{F}_I$
- p_e Posição inercial (leste) do quadrrirrotor ao longo de X no sistema $\mathcal{F}_I$
- h Altitude do quadrrirrotor ao longo de Z no sistema $\mathcal{F}_I$
- u Velocidade do quadrrirrotor ao longo de X no sistema $\mathcal{F}_I$
- v Velocidade do quadrrirrotor ao longo de Y no sistema $\mathcal{F}_I$
- w Velocidade do quadrrirrotor ao longo de Z no sistema $\mathcal{F}_I$

Sendo que os conjuntos de mesmo tipo de variáveis formam vetores espaciais em $\mathbb{R}^3$ tal como os vetores $\xi = [p_n \ p_e \ h]^T$ e $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$, que descrevem posição e orientação respectivamente.

3.3. Teoria cinemática

A cinemática é o ramo da mecânica clássica que estuda o movimento de corpos ou partículas, em relação ao tempo sem considerar suas massas, resultando em direções e trajetórias, traduzidas em translação e rotação (ROMERO, 2014).

3.3.1. Matriz de rotação

Um vetor $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado em dois sistemas arbitrários de coordenadas. Por exemplo, considere duas bases quaisquer $\mathbf{P}^0 = [\hat{i}^0 \quad \hat{j}^0 \quad \hat{k}^0]^T$ e $\mathbf{P}^1 = [\hat{i}^1 \quad \hat{j}^1 \quad \hat{k}^1]^T$. Uma vez conhecida a relação entre $\mathbf{P}^1$ e $\mathbf{P}^0$, pode-se determinar a representação em um referencial a partir do outro.

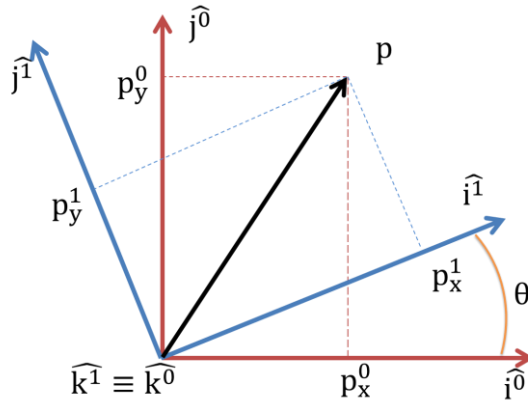


Figura 3.3 – Rotação 2D.

A partir da dedução geométrica das projeções de $\mathbf{P}^0$

$$\mathbf{p}^0 = p_x^0 \cdot \hat{i}^0 + p_y^0 \cdot \hat{j}^0 + p_z^0 \cdot \hat{k}^0 \quad (3.1)$$

Segundo sistema de coordenadas $\mathbf{p}^1$:

$$\mathbf{p}^1 = p_x^1 \cdot \hat{i}^1 + p_y^1 \cdot \hat{j}^1 + p_z^1 \cdot \hat{k}^1 \quad (3.2)$$

A partir da Figura 3.3, de (3.1) e (3.2) tem-se:

$$p_x^0 \cdot \hat{i}^0 + p_y^0 \cdot \hat{j}^0 + p_z^0 \cdot \hat{k}^0 = p_x^1 \cdot \hat{i}^1 + p_y^1 \cdot \hat{j}^1 + p_z^1 \cdot \hat{k}^1 \quad (3.3)$$

A matriz de transformação pode ser representada pelo produto interno escalar

$$p^1 \triangleq \begin{pmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{i}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{i}^1 \cdot \hat{k}^0 \\ \hat{j}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{j}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{j}^1 \cdot \hat{k}^0 \\ \hat{k}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{k}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{k}^1 \cdot \hat{k}^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$p^1 = R_0^1 p^0 \quad (3.5)$$

Fazendo uma interpretação geométrica da Figura 3.3, conclui-se que, a matriz R_0^1 , denominada matriz de rotação de $\mathbf{p}^1$ para $\mathbf{p}^0$, pode ser dada por:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Para elaborar a **Fórmula de Rotação**, para girar, pela regra da mão esquerda, um vetor genérico $\mathbf{p}$, ao redor de um vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$, de um ponto P até um ponto Q , de um ângulo μ , situação ilustrada na Figura 3.4. (BEARD, 2008).

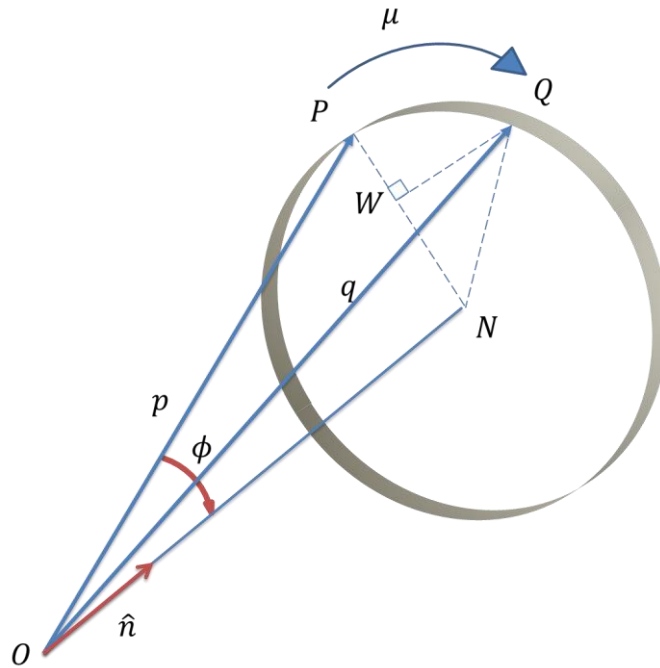


Figura 3.4 – Rotação em torno de vetor unitário.

O vetor $\mathbf{p}$ é rotacionado de um ângulo μ , sobre o vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ até coincidir com o vetor $\mathbf{q}$, o ângulo entre $\mathbf{p}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ é ϕ . O vetor $\mathbf{q}$ é definido geometricamente por.

$$\mathbf{q} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NW} + \overrightarrow{WQ} \quad (3.7)$$

Uma vez que o vetor $\overrightarrow{ON}$ é uma projeção de $\mathbf{p}$ em $\hat{\mathbf{n}}$, permite-se defini-lo, como:

$$\overrightarrow{ON} = (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} \quad (3.8)$$

Sendo os comprimentos $NQ = NP = \|\mathbf{p} - \overrightarrow{ON}\|$, considerando que o vetor $\overrightarrow{NW}$ está na direção de $\mathbf{p} - \overrightarrow{ON}$ e seu comprimento ser $NQ \cdot \cos \mu$, define-se:

$$\overrightarrow{NW} = \frac{\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}}{\|\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}\|} NQ \cdot \cos \mu = (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}) \cos \mu \quad (3.9)$$

Como $\overrightarrow{WQ}$ esta perpendicular à $\mathbf{p}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ possui comprimento $NQ \cdot \sin \mu$ e $NQ = \|\mathbf{p}\| \sin \mu$, logo

$$\overrightarrow{WQ} = \frac{\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}}}{\|\mathbf{p}\| \sin \phi} NQ \sin \mu = -(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \cdot \sin \mu \quad (3.10)$$

Substituindo (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.7) resulta em:

$$\mathbf{q} = (1 - \cos \mu)(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} + \cos \mu \mathbf{p} - \sin \mu (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \quad (3.11)$$

A equação (3.11) é denominada Formula de Rotação.

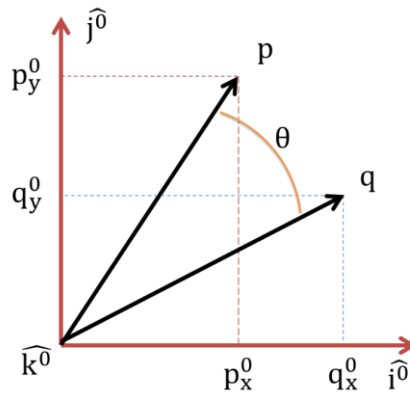


Figura 3.5 – Rotação $\mathbf{p}$ ao redor de $\mathbf{z}$.

Considere a Figura 3.5 que apresenta a rotação do vetor $\mathbf{p}$ para o vetor $\mathbf{q}$ em torno do eixo $\widehat{\mathbf{k}^0}$. Utilizando a formula de rotação (3.11), o vetor $\mathbf{q}$ pode ser calculado como:

$$\mathbf{q}^0 = (1 - \cos \theta)(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \cos \theta \mathbf{p} - \sin \theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p} \quad (3.12)$$

$$= (1 - \cos \theta)p_z^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{pmatrix} - \sin \theta \begin{pmatrix} -p_y^0 \\ p_x^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}^0 \quad (3.14)$$

Esta fórmula matricial tem o papel de representar as forças e os momentos de um referencial $\mathbf{p}^0$ para outro referencial $\mathbf{q}^0$ sobre um determinado eixo.

$$\mathbf{q}^0 = \mathbf{R}_0^1 \cdot \mathbf{p}^0 \quad (3.15)$$

Necessita-se de uma fórmula que envolva todos os três eixos de ambos os referenciais de origem e destino.

A partir deste ponto adota-se o referencial $\mathbf{P}^0$, ou de partida, como sendo o referencial inercial $\mathcal{F}_I$ e o referencial $\mathbf{P}^1$, ou de destino, como o referencial móvel $\mathcal{F}_M$. Assim fazer-se-á uma rotação, ou mapeamento de $\mathbf{P}$ de $\mathcal{F}_I$ para $\mathcal{F}_M$.

Na Figura 3.6, o eixo Z do referencial inercial $\mathcal{F}_I$ coincide com o eixo $\mathbf{Z}_M$ do quadrirrotor, ou seja, o referencial móvel $\mathcal{F}_M = [\mathbf{X}_M \ \mathbf{Y}_M \ \mathbf{Z}_M]$. Para uma melhor interpretação dos referenciais o “nariz”, ou parte frontal, do veículo está alinhado com $\mathbf{Y}_{M+}$. Fazendo uma interpretação geométrica da Figura 3.6, conclui-se que $\mathbf{R}_I^M(\mathbf{z}, \psi)$, ou matriz de rotação sobre o eixo Z do sistema inercial, é dada por:

$$\mathbf{R}_I^M(\mathbf{z}, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

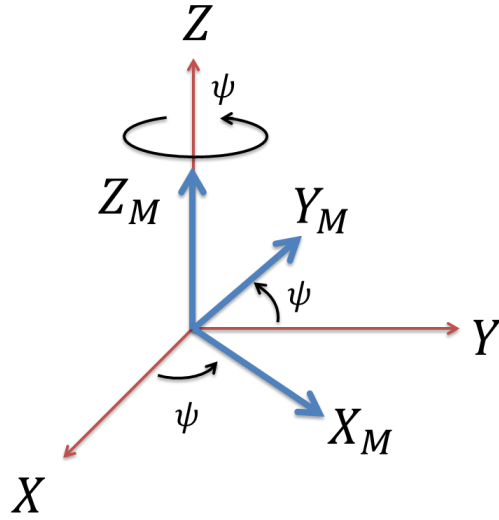


Figura 3.6 – Eixos de rotação guinada, matriz $R_I^M(z, \psi)$.

Fazendo a mesma interpretação agora com o vetor X do referencial inercial coincidindo com o X do referencial do multirroto, conforme a Figura 3.7, a matriz será:

$$R_I^M(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

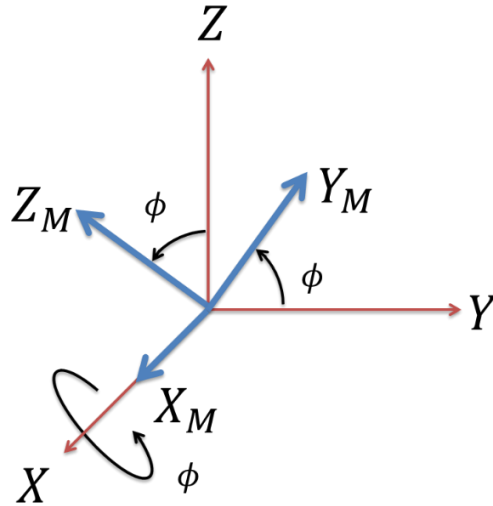


Figura 3.7 – Eixo de rotação arfagem, matriz $R_I^M(x, \phi)$.

E para obter-se a última matriz de rotação $R_I^M(y, \theta)$, rotação sobre os eixos Y dos referenciais, explicitado na Figura 3.8 tem-se:

$$R_I^M(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

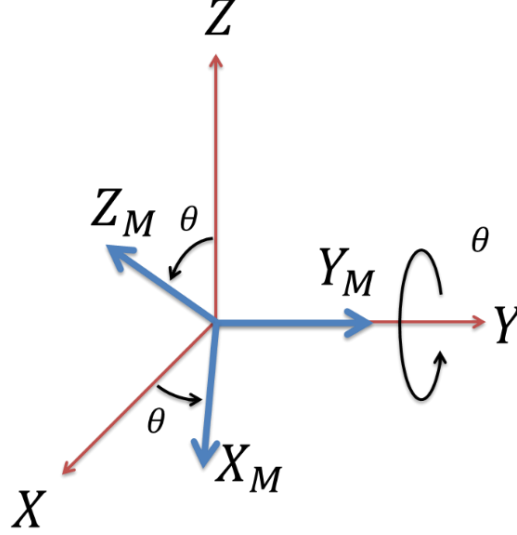


Figura 3.8 – Eixo de rotação rolagem, matriz $R_I^M(y, \theta)$.

Realizando as interpretações geométricas de (3.16) a (3.18) estas gozam das seguintes propriedades matriciais:

$$\text{P1. } (R_a^b)^{-1} = (R_a^b)^T = (R_b^a)$$

$$\text{P2. } (R_b^c) \cdot (R_a^b) = (R_a^c)$$

$$\text{P3. } \det[(R_a^b)] = 1$$

Após esta análise resultar nas matrizes de rotações individuais sobre cada eixo, e utilizando das propriedades discutidas, pode-se agora encontrar a matriz completa de rotação de um referencial $\mathcal{F}_I$, para $\mathcal{F}_M$ através da expressão:

$$R_I^M = R_I^M(z, \psi) \cdot R_I^M(y, \theta) \cdot R_I^M(x, \phi) \quad (3.19)$$

$$R_I^M = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Resolvendo, temos a matriz de rotação completa de $\mathcal{F}_I$, para $\mathcal{F}_M$:

$$R_I^M = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Finaliza-se o resultado desta seção com a equação (3.21), que será base para os próximos desenvolvimentos a seguir.

3.3.2. Modelo de cinemática

Considerando as variáveis de estado do referencial inercial $(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_e, \mathbf{h})$, as variáveis $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ do referencial móvel e utilizando a propriedade P1 da matriz de rotação, a relação de velocidade e posição dada como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_I} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_e \\ -\mathbf{h} \end{pmatrix} &= R_I^M \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = (R_M^I)^T \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

em que $\frac{d}{dt_I} \mathbf{p}$ a derivada de $\mathbf{p}$ no referencial $\mathcal{F}_I$.

Considerando que, $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ são pequenos e relacionando-os $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ aos mesmos termos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} &= R_I^M(x, \phi) \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_I^M(x, \phi) R_I^M(y, \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + R_I^M(x, \phi) R_I^M(x, \phi) R_I^M(y, \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

3.4. Dinâmica (corpos rígidos)

A dinâmica é a parte da mecânica clássica dedicada ao estudo do comportamento dos corpos em movimento e a ação das forças que produzem ou modificam seus movimentos. (HALLIDAY; RESNICK, 1996).

3.4.1. Equação de Coriolis

Para este desenvolvimento seguir-se-á a abordagem de ALVES (2012), com adaptações.

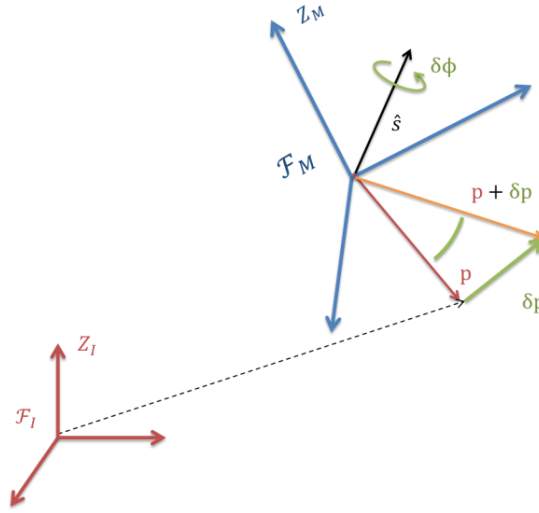


Figura 3.9 – Coriolis.

Partindo da interpretação da Figura 3.9, em que existem dois referenciais, um móvel, $\mathcal{F}_M$ e um fixo (inercial) $\mathcal{F}_I$, necessita-se da derivada temporal de $\mathbf{p}$. Para tal executa-se dois passos.

Primeiramente, assumindo que $\mathcal{F}_M$ não esteja rotacionado em relação à $\mathcal{F}_I$ conclui-se:

$$\frac{d}{dt_I} \mathbf{p} = \frac{d}{dt_M} \mathbf{p} \quad (3.26)$$

Agora assuma que $\mathbf{p}$ pertence a $\mathcal{F}_M$ e este esteja rotacionado em relação à $\mathcal{F}_I$. Uma vez que $\hat{\mathbf{s}}$ é o eixo de rotação instantânea e $\delta\phi$ o ângulo de rotação no sentido anti-horário, aplica-se mais uma vez a fórmula de rotação (3.11) obtendo:

$$\mathbf{p} + \delta\mathbf{p} = (1 - \cos(-\delta\phi))\hat{\mathbf{s}}(\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{p}) + \cos(-\delta\phi)\mathbf{p} - \sin(-\delta\phi)\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{p} \quad (3.27)$$

Aplicando uma aproximação para pequenos ângulos, dividindo os termos por δt resulta em:

$$\frac{\delta\mathbf{p}}{\delta t} \cong \frac{\delta\phi}{\delta t}\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{p} \quad (3.28)$$

Aplicando o limite $\delta t \rightarrow 0$ e substituindo a velocidade angular entre os referenciais móvel e fixo como $\omega_{M/I}$ em $\hat{\mathbf{s}}\dot{\phi}$ implica em:

$$\frac{d}{dt_I}\mathbf{p} = \omega_{M/I} \times \mathbf{p} \quad (3.29)$$

Substituindo (3.26) em (3.29) resulta em:

$$\frac{d}{dt_I}\mathbf{p} = \frac{d}{dt_M}\mathbf{p} + \omega_{M/I} \times \mathbf{p} \quad (3.30)$$

Concluindo-se assim a equação de Coriolis.

3.4.2. Modelo de dinâmica

Considere que $\mathbf{v}$ é a velocidade do quadrrorotor, $\mathbf{m}$ sua massa e $\mathbf{f}$ a força resultante aplicada a ele. A lei newtoniana que rege o movimento translacional será:

$$\mathbf{m} \frac{d\mathbf{v}}{dt_I} = \mathbf{f} \quad (3.31)$$

Neste ponto aplicando a equação de Coriolis (3.30), teremos:

$$\mathbf{m} \frac{d\mathbf{v}}{dt_I} = \mathbf{m} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt_M} + \omega_{M/I} \times \mathbf{v}_m \right) = \mathbf{f} \quad (3.32)$$

sendo $\boldsymbol{\omega}_{M/I} \triangleq (p, q, r)^T$ a velocidade angular da aeronave em relação ao referencial inercial é $\mathbf{v}_m \triangleq (u, v, w)^T$. Uma vez que $\mathbf{f} \triangleq (f_x, f_y, f_z)^T$ é a decomposição da força nos eixos, então podemos exprimir (3.32) como:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - rv \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Para a dinâmica rotacional, seguindo a mesma estratégia, partindo da mecânica clássica newtoniana:

$$\frac{d\mathbf{h}^M}{dt_I} = \mathbf{T} \quad (3.34)$$

em que $\mathbf{h}^M$ representa o momento angular da aeronave e $\mathbf{T}$ o torque. Mais uma vez aplicando a derivação de Coriolis teremos:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt_I} = \frac{d\mathbf{h}}{dt_M} + \boldsymbol{\omega}_{M/I} \times \mathbf{h} = \mathbf{T} \quad (3.35)$$

Em seguida deve-se exprimir a equação (3.35) sobre o referencial móvel, o que faz sentido devido a instrumentação estar embarcada. Para isso usaremos: $\mathbf{h}^M = J\boldsymbol{\omega}_{M/I}$, sendo J a matriz de tensor de inércias:

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.36)$$

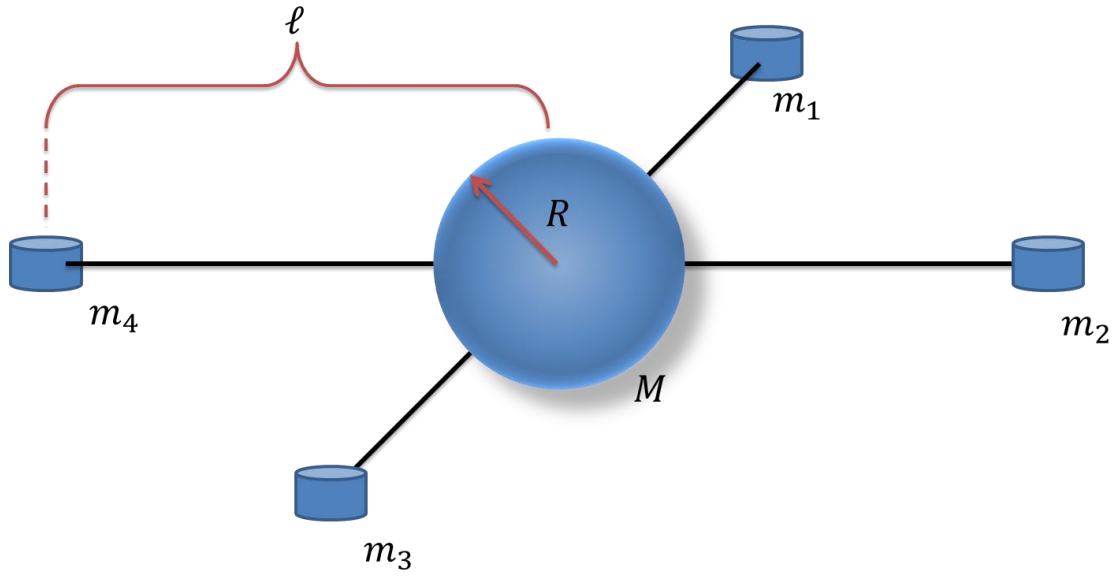


Figura 3.10 – Momentos de inercia de quadricopter.

Observando o esquema ilustrado na Figura 3.10, em que a massa central M é considerada como uma esfera maciça de raio R , equidistante em ℓ das massas, idênticas, de cada rotor m_n , percebe-se que o quadricopter possui simetrias que simplificaram $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$, resultando em:

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

De acordo com HALLIDAY & RESNICK (1996), a inercia de uma esfera maciça é $J = 2MR^2/5$, e cada parcela acrescida do momento das massas menores. Sendo assim resulta em:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{2MR^2}{5} + 2\ell m_n \\ J_y &= \frac{2MR^2}{5} + 2\ell m_n \\ J_z &= \frac{2MR^2}{5} + 4\ell m_n \end{aligned} \quad (3.38)$$

Uma vez que os momentos no referencial móvel $\mathbf{T}^M$ é o vetor $(\tau_\phi \quad \tau_\theta \quad \tau_\psi)^T$ e $\mathbf{h}^M = (p \quad q \quad r)^T$, continuando o tratamento da equação (3.35) para o referencial móvel:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} \right] \quad (3.39)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Sendo assim finaliza-se a obtenção dos modelos para os seis graus de liberdade do quadrirrotor com as equações cinemáticas de $(\dot{\mathbf{p}}_n \ \dot{\mathbf{p}}_e \ \dot{\mathbf{h}})^T$ e $(\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi})^T$ dadas pelas equações (3.22) e (3.25), e o modelos dinâmicos para $(\dot{\mathbf{u}} \ \dot{\mathbf{v}} \ \dot{\mathbf{w}})^T$ e $(\dot{p} \ \dot{q} \ \dot{r})^T$ expressos por (3.33) e (3.40).

3.4.3. Forças e momentos

Esta seção descreve as análises das forças que regem a dinâmica da aeronave, ou seja, relaciona os torques dos motores com os empuxos gerados pelos quatro rotores, em oposição a gravidade, que são os únicos responsáveis pelo comportamento de voo, uma vez que o veículo é desprovido de sustentação aerodinâmica de asas fixas, resistência aerodinâmica ou mecanismo de flutuação.

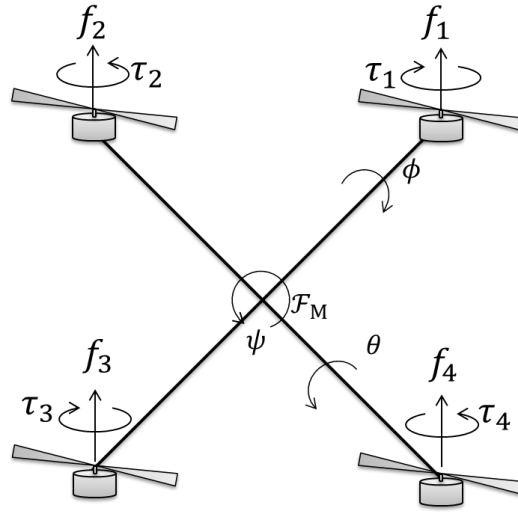


Figura 3.11 – Diagrama de forças e momentos.

Na Figura 3.11, os momentos τ_1 e τ_3 são horários e τ_2 e τ_4 anti-horários. Cada motor produz uma força de empuxo f . As diferentes combinações de intensidades das forças de empuxo são responsáveis pelo controle da aeronave. Cada motor produz uma força, que somadas resulta no total de forças agindo sobre o quadricóptero.

$$f_T = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \quad (3.41)$$

Configurações de intensidades diferentes em rotores opostos, resultam em um torque sobre a estrutura. Com a equação:

$$\tau_\theta = \ell(f_1 - f_3) \quad (3.42)$$

encontra-se o torque de arfagem, ou inclinação do corpo ou “frente” do VANT. E com a equação:

$$\tau_\phi = \ell(f_2 - f_4) \quad (3.43)$$

o torque de rolagem, ou inclinação lateral, ambos em função de fator ℓ ou comprimento. Por último tem-se o torque sobre o eixo z da estrutura ou guinada, mantendo se a sustentação alterando o momento de toda estrutura, rotação sobre o eixo vertical, calculado pela equação:

$$\tau_\psi = \tau_1 + \tau_3 - \tau_2 - \tau_4 \quad (3.44)$$

São necessários dois fatores de conversão, que relacionem o sinal de comando eletrônico PWM (do inglês *Pulse Width Modulation*) com as forças que atuam na aeronave:

$$f_n = k_f \delta_n \quad (3.45)$$

$$\tau_n = k_t \delta_n \quad (3.46)$$

sendo k_f e k_t as constantes de projeto, que devem ser obtidas experimentalmente (veja seção 3.1.41) e δ_n expressa a modulação por largura de pulso (PWM) de controle do motor com $1 \leq n \leq 4$.

Na forma matricial, os torques e as forças, no quadrirrotor, (3.41) até (3.50), podem ser expressos como:

$$\begin{pmatrix} f_T \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_f & k_f & k_f & k_f \\ 0 & -\ell k_f & 0 & \ell k_f \\ \ell k_f & 0 & -\ell k_f & 0 \\ -k_t & k_t & -k_t & k_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} \triangleq \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Agregando a ação de controle, que será desenvolvida no Capítulo 4, ou o vetor de comandos PWM que ditará os torques e forças, isolamos δ_n invertendo $\mathcal{M}$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} f_T \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{k_f} & 0 & \frac{2}{\ell k_f} & -\frac{1}{k_t} \\ \frac{1}{k_f} & -\frac{2}{\ell k_f} & 0 & \frac{1}{k_t} \\ \frac{1}{k_f} & 0 & -\frac{2}{\ell k_f} & -\frac{1}{k_t} \\ \frac{1}{k_f} & \frac{2}{\ell k_f} & 0 & \frac{1}{k_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Neste ponto incorpora-se a ação da gravidade em (3.33), que atua no centro de massa do corpo do quadrirrotor, com a constante $\mathbf{g}$ sendo representado por:

$$f_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Convertendo para o referencial móvel, com o auxílio da matriz de rotação completa, esta força torna-se:

$$f_g = R_I^M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \sen \theta \\ -mg \cos \theta \sen \phi \\ mg \cos \theta \sen \phi \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Combinando o resultado da equação (3.50) com (3.33) tem-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - rv \\ qu - pv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mg \sen \theta \\ -mg \cos \theta \sen \phi \\ mg \cos \theta \sen \phi \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

3.5. Simplificação de modelos

Resumindo, até o momento tem-se quatro equações de três dimensões: posição linear (3.22), posição angular (3.25), velocidade linear (3.51) e velocidade angular (3.40). Agora realizar-se-á algumas considerações com o objetivo de simplificar algumas parcelas desprezíveis dos modelos. Inicialmente, considerando em (3.22) que o ângulo de guinada $\psi = 0$, torna-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sen \theta \sen \phi & \sen \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sen \phi \\ -\sen \theta & \cos \theta \sen \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Considerando que os ângulos ϕ , θ e ψ são muito pequenos na equação (3.25) que passa a ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Também se admitindo que os termos qr , pr e pq na equação (3.25) sejam irrisórios, esta pode ser simplificada para:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Associando (3.53) e (3.54) resulta-se em:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Derivando e desprezando a derivada da matriz de rotação modificada, (3.52) torna-se:

$$\begin{pmatrix} \ddot{p}_n \\ \ddot{p}_e \\ \ddot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

E por último, ignorando os termos de Coriolis de (3.25) e combinando em (3.56), simplificando obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \ddot{p}_n \\ \ddot{p}_e \\ \ddot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \\ -\cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \frac{f_T}{m} \quad (3.57)$$

Concluindo as simplificações, obtém-se as equações simplificadas, para controle posicional:

$$\ddot{p}_n = -\cos \phi \sin \theta \frac{f_T}{m} \quad (3.58)$$

$$\ddot{p}_e = \sin \phi \frac{f_T}{m} \quad (3.59)$$

$$\ddot{h} = g - \cos \phi \cos \theta \frac{f_T}{m} \quad (3.60)$$

e para o controle de atitude:

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{J_x} \tau_\phi \quad (3.61)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_y} \tau_\theta \quad (3.62)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{J_z} \tau_\psi \quad (3.63)$$

3.6. Conclusão

A modelagem matemática apresentada neste capítulo será utilizada no Capítulo 5 para simulação do sistema de controle proposto, no ambiente Simulink® para MATLAB®, e para obtenção dos parâmetros ótimos do controlador por meio de uma técnica de otimização. O próximo capítulo apresenta o detalhamento dos componentes que irão compor o quadrrirrotor e a determinação dos valores dos parâmetros do modelo descrito.

4 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

Este capítulo é baseado nos trabalhos de OLIVEIRA (2014), AVECILLAS (2014), OLIVEIRA & FERNANDES (2016), além de contribuições dos manuais de diversos fabricantes e dados de fornecedores. Aqui encontra-se o detalhamento dos componentes, métodos de seleção de atributos e procedimentos para identificação de grandezas para aplicação nos modelos obtidos no capítulo anterior.

4.1. Seleção dos elementos do protótipo de quadrirrotor

4.1.1. Microcontrolador

Buscou-se trabalhar com *hardware* de código aberto (do inglês *open source*), pela facilidade de aquisição e custo baixo. Com base nesta filosofia, adotou-se a plataforma Arduino®, muito difundida no meio acadêmico e com material de suporte disponibilizado por uma grande comunidade de entusiastas, estudantes e professores.

4.1.2. Bateria

A bateria é um dos elementos primordiais do projeto por ser o componente responsável pela maior parte da massa da aeronave. Tem principal influência na autonomia de voo, devendo sempre atender às especificações do conjunto motor e controle eletrônico de velocidade (ESC, do inglês *Electronic Speed Control*). Atualmente as mais apropriadas são as baterias de Lítio-Polímero (LiPo), compostas por um conjunto de células individuais com 3,7V, que possuem alto rendimento, recomendada para quadrirrotores. Essas baterias não possuem efeito memória, que é a redução da sua capacidade de carga ao longo dos ciclos de recarga. Apresentam entre 600 e 1000 ciclos de recarga, possuem maiores velocidades de recargas e maior densidade de energia. (HOBBIE BRASIL, 2014).

Para este projeto, foi adquirida uma bateria da Turnigy, modelo 2200mAh 3S/11,1V, ou seja, de três células (3S), totalizando 11,1V, dentro do suportado pelo conjunto ESC e motor que é apresentada em detalhe na Figura 4.1.



Figura 4.1 – Bateria.

4.1.3. Controladores de velocidade

O controle de velocidade eletrônico ESC é um circuito eletrônico responsável por controle de potência. O ESC adotado é composto por três conjuntos de MOSFET (do inglês *Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor*), dois por fase, e um microcontrolador dedicado, sendo o elemento intermediário entre a bateria e o motor, geralmente um motor *brushless*. Com base em um sinal de PWM (do inglês *Pulse Width Modulation*), o ESC fornece sinais trifásicos, sendo cada fase (A, B, C) uma função aproximadamente senoidal, com defasagem de 120° entre elas, conforme a Figura 4.2, para alimentação dos enrolamentos dos motores *brushless*.

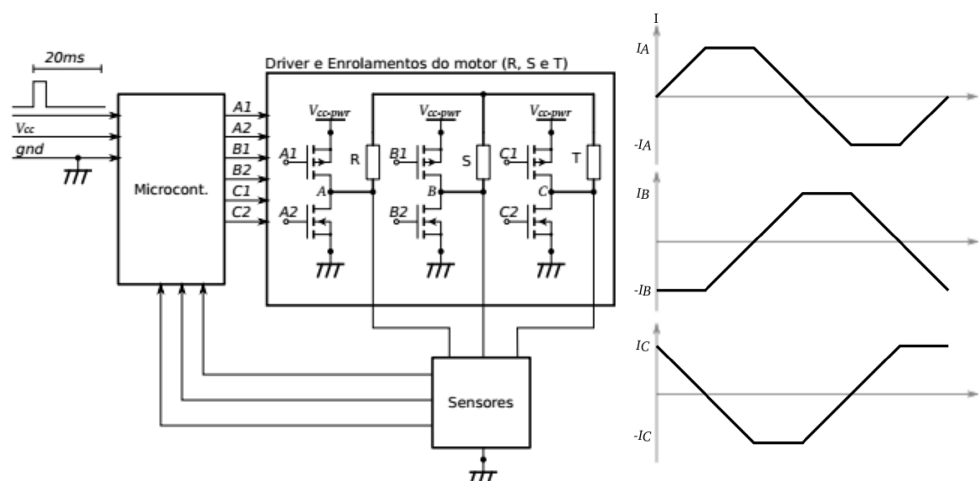


Figura 4.2 – Formas de onda geradas pelo ESC.

Fonte: MELO, 2010 (adaptado).

Usou-se 2 ESC da fabricante SimonK, modelo 30A, que possui capacidade de saída de 30A contínuo e entrada de 5,6V a 16,8V. Suporta baterias: 2-4 células de íon-lítio ou 5-12 células de NiCd (Níquel Cádmio) / NiMH (Níquel Metal Hidreto). Este modelo possui um eliminador de bateria (BEC, do inglês *battery eliminator circuit*) que permite a mesma bateria alimentar os motores, com tensão maior, e os circuitos eletrônicos, com tensão inferior: 2A/5V. O tamanho desta ESC é 5,7x2,5x0,8 cm.

4.1.4. Motor DC *Brushless*

Os motores DC brushless são motores elétricos síncronos alimentados através de corrente contínua normalmente de baixa tensão. Devido à ausência do componente mecânico (escovas), tem-se maior vida útil do motor pelo fato de, praticamente, não existir atrito, que nos motores convencionais de corrente contínua são responsáveis pela comutação da corrente elétrica e, consequentemente, inversão dos polos norte e sul. Nestes motores, os polos são distribuídos e acionados por sinais defasados de 120 graus, e a corrente é induzida por efeito eletromagnético. Porém, para os motores DC *brushless* é necessário um controle de velocidade por circuitos eletrônicos mais complexo, como os disponíveis nos dispositivos ESC, em sua

grande maioria retroalimentada por efeito de campo ou sensores magnéticos, conforme apresentado na Figura 4.3, em detalhes seus enrolamentos (A, B, C).

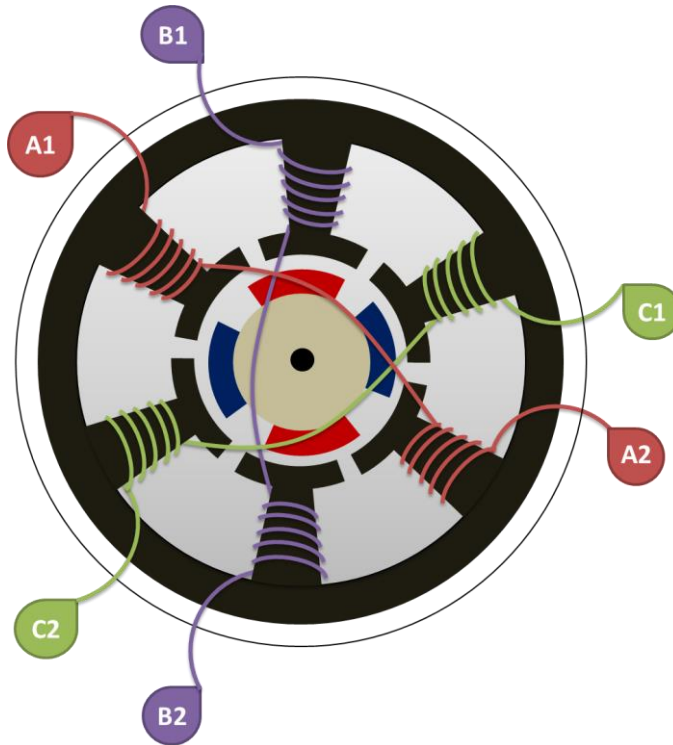


Figura 4.3 – Motor *Brushless*.

O motor selecionado foi o *Brushless* A2212 - 1000KV (mil RPM por volt) de corrente máxima de 12A, corrente sem carga de 0.5A (10V) e suportando 2-3 células de bateria LiPo (Lítio Polímero). As demais características deste motor são:

- Dimensões: 27,5 x 30,0 mm
- Diâmetro do eixo: 3,17 mm
- Peso: 47g.

4.1.5. Propulsores

O elemento de propulsão ou gerador de torque e empuxo (sustentação aerodinâmica) é a hélice. Para seleção deste componente há diversas estratégias numéricas ou experimentais.

Seus atributos devem ser adequados de acordo com o torque e rotação por minuto fornecido pelo motor, para um melhor aproveitamento da energia e eficiência da aeronave.

Existem dois tipos de hélices, a de movimento de sentido horário e a de anti-horário. As hélices possuem três parâmetros de seleção: número de pás, comumente duas ou três; diâmetros externo e interno, para fixação, e ângulo de passo (ou ângulo de ataque), ilustrado na Figura 4.4.

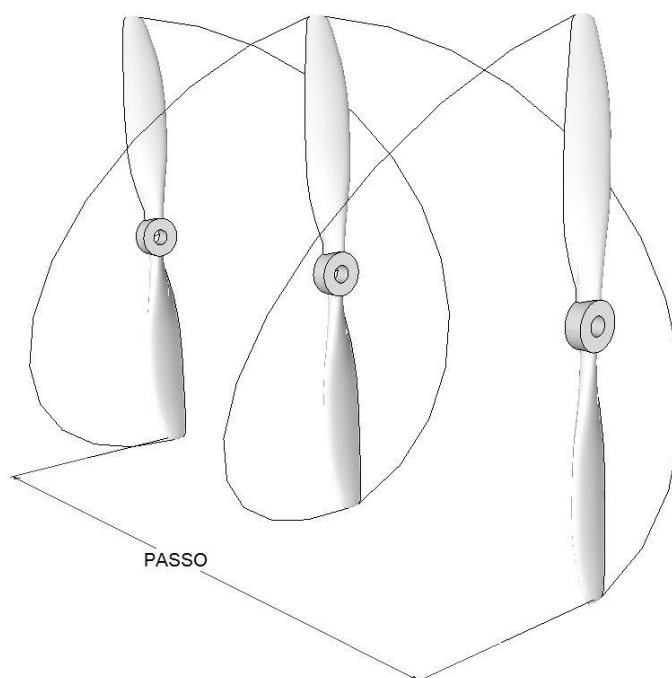


Figura 4.4 – Passo de hélice.
Fonte: Adaptado de ROBOTSHOP, 2017.

Foi utilizado o PropCalc 3.0 (SCHENK, 2017), software livre para cálculo de desempenho de hélices com uma dada geometria. Com esse software é possível simular o propulsor que garante maior eficiência com rotação de aproximadamente 7.400 rpm, ou seja 50% da rotação máxima fornecida pelo motor (14.800 rpm). O resultado da simulação via software PropCalc é apresentado na Figura 4.5, sendo o empuxo (Thrust) em Newtons (N), a potência (P) em Watts (W) e a eficiência (Eta), todas as variáveis em função da velocidade.

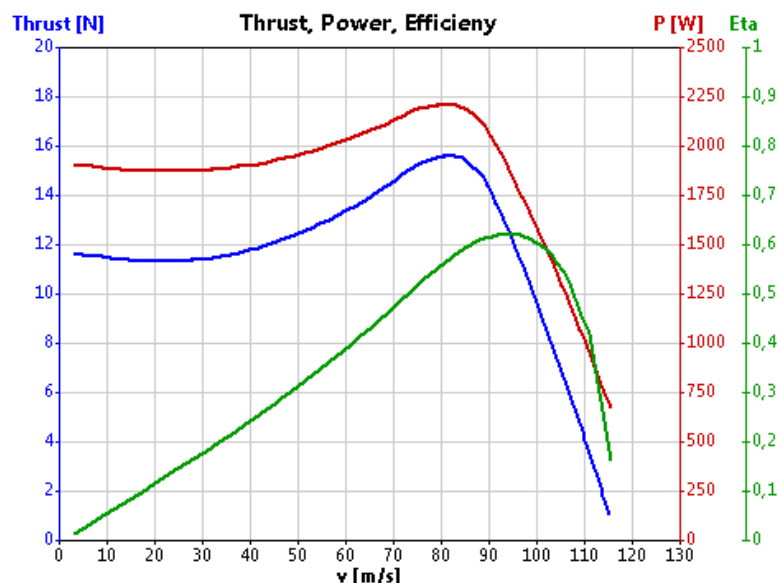


Figura 4.5 – Eficiência do propulsor.

Foi avaliado diferentes geometrias comerciais comumente utilizadas e verificado o torque fornecido, pelo conjunto, para ser no mínimo duas vezes o necessário para sustentar a planta. Adotou-se, conforme os resultados, hélices de sentido horário e anti-horário de dimensões 10"x4.5", ou seja, 25 cm de diâmetro e 11,25 cm de passo ou ângulo de ataque.

4.1.6. Sensores

Nesta seção são descritos os sensores utilizados no protótipo de quadricóptero construído. Os sensores são elementos essenciais para eficiência do sistema de controle.

4.1.6.1. Acelerômetro

Um acelerômetro é um dispositivo que mede a aceleração própria, isto é, a aceleração relativa a outro sistema em queda livre. O acelerômetro mede a aceleração associada ao fenômeno de peso/deslocamento experimentado por qualquer massa de teste em repouso, ou não, no sistema de coordenadas de referência espacial do dispositivo. A Figura 4.6 ilustra essa massa de teste em repouso (A), e (B) sofrendo aceleração. É possível detectar a posição angular,

indiretamente pela decomposição trigonométrica, com três acelerômetros ortogonais entre si. Esta abordagem é muito sensível a vibrações, gerando resultados ruidosos, o que é algo extremamente prejudicial para técnicas de controle, em especial para mecanismos muito sensíveis ou que requerem alta precisão como os quadrrrotores.

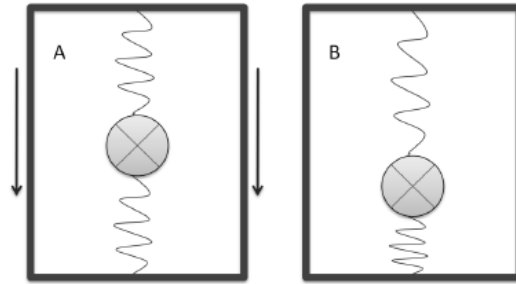


Figura 4.6 – Acelerômetro.
Fonte: VIEIRA, 2011.

4.1.6.2. *Giroscópio*

O giroscópio mede a velocidade angular. Um giroscópio convencional, é um mecanismo composto por um rotor de massa conhecida, que gira sobre um eixo montado no interior ou um cardam, ou anel livre, com sensores de deslocamento. Já o funcionamento de um giroscópio MEMS, baseia-se no fenômeno de vibração piezo elétrico dos materiais. A Figura 4.7 apresenta os dois estágios desse princípio, estável (A) e sob deslocamento (B). É possível determinar a posição angular de corpos através da integração numérica da velocidade angular medida, em três eixos. Esta técnica é mais precisa, porém apresenta acúmulo de erro ao longo do tempo.

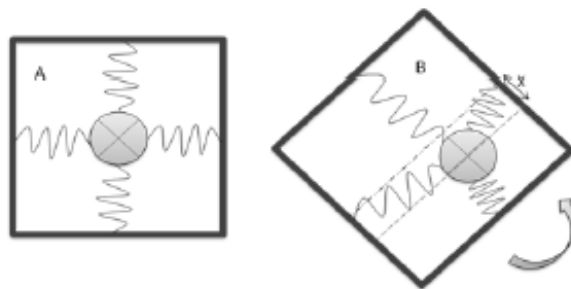


Figura 4.7 – Giroscópio.
Fonte: VIEIRA, 2011.

4.1.6.3. Unidade de medição inercial

A unidade de medição inercial (IMU, do inglês *Inertial Measurement Unit*) é um conjunto de sensores que registram as grandezas de aceleração linear e de orientação (velocidade angular), com base nos fenômenos físicos como as forças gravitacionais e inerciais da matéria. A IMU, como a apresentada na Figura 4.8, é um sistema microeletromecânico (MEMS, do inglês *Microelectromechanical systems*). MEMS é uma tecnologia de manufatura da microeletrônica desenvolvido em 1967, fruto da combinação de conceitos da microeletrônica, engenharia mecânica, ciência dos materiais, física e química. Sensores MEMS são transdutores de escala micrométrica, responsáveis pela conversão de uma forma de energia em outra, sendo uma de suas aplicações em sensores para VANTs, embarcações, aeronaves, naves espaciais, braços robóticos, satélites e sondas.

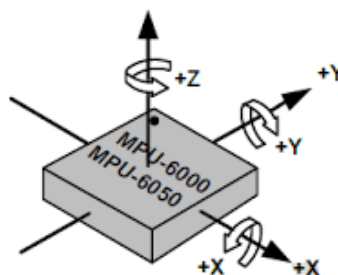


Figura 4.8 – Eixos e seus graus de liberdade monitorados.

Fonte: INVENSENSE, 2013.

A IMU utilizada é o circuito integrado MPU-6050, da InvenSense, apresentada na Figura 4.9. Esta IMU apresenta um giroscópio de três eixos (x, y, z) e um acelerômetro de três eixos (x, y, z), totalizando 6 graus de liberdade (DOF, do inglês *Degrees of Freedom*).

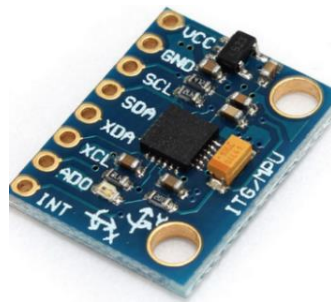


Figura 4.9 – IMU proposta para o trabalho
Fonte: INVENSENSE, 2013.

As características básicas da MPU-6050, retiradas de sua folha de dados, são:

- Sensibilidade do giroscópio: 131 LSB/°/s;
- Sensibilidade do acelerômetro: 16384 LSB/g;
- Escala completa do giroscópio: ± 250 °/s;
- Escala completa do acelerômetro: ± 2 g.

sendo que LSB significa variação do *bit* menos significativo, do inglês, *Least Significant Bit*.

O circuito permite ser configurado em quatro faixas de sensibilidade. A comunicação é feita via padrão dois fios I²C (do inglês, *Inter-Integrated Circuit*).

4.1.7. Comunicação

Comumente a comunicação entre o operador e a aeronave é feita por rádio controle. Neste projeto não é necessário pois será usada a própria interface do computador (MATLAB®) como seletor de comando e a comunicação será por cabo. Nessa seção é apresentada uma breve descrição do mesmo. Para ilustração temos na Figura 4.10 a aparência de um modelo padrão.



Figura 4.10 – Rádio
Fonte: OLIVEIRA, 2014.

Tipicamente opera-se com uma onda portadora na faixa de 2.4 Ghz de modulação FM, com alcance de pouco mais que um quilômetro. Estes equipamentos possuem no mínimo quatro canais, que são utilizados, para os comandos: Aceleração (*Throttle*), Arfagem (*Pitch*), Rolagem (*Roll*) e Guinada (*Yaw*). A Figura 4.11, apresenta um sinal de envio de um equipamento de seis canais, multiplexado pelo transmissor em uma única onda, com período de 20ms e são demultiplexados no receptor, em seis canais de 2ms cada.

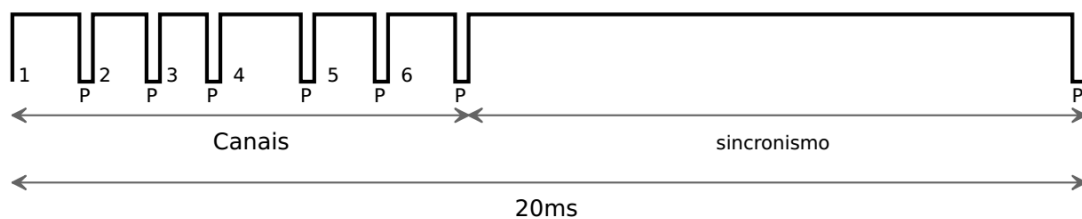


Figura 4.11 – Canais de rádio
Fonte: VIEIRA, 2011.

Para o controle completo de todos os graus liberdade do quadrrorotor é necessário o uso de quatro canais para cada ação: aceleração, guinada, arfagem e rolagem.

4.1.8. Estrutura do protótipo de quadrirrotor

A estrutura física necessita ter resistência suficiente para suportar os esforços físicos de empuxo e sustentação e ser o mais leve possível. Para isso usou-se basicamente dois materiais que atendessem essas propriedades. A estrutura projetada e construída consiste de quatro barras ocas de perfil quadrado de alumínio, 12mm com 2mm de espessura, montadas entre duas placas quadradas de fibra de carbono, medindo 10cm com 1,5mm de espessura, fixadas por parafusos. O peso total da estrutura é de **293g** , ou **569 g** com motores e hélices instaladas, detalhada na Figura 4.12.



Figura 4.12 – Estrutura.

As variáveis do modelo relacionadas à estrutura: m massas das extremidades composta pelos rotores; M massa central constituída pela estrutura, placa controladora e bateria; ℓ a distância dos centros de massas; R raio aproximado da massa central, que compõem os momentos de inércia determinadas na Equação (3.38) são:

- $m = 0,069 \text{ kg};$
- $\ell = 0,28 \text{ m};$
- $M = 0,259 \text{ kg};$
- $R = 0,07 \text{ m};$

Resultando nos momentos

$$J_x = J_y = \frac{2MR^2}{5} + 2\ell^2m = 0,0119 \text{ kg.m}^2$$
$$J_z = \frac{2MR^2}{5} + 4\ell^2m = 0,0230 \text{ kg.m}^2$$
(4.1)

A Figura 4.13 apresenta a imagem completa do protótipo.

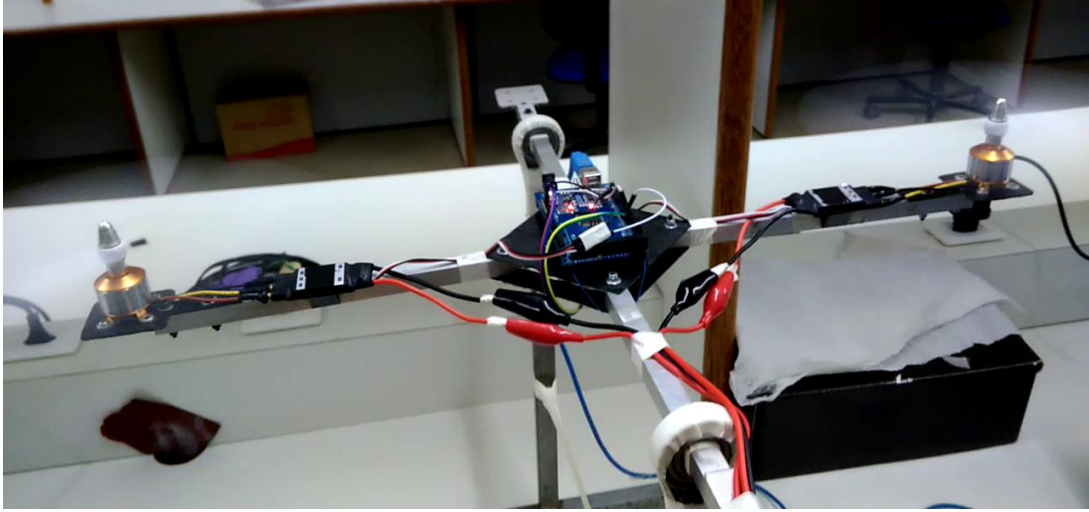


Figura 4.13 – Montagem final.

4.1.9. Constantes de empuxo e torque

Foram realizados testes de bancada para determinação das constantes do modelo.

4.1.9.1. *Empuxo do rotor.*

Para determinar o ganho dos motores em relação a ação de controle e sua resposta para o empuxo, executou o experimento auxiliado por uma balança, coletando amostras das respostas dos sinais de comando, conforme apresentado na Figura 4.14.



Figura 4.14 – Teste de propulsor empuxo.

Os dados, obtidos experimentalmente, de valores de empuxo e intervalo de pulso do sinal de controle (PWM), foram plotados no MATLAB® e a curva foi aproximada por uma linha reta, por meio do método de mínimos quadrados, como mostrado na Figura 4.15.

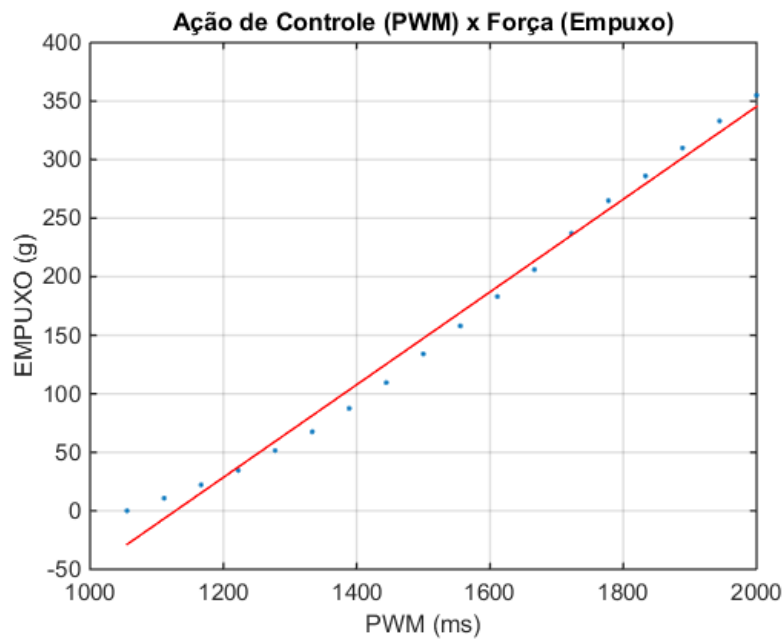


Figura 4.15 – Resultado de propulsor empuxo

Com base na aproximação linear apresentada na Figura 4.15, o ganho k_f é determinado pela seguinte expressão:

$$k_f = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{355}{944,4444} = 0,3759 \quad (4.2)$$

O empuxo total encontrado durante os experimentos é o somatório dos empuxos dos quatro rotores, $F = 1,340\text{ g}$, e o intervalo do sinal de controle (PWM) varia de $1000\mu s$ a $2000\mu s$

4.1.9.2. Conjugado do rotor

Para a determinação da constante k_t , é realizado um experimento análogo e os resultados obtidos são apresentados na Figura 4.16.

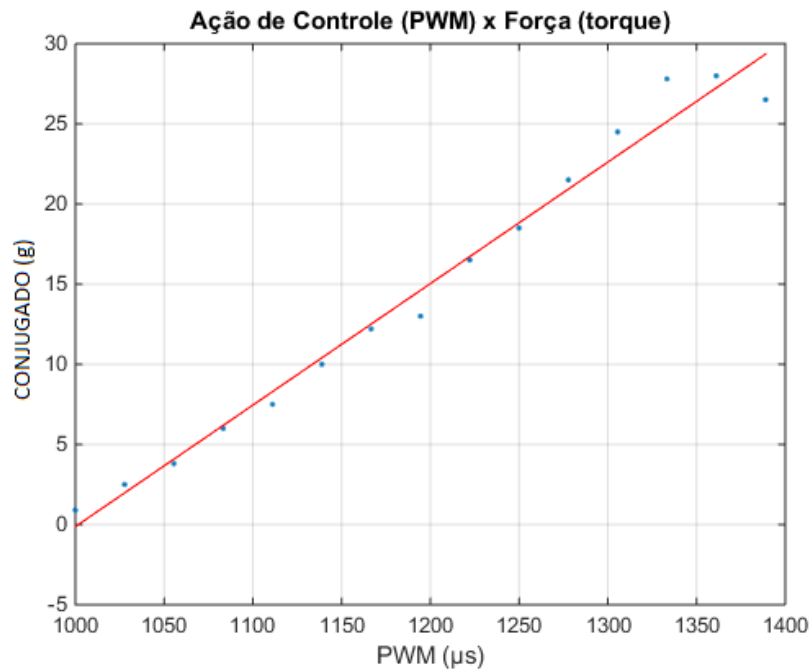


Figura 4.16 – Teste de propulsor torque.

Com base na aproximação linear dos resultados é obtido:

$$k_t = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{29,4750}{388,8889} = 0,0758 \quad (4.3)$$

4.1.10. Placa processadora

Os *hardwares* selecionados para o experimento são: i) uma placa micro controladora Arduino® Mega Rev3 (ARDUINO, 2016), que trabalha com uma tensão de 5v, alimentação entre 7-12V, consumo de 20 a 50 mA, operando com 8 bits a uma velocidade de 16 MHz, 26

pinos de I/O, dotada de um micro controlador Atmega2560 de fabricação da Atmel, e ii) um circuito integrado MPU-6050, dotado de um giroscópio de três eixos, um acelerômetro de três eixos e um termômetro digital (INVESENSE, 2012). Algumas propriedades da placa Arduino® são apresentadas na Tabela 4.1. A placa é responsável por realizar as leituras do sensor MPU-6050 e fazer a comunicação por porta serial com o microcomputador. Os resultados gráficos são obtidos na plataforma MATLAB®. É importante definir a taxa de comunicação do microcontrolador com o microcomputador para ser compatível com a operação do sensor IMU, com o próprio controlador e todos os *softwares* e para garantir menor interferência na comunicação serial. Recomenda-se o uso de um cabo USB (do inglês, *Universal Serial Bus*) com isolamento (blindagem). É necessária alimentação CC estável para os circuitos.

Tabela 4.1– Propriedades Arduino®.

Microcontrolador	ATmega2560
Tensão de operação	5V
Tensão de entrada (recomendada)	7-12V
Tensão de entrada (limite)	6-20V
Pinos digitais de I/O	54 (dos quais 14 podem ser saídas PWM)
Pinos I/O digitais PWM	14
Pinos de entrada analógicos	16
Corrente DC por pino de I/O	40 mA
Corrente DC por pino 3.3V	50 mA
Memória <i>Flash</i>	256KB (ATmega2560) 4 KB usado no <i>bootloader</i>
SRAM	8 KB (ATmega2560)
EEPROM	4 KB (ATmega2560)
Frequência de <i>Clock</i>	16 MHz
Comprimento	101,6mm
Largura	53,4mm
Peso	150 g

Fonte: ARDUINO®, 2017. (traduzido)

4.2. Conclusão

Todos os componentes necessários para montagem do protótipo do quadrirrotor foram descritos e estudados neste capítulo. Foram apresentados os métodos de seleção e identificação de seus parâmetros. Esses parâmetros irão ser utilizados nos modelos estudados no Capítulo 3 os quais serão posteriormente empregados no Capítulo 5, para projeto do sistema de controle, e no Capítulo 6, para simulação do sistema.

5 PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE

5.1. Introdução

Os projetos de sistemas de controle de multirrotores são divididos em dois grupos, controle de atitude, ou estabilização, ligados aos estados da matriz de ângulos $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$, e o projeto de posição relativa $\xi = [x \ y \ z]^T$, este último é ocasionalmente subdividido em um terceiro exclusivamente para a altitude, como explicado por GRAND et al., (2007).

5.2. Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman é uma técnica bastante utilizada quando se deseja atenuar o efeito de ruídos de medição via software, entre outras possibilidades. Este método foi proposto por Rudolf Kalman em 1958, e tem por objetivo “utilizar medições de grandezas realizadas ao longo do tempo (contaminadas com ruído e outras incertezas) e gerar resultados que tendam a se aproximar dos valores reais das grandezas medidas” (BISHOP & WELCH, 2001).

O filtro de Kalman é recursivo preditivo para medidas ruidosas. Uma das aplicações do filtro de Kalman é a normalização, ou combinação ponderada, para fusão sensorial (SABATELLI et al., 2012). Largamente aplicado em diversas áreas da engenharia, o filtro de Kalman é capaz de produzir uma estimativa muito próxima do estado do sistema, para isso é necessário conhecer o modelo do sistema (equação de estado), a função de medição e os termos de ruídos contidos nestas equações (ABBEEL et al., 2005).

A aplicação que será abordada ao longo deste trabalho se dará sobre a fusão de sensores de uma unidade de medida inercial (IMU) composta por giroscópios e acelerômetros.

5.2.1. Problema de medição angular

É difícil de realizar uma medição angular precisa empregando somente o acelerômetro ou o giroscópio individualmente. O objetivo é utilizar os dados fornecidos pelo acelerômetro e pelo giroscópio em conjunto para obter uma medição angular satisfatória. São empregados os dados do acelerômetro para minimizar o erro que o giroscópio apresenta devido aos erros de deslizamento (*drift*), e os dados do giroscópio para minimizar o erro em regime quando o acelerômetro está deslocado do centro de rotação. É também necessário atenuar os ruídos gerados pela dinâmica característica do acelerômetro. Este trabalho propõe a realização da fusão dos sensores, através do algoritmo de filtro de Kalman, para eliminar os ruídos e assim garantir uma medida angular adequada.

5.2.2. Fusão de sensores

A solução para o problema de medição de ângulo de atitude a partir do giroscópio e do acelerômetro é a combinação das faixas de precisão de ambos sensores a fim de um contornar a imprecisão do outro, para obter os ângulos de rotações, ângulos *yaw* (guinada), *pitch* (arfagem) e *roll* (rolagem), da estrutura, objeto ou aeronave. O giroscópio é responsável pela medição precisa da variação do ângulo (comportamento de alta frequência) e o acelerômetro é responsável pela eliminação do erro de medição angular em regime estacionário (baixa frequência). A Figura 5.1 apresenta um modelo esquemático para uma aplicação simplificada do filtro de Kalman para fusão de dois sensores (RAOL, 2009).

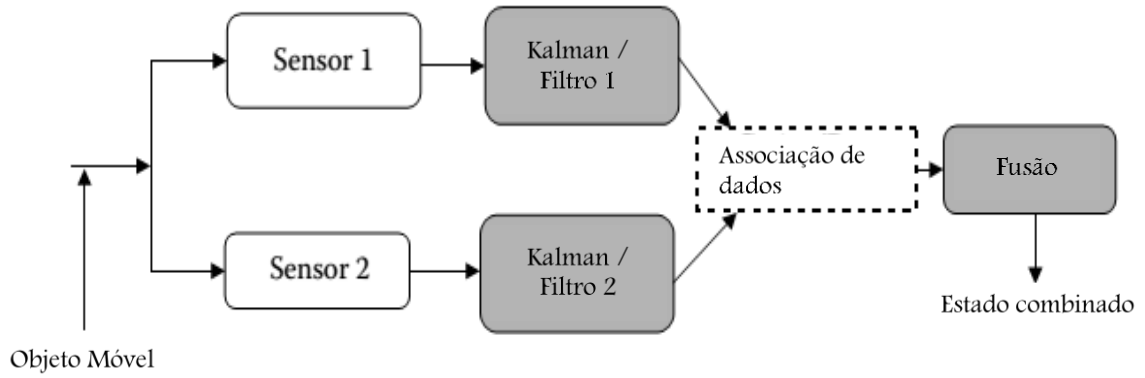


Figura 5.1 – Conceito de fusão sensorial.
 Fonte: RAOL, 2009 (adaptado).

5.2.3. Abordagens de calibração

Comumente os sensores apresentam um desvio (*off-set*), que deve ser corrigido. Para isso, é necessário um procedimento de calibragem baseado em medições com o sensor estável e nivelado. Empregando as seguintes fórmulas é possível calibrar a IMU:

$$\alpha_x = \frac{\alpha_x - \alpha_{xbias}}{s} \quad (5.1)$$

$$\alpha_y = \frac{\alpha_y - \alpha_{ybias}}{s} \quad (5.2)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\phi}_n - \dot{\phi}_{bias}}{s} \Delta t \quad (5.3)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_{bias}}{s} \Delta t \quad (5.4)$$

sendo Δt o período de amostragem, s a resolução ou escala do sensor, que pode ser configurada, α_x e α_y os ângulos registrados pelo acelerômetro, sobre os vetores “x” e “y”, α_{xbias} e α_{ybias} os desvios registrados pelos vetores do acelerômetro, $\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$ são respectivamente as velocidades angulares fornecidas pelo giroscópio sobre o eixo “x” e “y”, e $\dot{\phi}_{bias}$ e $\dot{\theta}_{bias}$ os desvios.

Para determinar o ângulo adequado ao redor dos eixos “x” e “y”, a partir do acelerômetro, independentemente do sentido e intensidade da aceleração do corpo, aplicou-se a função trigonométrica do MATLAB® para cálculo da inversa da tangente em quatro quadrantes, $atan2(a,b)$, para a rolagem e arfagem:

$$\phi = atan2(\alpha_x, \alpha_y) \quad (5.5)$$

$$\theta = atan2(\alpha_y, \alpha_x) \quad (5.6)$$

Para determinar os ângulos provenientes do giroscópio deve-se fazer uma integração incremental, também subtraindo o efeito do desvio (*off-set*), para rolagem e arfagem:

$$\dot{\phi}_n = \dot{\phi}_{n-1} + \frac{\dot{\phi}_g - \dot{\phi}_{bias}}{s} \Delta t \quad (5.7)$$

$$\dot{\theta}_n = \dot{\theta}_{n-1} + \frac{\dot{\theta}_g - \dot{\theta}_{bias}}{s} \Delta t \quad (5.8)$$

Estes desvios (*bias*) são facilmente determinados realizando medições com o sensor totalmente estável, por alguns minutos, para o cálculo da média das oscilações.

Partindo de uma segunda abordagem das equações anteriores e realizando manipulações matemáticas e trigonométricas simples, combinadas a um fator de ponderação, obtém-se:

$$\hat{\theta}_k = \alpha(\hat{\theta}_{k-1} + \hat{\theta}_{g,k} \Delta t) + (1 - \alpha)\hat{\theta}_{a,k} \quad (5.9)$$

sendo $\hat{\theta}$ o ângulo estimado em função do giroscópio, $\hat{\theta}_g$, e acelerômetro, $\hat{\theta}_a$, e um coeficiente, α , de complementação da fusão (VASCONCELLOS & CATUNDA, 2013).

A Eq. (5.9) refere-se a um filtro passa alta para o giroscópio e a um filtro passa-baixa para o acelerômetro. Anulando os termos do giroscópio e discretizando a Eq. (5.9) resulta em:

$$\frac{\hat{\theta}(z)}{\hat{\theta}_a(z)} = (1 - \alpha) \left(\frac{z}{z - \alpha} \right) \quad (5.10)$$

A Eq. (5.10) equivale à uma função de transferência de filtro passa baixa com polo em α . A resposta ao degrau é $(1 - \alpha)\alpha^k u_k$, o que indica que quanto maior for α , mais rápida é a convergência da resposta ao degrau para o valor de regime. Analisando novamente Eq. (5.10), observa-se que se a velocidade angular proveniente do giroscópio é inexistente, o valor do ângulo de saída será o fornecido pelo acelerômetro, e assim anula-se o erro em regime do giroscópio (*drift*) (VASCONCELLOS & CATUNDA, 2013).

Sendo assim, as Eq. (5.9) corresponde a uma alternativa de abordagem simplificada para realizar a fusão dos dados provenientes dos sensores. Esta técnica é denominada filtro complementar. Esta abordagem possui um esforço computacional muito baixo em relação ao filtro de Kalman.

De acordo com o apresentado em ZANONI (2012), existem ao menos dois métodos de aplicação do filtro de Kalman para fusão sensorial: algoritmo de atualização de dados e algoritmo de propagação de estados. Existe o filtro clássico e o filtro completo, sendo que este último requer maior custo computacional. A partir de BISHOP & WELCH (2006), obtém-se os pares de filtro de Kalman discretos.

5.2.4. Funcionamento do filtro de Kalman

Em OLIVEIRA & FERNANDES (2016) e SABATELLI et al. (2011), é apresentado o modelo da função geral do filtro de Kalman. O filtro de Kalman consiste em duas etapas, predição e correção, baseado em técnicas recursivas do sistema representado no espaço de estados, sendo uma estimação sobre a dinâmica do sistema. Durante a primeira etapa é realizada uma predição sobre a dinâmica do modelo e no segundo passo uma correção, atuando na covariância do erro. Neste sentido, o filtro de Kalman funciona como um estimador otimizado do estado $\mathbf{x}_k$ com a medição de $\mathbf{z}_k$. Considere a representação:

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} + B\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{z}_k = H\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (5.12)$$

sendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} \Delta t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

As matrizes A e B são obtidas das propriedades construtivas do acelerômetro e podem ser obtidas com informações do fabricante. As equações de diferenças envolvem a saída real do giroscópio, θ , e o escorregamento, θ_b , em graus por segundo ($^\circ/\text{s}$) ou $\dot{\theta}_b$. Deste modo, o vetor de estados é definido como sendo $\mathbf{x}_k = [\theta \quad \dot{\theta}_b]^T$ e a entrada é uma variação real também em graus por segundo ($^\circ/\text{s}$), $\mathbf{u}_k = \dot{\theta}_k$. A matriz H é o modelo de observação. Como o estado real não pode ser medido, $\mathbf{z}_k$ é apenas uma medida real do acelerômetro, logo:

$$H = [1 \quad 0] \quad (5.16)$$

Nas Eqs. (5.11) e (5.12), $\mathbf{w}_k$ e $\mathbf{v}_k$ são variáveis independentes e aleatórias que representam o ruído do sistema e o de medição respectivamente. São consideradas como ruído branco gaussiano, sendo que $\mathbf{p}(\mathbf{w}) \sim N(\mathbf{0}, Q)$ e $\mathbf{p}(\mathbf{v}) \sim N(\mathbf{0}, R)$, em que Q é a matriz de covariância do ruído do erro do acelerômetro:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_\theta & 0 \\ 0 & Q_{\dot{\theta}_b} \end{bmatrix} \Delta t \quad (5.17)$$

e R é a matriz da medição (processo):

$$R = E[\mathbf{v}_k \quad \mathbf{v}_k^T] \quad (5.18)$$

As matrizes Q e R podem ser atualizadas a cada execução do filtro. Porém, sem prejuízo, podem ser admitas como constantes. A matriz Q pode ser obtida, na folha de dados, pelas

informações da precisão e do erro de escorregamento, $\dot{\theta}_b$, do acelerômetro multiplicando por uma taxa, Δt , resultando em Q_k . Seja $\bar{v}_k$ o erro estimado a priori e v_k o erro estimado a posteriori do passo k, e esta seja equivalente a matriz R de covariância de erro medição. A matriz R deve ser tipicamente o quadrado do desvio-padrão do acelerômetro, da folha de dados, ou pode ser determinada experimentalmente mantendo o sistema estacionário e registrando os dados por aproximadamente 5 minutos. Calculando a média e o desvio padrão, $R = 2^{std_{deviation}}$ (RAOL, 2009). Seja

$$\bar{v}_k = x_k - \bar{x}_k \quad (5.19)$$

$$v_k = x_k - \hat{x}_k \quad (5.20)$$

As variáveis $\hat{x}_{k-1|k-1}$ denotam valores do (k-1)-ésimo instante de amostragem com dados de estado estimado previamente. Variáveis $\hat{x}_{k|k-1}$, ou estado *a priori*, exprimem estados no instante de tempo “k” com base no estado prévio “k-1”. Já as notações $\hat{x}_{k|k}$ *a posteriori* explicitam estimações de estado no instante “k” com base no estado atual. De acordo com BISHOP & WELCH (2001), obtemos, durante estimação, covariância do erro a priori ou covariância de erro preditivo, $P_{k|k-1}$, e, durante a atualização, covariância do erro a posteriori ou covariância de erro corrigido, $P_{k|k}$:

$$P_{k|k-1} = E[\bar{v}_k \bar{v}_k^T] \rightarrow P_{k|k-1} = AP_{k-1|k-1}A^T + Q \quad (5.21)$$

$$P_{k|k} = E[v_k v_k^T] \rightarrow P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k H P_{k|k-1} \quad (5.22)$$

A etapa de atualização, ou correção, corresponde a:

$$K_k = P_{k|k-1} H^T (H P_{k|k-1} H^T + R)^{-1} \quad (5.23)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H \hat{x}_{k|k-1}) \quad (5.24)$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H) P_{k|k-1} \quad (5.25)$$

Sendo que o cálculo do ganho é dado pela Eq. (5.23), atualização do estado estimado pela Eq. (5.24), como uma combinação linear do estado estimado a priori, $\mathbf{x}_k$, e uma diferença ponderada entre uma medição real, $\mathbf{z}_k$, e uma previsão de medição, $H\hat{\mathbf{x}}_k$. Em seguida, a atualização do erro de covariância dado pela Eq. (5.25), fazem parte da segunda etapa do algoritmo, ou etapa de atualização. A Figura 5.2 apresenta um diagrama esquemático do funcionamento recursivo das duas etapas de execução do filtro de Kalman.

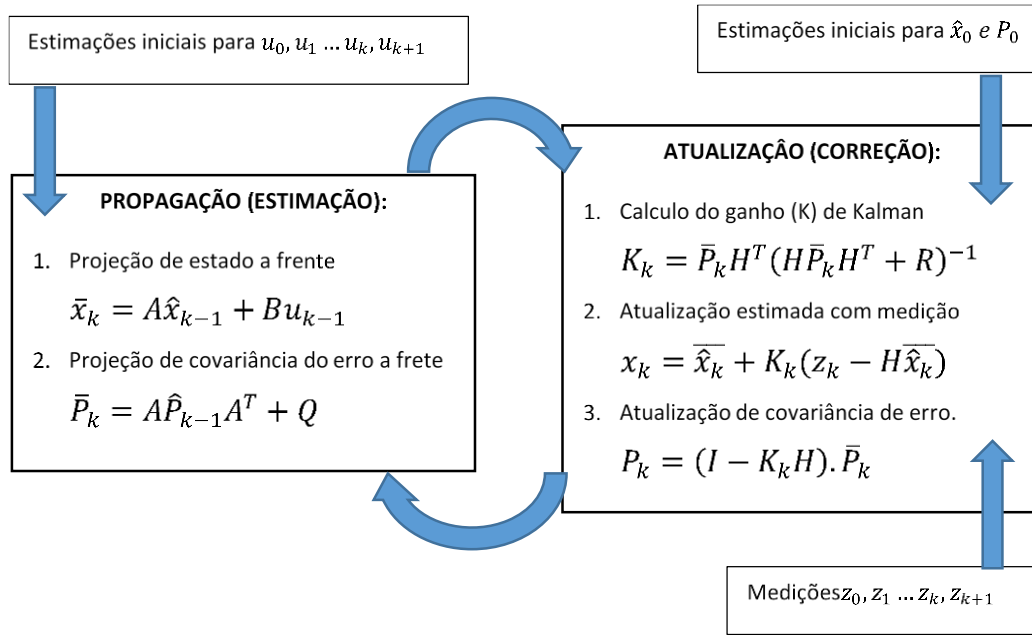


Figura 5.2 – Diagrama de funcionamento do Filtro de Kalman

Fonte: BISHOP & WELCH, 2001 (adaptado).

A Tabela 5.1 apresenta o algoritmo básico do filtro de Kalman, onde deve-se entrar com as estimações de estado inicial, covariância, controle e medição. O algoritmo retorna a nova estimatção e uma nova covariância.

Tabela 5.1 – Algoritmo básico do filtro de Kalman

Algoritmo ($\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{P}_{k-1}; \mathbf{u}_k; \mathbf{z}_k$)	
1.	$\bar{\mathbf{x}}_k = A\bar{\mathbf{x}}_{k-1} + B\mathbf{u}_k$
2.	$\bar{\mathbf{P}}_k = A\bar{\mathbf{P}}_{k-1}A^T + Q$

3.	$K_k = \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + R)^{-1}$
4.	$x_k = \bar{\hat{x}}_k + K_k (z_k - H \bar{\hat{x}}_k)$
5.	$P_k = (I - K_k H) \bar{P}_k$

Nas linhas 1 e 2 do algoritmo, a predição $\bar{\mathbf{x}}_k$ e a matriz $\bar{\mathbf{P}}_k$ são calculadas representando a predição no instante de tempo posterior, mas antes de se incorporar a medição $\mathbf{z}_k$. Esta predição é obtida incorporando-se o sinal de controle $\mathbf{u}_k$. A média é atualizada usando a versão determinística da função de transição de estados, Eq. (5.11), com a média $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ substituída pelo valor do estado $\mathbf{x}_{k-1}$. A atualização da covariância considera o fato de que os estados dependem dos estados anteriores através da matriz $\mathbf{A}_k$. Esta matriz é multiplicada duas vezes na covariância, uma vez que a covariância é uma matriz quadrática.

A predição é subsequentemente transformada na predição desejada nas linhas 4 a 6 do algoritmo, ao se incorporar a medição $\mathbf{z}_k$. A variável $\mathbf{K}_k$, computada na linha 3, é chamada de ganho de Kalman. Ele especifica o quanto que a medição será incorporada na estimativa do novo estado. A linha 4 manipula a média, ao ajustá-la em proporção ao ganho de Kalman, $\mathbf{K}_k$, e o desvio da medição atual, $\mathbf{z}_k$, e a predição da medição de acordo com a probabilidade da medição, Eq. (5.12). Finalmente, a nova covariância da predição posterior é calculada no passo 5, de acordo com informações do ganho resultantes da medição.

5.3. Teoria de estabilidade de Lyapunov

Antes de se aprofundar na técnica de controle *backstepping* (seção 5.3), é importante apresentar o teorema de estabilidade de Lyapunov. Considere o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

Os estudos de Lyapunov resultaram em dois métodos de análise de estabilidade, um através da resolução da equação diferencial (5.1) e o segundo método, ou método direto, que não necessita desta tarefa (COSTA, 2012).

Diferentemente dos métodos de análise de estabilidade que podem ser aplicados exclusivamente para sistemas lineares e invariantes no tempo, como o critério de Nyquist e o método de Routh-Hurwitz, o método da estabilidade de Lyapunov pode ser utilizado em sistemas não lineares e/ou variantes no tempo.

O teorema de Lyapunov dita: seja um sistema descrito pela equação (5.26), se existir um função escalar $V(\mathbf{x}) > 0$, *se* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, e $V(\mathbf{0}) = 0$, e se $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ for contínua e negativa, então o equilíbrio na origem é uniformemente assintoticamente estável (COSTA, 2012).

5.4. Controlador Backstepping

O controle *backstepping* é baseado em uma teoria de controle não linear desenvolvida na década de 90 por Peter V. Kokotovic, professor da Universidade da Califórnia e engenheiro sêrvio (KOKOTOVIC, 1992). Esta técnica de controle é altamente empregada em sistemas com vários graus de liberdade e poucos atuadores, em outras palavras sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *Multiple Inputs Multiple Outputs*), com mais saídas que estradas, também conhecidos como sistemas subatuados (do inglês *underactuated systems*). Aeronaves são exemplos clássicos destes tipos de sistemas e escopo para aplicação desta técnica (DAS; LEWIS; SUBBARAO, 2009). Esta técnica é desenvolvida com o auxílio da teoria de estabilidade de Lyapunov e possui algumas variações. Neste trabalho usa-se o *backstepping* de ação integral, com um integrador, eficiente em reduzir o erro de estado estacionário e robusto para rejeição de perturbações (MONTEIRO, 2015).

Considere o sistema caracterizado por:

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \quad (5.27)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (5.28)$$

sendo f e g são funções conhecidas, $[\eta^T, \xi]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ os estados do sistema e $u \in \mathbb{R}$ a entrada de controle. A Figura 5.3 representa o diagrama de blocos deste sistema.

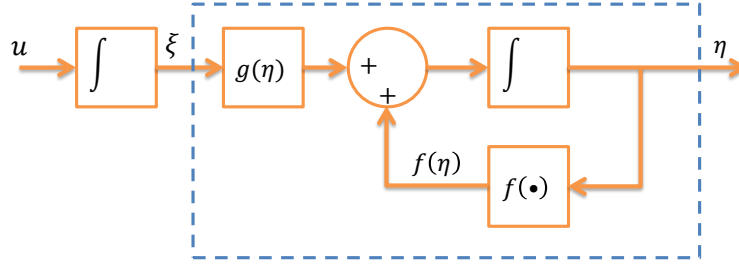


Figura 5.3 – *Backstepping* sistema original.

Supondo que é possível atingir a estabilidade assintótica do sistema cuja entrada é ξ , através da lei de controle: $\xi = \phi(\eta)$, com $\phi(0) = 0$, ou seja:

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta) \quad (5.29)$$

Somado e subtraindo $g(\eta)\phi(\eta)$ na Eq. (5.27), o sistema anterior é equivalente a:

$$\dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z \quad (5.30)$$

Sendo por definição,

$$\dot{z} = u - \dot{\phi}(\eta) = v \quad (5.31)$$

em que v é uma variável virtual adicionada. O diagrama de blocos do sistema equivalente é apresentado na Figura 5.4.

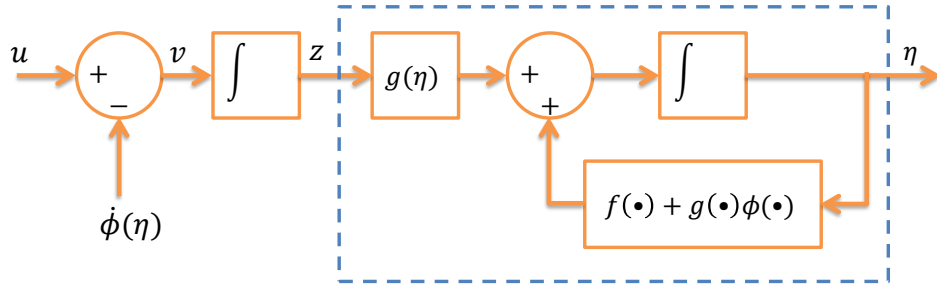


Figura 5.4 – *Backstepping* sistema equivalente.

Para assegurar a estabilidade assintótica do referido sistema, utilizando uma função candidata de Lyapunov, $V(\eta)$, conhecida, e uma função positiva, $W(\eta)$, tal que seja atendida a inequação:

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta) \quad (5.32)$$

Empregando a função candidata de Lyapunov abaixo:

$$V_c(\eta, z) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2 \quad (5.33)$$

Utilizando a Eq. (5.33) no sistema descrito pelas Eqs. (5.31) e (5.33), resultará em:

$$\dot{V}_c(\eta, z) = \dot{V}(\eta) + z\dot{z} = \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z + zv \quad (5.34)$$

Seguindo a transformação se obtém:

$$\dot{V}_c(\eta, z) = \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} g(\eta)z + zv \quad (5.35)$$

$$\dot{V}_c(\eta, z) \leq -W(\eta) + \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} g(\eta)z + zv \quad (5.36)$$

Assim utilizando a lei de controle definida por:

$$v = -\frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} g(\eta) - kz, \quad k > 0 \quad (5.37)$$

resultará em:

$$\dot{V}_c(\eta, z) \leq -W(\eta) - kz^2 \quad (5.38)$$

o que significa que o sistema é assintoticamente estável em sua origem ($\eta = 0, z = 0$). Realizando as substituições de $z = \xi - \phi(\eta)$, e v para ϕ chega-se a seguinte ação de controle por realimentação de estados:

$$u = v + \dot{\phi}(\eta) = -\frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} g(\eta) - k(\xi - \phi(\eta)) + \dot{\phi}(\eta) \quad (5.39)$$

A Figura 5.5 apresenta as transformações do sistema inicialmente abordado para o sistema com o *backstepping* de integrador, bloco integrador logo em seguida a entrada u .

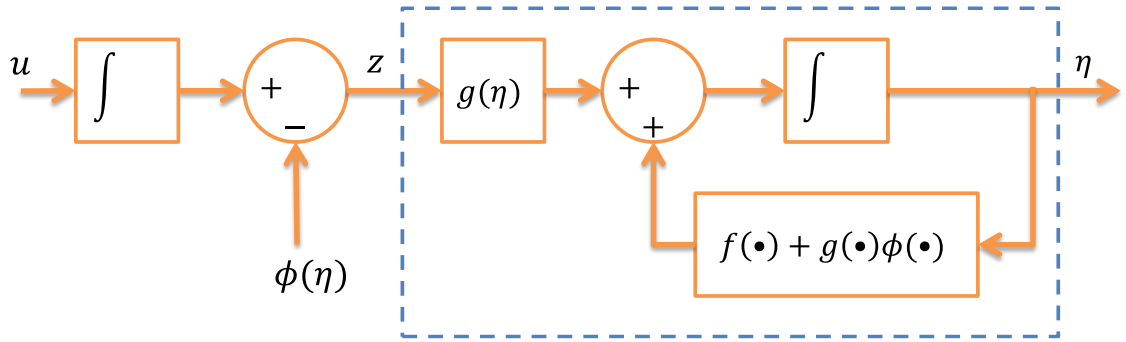


Figura 5.5 – Estratégia *backstepping*.

5.4.1. O Algoritmo *backstepping*

Para a definição do controlador, apresenta-se a função geral de atitude, seus estados, constantes e entradas de controle, apresentada em espaços de estados, reorganizada e obtida das equações de modelo apresentadas no capítulo 3.

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ a_1 x_4 x_6 + b_1 u_2 \\ x_4 \\ a_2 x_2 x_6 + b_2 u_2 \\ x_6 \\ a_3 x_2 x_4 + b_3 u_3 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

sendo $a_1 = (J_y - J_z)/J_x$, $a_2 = (J_z - J_x)/J_y$, $a_3 = (J_x - J_y)/J_z$, $b_1 = 1/J_x$, $b_2 = 1/J_y$ e $b_3 = 1/J_z$.

A abordagem para empregar a técnica *backstepping* concentra-se em torno do erro, isto é, a diferença entre o valor desejado, $\mathbf{x}_{1d}$, e o valor medido, $\mathbf{x}_1$, e sua derivada para esse sistema. É inserida uma variável, para o erro de rastreamento, com objetivo de obter a estabilidade com $\mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$, (DIKMEN et al., 2009).

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_{1d} - \mathbf{x}_1 \quad (5.41)$$

Com base nos estudos de Lyapunov, emprega-se uma função positiva e que sua derivada seja negativa, a função candidata de Lyapunov escolhida é:

$$V(\mathbf{z}_1) = \frac{1}{2} \mathbf{z}_1^2 \quad (5.42)$$

cuja derivada é dada por:

$$\dot{V}(\mathbf{z}_1) = \mathbf{z}_1(\dot{\mathbf{z}}_{1d} - \mathbf{x}_2) \quad (5.43)$$

A estabilidade de $\mathbf{z}_1$ é atingida pela introdução de uma mudança de variável $\mathbf{x}_2$:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_{1d} + \alpha_1 \mathbf{z}_1 \quad (5.44)$$

sendo $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$ um ganho que deve ser escolhido de acordo com o desempenho da resposta transitória desejada. A derivada da função de Lyapunov pode ser reescrita como:

$$\dot{V}(\mathbf{z}_1) = -\alpha_1 \mathbf{z}_1^2 < 0; \quad (5.45)$$

A fim de garantir a convergência do estado $\mathbf{x}_2$, aplica-se uma mudança da variável virtual $\mathbf{z}_2$, para redefinir o erro de rastreamento como:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{x}}_{1d} - \alpha_1 \mathbf{z}_1 \quad (5.46)$$

Considere agora a seguinte função candidata de Lyapunov:

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) \quad (5.47)$$

Sua derivada no domínio do tempo resulta em:

$$\dot{V}(z_1, z_2) = -\alpha_1 z_1^2 + z_2(-z_1 + a_1 x_4 x_6 + b_1 u_2 + \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) \quad (5.48)$$

A função é negativa com os ângulos variando suavemente ($\ddot{x}_{nd} = 0$; $n = 1, 2, 3$). Logo a estabilidade de z_2 pode ser atingida através da seguinte lei de controle:

$$u_2 = \frac{1}{b_1}(z_1 - a_1 x_4 x_6 + \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1) - \alpha_2 z_2) \quad (5.49)$$

Substituindo (5.49) em (5.48) obtém-se

$$\dot{V}(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) \quad (5.50)$$

Alterando os termos z_1 e z_2 , então a ação de controle será:

$$u_2 = \frac{1}{b_1}((1 + \alpha_1 \alpha_2)(x_{1d} - x_1) - a_1 x_4 x_6 - (\alpha_1 + \alpha_2)x_2) \quad (5.51)$$

em que α_1 e α_2 são ganhos do controlador e b_1 e a_1 são parâmetros do modelo. Quaisquer valores positivos para os ganhos resultam em sistema estável, porém, podem ser escolhidos para se obter um desempenho específico em malha-fechada.

O mesmo pode ser desenvolvido para os outros eixos de atitude usando as variáveis virtuais a seguir para o eixo θ :

$$\begin{aligned} z_3 &= x_{3d} - x_3 \\ z_4 &= x_4 - \dot{x}_{3d} - \alpha_3 z_3 \end{aligned} \quad (5.52)$$

De maneira análoga ao desenvolvido anteriormente, aplicando para o eixo de arfagem (θ), teremos:

$$u_4 = \frac{1}{b_2} (z_3 - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3) - \alpha_4 z_4) \quad (5.53)$$

E usando as equações a seguir para o eixo ψ :

$$\begin{aligned} z_5 &= x_{5d} - x_5 \\ z_6 &= x_6 - \dot{x}_{5d} - \alpha_5 z_5 \end{aligned} \quad (5.54)$$

teremos o controle de guinada (ψ) como:

$$u_6 = \frac{1}{b_2} (z_5 - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5) - \alpha_6 z_6) \quad (5.55)$$

5.4.2. Projeto do controlador

O modelo a ser controlado é dado pela equação (3.61), ou equação da atitude angular do quadrrorotor. Sua transformada de Laplace é dada por:

$$\phi(s) = \frac{1/J_x}{s^2} \tau_\phi(s) \quad (5.56)$$

A entrada do sistema é o torque gerado pelos motores opostos e a saída é o ângulo. A ação de controle, δ_n , é o comprimento do comando PWM enviado aos motores, n , diretamente proporcional ao empuxo convertido pela constante, k_f . Usando (3.42) e (3.45) a entrada do sistema passa a ser expressa por:

$$\tau_\phi = \ell(k_f \delta_1 - k_f \delta_3) = 2\ell k_f \Delta \delta_\phi \quad (5.57)$$

em que $\Delta \delta_\phi$ corresponde a ação de controle para o eixo (ϕ), calculada pelo controlador através da expressão $(\delta_2 - \delta_4)/2$, ou seja, a diferença dos comandos entre os motores 2 e 4.

Substituindo a equação (5.58) em (5.57), a ação de controle torna-se:

$$\phi(s) = \frac{b_x}{s^2} \Delta\delta_\phi(s) \quad (5.58)$$

em que $b_x = 2\ell k_f/J_x$

A Figura 5.6 apresenta o diagrama do controlador *backstepping*, onde α_1 e α_2 representam os ganhos do controlador, que foram determinados por otimização aplicando o toolbox de otimização do Simulink.

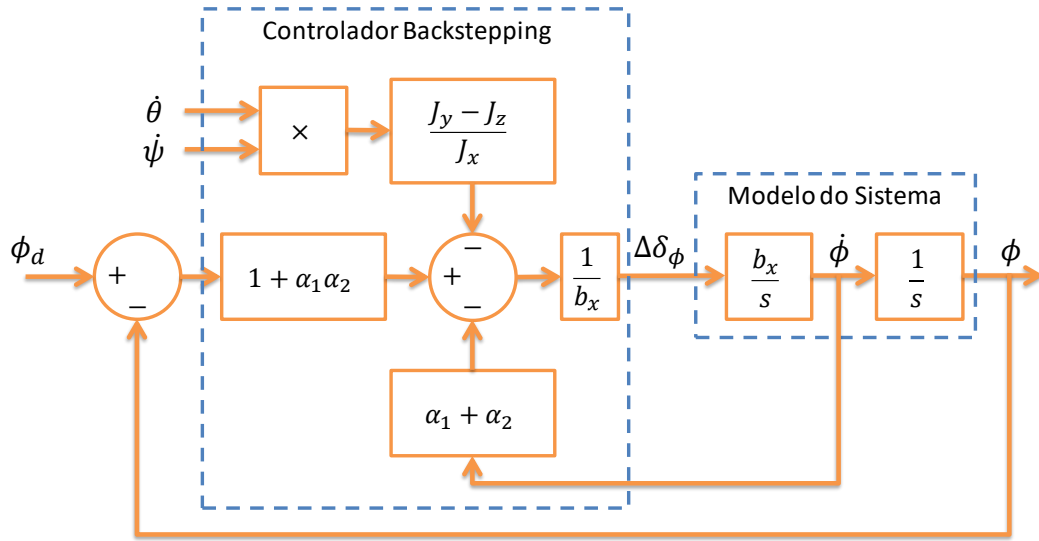


Figura 5.6 – Diagrama do controlador *backstepping*.

Fonte: Alves, 2012 (adaptado).

Para determinar os ganhos α_1 e α_2 , usou-se a ferramenta de otimização *Signal Constraint* do Simulink® (ALVES, 2012). Com este bloco é possível otimizar variáveis presente nos blocos Simulink®, para atingir uma resposta previamente selecionada. Conforme destacado na Figura 5.8 a direita o bloco e sua janela de configuração do tipo de resposta e a esquerda a simulação a ser otimizada. De acordo com a Figura 5.6, as variáveis a serem otimizadas são $b1 = 1 + \alpha_1 \alpha_2$ e $b2 = \alpha_1 + \alpha_2$.

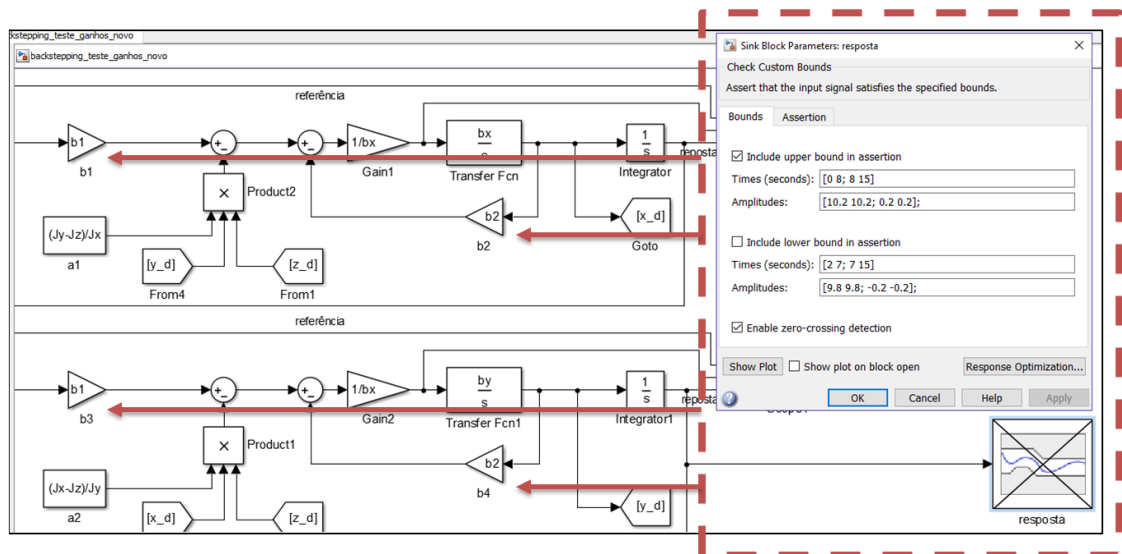


Figura 5.7 – Janelas de otimização.

A Figura 5.8 ilustra os resultados da evolução da otimização, de 1 à 3, até atingir o transitório desejado, delimitado pelas linhas horizontais. É possível determinar um segundo objetivo, por exemplo, limitar o esforço de controle garantindo assim a não saturação dos atuadores.

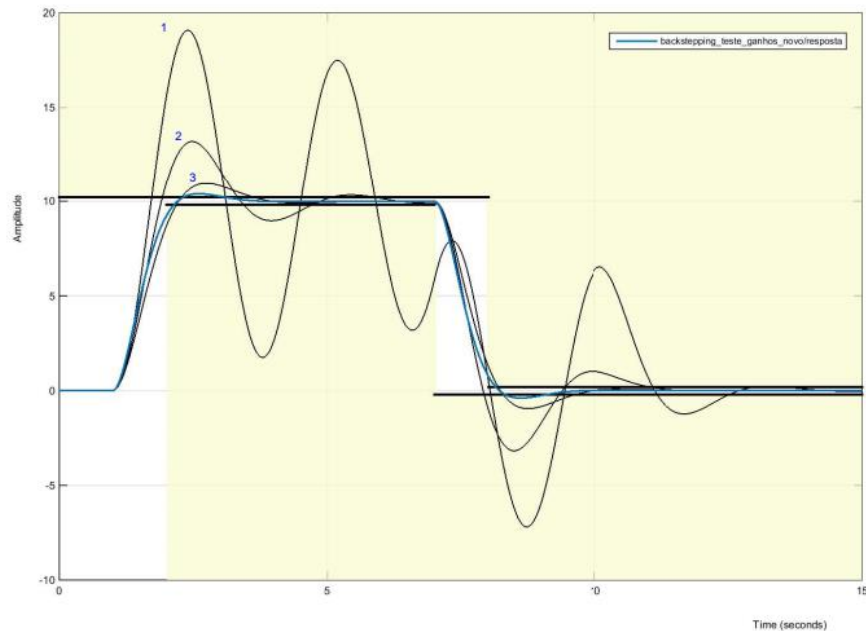


Figura 5.8 – Evolução das respostas transitórias no processo de otimização.

Os valores encontrados pela otimização foram $b1 = 12,59$ e $b2 = 7,52$, que implica em $\alpha_1 = 5,3561$ e $\alpha_2 = 2,1639$.

5.4.3. Controlador de guinada

Ao passo que os ângulos ϕ e θ são os responsáveis pela atitude da aeronave e sua estabilização, o ângulo ψ implica somente em sua direção. Para este último foi projetado um sistema de controle proporcional independente, através do lugar das raízes.

O modelo do sistema em Laplace, para o controle de atitude sobre o eixo ψ , é dado por:

$$r(s) = \frac{b_z}{s} \tau_\psi(s) \quad (5.59)$$

em que a ação de controle é o torque que é proporcional ao comprimento do pulso PWM, $\tau_\psi = \Delta\delta_\psi$ e a constante é definida como sendo $b_z = 4k_t/J_z$.

Nas simulações, é utilizada uma lei de controle proporcional, $u = kp(\dot{\psi}_d - \dot{\psi})$, com ganho kp positivo para estabilizar. O ganho kp pode ser determinado a partir do lugar das raízes como apresentado na Figura 5.9. A função de transferência de malha fechada é $T(s) = k_p b_z / (s + k_p b_z)$. O esquema do controle de ganho proporcional simples é apresentado na Figura 5.10.

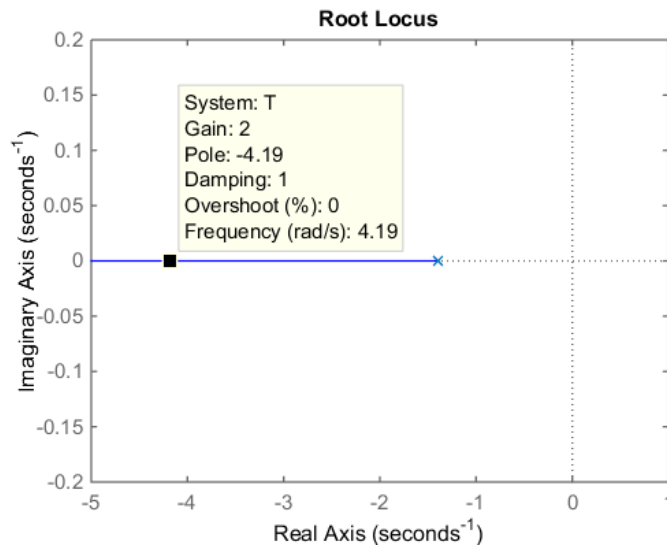


Figura 5.9 – Diagrama de lugar das raízes.

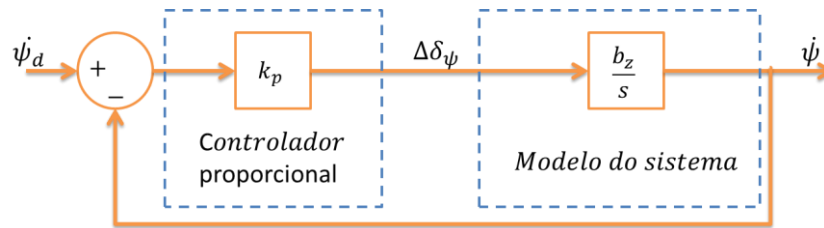


Figura 5.10 – Diagrama de controle de guinada.

5.5. Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas as técnicas de controle *backstepping* e de fusão de sensores por Filtro de Kalman, as duas tecnologias centrais deste estudo. Os ganhos do controlador são determinados a partir de uma técnica de otimização com base no modelo implementado na plataforma Simulink®. No próximo capítulo, as técnicas de controle e processamento de sinais, apresentadas neste capítulo, serão avaliadas por simulação e experimentalmente no protótipo de quadrirrotor construído.

6 TESTES E SIMULAÇÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados do sistema de controle do protótipo de quadricóptero obtidos tanto por simulação computacional, na plataforma Smulink® para MATLAB®, como por testes experimentais no protótipo construído, utilizando as técnicas propostas de tratamento de sinais e controle.

A Figura 6.1 apresenta o esquema do sistema completo de medição e controle, contemplando a cadeia de controle, filtros, os blocos de entrada dos referenciais: de atitude nos eixos “phi” e “theta”, referencial de giro sobre o eixo “psi” e de velocidade total “h”. Nesta mesma figura são apresentados os sistemas atuadores, sensores, controladores de velocidade de motor (ESC) e a fonte de energia (bateria).

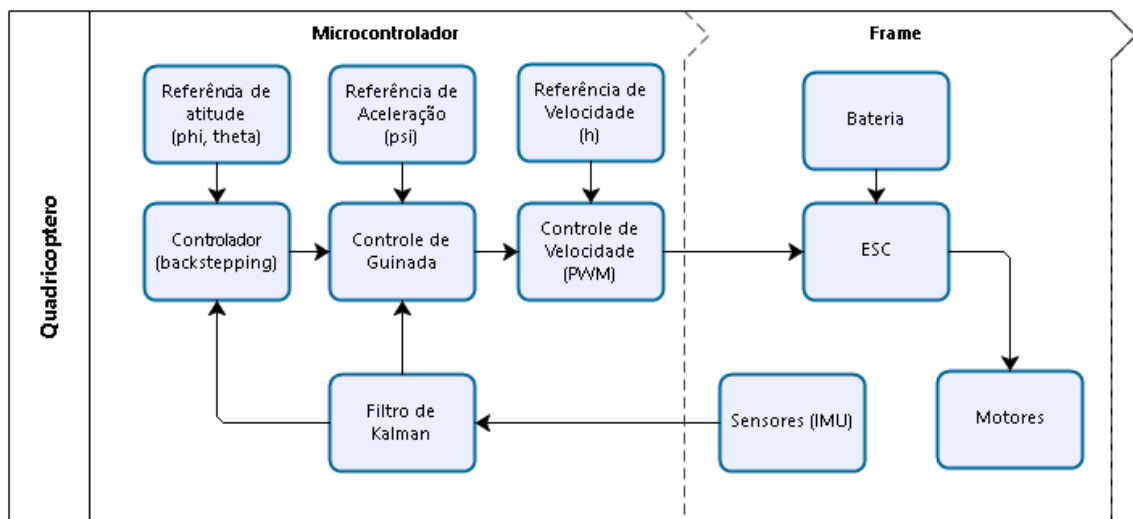


Figura 6.1 – Diagrama de blocos do sistema de medição e controle.

6.1. Filtro de Kalman

A Conexão da IMU com o microcontrolador é dada via I²C, protocolo de dois fios com a placa MPU-6050. A Figura 6.2 apresenta o esquema de ligação dos componentes. A comunicação com o computador é via emulação USB-Serial com velocidade de 9600 bps (bits por segundo).

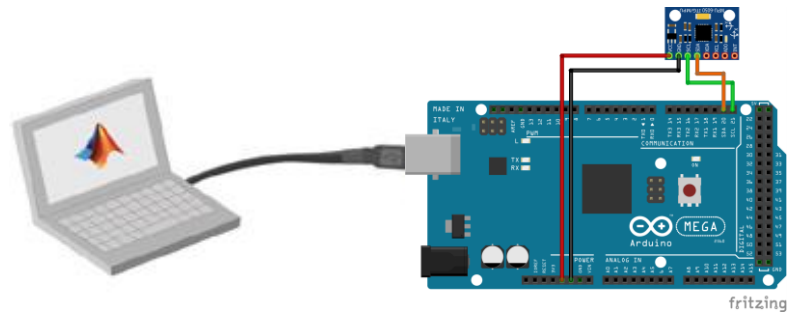


Figura 6.2 – Esquema de conexão.

A Figura 6.3 apresenta a implementação do sistema de tratamento de sinais para medição dos ângulo de atitude implementado no Simulink®, descrito na seção 5.4, incluindo o bloco do algoritmo do filtro de Kalman, utilizado nesse trabalho para implementação da fusão de sensores, saída denominada “Kalman”. Para efeitos de comparação, também é implementado a fusão de sensores pela combinação convexa dos sinais, saída denominada “compl”.

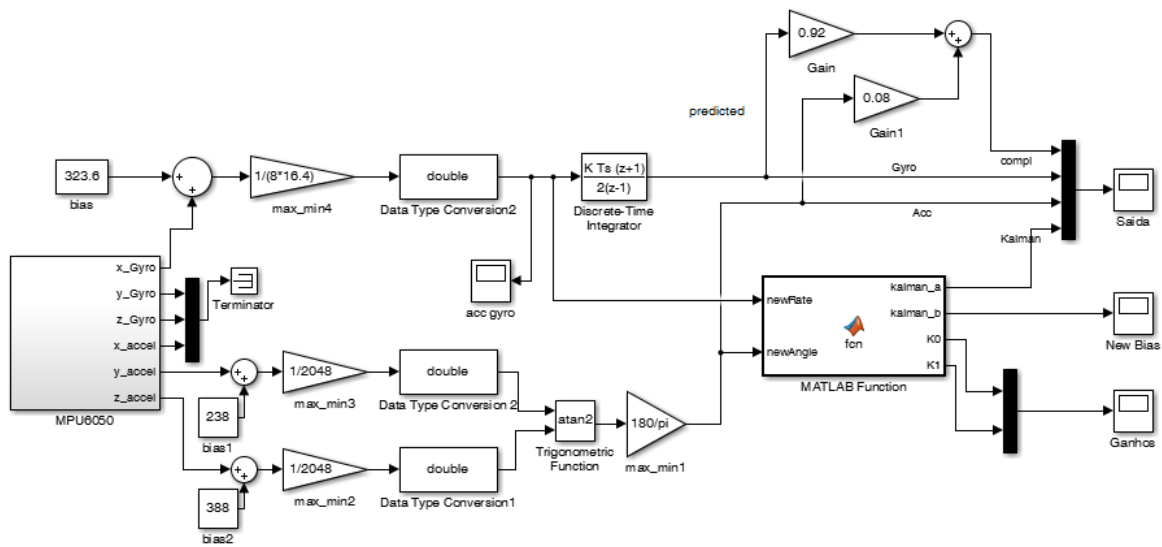


Figura 6.3 – Fusão de sensores implementado no Simulink®.

Para validação da técnica de fusão de sensores, foi realizado um teste com o sensor acoplado a um servo motor controlado por um microcontrolador programado para fazer o motor oscilar entre $+35^\circ$ e -35° , valores fixos de máximo e mínimo. Após um determinado número de amostras o motor é desligado em uma posição aleatória. A Figura 6.4 apresenta as medições do

giroscópio (em azul '-'), do acelerômetro (em vermelho '+'), o filtro complementar, com valor de $\alpha = 0,92$ (em rosa '-') e a resposta do filtro de Kalman (em preto '-').

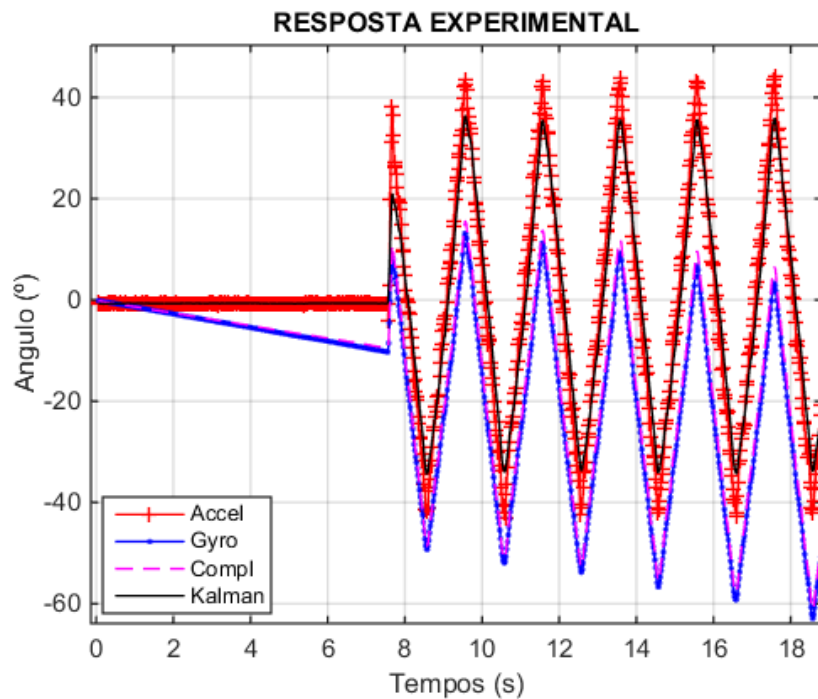


Figura 6.4 – Resultado da fusão de sensores.

Fica evidente o escorregamento do giroscópio. Em alguns momentos, o sinal do acelerômetro extrapola a escala de $+35^\circ$ do experimento, além de ocasionar picos durante a mudança de sentido de rotação do motor. Observa-se, em detalhe na Figura 6.5, o comportamento ruidoso do acelerômetro causado pela vibração entre as abruptas mudanças na direção de rotação, característica do servo motor. Comportamento que eventualmente acarretaria em saturação do controlador e, eventualmente, causando descontrole e até mesmo queda da aeronave. Como desejado a resposta do filtro de Kalman rejeita os comportamentos indesejáveis do escorregamento do giroscópio e as oscilações do acelerômetro.

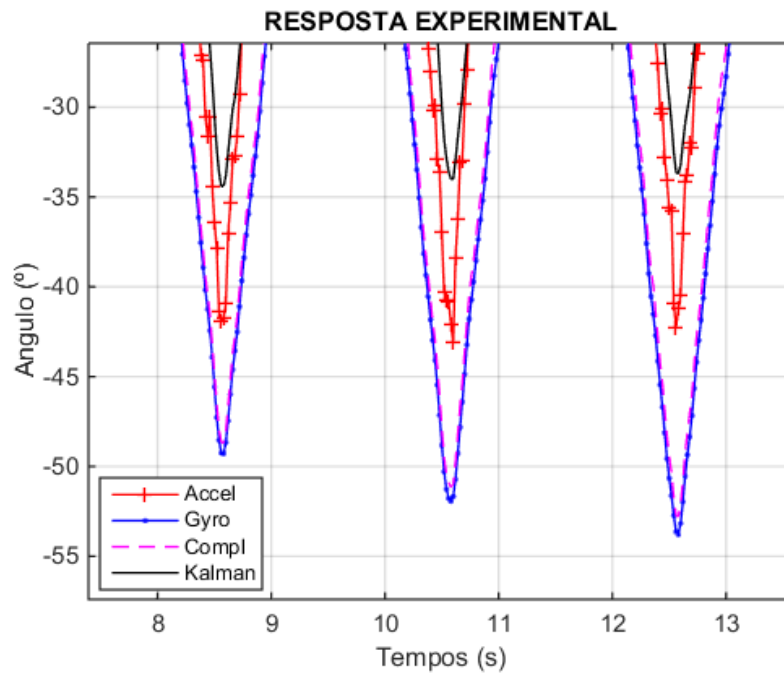


Figura 6.5 – Resultado na presença de ruídos elevados.

Os resultados se mostraram eficientes na determinação dos ângulos com precisão, combinando dois sensores, característica essencial para a aplicação em controle de estabilidade de VANT, em especial os multirrotores. Seu custo computacional é maior do que a do filtro complementar porem sua eficiência é muito superior.

6.2. Resultados do sistema de controle

Nessa seção são apresentadas as respostas do controlador obtidas por simulação em ambiente Simulink®, reunindo os modelos dos sistemas discutidos anteriormente. A Figura 6.6 apresenta o diagrama de blocos da simulação proposta.

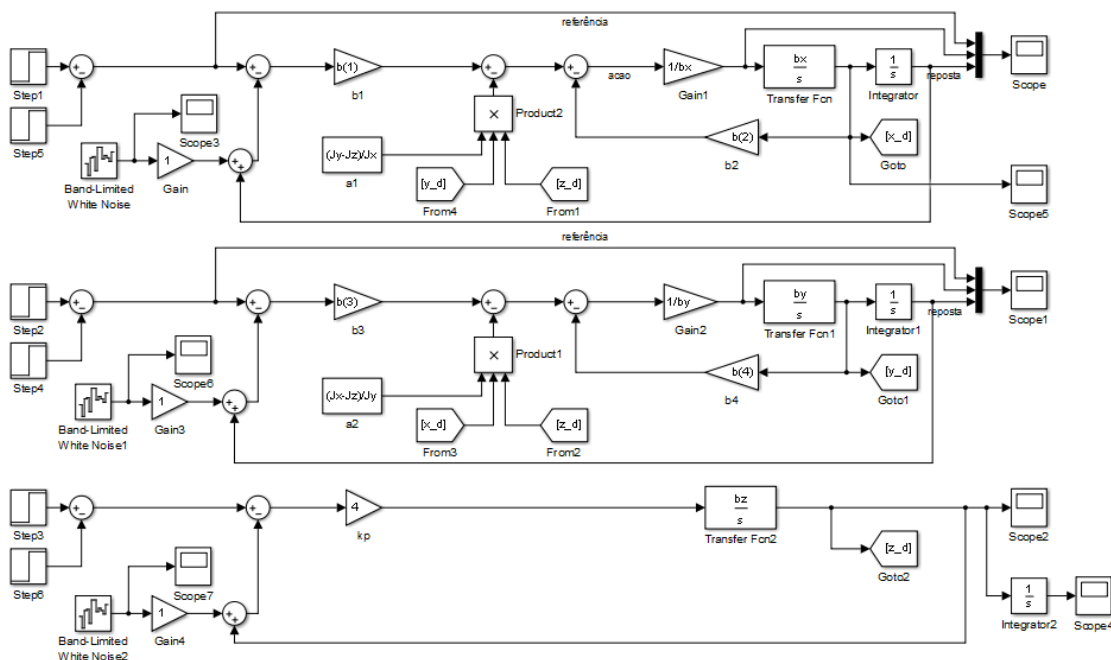


Figura 6.6 – Simulação do sistema de controle implementado no Simulink®.

Na Figura 6.7 é possível observar a resposta da simulação obtida pelo diagrama de blocos apresentado na Figura 6.6.

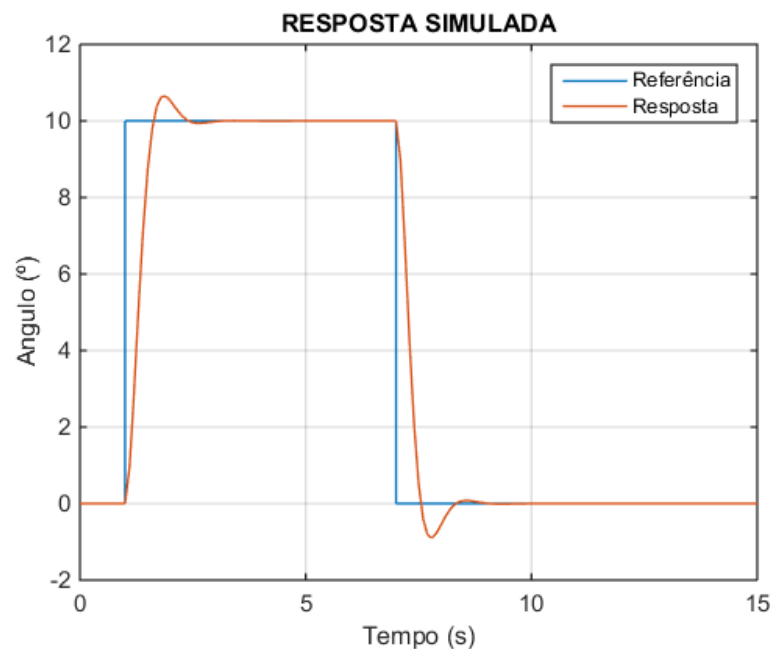


Figura 6.7 – Resposta angular simulada sem ruído de medição.

A Figura 6.8 apresenta a resposta da mesma simulação anterior, mas agora considerando ruído de medição compatível com dados experimentais. Nesta simulação foi empregado a escala

do ruído de medição do sistema real, obtida sobre circunstâncias de operação. Este procedimento será discutido em detalhes na próxima seção.

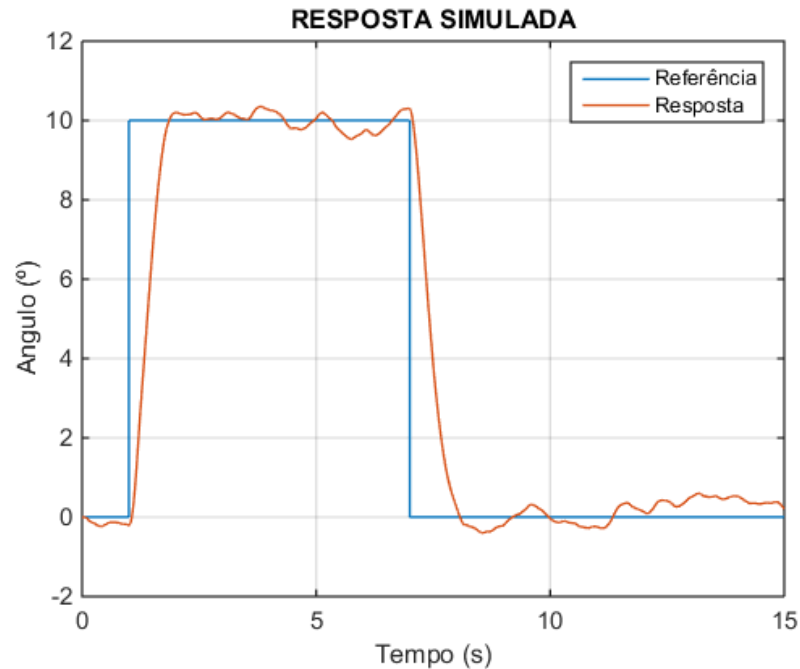


Figura 6.8 – Resposta angular com simulada com ruído de medição.

6.3. Resultados experimentais

Esta seção do trabalho concentra os testes e registros dos dados no protótipo construído, cujos componentes foram descritos detalhadamente no capítulo 4, podendo assim confrontar os dados simulados anteriormente e podendo verificar a viabilidade prática do projeto.

6.3.1. Base de testes

Foi projetada uma base de testes, exibida na Figura 6.9, que possibilitasse os graus de liberdade necessários para gerar o número de dados suficiente para validação dos resultados de simulação.

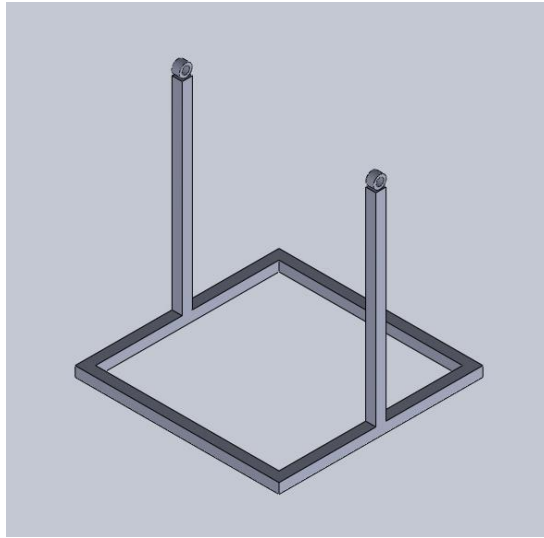


Figura 6.9 – Base para testes.

6.3.2. Resultados experimentais

Para validar os resultados práticos de maneira mais confiável possível, verificou-se a escala do ruído de medição do sistema de maneira experimental, sobre circunstâncias de operações reais, em um ponto de operação intermediário, e foram aplicadas as mesmas variações de referência, o mais próximo possível das circunstâncias em que as simulações foram executadas.

A Figura 6.10 exibe o sistema de controle *backstepping* completo para o ângulo θ de atitude sobre o eixo “x”. A direita dessa figura tem-se o bloco **DRONE**, que engloba os subsistemas de **Sensores**, que enviam a medição precisa dos ângulos θ e ϕ através do filtro de Kalman, e do ângulo ψ através apenas da integração da velocidade angular do giroscópio. Abaixo nessa figura está o subsistema **Motor 1 e 3** que recebe o sinal do controlador **BackStepping**, responsável por calcular a ação de controle e acionar os motores responsáveis pela angulação desejada. Este bloco ainda conta com uma entrada para se iniciar, **ON**, e uma entrada para selecionar o ponto de operação, ou referencial de velocidade, **ACC**.

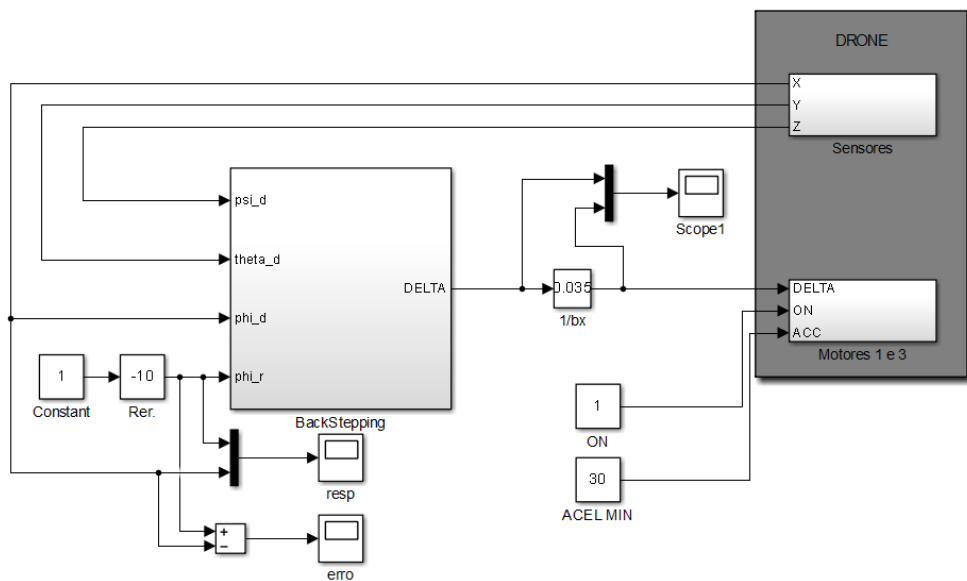


Figura 6.10 - Sistema de controle completo implementado em Simulink®.

A esquerda da Figura 6.10 temos os registradores gráficos para as respostas do sistema, **resp**, e o **erro**, mais à esquerda na interface o bloco de controle de referência, **Ref**. Este sistema funciona em tempo real e é processado completamente no microcontrolador incluído no protótipo.

A Figura 6.11 apresenta o resultado do experimento realizado no protótipo, com todos os sistemas físicos reais previamente discutidos, sob circunstâncias semelhantes às simulações, e com as devidas lógicas de operação e controle embarcadas.

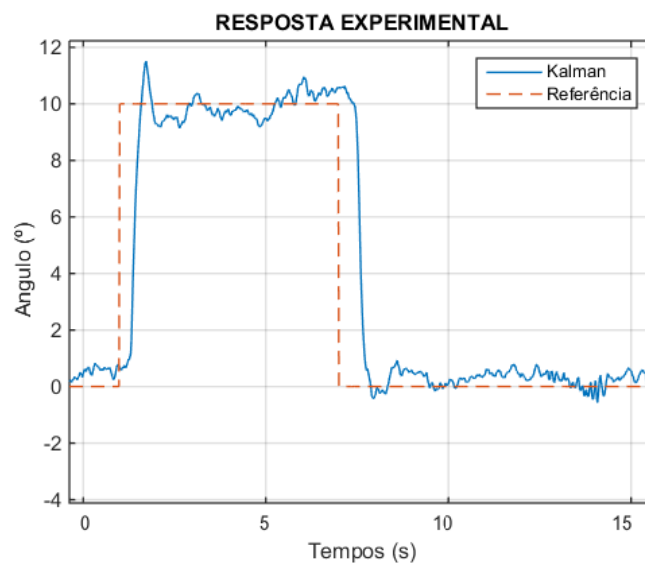


Figura 6.11 – Resposta experimental.

Também se verificou a capacidade do protótipo de rejeitar perturbações. Neste experimento fixou-se na bancada um outro conjunto de motor hélice, porém invertido, gerando empuxo contrário logo abaixo de um dos atuadores do protótipo. Ao ligar este rotor adicional insere-se perturbações variadas conforme a intensidade da rotação. Constatou-se que o protótipo é capaz de retornar a operar na região da referência com perturbações em torno de até 20% do empuxo total de um atuador, ou seja, a condição mais severa a perturbação é de 70g de empuxo. A Figura 6.12 exhibe o resultado deste experimento, onde nota-se o pico de 23° no instante de 333 segundos, indicando o acionamento do motor perturbador, e rapidamente, durante 2 segundos, retorna a operar em torno da referência 0°.

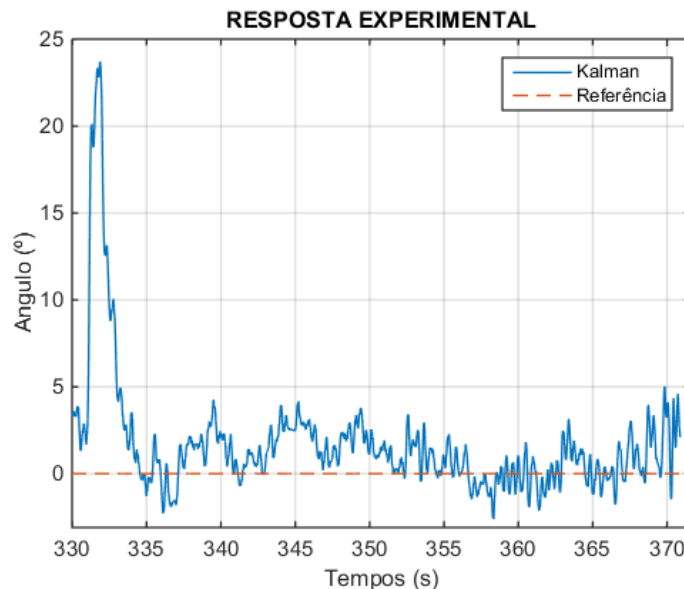


Figura 6.12 – Resultado experimental com presença de perturbação.

Na Figura 6.13 pode-se observar o resultado experimental para determinar a escala do ruído de medição, onde o sinal referência do sistema de controle de ângulo de atitude é fixado igual a zero.

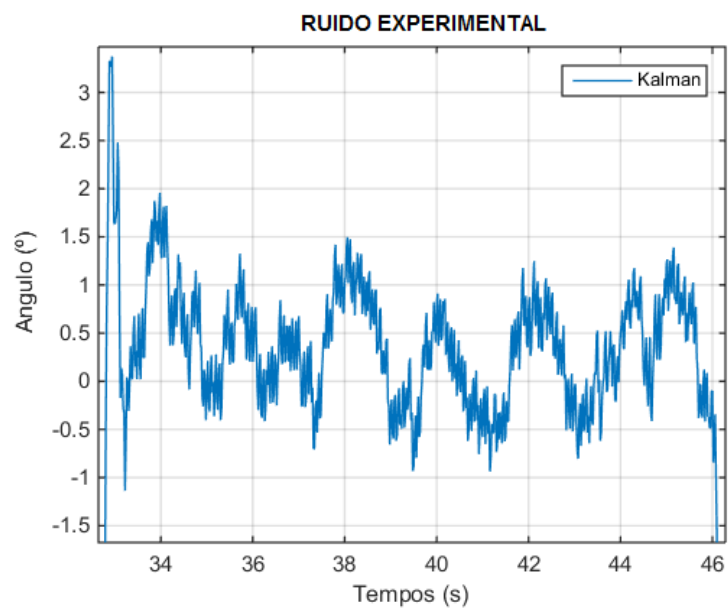


Figura 6.13 – Ruído obtido experimentalmente.

Pode ser observar, comparando a Figura 6.14, que apresenta o erro de rastreamento do ângulo de atitude obtido pela simulação e a Figura 6.15 que contém os registros de erros de rastreamento obtidos pelo protótipo, que a modelagem matemática do protótipo é adequada para uso no projeto do controlador, uma vez que as simulações e os resultados experimentais apresentaram comportamentos de erros similares.

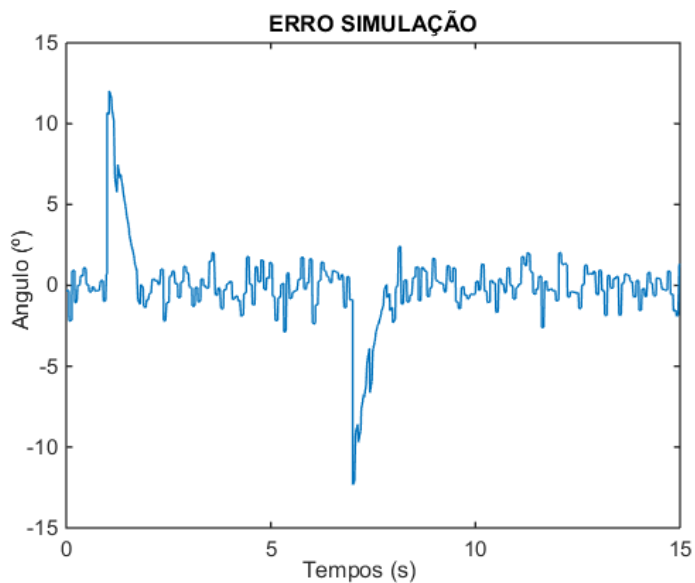


Figura 6.14 – Resultado da simulação erro de rastreamento obtido pelo Simulink®.

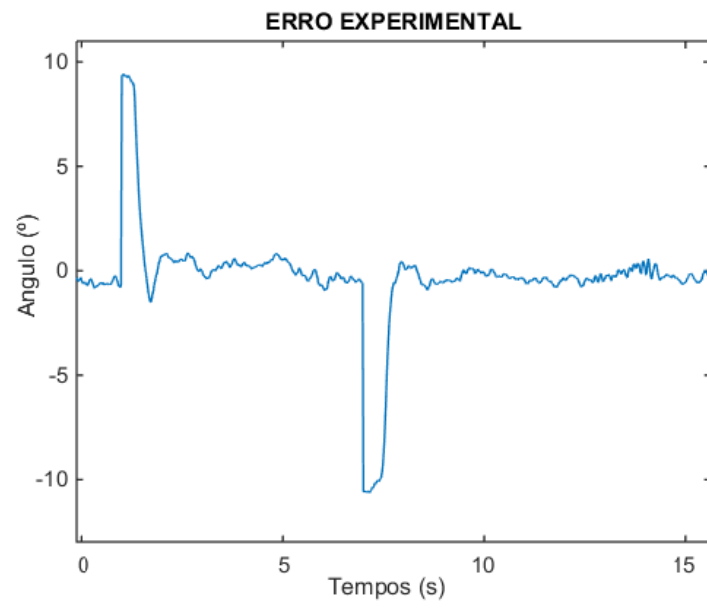


Figura 6.15 – Resultado experimental do erro de rastreamento obtido pelo protótipo.

7 CONCLUSÕES

7.1. Conclusões

O objetivo principal dessa dissertação foi a construção de um protótipo que permitisse a avaliação experimental de técnicas de controle de atitude de quadrrirrotores. Para execução deste projeto foi necessário enfrentar três desafios: i) projeto, seleção de componentes adequados e montagem do dispositivo; ii) modelagem e obtenção, por cálculo e experimental, dos parâmetros do modelo e iii) escolhas da técnica de tratamento dos sinais de medição e da técnica de controle para implementação inicial no Simulink® para MATLAB® e posterior implementação na plataforma Arduino®. A importância da construção do protótipo não foi apenas para possibilitar a realização de testes experimentais, mas também o conhecimento adquirido no processo sobre os dispositivos utilizados para a medição, controle e atuação. Todos os componentes, necessários para a construção do protótipo, foram adquiridos, muito deles por importação. Para o projeto e construção do protótipo foram necessárias diferentes habilidades para elaboração de desenho computadorizado, interpretação de folhas de dados dos componentes e uso de ferramentas de medição, corte, perfuração, solda e acabamento.

Para o desenvolvimento do *software* necessário, de maneira estratégica, iniciou-se pela programação dos códigos para leitura e tratamento de dados dos sensores, em seguida a implementação dos códigos da técnica de controle e, por último, os algoritmos de comunicação e comando com os atuadores. Uma grande dificuldade enfrentada foi a interação e comunicação entre os dispositivos envolvidos, placa controladora (Arduino®), unidade de sensores (MPU6050) e os controladores de velocidade (ESCs), com as ferramentas de modelagem e programação, MATLAB® e Simulink®. Para tal foi essencial conhecimentos profundos de eletrônica e linguagem de programação em C, para instalação e sobretudo criação de componentes de biblioteca do ambiente Simulink®.

A metodologia de fusão de sinais adotada, baseada na técnica do filtro de Kalman, para determinação do ângulo de atitude, a partir dos sinais do giroscópio e do acelerômetro, se mostrou eficiente, contornando as deficiências de cada sensor isolado. A metodologia de medição foi implementada e avaliada na plataforma Simulink® para MATLAB® para posterior implementação na plataforma Arduino®.

Foi adotada uma técnica de controle não linear, *backstepping*, que foi avaliada tanto por meio de simulação computacional, com base no modelo obtido, como por testes experimentais, no protótipo de quadrirrotor construído. Uma ferramenta de otimização disponível no Simulink®, para restringir a resposta transitória, foi empregada com sucesso para determinação dos ganhos do controlador. Tal ferramenta se mostrou poderosa, uma vez que possibilitou selecionar o transitório específico da resposta do sistema de controle de atitude. A modelagem obtida para o protótipo mostrou-se adequada, mesmo com as aproximações realizadas para ângulos pequenos e concentrações pontuais de massas, uma vez que os resultados simulados, utilizados para síntese do controlador, foram compatíveis com os resultados experimentais. Desse modo, tanto a técnica de controle não linear, *backstepping*, como a metodologia de projeto, se mostraram eficientes para o controle de ângulo de atitude de quadrirrotores.

Foi identificado que, o fato de se ter obtido a constante de ganho k_f , relacionando o torque com o comando PWM, apenas de um motor, replicando o seu valor para os demais, fez com que o sistema apresentasse um desempenho pior. Posteriormente, com a medição individual para cada motor, o desempenho foi aprimorado. Esse fenômeno indica que a técnica de controle *backstepping* pode ser sensível a parâmetros imprecisos. Uma dificuldade enfrentada no experimento de bancada, para modelagem dos motores, foi as oscilações das leituras na balança de precisão devido as vibrações do conjunto motor hélice. Para contornar este fenômeno realizou-se repetidas medições.

Uma dificuldade enfrentada para reprodução dos resultados de simulação nos testes experimentais foi a aproximação das condições de operação, uma vez que, todas as simulações partem das mesmas condições ideais, diferente dos testes experimentais. Foi necessário realizar repetidos testes com monitoramento das condições iniciais das variáveis, além do controle das interferências do ambiente, tais como correntes de ar.

7.2. Trabalhos futuros

Com o protótipo construído é possível avaliar e comparar outras técnicas de controle, linear ou não linear, e metodologias de projeto para o controle de atitude.

Visando a continuidade da pesquisa sobre controle de quadricópteros, prevê-se para trabalhos futuros o projeto e avaliação de mais malhas de controle, como o controle de posição espacial, isto é, o controle de altitude e deslocamento.

Para auxiliar na execução futura dos testes experimentais, já foi construída uma segunda plataforma de testes, apresentada na Figura 7.1, que permitirá um número maior de graus de liberdade, ideal para análise do comportamento de altitude e atitude simultaneamente. Nesse caso o sistema passa a ser de múltiplas entradas e múltiplas saídas, com novos desafios para seu projeto.



Figura 7.1 – Plataforma de teste 4DOF.

7.3. Trabalhos publicados relacionado com essa dissertação

Trabalho “Implementação em C: filtro de Kalman, fusão de sensores para determinação de ângulos”, publicado na revista científica ForScience do IFMG, Formiga, v. 5, n. 3, e00287, jul./dez. 2017.

APÊNDICE A – CÓDIGO FILTRO KALMAN

Abaixo segue as manipulações matemáticas seguidas do correspondente em código fonte C.:

$$\bar{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\dot{\theta}_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\dot{\theta}_b} \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \Delta t \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\dot{\theta}_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta - \dot{\theta}_b \Delta t + \dot{\theta} \Delta t \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix}$$

Primeiramente a partir de (1) $\bar{x}_k$ em linhas de código C resulta em:

1.	Angle += dt * rate;
2.	Rate = newRate - bias;

O Segundo passo é considerando a partir de (11) e substituindo $CQC^T = Q$:

$$\bar{P}_k = A\hat{P}_{k-1}A^T + Q$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{00} & \bar{P}_{01} \\ \bar{P}_{10} & \bar{P}_{11} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{00} & \hat{P}_{01} \\ \hat{P}_{10} & \hat{P}_{11} \end{bmatrix}_{k-1} \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} Q_{\theta} & 0 \\ 0 & Q_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \Delta t$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{00} & \bar{P}_{01} \\ \bar{P}_{10} & \bar{P}_{11} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} P_{00} + \Delta t(\Delta P_{11} - P_{01} - P_{10} + Q) & P_{01} - \Delta t P_{11} \\ P_{10} - \Delta t P_{11} & P_{11} + Q \Delta t \end{bmatrix}$$

Em linguagem C a matriz $\bar{P}_k$ (covariância) equivale-se em:

3.	P[0][0] += dt*(dt*P[1][1] - P[0][1] - P[1][0] + Q);
4.	P[0][1] -= dt*(dt*P[1][1];

5.	$P[1][0] -= dt * P[1][1];$
6.	$P[1][1] += Q * dt$

Passo 3 (Atualização com a mediação): Onde y_k é o erro de medição entre a medida z_k e a estimação do estado

$$y_k = z_k - H\bar{x}_k$$

$$y_k = z_k - [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\dot{\theta}_b} \end{bmatrix}$$

7.	$Y = \text{newAngle} - \text{angle};$
----	---------------------------------------

Passo 4, a partir de (13) obtém-se:

$$S_k = (HP_k H^T + R)$$

$$S_k = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + R$$

$$S_k = P_{00} + R$$

8.	$S = P[0][0] + R_measure;$
----	-----------------------------

Utilizando (13) novamente adquire-se o passo 5:

$$K_k = \bar{P}_k H^T S_k^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{01} \end{bmatrix}_k S^{-1}$$

9.	K[0] = P[0][0]/S;
10.	K[1] = P[0][1]/S;

Passo 6 correção do ângulo $\mathbf{x}_k$ através do ganho do filtro $\mathbf{K}$ e do erro de medição $\mathbf{y}_k$:

$$\mathbf{x}_k = \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K} \mathbf{y}_k$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\dot{\theta}} \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix}_k y_k$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\dot{\theta}} \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} K_0 y \\ K_1 y \end{bmatrix}_k$$

Em linguagem C simplesmente resulta em:

11.	angle += k[0]*y;
12.	Bias += K[1]*y

Por último (passo 7), implica:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}_k = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \overline{P_{00}} & \overline{P_{10}} \\ \overline{P_{10}} & \overline{P_{11}} \end{bmatrix}_{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{P_{00}} & \overline{P_{10}} \\ \overline{P_{10}} & \overline{P_{11}} \end{bmatrix}_{k-1} - \begin{bmatrix} K_0 \cdot P_{00} & K_0 \cdot P_{01} \\ K_1 \cdot P_{00} & K_1 \cdot P_{01} \end{bmatrix}$$

13.	float P00_temp = P[0][0];
-----	---------------------------

14.	float P01_temp = P[0][1];
15.	P[0][0] -= K[0] * P00_temp;
16.	P[0][1] -= K[0] * P01_temp;
17.	P[1][0] -= K[1] * P00_temp;
18.	P[1][1] -= K[1] * P01_temp;

Definindo a partir da folha de dados do sensor (INVEN SENSE, 2013), adquirir-se os erros de medição e covariância:

19.	float Q_angle = 0.001;
20.	float Q_gyroBias = 0.003;
21.	float R_measure = 0.03;

Q_angle e Q_gyroBias, foram retirado da folha de dados em INVEN SENSE, 2013 e R_measure é obtido por $R = 2^{std_{deviation}}$ ou experimentalmente, ou ajustado experimentalmente.

REFERÊNCIAS

ABBEEL, Pieter; COATES, Adam; MONTEMERLO, Michael; NG, Andrew Y.; THRUN, Sebastian. **Discriminative Training of Kalman Filters**. In: Robotics: Science and systems. 2005. p. 38-46.

AGUIAR, Valther Xavier. **VANT, uma ameaça à Fotogrametria?**. Associação Nacional de Empresas de Aerolevantamento ANEA. 2013. Disponível e: <<http://www.anea.org.br/artigos/VANTeFotogrametria.pdf>>. Acessado em 16/02/2017.

ALVES, Ana Sophia Cavalcanti. **Estudo e Aplicação de Técnicas de Controle Embarcadas Para Estabilização de Voo de Quadricopteros**. Tese de Doutorado (Em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, MG. 2012.

ARDUINO. **Arduino mega 2560 rev3**. Disponível em: <<https://store.arduino.cc/usa/arduino-mega-2560-rev3>>. Acessado em 16/10/17.

AVECILLAS, Manuel Jeová Reinoso. **Diseño de Um Sistema de Control por Régimean Deslizante para el Seguimento de Trayectoria Lineal de Um Quadrotor**. 114 f. Maestria em Control y Automatización Industriales - Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca-Ecuador. 2014.

BEARD, R. W. **Quadrotor Dynamics and Control**. [S.l.], Brigham Young University. February 2008

BISHOP, Gary; WELCH, Greg. **An introduction to the Kalman filter**. ACM SIGGRAPH conference 2001, Course 8, 2001.

CHEN, Yanmin; HE, Yongling; ZHOU, Minfeng. **Modeling and control of a quadrotor helicopter system under impact of wind field**. Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology, v. 17, n. 6, p. 3214-3221, 2013.

CONGLONG, Tian; JINGWEN, Wang; ZHAOJIE, Yin; GUOHUI, Yu. **Integral Backstepping Based Nonlinear Control for Quadrotor**. In: Control Conference (CCC), 2016 35th Chinese. IEEE, 2016. p. 10581-10585.

COSTA, Exuperry Barros. **Algoritmos de Controle Aplicados à Estabilização do Vôo de um Quadrotor**. 127 f. Dissertação de Mestrado (Em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Juiz de Fora, novembro de 2012. Juiz de Fora – MG.

DAS, Abhijit; LEWIS, Frank; SUBBARAO, Kamesh. backstepping approach for controlling a quadrotor using Lagrange form dynamics. **Journal of Intelligent and Robotic Systems**, v. 56, n. 1-2, p. 127-151, 2009.

DIKMEN, I. Can; ARISOY, Aydemir; TEMELTAS, Hakan. **Attitude control of a quadrotor**. In: Recent Advances in Space Technologies, 2009. RAST'09. 4th International Conference on. IEEE, 2009. p. 722-727.

FITTIPALDI, Hélio. **Alunos da UnB constroem helicóptero de quatro hélices**. Mecatrônica Fácil, São Paulo, v. 1, n° 42, p. 4, 2008.

GRAND, Christophe; MOURET, Jean-Baptiste; DONCIEUX, Stéphane; ADIGBLI, Patrick. **Nonlinear Attitude and Position Control of a Micro Quadrotor using Sliding Mode and Backstepping Techniques**. 3rd US-European Competition and Workshop on Micro Air Vehicle Systems (MAV07) & European Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition (EMAV2007), 17-21 September 2007, Toulouse, France.

HALLIDAY, David, RESNIK Robert, KRANE, Denneth S. **Física 1**, volume 1, 4. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. 326 p.

HOBBIE BRASIL. **Cuidados com Baterias LIPO**, Disponível em: <<http://www.hobbiebrasil.com.br/baterias>>. Acessado em: 09/04/2014.

INVENSENSE INC. **MPU-6000 and MPU-6050 Product Specification**. Revision 3.1 Document Number: RM-MPU-6000A-00. 03/09/2013.

KOKOTOVIC, Petar V. The joy of feedback: nonlinear and adaptive. **IEEE Control systems**, v. 12, n. 3, p. 7-17, 1992.

LEISHMAN, Gordon J., **A History of Helicopter Flight Principles of helicopter aerodynamics**, 2000. University of Maryland, College Park. Disponível em: <<http://terpconnect.umd.edu/~leishman/Aero/history.html>>. Acessado em 29/09/2016

LIMA, Gabriela Vieira. **Modelagem dinâmica e controle para navegação de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero**. 2015. 120 f. Dissertação (Mestrado em Engenharias) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

MELO, Alexandre Secchin de. **Implementação de um Quadrotor como Plataforma de Desenvolvimento para Algoritmos de Controle**. 113 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal Do Espírito Santo, Vitória, 2010.

MIAN, Ashfaq Ahmad; DAOBO, Wang. **Modeling and Backstepping-based Nonlinear Control Strategy for a 6 DOF Quadrotor Helicopter**. Higher Education Commission, Government of Pakistan Chinese Journal of Aeronautics. 2008.

MONTEIRO, João Carlos Espiúca. **Modelagem e Controle de um Veículo Quadrirrotor**. 2015. Monografia. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

MOZELLI, Leonardo Amaral; NETO, Armando Alves. **Controle Robusto de Atitude em Veículos do Tipo Quadricoptero**. Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática. 2014. Belo Horizonte, MG, 20 a 24 de setembro de 2014

OLIVEIRA, Mario Otávio França; FERNANDES, Marcos Rogério. **Estudo e Desenvolvimento de Sistemas de Controle Ótimo com Filtragem Estocástica**. Monografia – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Dep. de Engenharia de Controle e Automação. Curitiba – Paraná. 114f. 2016.

OLIVEIRA, Waldri dos Santos. **Veículo aéreo não tripulado quadricóptero: aspectos construtivos**. Monografia. - Faculdade do Sul da Bahia. Teixeira de Freitas - Bahia. 66f. 2014.

PARROT SA. **Data Sheet Parrot**. Maio de 2014. Disponível em <<http://www.parrot.com/media/porticus/ressources/files/PT.pdf>>. Acessado em 30/04/2016.

RAOL, Jitendra. R. **Multi-sensor data fusion with MATLAB**. xxxiii ed. CRC Press Taylor & Francis, 2009, 534 p., ISBN: 9781439800058.

ROBOTSHOP. **Comment Fabriquer Un Drone / UAV**. Disponível em: <<http://www.robotshop.com/blog/fr/comment-fabriquer-un-droneuav-leon-3-propulsion-4480>>. Acessado em: 31/08/17

RODRIGUES, Sérgio. **Drone, do zangão ao avião**. Revista Veja. Estado, fev. 2013. Blog. Disponível em: <<http://veja.abril.com.br/blog/sobre-palavras/palavra-da-semana/drone-do-zangao-ao-aviao/>>. Acessado em 17 nov. 2016.

ROMERO, Roseli Aparecida Francelin; PRESTES, Edson; OSÓRIO, Fernando; WOLF, Denis Fernando. **Robótica Móvel**. 1 ed. Rio de Janeiro – RJ. LTC, 2014, 316 pg.

SABATELLI, Simone; GALGANI, Marco; FANUCC, LUCA; Rocchi, Alessandro. **A double stage Kalman filter for sensor fusion and orientation tracking in 9D IMU**. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 62, No. 3, pp.590-598. 2012.

SABATELLI, Simone; SECHI, Francesco; ROCCHI, Alessandro; FANUCCI, Luca. **A sensor fusion algorithm for an integrated angular position estimation with inertial measurement units**. DATE - Design, Automation and Test in Europe. Vol. 1, pp.273. 2011 EDAA.

SCHENK, H., **PropCalc. Version 3.0**. Disponível em: <<http://www.drivecalc.de/PropCalc/>>. Acessado em 22/09/2017.

TAVARES, Jesús N. Guerrero. **Implementación de un algoritmo de control para el levantamiento de un helicóptero de cuatro rotores**. 2014. Dissertação de Mestrado. Universidad Autónoma de Querétaro. México.

VASCONCELLOS, C. S. C. C.; CATUNDA, P. R. Y. **Projeto, Construção e Controle de um Protótipo de um Quadrirrotor**. 2013. 114 f. Monografia (Graduação em Engenharia Eletrônica e de Computação) - Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.

VIEIRA, José Carlos Silva. **Plataforma Móvel Aérea QuadRotor**. 85 f. Dissertação (Grau de Mestre em Engenharia Eletrônica Industrial e Computadores) - Universidade do Minho, Escola de Engenharia, outubro de 2011, Braga, Portugal.

ZANONI, Fábio Doro. **Modelagem e Implementação do Sistema de Navegação Para um AUV**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. São Paulo. 245 p. 2012.

ZULU, Andrew; JOHN, Samuel. **A review of control algorithms for autonomous quadrotors**. Open Journal of Applied Sciences, 4, 547-556. 2014.