



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

CALIBRAÇÃO DE CÂMERAS BASEADA EM ÁLGEBRA INTERVALAR

DARLAN NUNES DE BRITO

Orientador: Flávio Luis Cardeal Pádua
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET-MG

Coorientador: Aldo Peres Campos e Lopes
Unifei - Universidade Federal de Itajubá

BELO HORIZONTE
AGOSTO 2018

DARLAN NUNES DE BRITO

**CALIBRAÇÃO DE CÂMERAS BASEADA EM
ÁLGEBRA INTERVALAR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: Flávio Luis Cardeal Pádua
Centro Federal de Educação Tecnológica
de Minas Gerais - CEFET-MG

Coorientador: Aldo Peres Campos e Lopes
Unifei - Universidade Federal de Itajubá

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
AGOSTO 2018

Esta folha deverá ser substituída pela
cópia digitalizada da folha de aprova-
ção fornecida pelo Programa de Pós-
graduação.

Agradecimentos

Há sempre muito a agradecer, pois em nenhuma hipótese se faz uma caminhada sozinho. Agradeço a Deus pois, se cheguei até aqui, foi por Ele ter iluminado o caminho, mesmo nos momentos em que pensei estar tudo escuro.

Além da presença divina, existe uma pessoa que foi fundamental para construção deste trabalho que, acredito, não começou 5 anos atrás, mas sim 36 anos atrás. Esta pessoa é minha mãe. Agradeço e sempre agradecerei à Dona Lady por ter dedicado grande parte da sua vida a mim. Ela foi sem dúvida a base de todas as minhas conquistas, incluindo esta.

Devo agradecer muito também ao meu orientador, o professor Flávio Luis Cardeal Pádua. Sei quanto trabalho lhe dei, ele sempre me repreendia com palavras duras, no entanto, de uma benevolência sem igual. Agradeço também ao professor Aldo Peres Campos e Lopes, meu coorientador, pelas valorosas contribuições.

Existem outras pessoas que também contribuíram e que estavam presentes em todos os momentos fáceis e difíceis da minha vida, são meus tios: Lourdinha, Nilson, Levi, Jorge, Dulce, Wilson e Toninho. Foram fundamentais para que eu, lá nos meus tenros anos, conseguisse estudar e iniciar a caminhada para chegar até aqui. Agradeço também a meu pai, que sempre me deu palavras de apoio e esteve ao meu lado ao longo da caminhada. Outra pessoa também importante é tia Gilma, agradeço-a, também, por todo apoio.

Ao CNPQ (processos 307510/2017-4 e 313163/2014-6), à FAPEMIG (processo PPM-00542-15) ao CEFET-MG, à CAPES e à FUFOP, agradeço pelo apoio acadêmico e financeiro à pesquisa.

*“Uma longa caminhada começa sempre
pelo primeiro passo.” (Lao-Tsé)*

Resumo

Este trabalho aborda o desenvolvimento de um novo método para calibração de câmeras baseado em álgebra intervalar. Diferentemente dos métodos existentes, a abordagem proposta possui maior tolerância a ruídos, sendo capaz de produzir resultados com erros menores que a ordem de grandeza das medidas, mesmo em cenários nos quais os dados de entrada estejam bastante corrompidos ou nos quais não existam alvos de calibração apropriados. Conceitos fundamentais, como álgebra vetorial no espaço projetivo, entre outros frequentemente utilizados na definição dos principais métodos de calibração atuais, são devidamente estendidos de modo que princípios da álgebra intervalar sejam aplicados. Nesse cenário, formula-se o problema de estimação dos parâmetros de calibração (intrínsecos e extrínsecos) como um problema de otimização, cuja solução é obtida a partir do bem conhecido método de otimização global de Hansen e Walster para análises intervalares. Adicionalmente, propõe-se uma modificação nesse método utilizando o algoritmo genético para diminuir o diâmetro do casco convexo (*convex hull*) da solução em torno do mínimo. São apresentados resultados experimentais para ruídos adicionados nos pontos do sistema de coordenadas cartesianas global dos dados utilizados para calibração de até 500 mm e nos dados do plano de imagem de até 10 *pixels*, que são maiores do que os normalmente utilizados por outros trabalhos em calibração de câmeras. Mesmo com esses níveis severos de ruído, foram apresentados erros de projeção no plano de imagem com um limite superior do intervalo com um valor mínimo igual a 12 *pixels* e a distância dos parâmetros, também com um limite superior mínimo menor do que 1%.

Palavras-chave: Calibração de câmeras. Geometria projetiva. Álgebra intervalar.

Abstract

This work describes the development of a new method for camera calibration based on interval algebra. Unlike existing methods, the proposed approach has higher noise tolerance, being able to produce results with high accuracy, even in scenarios where data entry are quite corrupted or there are no appropriate calibration targets. Fundamental concepts such as definition of own projective space, vector algebra in the projective space, among others, frequently used in the definition of the major current calibration methods, are properly extended so that the principles of interval algebra are applied. In such an environment the problem of estimation of calibration parameters (intrinsic and Extrinsic) is formulated as an optimization problem, whose solution is obtained from the well known global optimization method of Hansen and Walster to interval analysis. In addition, it is proposed to change this algorithm by using the genetic algorithm to reduce the minimum solution diameter of the convex hull of the solution around the minimum. Experimental results obtained with sequences of images in synthetic scenes demonstrate that is a promising approach. To exemplify the strength of our method, we present results for camera calibration with varying levels of noise on WCF input data to 500 mm and image plane data to 10 pixels, which is larger than current state-of-the-art studies. Even with this introduced noise, we present projection errors of the computed points on an image plane with interval bounds at a minimum of twelve pixels.

Keywords: Camera calibration. Projective geometry. Interval algebra.

Lista de Figuras

Figura 1 – Parâmetros intrínsecos	2
Figura 2 – Parâmetros extrínsecos	3
Figura 3 – Equipamentos que utilizam sensores de imagem para recuperação de medidas geométricas da cena e se beneficiariam da metodologia de calibração proposta. Na Figura (a) tem-se um robô submarino utilizado para exploração de petróleo, (b) um carro autônomo e (c) robôs industriais utilizado na manufatura de veículos.	8
Figura 4 – Homografia entre dois planos	16
Figura 5 – Retas paralelas na estrada	17
Figura 6 – Transformações em uma cena 3D (a) do sistema de coordenadas cartesianas globais para o sistema de coordenadas da câmera, (b) do plano de imagem para coordenadas em pixels.	19
Figura 7 – Exemplos de alvos de calibração típicos: tridimensionais 3D (a) e (b), bidimensionais 2D (c) e unidimensionais (d).	41
Figura 8 – Fluxograma metodo	54
Figura 9 – Intervalos de retas não-coincidentes	55
Figura 10 – Modelo simplificado de câmera utilizando-se álgebra intervalar. Nesse caso, o centro da câmera C é um intervalo degenerado, porque a distância focal é um valor real.	60
Figura 11 – Modelo pinhole intervalar	61
Figura 12 – Estudo do custo computacional para as três etapas do método de calibração utilizando álgebra intervalar proposto e o custo computacional total. Nestas figuras são apresentados os resultados para o diâmetro dos intervalos adicionados aos pontos no plano de imagem de 0, 5 e 10 <i>pixels</i>	80

Figura 13 – Estudo do custo computacional para as três etapas do método de calibração utilizando álgebra intervalar, proposto, e o custo computacional total. Nestas figuras são apresentados os resultados para um ruído gaussiano branco de média zero e desvio padrão σ_p igual a 0, 5 e 10 <i>pixels</i> adicionados aos pontos no plano de imagem e um ruído gaussiano branco de média zero e desvio padrão σ_w variando de 0 a 500 mm no SCCG	83
Figura 14 – Cena 8 planos 1 Cam	84
Figura 15 – 4 pessoas aramado	85
Figura 16 – arquivo collada	86
Figura 17 – ponto camera ruido	88
Figura 18 – Interface programa	89
Figura 19 – Erro quadrático médio de projeção para os pontos e/ou intervalos projetados com os parâmetros recuperados pelo método de Bouguet e pela metodologia proposta. Todos os gráficos foram obtidos para os níveis de ruído $\sigma_w = 500mm$ e $\sigma_p = 10px$	94
Figura 20 – Porcentagem da distância dos parâmetros calculados dos ângulos de rotação para os parâmetros de referência. As Figuras (a), (c) e (d) representam a distância dos parâmetros de referência para a mediana dos parâmetros calculados. As Figuras (b), (d) e (e) a distância para os parâmetros de referência e para os parâmetros intervalares. As Figuras (a) e (b) representam a distância para o ângulo de rotação na direção X, (c) e (d) na direção Y e (e) e (f) na direção Z.	103
Figura 21 – Porcentagem da distância dos parâmetros calculados para os parâmetros de referência das distâncias focais. As Figuras (a) e (c) representam a distância dos parâmetros de referência para a mediana dos parâmetros calculados. As Figuras (b) e (d) a distância para os parâmetros de referência e para os parâmetros intervalares. As Figuras (a) e (b) representam a distância para o ângulo de rotação na direção X, (c) e (d) na direção Y.	104

Figura 22 – Porcentagem da distância dos parâmetros calculados das translações para os parâmetros de referência. As Figuras (a), (c) e (d) representam a distância dos parâmetros de referência para a mediana dos parâmetros calculados. As Figuras (b), (d) e (e) a distância dos parâmetros de referência e para os parâmetros intervalares. As Figuras (a) e (b) representam a distância para o ângulo de rotação na direção X , (c) e (d) na direção Y e (e) e (f) na direção Z	105
Figura 23 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou o erro quadrático médio de projeção, menor do que a aplicação de Bouguet quando projetados pontos de referência não intervalares do SCCG no plano de imagem pelos parâmetros calculados.	106
Figura 24 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou o erro quadrático médio de projeção menor do que o método de Bouguet quando projetados intervalos com ruído do SCCG no plano de imagem pelos parâmetros calculados.	107
Figura 25 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou os parâmetros de distância focal da câmera com uma distância menor para os parâmetros de referência do que o método de Bouguet.	108
Figura 26 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou o parâmetro de rotação da câmera para, o eixo X , com uma distância menor para os parâmetros de referência do que o método de Bouguet.	109
Figura 27 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou o parâmetro de rotação da câmera, para o eixo Y , com uma distância menor para os parâmetros de referência do que o método de Bouguet.	110
Figura 28 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou o parâmetro de rotação da câmera para, o eixo Z , com uma distância menor para os parâmetros de referência do que o método de Bouguet.	111

Figura 29 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou os parâmetros de translação da câmera, para o eixo X , com uma distância menor para os parâmetros de referência do que a aplicação de Bouguet.	112
Figura 30 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou os parâmetros de translação da câmera, para o eixo Y , com uma distância menor para os parâmetros de referência do que a aplicação de Bouguet.	113
Figura 31 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou os parâmetros de translação da câmera, para o eixo Z , com uma distância menor para os parâmetros de referência do que a aplicação de Bouguet.	114
Figura 32 – Vetor intervalar	131

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Quatro diferentes grupos da geometria projetiva, mostrando as transformações permitidas em cada uma delas e as propriedades que permanecem invariantes (FAUGERAS et al., 2001).	15
Tabela 2 – Comparativo e relação dos métodos de calibração existentes no estado-da-arte com o trabalho proposto.	42
Tabela 3 – Comparativo e relação dos métodos de calibração existentes no estado-da-arte com o trabalho proposto.	45
Tabela 4 – Comparativo e relação dos métodos de calibração existentes no estado-da-arte com o trabalho proposto.	48
Tabela 5 – Tabela contendo os valores dos parâmetros utilizados pelo algoritmo de otimização proposto, baseado em álgebra intervalar. . .	91
Tabela 6 – Tabela que contém os valores dos parâmetros utilizados em todas as execuções do algoritmo genético.	92
Tabela 7 – Porcentagem de vezes em que o método apresentado levou a resultados cujos erros quadráticos médio intervalares foram menores que aqueles calculados utilizando-se álgebra real quando foram mantidos os parâmetros que levaram a menores erros médios de projeção na etapa não linear.	99
Tabela 8 – Porcentagem de vezes em que o método proposto obteve erros quadráticos médios menores quando mantido os intervalos que levaram ao menor valor mediano do erro de projeção na etapa não linear.	101
Tabela 9 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou parâmetros de calibração que levaram a erros menores do que a aplicação de Bouguet para todos os experimentos quando utilizados intervalos de pontos SCCG para calibração.	101
Tabela 10 – Tabela operações em intervalos	126
Tabela 11 – Operações sobre vetores intervalares	131

Lista de Algoritmos

Algoritmo 1 – Algoritmo para determinação do mínimo global de uma função intervalar.	29
Algoritmo 2 – Algoritmo para determinação do mínimo global de uma função por meio da álgebra intervalar.	34
Algoritmo 3 – Algoritmo para testar se o diâmetro máximo do intervalo das componentes do vetor $\mathbf{X}$ é menor que um limite ϵ_x definido pelo usuário. E também se o diâmetro do intervalos do valor da função objetivo Φ é menor que um valor ϵ_f também definido pelo usuário.	38
Algoritmo 4 – Algoritmo para verificação se o diâmetro das componentes do vetor $\mathbf{X}$ foram reduzidos.. . . .	38
Algoritmo 5 – Algoritmo utilizado para determinação das raízes intervalares de uma função racional quadrática intervalar.	73
Algoritmo 6 – Algoritmo de calibração de câmeras utilizando álgebra intervalar.	77

Lista de Abreviaturas e Siglas

DECOM	Departamento de Computação
SCCG	Sistema de Coordenadas Cartesianas Globais

Lista de Símbolos

ω	Diâmetro de um intervalo
σ	Desvio padrão do ruído gaussiano branco com média zero.
$\tilde{x}$	Intervalo
$\tilde{\mathbf{x}}$	Vetor intervalar
$\tilde{A}$	Matriz intervalar

Sumário

1 – Introdução	1
1.1 Definição do problema de pesquisa	6
1.2 Motivação	7
1.3 Objetivos: Geral e Específicos	10
1.4 Contribuições	11
1.5 Organização do Texto	12
2 – Fundamentação Teórica	13
2.1 Conceitos fundamentais	14
2.1.1 Geometria projetiva	15
2.1.2 Retas e planos no Infinito	17
2.2 Modelo geométrico de câmeras	18
2.3 Álgebra de intervalos	21
2.3.1 Funções intervalares	22
2.3.1.1 Funções racionais intervalares	24
2.3.2 Solução de sistemas de equações lineares intervalares sobre-	
determinados	25
2.3.3 Otimização global	28
3 – Trabalhos Relacionados	39
3.1 Métodos baseados em Alvos de Calibração 3D	40
3.2 Métodos Baseados em Alvos de Calibração 2D	45
3.3 Métodos Baseados em Alvos de Calibração 1D	48
3.4 Métodos Não Baseados em Alvos de Calibração	50
4 – Método proposto	53
4.1 Álgebra intervalar no espaço projetivo	53
4.1.1 Transformações projetivas	57
4.1.2 Modelo <i>pinhole</i> de câmera baseado em álgebra intervalar	59
4.2 Método de calibração intervalar	68

5 – Resultados Experimentais	78
5.1 Métricas de Avaliação	78
5.2 Custo Computacional	79
5.3 Cena Sintética	84
5.3.1 Análise dos Resultados	92
5.4 Discussão	98
6 – Conclusões	115
Referências	118

Apêndices **124**

APÊNDICE A – Conceitos básicos em álgebra intervalar	125
A.1 Operações sobre intervalos	126
A.2 Propriedades algébricas	126
A.3 Interseção, União e Envelope de intervalo (<i>Interval Hull</i>)	130
A.4 Vetores intervalares	130
A.5 Matrizes intervalares	132

Capítulo 1

Introdução

Em visão computacional, calibração de câmeras é uma etapa fundamental, sendo utilizada em diversos tipos de aplicações, tais como robótica ([MOULARD et al., 2012](#)), sistemas de vigilância ([GÓMEZ et al., 2015](#)), sistemas de manufatura integrada por computador ([LI et al., 2012](#)), reconstrução de cena 3D ([BENNETT et al., 2014](#)), formação de imagens panorâmicas ([JUAN; GWUN, 2010](#)), entre outras ([BRÜCKNER et al., 2013](#)). Devido a isso e ao visível aumento da utilização de imagens nos últimos anos, haja visto o grande número de equipamentos que possuem sensores de imagem integrados, é essencial que existam técnicas de calibração de câmeras robustas para os novos e diferentes desafios de utilização. Entre as características desejáveis, destacam-se maior tolerância aos ruídos e à inexistência de alvos de calibração na cena. Essas propriedades são difíceis de se obter com as metodologias de calibração atualmente existentes ([WILDENAUER; HANBURY, 2012](#)). Nesse contexto, este trabalho propõe o desenvolvimento de um novo método de calibração de câmeras, baseado em álgebra intervalar, que apresente resultados que possuam significado geométrico, mesmo em cenários nos quais os dados de entrada estejam corrompidos por ruídos expressivos ou não existam alvos de calibração apropriados.

O processo de calibração é fundamental em toda aplicação que necessita da obtenção de medidas geométricas a partir de imagens. Em linha gerais, durante esse processo, para uma câmera são estimados dois conjuntos principais de parâmetros, quais sejam: parâmetros intrínsecos e parâmetros extrínsecos. Na [Figura 1](#)

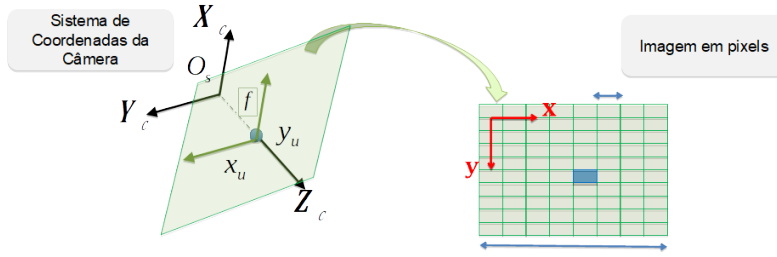


Figura 1 – Representação esquemática da transformação realizada pela matriz de parâmetros intrínsecos.

é possível ver a representação esquemática da transformação realizada pelos parâmetros intrínsecos. Os parâmetros intrínsecos são responsáveis por realizar a transformação de pontos em um sistema de coordenadas fixado na câmera para suas localizações em *pixels* no plano de imagem. Esses parâmetros serão melhor descritos na [Seção 2.2](#), mas são representados por uma matriz triangular superior na seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na matriz de parâmetros intrínsecos, α_x e α_y são as distâncias focais nas direções x e y . x_0 e y_0 as localizações em *pixels* do centro da imagem. O termo A_{12} seria o ângulo oblíquo. Esse é o ângulo entre o plano de imagem e a orientação do sensor de imagem. Em todas as aplicações apresentadas nesta tese, esse ângulo é igual a zero, sendo, então, assim representado na matriz A .

Os parâmetros extrínsecos, por sua vez, são representados esquematicamente na [Figura 2](#). Esses são responsáveis por realizar a transformação geométrica entre um Sistema de Coordenadas Cartesianas Globais (SCCG) de referência e o sistema de coordenadas da câmera. A matriz de parâmetros extrínsecos é formada pela concatenação de uma matriz $R_{3 \times 3}$ de rotação e um vetor de translação t . A matriz de rotação realiza a rotação do SCCG para que a orientação coincida com o sistema de coordenadas fixado na câmera. O vetor de translação é um vetor tridimensional

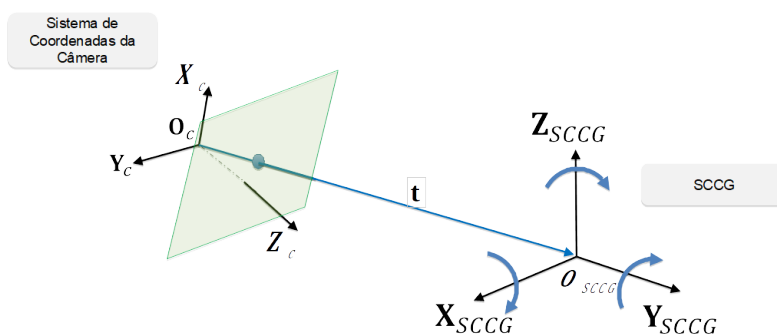


Figura 2 – Representação esquemática da transformação realizada pela matriz de parâmetros extrínsecos.

que é responsável pelo deslocamento da origem do SCCG para que este também coincida com o sistema de eixos coordenados fixados na câmera.

A calibração é realizada utilizando-se as localizações dos pontos de calibração no SCCG e suas respectivas projeções no plano de imagem. As formas mais comuns de se obter essas localizações são por meio do *alvo de calibração*, um objeto com geometria conhecida que pode ser detectado automaticamente, ou por meio de objetos e formas presentes naturalmente na cena, como pessoas, carros, prédios entre outros. A necessidade de inserir objetos na cena pode dificultar ou mesmo impedir que a calibração seja realizada. Um exemplo seria um filme antigo no qual as imagens já foram capturadas no passado e do qual precisa-se realizar medidas da cena. Sendo assim, ao se utilizar objetos presentes naturalmente na cena, a calibração é facilitada, podendo ser realizada sob condições nas quais a calibração com *alvos de calibração* não é possível, como regiões de visualização muito grandes, da ordem de centenas de metros ou quilômetros, ou quando há variação constante dos conjuntos de parâmetros.

Em muitas aplicações, como a desenvolvida por Grum e Bors em (GRUM; BORS, 2014), utilizada para determinar o modelo tridimensional de objetos presentes em uma cena, o conjunto de parâmetros intrínsecos da câmera é fixo durante todo o ciclo de operação. Nessa aplicação, a região do espaço tridimensional visualizada pela câmera é pequena, da ordem de metros ou centímetros; isso torna mais fácil o processo de determinação dos parâmetros intrínsecos e extrínsecos. Assim sendo,

a calibração pode ser realizada apenas no início da operação do equipamento. Em algumas aplicações, no entanto, os parâmetros intrínsecos variam durante todo ciclo de operação. Um exemplo são as aplicações nas câmeras de vigilância (GÓMEZ et al., 2015), nas quais isso ocorre quando é necessária a visualização mais detalhada de alguma região. Em eventos esportivos, outro exemplo, são utilizadas câmeras nas quais os parâmetros intrínsecos variam quando se torna necessária uma ampliação na imagem para verificar ocorrência de algum evento, como um gol em uma partida de futebol (ALEMÁN-FLORES et al., 2014). Tanto no exemplo das câmeras de vigilância, quanto no dos eventos esportivos, uma técnica de calibração que utiliza *alvos de calibração* seria ineficiente, pois não é possível, a todo instante, posicionar esses alvos no ambiente da cena. Já em outros exemplos de aplicações, os parâmetros intrínsecos podem variar devido às condições hostis de utilização da câmera, como na aplicação sugerida por Kim et al. em (KIM et al., 2007), na qual são utilizadas câmeras para monitoramento de alto-forno de cimento. Além disto, a câmera, como todo equipamento eletrônico, sofre deterioração natural de seus componentes mecânicos e eletrônicos. Devido a essas condições, o conjunto de parâmetros intrínsecos torna-se sem sentido. Uma forma de calibração que não exige a utilização de alvos de calibração tornaria o processo mais simples, podendo, assim, aumentar o número de aplicações que utilizam câmeras para recuperação de medidas geométricas da cena.

Um método de calibração eficiente, no sentido de produzir matrizes de parâmetros intrínsecos e extrínsecos com erros que não invalidem a utilização dos parâmetros geométricos recuperados por meio de imagens, e que seja robusto para as condições da cena visualizada ainda representa um grande desafio. Há processos de calibração eficientes, mas fortemente dependentes das localizações dos pontos na cena e na imagem, por isso necessitam de alvos com localização precisa dos pontos. Uma metodologia eficiente de calibração de câmeras que flexibilize as necessidades de localização dos pontos não seria utilizada apenas em sistemas dinâmicos nos quais a câmera muda seus parâmetros intrínsecos e extrínsecos constantemente. Também seria utilizada naqueles em que há dificuldade ou até mesmo impossibilidade de se realizar o processo de calibração utilizando alvos.

Visando o desenvolvimento de tal tipo de metodologia, o presente trabalho propõe a utilização da chamada álgebra de intervalos ou álgebra intervalar (MOORE et al., 2009). A utilização da álgebra intervalar para a solução de problemas envolvendo visão computacional neste trabalho foi motivada pelo fato de imagens do mundo infinito serem amostras do mundo em um intervalo fechado, do tamanho da resolução da imagem.

Inicialmente, a álgebra intervalar foi pensada para tratar problemas relacionados a erros nas medidas dos dados (MOORE et al., 2009). No entanto, têm surgido recentemente novas aplicações que utilizam essa álgebra não apenas para solução do problema de arredondamento dos erros, mas também como parte integrante da solução do problema. Alguns exemplos são Mudrova e Hawes (MUDROVA; HAWES, 2015), que propõem uma técnica baseada em álgebra intervalar para agendamento de tarefas de robôs, e Jan et al. (JAN et al., 2013), que publicaram a patente de um produto no qual a álgebra intervalar foi usada para determinação de erros em algoritmos de acesso a bancos de dados. Naquele trabalho, os autores expuseram um método, também alicerçado em álgebra intervalar, para ordenamento de mapas cognitivos, baseado em ordenamento de marcos terrestres em segmentos de ruas ao longo de uma rota. Em Samany et al. (2014), tem-se uma técnica de álgebra intervalar aliada à lógica Fuzzy para o modelamento de relevância de espaços em sistemas utilizados em ambientes urbanos. Esses representam exemplos em diferentes áreas do conhecimento, mostrando o potencial na utilização da álgebra intervalar.

O que difere a álgebra intervalar da álgebra real é que nesta última são usados números reais, enquanto na primeira utilizam-se regiões ou intervalos do espaço sobre os quais são efetuadas as operações de interesse. Desta forma, acredita-se que a álgebra intervalar é a ferramenta que melhor será adaptada para a utilização na solução do problema de calibração, que será tratado nesta pesquisa.

1.1 Definição do problema de pesquisa

Aborda-se neste trabalho o problema de se estimar as matrizes de parâmetros intrínsecos e extrínsecos associadas a uma câmera por meio do conhecimento prévio aproximado das formas de objetos que compõem a cena visualizada. O processo de obtenção desses parâmetros é comumente chamado na literatura de calibração de câmeras. Para tanto, propõe-se uma nova metodologia fundamentada na utilização de ferramentas matemáticas baseadas em álgebra intervalar (MOORE et al., 2009). São apresentados nesta tese definições e teoremas necessários e responsáveis por realizar as adaptações necessárias à utilização da álgebra intervalar na calibração de câmeras.

A seguir, são apresentadas algumas definições, considerações e restrições tratadas nesta tese para permitir o adequado entendimento da abordagem proposta. A abordagem de calibração proposta dispensa uma eventual etapa preliminar de interação com o usuário, fato comum em diversos métodos utilizados em calibração de câmera. Especialmente, essa independência da interação com o usuário pode ser alcançada a partir da utilização de informações *a priori* acerca de formas de objetos presentes na cena tridimensional visualizada. Objeto é tudo aquilo que está presente na cena tridimensional, como pessoas, carros, árvores, entre outros, os quais são visualizados por meio do sensor de imagem. Neste trabalho, define-se cena tridimensional como sendo o ambiente contendo objetos planares ou não planares, incluindo-se também a câmera utilizada na obtenção das imagens. As cenas não são limitadas pelo campo de visualização da câmera, mas sim pela região de interesse do espaço tridimensional. Definem-se cenas planares como sendo aquelas em que todos os objetos estão em um mesmo plano – não coincidente com o plano de imagem – e possuem altura igual a zero. Já as cenas não planares são aquelas em que os objetos podem estar localizados em qualquer plano diferente do plano de imagem e possuem altura diferente de zero. Neste trabalho, assume-se ainda que a cena possui regiões com diferentes matizes de cores ou, ainda, texturas diferentes, na qual é possível identificar de forma única uma região na imagem que contenha no mínimo quatro intervalos de pontos. Esses devem ser ainda não colineares três a três. Nas operações de otimização envolvendo intervalos, será utilizada aritmética

intervalar estendida, que será detalhada na seção de fundamentação teórica, mas trata da utilização de intervalos cujos limites podem ser infinitos, positivo ou negativo.

Com a finalização desta tese, apresenta-se uma nova técnica de calibração baseada na álgebra intervalar, capaz de tratar calibrações utilizando apenas uma imagem e produzir resultados com erros adaptáveis às necessidades específicas de cada aplicação. Essa flexibilização ocorre porque a álgebra intervalar possibilita encontrar a solução em um intervalo que chegará mais perto da solução ótima em comparação aos métodos que utilizam a álgebra real, independente do diâmetro do intervalo dos parâmetros encontrados no processo de calibração. Sendo assim independente do diâmetro dos parâmetros determinados pelo método estes terão os seus limites mais próximos dos valores reais que aqueles determinados utilizando álgebra real.

1.2 Motivação

A partir dos sensores de imagem, é possível obter-se, por exemplo, informações sobre textura, localização e forma dos objetos presentes no ambiente visualizado. Além disso, a qualidade dos sensores de imagem tem aumentado constantemente, e o preço tem sido reduzido de forma inversamente proporcional à qualidade. Como resultado desses dois fatores, uma grande quantidade de aplicações surgem e se beneficiam desse tipo de sensoriamento (BRÜCKNER et al., 2013). Essas aplicações extraem tanto informações mais simples, como a identificação de diferentes regiões presentes na cena, quanto informações mais complexas, como o reconhecimento de uma pessoa presente na cena ou a localização de objetos no SCCG. Esta última representa o foco principal deste trabalho. A Figura 3 mostra exemplos de aplicações nas quais potencialmente pode ser utilizada técnica de calibração. A álgebra intervalar tem muito a contribuir para aplicações como as citadas aqui, pois, ao flexibilizar a obtenção dos dados de calibração, permite que esse processo seja realizado de forma dinâmica. Isso seria importante em aplicações com grande dinamismo, como as descritas a seguir.

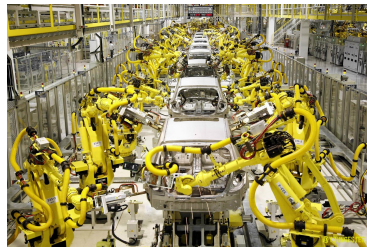
Em visão computacional, uma das mais interessantes aplicações recentes que envolvem a obtenção de informações geométricas da cena é a dos carros autônomos



(a) (SILVA et al., 2010)



(b) (STANFOR... , 2010)



(c) (NORTH... , 2014)

Figura 3 – Equipamentos que utilizam sensores de imagem para recuperação de medidas geométricas da cena e se beneficiariam da metodologia de calibração proposta. Na Figura (a) tem-se um robô submarino utilizado para exploração de petróleo, (b) um carro autônomo e (c) robôs industriais utilizado na manufatura de veículos.

(JO et al., 2015). Nessa aplicação, é fundamental a localização do carro em relação a um sistema de coordenadas, cuja origem é fixada em algum ponto no mundo, para que seja possível, por exemplo, o planejamento de rotas. Jo et al. (JO et al., 2015) mostram uma aplicação para localização de um carro autônomo, na qual múltiplas câmeras são aliadas a outros tipos de sensores a fim de determinar a localização exata do veículo na estrada. Nesse caso, as câmeras são fixas e possuem os parâmetros intrínsecos fixos. Assim sendo, elas são previamente calibradas, e não se consideram efeitos de variações nos parâmetros intrínsecos das câmeras utilizadas ao longo do tempo. Isso pode fazer com que erros acumulados em um período longo de utilização tornem as medidas feitas pelo sistema visual inconsistentes, o que pode causar erros de cálculo de rotas. Um algoritmo de calibração mais robusto e flexível para determinação desses parâmetros diminuiria o erro e tornaria, novamente, as medidas consistentes. O processo de calibração automática proposto neste trabalho poderia ser utilizado baseando-se no reconhecimento de objetos

presentes na cena, cujos intervalos das dimensões são previamente conhecidos, como placas de trânsito ou pessoas.

Outra aplicação de grande repercussão nas últimas décadas são os robôs humanoides. Leitner et al. (LEITNER et al., 2013) utilizam câmeras em robôs humanoides com o objetivo de fazer a localização e o planejamento de movimento deles baseando-se apenas nos dados fornecidos por sensores localizados nas juntas e também de câmeras. Nessa aplicação, os autores utilizam um sistema de visão estéreo, localizado na cabeça do robô, para fornecer dados de localização no SCCG. Nesse caso, são considerados as câmeras previamente calibradas e os parâmetros intrínsecos fixos. Desse modo, elimina-se, novamente, a possibilidade de alteração desses parâmetros, o que torna inviável, por exemplo, a localização mais detalhada de um objeto de referência ao se utilizar uma ampliação (*zoom*) em uma determinada região da imagem. Além disso, nessa aplicação é considerado um pequeno período de utilização do robô. Em uma situação real, porém, esse mesmo robô poderia ser utilizado por dias ou até anos, caso em que os efeitos cumulativos dos erros de localização, gerados por falhas causadas por erros nos parâmetros intrínsecos das câmeras, poderiam não ser desprezíveis.

Atualmente, foto turismo (do inglês *photo tourism*) é uma aplicação com significativo número de trabalhos (KATO et al., 2017). Imagens obtidas em sites da internet são usadas nessa aplicação para reconstrução tridimensional de lugares turísticos. O principal objetivo é que as pessoas possam ter a sensação de estarem no ambiente, mesmo estando diante da tela de um computador. Um exemplo dessa aplicação é mostrado no trabalho de Kuse e Jaiswal (2015). A modelagem de ambiente 3D é feita baseando-se em grafos e, a partir desse modelo, determina-se a relação entre as cores dos diferentes objetos da cena para que a transformação delas, ao longo das imagens obtidas do monumento turístico, tornem-se mais suaves e, assim, a reconstrução mais real. Esses algoritmos são baseados em métodos de calibração que utilizam múltiplas vistas, algumas vezes chamados de métodos de autocalibração, mas que utilizam informações da cena, como a localização geográfica da câmera no momento da captura da foto.

Como mostrado nos exemplos acima, processos de calibração de câmeras que não

utilizam alvos de calibração (*calibração automática*) e demandam maior robustez frente a ruídos são úteis em muitas aplicações baseadas em visão computacional. No entanto, apesar dessa importância, ainda não há uma solução suficientemente eficaz para tais problemas, por isso ainda existe um campo aberto para o desenvolvimento de novas técnicas.

1.3 Objetivos: Geral e Específicos

O objetivo principal desta tese foi desenvolver um novo método para calibração de câmeras suficientemente robusto frente a ruídos severos nos dados de entrada. Tem-se como objetivo também que o método proposto seja ajustável à exatidão dos dados fornecidos por objetos presentes na cena e projetados nas imagens capturadas. Como este novo método de calibração é baseado em álgebra intervalar, tem-se como objetivo ainda a apresentação de definições e teoremas que visam viabilizar a aplicação de conceitos relacionados à álgebra intervalar no espaço projetivo, já que a determinação dos parâmetros de calibração ocorre nesse espaço geométrico.

Para tanto, os objetivos específicos foram atingidos:

- Estudou-se a fundamentação teórica relativa à álgebra intervalar e identificar como essa abordagem matemática pode ser aplicada ao contexto de calibração de câmeras.
- Propôs-se um conjunto de modificações necessárias à calibração de câmeras e inexistente no estado da arte de álgebra intervalar e geometria de imagens. Modificações essas que permitem a modelagem da solução do problema de calibração de câmeras baseado em álgebra intervalar.
- Avaliou-se a exatidão e a eficiência do método de calibração proposto comparando-o com uma metodologia de calibração existente. A metodologia escolhida para comparação foi a apresentada por Jean-Yves Bouguet, que apresenta uma modificação na metodologia implementada por Zhang ([ZHANG, 2000](#)).

1.4 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são listadas a seguir:

- Um novo método para calibração de câmeras, baseado no conhecimento aproximado da geometria de objetos na cena, que seja capaz de produzir resultados com erros menores que a ordem de grandeza das medidas.
- Um novo método de otimização baseado em álgebra de intervalos, cujo objetivo é a determinação da geometria tridimensional de uma cena por meio da estimativa do conjunto de parâmetros intrínsecos e extrínsecos da câmera utilizada em sua visualização.
- Um novo arcabouço matemático para aplicação dos conceitos de álgebra intervalar no espaço projetivo.
- Um *framework* em C/C++ para utilização de álgebra intervalar em programação orientada à objeto, capaz de ser facilmente adaptado e integrado à outras aplicações, inclusive não propostas pelos autores.

Apesar de ser uma álgebra proposta há décadas, a álgebra intervalar não havia sido utilizada anteriormente para solução de problemas de determinação da geometria tridimensional da cena por meio de imagens. Há outros trabalhos que utilizam a análise intervalar como ferramenta de otimização, mas esses não consideram todas as nuances da aplicação da álgebra intervalar desde o início do processo de calibração. Esse caminho tem se mostrado promissor, pois imagens são, naturalmente, contidas em intervalos fechados, do tamanho da sua resolução, o que faz com que a álgebra intervalar seja bastante adequada. Mesmo assim, a utilização de álgebra intervalar para determinação da geometria da cena envolve alguns desafios, tornando-se necessárias adaptações. Essas adaptações, cuja importância não se prende apenas à geometria da cena, servem de base para métodos a serem aplicados em outras áreas como, por exemplo, processamento de imagens.

1.5 Organização do Texto

Este trabalho está organizado em sete capítulos, incluindo a introdução. O [Capítulo 2](#) apresenta uma fundamentação teórica com a descrição de conceitos, técnicas e ferramentas que subsidiam ou que fundamentam a metodologia de calibração de câmeras proposta. No [Capítulo 3](#), é apresentada uma revisão dos principais trabalhos relacionados, os quais representam o estado da arte no âmbito do problema de calibração de câmeras. O [Capítulo 4](#) apresenta a metodologia proposta para calibração de câmeras. Encontra-se, no [Capítulo 5](#), a descrição do planejamento, organização e divisão dos experimentos, realizados neste trabalho; conjunto de imagens –base de dados – utilizadas; dados de referência (*ground-truth*) da geometria da cena; métricas de avaliação e análise dos experimentos que foram realizados. No [Capítulo 6](#), apresentam-se as conclusões, bem como as propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo são introduzidos alguns dos principais conceitos e técnicas que fundamentam o desenvolvimento da metodologia proposta, e são usados como base teórica os seguintes temas: (1) calibração de câmeras, (2) geometria projetiva e (3) álgebra de intervalos. Cada um desses tópicos é abordado separadamente em uma seção específica a seguir.

Na obtenção de medidas geométricas por meio de imagens, a utilização da geometria euclidiana é bastante limitada. Essas limitações se devem às transformações presentes, que não são capazes de recuperar todas as transformações perspectivas encontradas na captura de imagens. Sendo assim, são necessários alguns métodos matemáticos mais adaptados a essa finalidade. O que se pretende com este capítulo é fazer uma introdução a esses métodos, assim como apresentar e discutir conceitos úteis para o desenvolvimento de um método de calibração de câmeras. Na [Seção 2.1](#) há alguns conceitos matemáticos fundamentais para o entendimento do processo de calibração, assim como da metodologia proposta. Esses conceitos envolvem principalmente a aplicação da geometria projetiva que é adequada ao tratamento da geometria de imagens. Na [Seção 2.2](#) apresenta-se o modelo geométrico de câmeras, mais especificamente, o modelo pinhole, único utilizado neste trabalho. Como parte integrante da metodologia proposta, têm-se que essa baseia-se não apenas na geometria projetiva, mas também em conceitos e técnicas da álgebra intervalar. Finaliza-se este capítulo, então, com a [Seção 2.3](#), que contém alguns

conceitos avançados de álgebra intervalar, deixando para o leitor interessado a busca nos apêndices para conceitos básicos sobre este assunto.

2.1 Conceitos fundamentais

Calibração de câmeras é o processo pelo qual se faz câmeras tornarem-se mediadores de coordenadas ou distâncias. Esse processo se dá via o uso de geometria projetiva, cujas matrizes de transformação têm seus elementos dependentes de parâmetros. Os parâmetros associados à posição da câmera em relação ao mundo são chamados parâmetros extrínsecos, e os parâmetros de construção da câmera são chamados parâmetros intrínsecos. Para isso, utiliza-se o conhecimento prévio das localizações de pontos no SCCG de referência e suas correspondentes localizações no plano de imagem ([HARTLEY; ZISSERMAN, 2000](#)). A calibração por meio da álgebra intervalar tem o potencial de evitar a tarefa, onerosa ao usuário, de fornecer esses pontos correspondentes tanto na imagem quanto no SCCG.

A captura de imagens envolve essencialmente projeções bidimensionais (2D) de cenas tridimensionais (3D). Assim sendo, uma dimensão é perdida no processo de projeção. Apesar de a geometria euclidiana descrever bem o mundo em que vivemos, ela não é capaz de capturar todas as relações existentes na projeção de pontos da cena no plano de imagem. Na geometria euclidiana, as propriedades tamanhos dos lados dos objetos, ângulo entre retas e a não interseção de retas paralelas no mesmo plano não se alteram quando uma transformação euclidiana é aplicada. Por outro lado, na projeção, tamanhos e ângulos de segmentos de retas não são preservados, e retas paralelas se interceptam em um ponto do espaço projetivo. Daí a necessidade de introdução de uma nova geometria com grupos algébricos específicos para tratar o problema da projeção em imagens, a qual é chamada de geometria projetiva.

Os grupos da geometria projetiva foram definidos de acordo com as propriedades que permanecem invariantes a determinadas transformações. A [Tabela 1](#) mostra as transformações que podem ser aplicadas em cada grupo da geometria juntamente com as características geométricas que são invariantes às transformações.

		Geometrias			
		Euclidiana	Similaridade	Afim	Projetiva
Transformações	Rotação	✓	✓	✓	✓
	Translação	✓	✓	✓	✓
	Escala uniforme	–	✓	✓	✓
	Escala não uniforme	–	–	✓	✓
	Projeção perspectiva	–	–	–	✓
Propriedades Invariantes	Tamanhos dos segmentos	✓	–	–	–
	Ângulos	✓	✓	–	–
	Relações entre tamanhos	✓	✓	–	–
	Paralelismo	✓	✓	✓	–
	Incidência	✓	✓	✓	✓
	Taxa cruzada	✓	✓	✓	✓

Tabela 1 – Quatro diferentes grupos da geometria projetiva, mostrando as transformações permitidas em cada uma delas e as propriedades que permanecem invariantes (FAUGERAS et al., 2001).

2.1.1 Geometria projetiva

Geometria projetiva é a que modela as transformações perspectivas presentes quando se captura uma imagem bidimensional de uma cena que é tridimensional. O espaço projetivo de dimensão n , $\mathbb{P}^n$, é o espaço quociente $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0_{n+1}\}$, dado pela relação de equivalência (FAUGERAS et al., 2001):

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_{n+1}]^\top &\sim [x'_1, \dots, x'_{n+1}]^\top \Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0 \\ [x_1, \dots, x_{n+1}]^\top &= \alpha [x'_1, \dots, x'_{n+1}]^\top. \end{aligned} \quad (1)$$

Isto significa que $(n + 1)$ -tuplas proporcionais com coordenadas homogêneas $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{n+1}]^\top$ e $\mathbf{x}' = [x'_1, \dots, x'_{n+1}]^\top$ representam o mesmo ponto no espaço projetivo.

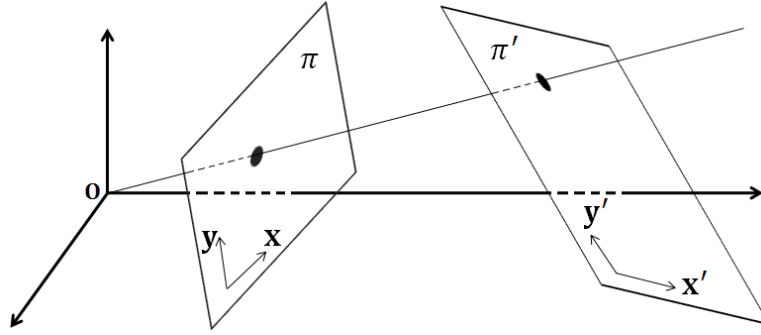


Figura 4 – Homografia entre dois hiperplanos do espaço tridimensional.

Os grupos derivados da geometria projetiva são, principalmente, definidos pelas transformações geométricas, que são realizadas no espaço projetivo. Qualquer transformação H de $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{P}^n$ que seja invertível e linear em coordenadas projetivas é denominada *homografia*.

A Homografia é representada por uma matriz não singular H de dimensão $(n + 1) \times (n + 1)$ tal que a imagem x' do conjunto de domínio x é representada por:

$$x'_i = Hx_i. \quad (2)$$

Essa é uma relação linear, cuja consequência básica é que as homografias fazem o mapeamento de hiperplano para hiperplano. A [Figura 4](#) ilustra uma transformação entre pontos de dois hiperplanos do espaço tridimensional.

No espaço projetivo bidimensional, pontos e retas são representados por vetores homogêneos em $\mathbb{R}^{2+1}$, definidos como sendo pertencentes ao $\mathbb{P}^2$. Por exemplo, um ponto x é representado por: $(x_1, x_2, x_3)^\top$; e uma reta l , por: (a, b, c) . A mesma representação pode ser estendida para pontos e planos no espaço $\mathbb{P}^3$, que são representados por vetores homogêneos em $\mathbb{R}^{3+1}$. Pode-se ver, então, que pontos e hiperplanos são representados por vetores de $n + 1$ dimensões, cuja consequência direta é o princípio da dualidade.

O princípio da dualidade descrito em ([FAUGERAS et al., 2001](#)) diz que os teoremas, que se aplicam a pontos, também podem ser aplicados a hiperplanos, substituindo-se a palavra ponto pelo hiperplano correspondente. Então, as equações de incidência dizem que os teoremas, que se aplicam a pontos, também podem ser aplicados a

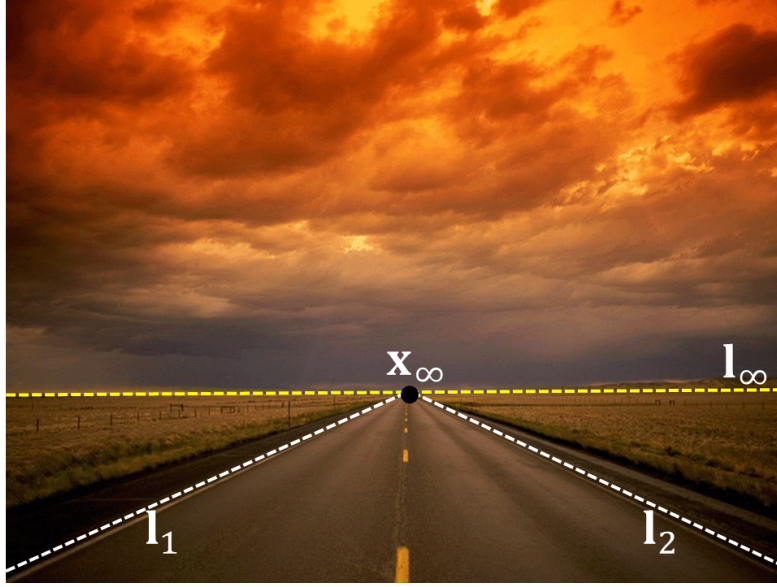


Figura 5 – Retas e planos paralelos da cena que se interceptam em um ponto e reta, respectivamente, na imagem.

hiperplanos, substituindo-se a palavra ponto pelo hiperplano correspondente. Então, as equações de incidência entre pontos e hiperplanos são simétricas:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^\top \mathbf{x} = 0 &= \mathbf{x}^\top \mathbf{l}, \\ \pi^\top \mathbf{x} = 0 &= \mathbf{x}^\top \pi, \end{aligned}$$

onde, π e $\mathbf{l}$ são vetores que representam planos e retas, que são hiperplanos de $\mathbb{P}^3$ e $\mathbb{P}^2$, respectivamente (FAUGERAS et al., 2001).

2.1.2 Retas e planos no Infinito

Ao observar a imagem de uma cena contendo duas retas que são paralelas no SCCG, vê-se que elas se interceptam em um ponto no plano de imagem. Na Figura 5, observa-se que as retas $\mathbf{l}_1$ e $\mathbf{l}_2$ se encontram em um ponto $\mathbf{x}_\infty$. Tais retas são coincidentes com as projeções no plano de imagem das retas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$, que são paralelas entre si e entre as laterais da estrada no SCCG. Representando-se o céu e a superfície da terra por planos, observa-se que esses também são paralelos e que, na imagem, se interceptam em uma reta; na imagem rotulada por $\mathbf{l}_\infty$.

Inicialmente, consideram-se os vetores de direção que representam as retas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ na cena como sendo $[A, B, C_1]$ e $[A, B, C_2]$, respectivamente, em coordenadas não homogêneas. Para determinar o ponto de interseção entre elas na cena, pode-se utilizar o produto vetorial $(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2)$, o que resulta em um ponto de coordenadas $(C_2 - C_1)(B, -A, 0)$. Ignorando-se o fator de escala $(C_2 - C_1)$, tem-se $(B, -A, 0)$. Caso se resolva determinar a representação deste ponto em coordenadas não-homogêneas, tem-se $(B/0, -A/0)^\top$, que não é um ponto real. Todavia, quando se considera o $\lim_{C \rightarrow 0} B/C$ tem-se que esse limite tende para infinito. O mesmo vale para $\lim_{C \rightarrow 0} A/C$, o que leva a ideia usual de que retas paralelas se interceptam no infinito. Pontos, em coordenadas homogêneas, com a última coordenada igual a zero, são chamados de *pontos no infinito* e representados com $\mathbf{x}_\infty$. Da mesma forma, pode-se considerar quando se tem planos paralelos. Entretanto, a interseção não é um ponto e, sim uma reta chamada de *reta no infinito* e representada por $\mathbf{l}_\infty$. Um ponto no plano infinito representa a direção de retas paralelas, uma vez que, independente da posição que cada uma delas ocupa no plano a que pertence, sempre se interceptam no mesmo ponto do plano infinito. O mesmo conceito pode ser aplicado a planos paralelos.

Vetores homogêneos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})^\top$ com $x_{n+1} \neq 0$ correspondem a pontos finitos em $\mathbb{R}^{n+1}$. Sendo adicionado pontos cuja última coordenada assume valor igual a zero ($x_{n+1} = 0$), o espaço resultante é o composto por todos os pontos homogêneos do espaço $\mathbb{P}^n$. O conjunto de pontos de $\mathbb{P}^n$, cuja a última coordenada é igual a zero, pertence ao hiperplano infinito, este hiperplano possui uma representação vetorial com a última coordenada igual a 1, $\pi = (0, 0, \dots, 1)^\top$. O hiperplano de $\mathbb{P}^3$, formado apenas por pontos no infinito, é denominado *plano infinito* e aqui representados por π_∞ .

2.2 Modelo geométrico de câmeras

O modelo mais simples de câmera é o *pinhole*, que desconsidera parâmetros de distorção introduzidos pela lente da câmera. A representação geométrica desse modelo é mostrada na [Figura 6](#). O mapeamento de um ponto $\mathbf{X}$, representado no sistema de coordenadas cartesianas globais SCCG, para o plano de imagem, neste

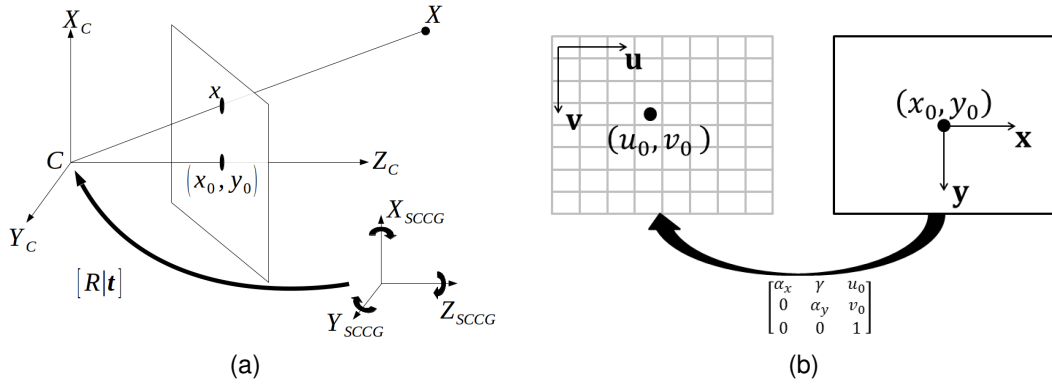


Figura 6 – Transformações em uma cena 3D (a) do sistema de coordenadas cartesianas globais para o sistema de coordenadas da câmera, (b) do plano de imagem para coordenadas em pixels.

modelo, é dado pela interseção do raio óptico com o plano de imagem. Tal ponto de interseção é representado por x . O raio óptico é o segmento de reta, que inicia no centro da câmera C e vai até o ponto da cena X , conforme ilustrado na [Figura 6\(a\)](#). Neste caso, as relações geométricas, na cena, são dadas pelo teorema de Thales:

$$\begin{aligned} x &= f \frac{X}{Z}, \\ y &= f \frac{Y}{Z}, \end{aligned} \quad (3)$$

onde x e y são as coordenadas da projeção do ponto $(X, Y, Z)^T$, no SCCG, no plano de imagem.

Em coordenadas homogêneas, pode-se representar estas relações na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Há ainda a transformação intrínseca da câmera, na qual as coordenadas da origem

do plano de imagem (x_0, y_0) devem ser corrigidas para coincidirem com o centro óptico (u_0, v_0) da câmera. Deve-se considerar ainda que, no plano de imagem, as coordenadas são em *pixels*, cujas dimensões, nas direções x e y , bem como o ângulo entre o plano de imagem e o plano contendo o sensor de imagem, precisam ser observados. Em um modelo de câmera, em que se considera P a matriz de projeção X a representação em coordenadas homogêneas de um ponto no sistema de coordenadas cartesianas globais (SCCG) e x , sua projeção na imagem, tem-se que:

$$x = PX. \quad (4)$$

Onde a matriz de projeção P é dada por:

$$P = A[R \mid t], \quad (5)$$

sendo A , a matriz de parâmetros intrínsecos, representada por:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o R é a matriz de rotação; e t , o vetor de translação, ambos entre o sistema de coordenadas de referência da câmera e o SCCG. A concatenação de R e t conforme exposto na [Equação 5](#), define a chamada matriz de parâmetros extrínsecos da câmera. A matriz de parâmetros intrínsecos é uma matriz triangular superior, cujos termos $\alpha_x = fm_x$ e $\alpha_y = fm_y$ são a distância focal em termos da dimensão, em pixels, nas direções x e y , respectivamente, e m_x e m_y representam o número de *pixels*, por unidade métrica de distância. Similarmente, x_0 e y_0 representam as coordenadas da origem do plano de imagem, em *pixels*, nas direções x e y , sendo que $x_0 = m_x p_x$ e $y_0 = m_y p_y$, onde p_x e p_y representam as coordenadas do centro óptico da câmera. No conjunto de parâmetros intrínsecos, há ainda o ângulo γ , chamado de oblíquo, que representa o ângulo entre o eixo óptico e o plano de imagem. Esse parâmetro, para aplicações de uso geral, utilizando-se câmeras, pode ser considerado zero ([HARTLEY; ZISSERMAN, 2000](#)). O elemento $A(3,3)$

representa um fator de escala, já que a matriz de parâmetros intrínsecos tem apenas 5 graus de liberdade.

2.3 Álgebra de intervalos

Ao longo dos anos, diversos esforços de pesquisa foram realizados de forma independente, com o objetivo de limitar os erros obtidos em processos de cálculos numéricos por meio do uso de intervalos, tais como aqueles realizados por Dwyer (1951), Sunaga (1958), Warmus (1960) e Wilkinson (1980) ([MOORE et al., 2009](#)). Entretanto, pode-se dizer que aritmética e análise de intervalos, iniciaram-se com o trabalho de Ramon E. Moore, em seu livro, *Interval Analysis*, em 1966. Moore completou as ideias existentes, tornando a análise de intervalos uma ferramenta útil para lidar com restrições dos efeitos dos erros de todas as fontes, incluindo-se erros de aproximação dos dados.

A matemática de intervalos é menos usada do que se esperava que fosse. Uma das razões para isso é, indubitavelmente, a aparente dificuldade de utilização devido à complexidade das rotinas das operações e do tratamento das funções, ao alto custo computacional dos algoritmos de intervalos e à inevitável impossibilidade de solução de alguns problemas em álgebra de intervalos. Todos os problemas são contornáveis, exceto os problemas insolúveis em álgebra intervalar, utilizando-se técnicas modernas de computação e construção de algoritmos ([HANSEN; WALSTER, 2004](#)). Isso torna a álgebra de intervalos um método eficaz para o tratamento de problemas com erros de arredondamento. Todavia, têm surgido recentemente novas aplicações que utilizam a álgebra de intervalos não apenas no problema devido ao arredondamento dos erros, mas também como parte integrante da solução do problema.

Neste trabalho, a utilização da álgebra de intervalos para o tratamento de problemas envolvendo visão computacional foi motivada pelo fato de imagens do mundo que vemos serem amostras em um intervalo fechado, limitado ao tamanho do campo de visão da câmera. Assim, como a geometria projetiva é a mais adequada para tratar problemas de projeção de imagens, a álgebra intervalar também ocupa papel similar

na solução de problemas com imagens.

Uma descrição sobre os princípios básicos de álgebra intervalar pode ser encontrada no Apêndice A. Sendo assim, realiza-se neste capítulo apenas a descrição das partes fundamentais sobre este tópico para este trabalho, deixando a cargo do leitor a consulta ao [Apêndice A](#) para esclarecimentos de eventuais conceitos básicos.

É importante apenas definir que a notação adotada para intervalos neste trabalho são letras com acento da seguinte forma, $\check{X}$, sendo os limites inferior e superior de um intervalo $\check{X}$, denotado por $[\underline{X}, \bar{X}]$. Como exemplo de um intervalo, pode-se colocar $\check{X} = [-4, 3]$, o que implica que o limite inferior do intervalo é igual a $\underline{X} = -4$ e o superior a $\bar{X} = 3$.

2.3.1 Funções intervalares

É possível, por meio de funções intervalares, a avaliação de uma função real $f(x)$ quando x varia em um intervalo $\check{X}$. Nesse caso, pode-se mapear a imagem do conjunto de domínio $\check{X}$:

$$f(\check{X}) = \{f(x) : x \in \check{X}\}.$$

Generalizando para funções de várias variáveis:

$$f(\check{X}_1, \dots, \check{X}_n) = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in \check{X}_1, \dots, x_n \in \check{X}_n\}, \quad (6)$$

Pode-se formalizar o descrito acima com a seguinte definição feita por Moore et al. ([MOORE et al., 2009](#)):

Definição 2.1 *Seja $g : M_1 \mapsto M_2$ e $S(M_1)$ e $S(M_2)$ a família de subconjuntos de M_1 e M_2 , respectivamente. A extensão intervalar unitária de g é o mapeamento em conjuntos $\bar{g} : S(M_1) \mapsto S(M_2)$ tal que:*

$$\bar{g}(\check{X}) = \{g(x) : x \in \check{X}, \check{X} \in S(M_1)\}.$$

Um mapeamento unitário também pode ser definido em $S(M_1)$ com valores em $S(M_2)$, caso em que se pode notar que:

$$\bar{g}(\check{X}) = \cup_{\check{X} \in S(M_1)} \{g(x)\},$$

observa-se que $\bar{g}(\check{X})$ contém exatamente os mesmos elementos do conjunto imagem $g(\check{X})$.

Uma extensão intervalar unitária $\bar{g}$ tem propriedade de subconjunto se:

$$\check{X}, \check{Y} \in S(M_1) \text{ com } \check{X} \subseteq \check{Y} \Rightarrow \bar{g}(\check{X}) \subseteq \bar{g}(\check{Y}).$$

Nem sempre é possível substituir valores reais por intervalos nas funções. Considere o exemplo simples $f(x) = x^2$. Ao substituir x por um intervalo $\check{X} = [1, 3]$, observa-se que $f([1, 3]) = \{x : x \in [1, 9]\}$, o que é igual ao conjunto dado pela simples substituição dos limites do intervalo $\check{X}$ na função $f(x) = x^2$. Considere agora o intervalo $\check{X} = [-1, 1]$. Neste caso, se for feita a simples substituição dos limites do intervalo em $f(x) = x^2$ tem-se que o conjunto imagem é o intervalo degenerado $[1, 1]$ que está incorreto. Intervalos degenerados são aqueles cujos limites superior e inferior são iguais. Observa-se então que é necessário um mapeamento da forma $\{f([-1, 1])\} \mapsto [0, 1]$. Nesse exemplo simples, pode-se observar que, para algumas funções, é preciso criar uma representação diferente quando utilizadas com intervalos. Essa representação é chamada *extensão intervalar de uma função real*. No caso de funções monótonas crescentes, a extensão intervalar é trivial, ficando

$$f(\check{X}) = [f(\underline{X}), f(\bar{X})],$$

sendo chamada, neste caso, de extensão intervalar unitária, pois é definida baseando-se em apenas um subconjunto $S(M_1)$, por simplicidade extensão unitária. No caso de funções monótonas decrescentes, deve-se apenas atentar com a ordenação correta dos limites superior e inferior.

Para o caso de funções não monótonas, o domínio pode ser dividido em subconjuntos $S(M_i)$, nos quais a função apresenta o comportamento monótono. Em cada intervalo (subconjunto), emprega-se a [Definição 2.1](#) para determinar a função intervalar correspondente.

Uma definição formal mais geral de extensão intervalar é dada por Moore et al. ([MOORE et al., 2009](#)):

Definição 2.2 F é uma extensão intervalar de f se, para argumentos intervalares degenerados, tem-se:

$$F([x, \bar{x}]) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

O conceito de extensão intervalar de uma função real pode ser extrapolado para funções de múltiplas variáveis, sendo necessário considerar a monotonicidade da função em relação a cada variável.

Quando se faz a subtração de um intervalo $[a, b]$ por ele mesmo, usando a regra definida por Moore et al. (MOORE et al., 2009), tem-se $[a - b, b - a]$, quando era esperado que o resultado fosse igual a zero, o que somente ocorreria se o intervalo $[a, b]$ fosse degenerado. O que se vê é que uma variável intervalar $\check{X}$, quando subtraída por ela mesma, é como se fossem duas variáveis diferentes. Então $\check{X} - \check{X}$ é calculado da mesma maneira que $\check{X} - \check{Y}$ com $\check{Y}$ numericamente igual a $\check{X}$, isso causa um aumento na largura do intervalo do resultado e dificulta o procedimento para o cálculo de expressões mais complexas. O mesmo problema ocorre para divisão. Este aumento na largura do intervalo é chamado de *problema de dependência* ou apenas *dependência* (HANSEN; WALSTER, 2004). Operações de potência também causam problemas de dependência, sendo assim, sempre que possível, estas operações devem mostrar o resultado pela definição. No caso matricial o problema sempre ocorre na multiplicação de matrizes (MOORE et al., 2009).

2.3.1.1 Funções racionais intervalares

Funções racionais intervalares são aquelas obtidas por meio apenas de operações sobre intervalos, por exemplo, $F(\check{X}) = [3, 4](\check{X})^2 + [1, 3]$. Sendo assim, podem ser definidas da seguinte forma:

Definição 2.3 Funções racionais intervalares são aquelas avaliadas sobre intervalos cujo conjunto imagem é definido por um conjunto finito de operações aritméticas sobre intervalos.

Essas operações sobre intervalos devem satisfazer a seguinte condição:

$$\check{Y}_1 \subseteq \check{X}_1, \check{Y}_2 \subseteq \check{X}_2 \Rightarrow \check{Y}_1 \odot \check{Y}_2 \subseteq \check{X}_1 \odot \check{X}_2,$$

sendo $\odot$ uma operação qualquer sobre intervalos, por exemplo, soma, subtração e etc. Quando essa condição é satisfeita, diz-se que F é uma inclusão isotônica. Define-se inclusão isotônica como:

Definição 2.4 $F = F(\check{X}_1, \dots, \check{X}_n)$ é uma inclusão isotônica se

$$\check{Y}_i \subseteq \check{X}_i \text{ para } i = 1, \dots, n \Rightarrow F(\check{Y}_1, \dots, \check{Y}_n) \subseteq F(\check{X}_1, \dots, \check{X}_n).$$

Utilizando a [Definição 2.2](#) e a [Definição 2.4](#), chega-se ao teorema fundamental da análise intervalar, qual seja ([MOORE et al., 2009](#)):

Teorema 2.5 Se F é uma extensão para intervalo de inclusão isotônica de f , tem-se

$$f(\check{X}_1, \dots, \check{X}_n) \subseteq F(\check{X}_1, \dots, \check{X}_n).$$

Este teorema juntamente com as definições acima em álgebra intervalar constituem a base para o entendimento da utilização da álgebra intervalar neste trabalho.

2.3.2 Solução de sistemas de equações lineares intervalares sobre-determinados

Para a solução do sistema linear de equações intervalares sobredeterminado, resultante da [Equação 19](#) foi utilizado um método apresentado em [Rohn \(1996\)](#). Esse método é citado em [Horáček e Hladík \(2013\)](#) como o que produz os melhores resultados para otimizações baseadas em sistemas lineares de equações intervalares sobredeterminados. A base do método de Rohn é o seguinte teorema:

Teorema 2.6 Seja $\check{A}\check{x} = \check{b}$ um sistema linear intervalar sobredeterminado com um conjunto solução Ψ . Considerando que $\check{A}$ é uma matriz intervalar $m \times n$. Seja R

uma matriz real arbitrária $n \times m$, seja $x_0 \geq 0$ e $d > 0$ vetores reais arbitrários n -dimensionais tais que

$$Gd + g < d,$$

onde

$$G = |I - RA_c| + |R| A_\Delta$$

e

$$g = |R(A_c x_0 - b_c)| + |R|(A_\Delta |x_0| + b_\Delta),$$

então

$$\Psi \subseteq [x_0 - d, x_0 + d].$$

A prova para este teorema pode ser encontrado em [Rohn \(1996\)](#). Para o teorema acima, A_c é uma matriz real pertencente à matriz intervalar $\check{A}$. O vetor b_c é um vetor arbitrário, cujos elementos pertencem aos intervalos do vetor $\check{b}$. A matriz A_Δ é calculada utilizando-se o limites superiores dos intervalos dos elementos da matriz $\check{A}$ e a matriz A_c , da seguinte forma

$$A_\Delta = \bar{A} - A_c.$$

O vetor b_Δ é calculado da seguinte forma

$$b_\Delta = \bar{b} - b_c.$$

Pode-se calcular facilmente d reescrevendo as desigualdades como

$$d = Gd + g + \zeta,$$

com $\zeta > 0$ e ζ sendo um valor real. O valor inicial de d é zero e refinado iterativamente. Este algoritmo para após um número finito de passos se o raio espectral de G for menor do que um. O valor inicial para x_0 pode ser calculado utilizando-se

$$x_0 \approx R \times b_c.$$

Outro valor fundamental que deve ser calculado é R , o que é feito usando-se a relação

$$R \approx (A_c^\top A_c)^{-1} A_c^\top$$

A matriz A_c não precisa ser necessariamente uma matriz produzida com todos os pontos centrais dos coeficientes de $\check{A}$. Rhon então propõe selecionar aleatoriamente matrizes de coeficientes reais A , pertencentes a matriz intervalar $\check{A}$. A solução para o sistema linear intervalar sobredeterminado é dada pela interseção de todas as soluções obtidas, considerando-se as matrizes reais A . No entanto, não é garantido que a solução encontrada é aquela com o casco convexo ótimo. Então, ele propõe outra estratégia baseada em um teorema de Oettli-Prager ([ROTA, 1990](#)), que é baseado na solução de problemas de otimização linear da forma:

$$\begin{aligned} \underline{x}_i^z &= \inf\{x_i; b_c - b_\delta \leq (A_c + A_\Delta T_z) x \leq b_c + b_\delta, T_z x \geq 0\}, \\ \bar{x}_i^z &= \sup\{x_i; b_c - b_\delta \leq (A_c + A_\Delta T_z) x \leq b_c + b_\delta, T_z x \geq 0\}, \end{aligned}$$

onde pode-se definir

$$Z = \{z \in \mathbb{R}^n; z_j = 1 \text{ se } \underline{x}_j > 0, z_j = -1 \text{ se } \bar{x}_j < 0\}.$$

e para cada $z \in Z$. T_z denota uma matriz diagonal onde sua diagonal é dada pelo vetor z . Caso $\underline{x}_j \leq 0$ e/ou $\bar{x}_j \geq 0$, então z_j pode ser mais um, ou menos um. Os valores ótimos para $\underline{x}_i$ e $\bar{x}_i$ são dados por

$$\begin{aligned} \underline{x}_i &= \min\{\underline{x}_i^z; z \in Z\}, \\ \bar{x}_i &= \max\{\bar{x}_i^z; z \in Z\} \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

A solução sera $\check{X} \neq \emptyset$ se e somente se $\underline{x}_i \leq \bar{x}_i$ para cada i .

Após esta etapa de solução de sistemas lineares intervalares sobredeterminados utilizando o método de Rohn, para encontrar uma solução com os diâmetros de intervalo das variáveis ainda menores, emprega-se um método não linear, baseado em um algoritmo de otimização apresentado em [Hansen e Walster \(2004\)](#).

2.3.3 Otimização global

Considere-se o problema de determinar o mínimo global de uma função objetivo $\Phi(x)$, onde Φ é uma função escalar de um vetor x de n componentes. Busca-se o valor mínimo Φ^* de Φ e o ponto, ou pontos, x^* , no qual este mínimo ocorre. Quando se utiliza a solução baseada na expansão da função Φ , em série Taylor, supõe-se que qualquer derivada existe e é contínua na região considerada. Há métodos de otimização global, descritos em [Moore et al. \(2009\)](#), que não requerem esta diferenciabilidade. A vantagem na utilização de tais métodos é a não dependência da divisão de intervalos contendo zero, como nos caso dos método que utilizam a derivada, já que o ponto de mínimo ou máximo é o ponto onde a derivada é zero. E a grande desvantagem desses métodos se deve ao fato de serem mais lentos do que os que utilizam a derivada.

Neste trabalho foi utilizado um algoritmo de otimização global desenvolvido para álgebra intervalar que está descrito em [Hansen e Walster \(2004\)](#). O algoritmo de Hansen e Walster calcula os limites do valor mínimo de Φ^* , da função objetivo Φ e o(s) ponto(s) x^* que é/são o(s) ponto(s) de mínimo de Φ . Se existe mais de uma solução, os autores garantem que o algoritmo nunca falha em encontrá-las. Devido a limitações relacionadas à precisão dos computadores, esse algoritmo pode encontrar uma solução que é próxima da solução global quando arredondamentos e/ou dependência impedem a determinação de qual dos candidatos é o mínimo global. Caso o critério de parada seja escolhido de forma correta, o algoritmo sempre elimina um mínimo local das considerações se Φ no mínimo local é suficientemente maior que Φ^* . O tamanho suficiente depende do tamanho da palavra binária, utilizada no computador para representação numérica. A abordagem de Hansen e Walster é apresentada no [Algoritmo 1](#).

No [Algoritmo 1](#), o usuário pode escolher um número finito de caixas – vetores intervalares – para regiões de busca. Essas caixas podem ser disjuntas ou possuírem alguma intersecção. Caso possuam intersecção e o mínimo estiver nessa intersecção, ela aparecerá nos intervalos resultantes das subdivisões das duas caixas. Estas caixas devem conter o mínimo global.

Algoritmo 1: Algoritmo para determinação do mínimo global de uma função intervalar.

Entrada: $\check{x}^{(0)}$. Solução inicial a qual o mínimo global pertence. ε diâmetro mínimo da caixa que contém uma solução para o mínimo da função de otimização.

Saída: $\check{x}, \check{\Phi} = [\underline{\Phi}, \bar{\Phi}]$. O intervalo ao qual o mínimo global pertença e o intervalo do valor do função do mínimo.

while $w(\check{x}^{(k)}) > \varepsilon$ **do**

Exclua as caixas $\check{x}^{(k)}$ que não contêm um ponto que é solução da função objetivo. Use um procedimento seguro de forma que, mesmo com erros de arredondamento, os pontos de mínimo global não sejam deletados.

1. Exclua subcaixas da caixa atual onde o gradiente g de f nunca se anula.
2. Calcule o limite superior de Φ em vários pontos amostrados. O menor limite superior $\bar{\phi}$ é um limite superior de Φ^* . Então exclua subcaixas da caixa atual onde $\Phi > \bar{\phi}$.
3. Exclua subcaixas da caixa atual onde Φ não é convexo.

Já que x^* deve estar neste conjunto, sua localização é limitada. Limite Φ , sobre este conjunto de pontos, para obter os limites finais em Φ^* .

end

A norma do gradiente $\|g\|$ de Φ é zero no mínimo global, mas também pode ser zero no mínimo local, nos máximos e no ponto de sela da função objetivo. O objetivo do método de otimização global é encontrar um ou mais pontos nos quais $g = 0$ e que são mínimos globais de Φ . Como o método faz a busca pelos zeros de g , tenta-se descartar aqueles encontrados que não sejam o mínimo global de Φ . Hansen (HANSEN, 1980) provou que se pode utilizar um teste simples de monotonicidade para provar a não existência de um ponto estacionário na caixa. Nesse caso, a caixa pode ser excluída. Uma das formas sugeridas pelo autor do algoritmo, e a forma adotada neste trabalho, é utilizar consistência do casco convexo do intervalo, chamado de *hull consistency*.

Para discutir o conceito de *hull consistency*, considere o seguinte exemplo. Supondo-se que se queira determinar a solução para equação real

$$\Phi(x) = x - h(x) = 0,$$

utilizando álgebra intervalar. Para uma solução $\check{X}^*$ de $\Phi(x) = 0$, tem-se $x^* = h(x^*)$.

A **Definição 2.4** afirma que, dado o intervalo $\check{X}$ se $x^* \in \check{X}$ então $x^* \in h(\check{X})$. O intervalo $\check{X}' = h(\check{X})$ contém uma solução de $\check{X}$. Se $\check{X}' \cap \check{X}$ é menor que $\check{X}$, essa interseção fornece um intervalo menor ao qual a solução pertence. A técnica de *hull consistency* pode ser aplicada mesmo quando Φ contém múltiplos termos. Nesse caso, substitui-se x pelo intervalo $\check{X}$ em algum termo de Φ . Então, soluciona-se Φ com o intervalo $\check{X}$ em um dos termos e o número real x nos termos restantes.

Para o caso geral, com Φ possuindo n termos, tem-se que, separando a função em dois termos

$$\Phi(x) = g(x) - h(x) = 0.$$

Se $x^* \in \check{X}$, a definição de inclusões isotônicas afirma que $x^* \in g^{-1}[h(\check{X})]$. A largura dos limites do intervalo $g^{-1}[h(\check{X})]$ depende de qual técnica está sendo usada para superar a dependência na avaliação de $h(\check{X})$. Pelo método de *hull consistency*, diminui-se primeiro os limites nos intervalos que contêm x e então determina-se a não existência de uma solução na caixa.

A tarefa de encontrar o zero do gradiente da função objetivo pode ser dispendiosa, computacionalmente. É importante diminuir o consumo de esforço computacional para limitar tais pontos quando eles não são a solução que se busca. No algoritmo sugerido por Hansen e Walster, foi avaliado Φ em vários pontos da caixa inicial $\check{X}^{(0)}$. O limite superior calculado, em cada valor, é o limite superior, para o mínimo global do valor Φ^* de Φ . Como resultado, tem-se o limite superior $\bar{\phi}$.

Frequentemente, $\mathbf{X}$ é reduzido em tamanho e/ou subpartido em subcaixas. Esta subcaixa é subpartida em subcaixas, dividindo-se alguns ou todos os elementos intervalares do vetor em subintervalos. Sendo $\check{X}$ uma subcaixa de $\check{X}^{(0)}$ gerada pelo algoritmo, em qualquer passo, esta subcaixa pode ser excluída ou aceita como solução do problema de mínimo global. Quando subpartido, avalia-se Φ , no centro de cada nova caixa ou faz-se uma busca local pelo menor valor de Φ .

Quando se avalia Φ em um ponto $\mathbf{x}$, o resultado é um intervalo $[\underline{F}(\check{X}), \bar{F}(\check{X})]$. Sabe-se, neste caso, que $\bar{F}(\check{X})$ é um limite superior para $\Phi(\check{X})$ e, então, para Φ^* . Então, $\bar{\phi}$ é utilizado para denotar o menor limite superior para vários pontos amostrados em

um estágio qualquer do algoritmo.

Se $\bar{\phi} \geq \Phi^*$, pode-se excluir qualquer ponto – subcaixa – de $\check{\mathbf{X}}^{(0)}$, para a qual $\Phi > \bar{\phi}$. Tal procedimento pode servir para excluir subcaixas, que limitam um ponto estacionário, que não é ótimo de Φ . Hansen e Walster descrevem quatro métodos de exclusão e limite, que podem ser aplicados para determinar a relação $\Phi(\check{\mathbf{X}}) \leq \bar{\phi}$ com o objetivo de excluir parte da subcaixa ou toda subcaixa gerada pelo algoritmo.

O primeiro método é baseado apenas em *hull consistency*. Pode-se aplicar a técnica de *hull consistency* para a relação $\Phi(\mathbf{x}) \leq \bar{\phi}$ sobre a caixa $\check{\mathbf{X}}$. Isto faz com que os limites sejam estreitados, eliminando caixas que não possuem a solução. Esse método tem o mesmo custo computacional necessário a avaliação de $\Phi(\mathbf{X})$. Nesse caso, o método de *hull consistency* é aplicado na igualdade $\Phi(\mathbf{x}) = [-\infty, \bar{\phi}]$.

O segundo faz uso de outro método chamado de *consistência de caixa* (*box consistency*), para desigualdades $\Phi(\mathbf{x}) \leq \bar{\phi}$ (HANSEN; WALSTER, 2004). Para aplicar o método de consistência de caixa, reescreve-se a desigualdade como uma equação $F(\mathbf{X}) = 0$, onde

$$F(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) + [-\bar{\phi}, \infty].$$

É utilizado o algoritmo de consistência de caixa, para resolver $F(\check{\mathbf{X}}) = 0$, para um componente x_i ($i = 1, \dots, n$) de $\check{\mathbf{X}}_i$. Para isto, trocam-se todas as variáveis, exceto x_i pelos seus limites intervalares. Então, aplica-se o método intervalar de Newton para a função

$$\check{q}(x_i) = F(\check{X}_1, \dots, \check{X}_{i-1}, x_i, \check{X}_{i+1}, \dots, \check{X}_n) = 0. \quad (7)$$

O terceiro método usa uma expansão em série de Taylor para linearizar $\Phi(\mathbf{x})$. É muito semelhante ao segundo, que utiliza consistência de caixa. Entretanto, o segundo é diferente do terceiro, que expande Φ em relação a todas as variáveis. Por isso o terceiro é mais eficiente que o segundo quando a caixa é pequena.

No quarto método, considera-se $\Phi(\mathbf{x}) \leq \bar{\phi}$ possibilitando a expansão de Φ por meio dos termos da segunda derivada. Esse método é usado tão somente para otimização

intervalar com restrição, pois nesse tipo de problema há a necessidade do cálculo das derivadas segundas por outro propósito.

Quando um valor de $\bar{\phi}$, próximo de Φ^* , está disponível, métodos de consistência reduzem a caixa, mesmo quando esta é grande. Sendo assim, é importante ter uma boa aproximação para Φ^* anteriormente à solução do processo. Amostrando-se um valor de Φ no centro de cada nova caixa gerada, ajuda produzir bons valores de $\bar{\phi}$ mais rapidamente.

Devido ao fato de o algoritmo, frequentemente, dividir uma caixa em subcaixas, o número de caixas não processadas armazenadas pode crescer vertiginosamente. Eliminando-se caixas que não são mais necessárias por conter intervalos que não possuem ponto de mínimo, diminui-se esse problema. É preciso que duas condições sejam satisfeitas para que uma caixa possa ser considerada pequena o suficiente para ser excluída no subconjunto de caixas. Primeiro, uma caixa $\check{\mathbf{X}}$ deve satisfazer uma condição

$$w(\check{\mathbf{X}}) \leq \epsilon_X,$$

onde ϵ_X é especificado pelo usuário. Segundo

$$w[\Phi(\check{x})] \leq \epsilon_f,$$

que é, $\bar{\Phi}(\check{x}) - \check{x} \leq \epsilon_f$, onde ϵ_f , também é especificado pelo usuário.

Mesmo fazendo exclusão de caixas, o número das que ficam armazenadas na memória pode ser muito grande. Sendo assim, condições de finalização podem essencialmente fazer com que sejam dispensadas todas as caixas de soluções ao mesmo tempo se não se está interessado nos pontos $\check{\mathbf{X}}^*$ no qual ocorre o mínimo global. Neste caso, o que se quer é apenas saber os limites de $\Phi(x^*)$. Assim, pode-se modificar o procedimento para limitar o máximo $\bar{\phi}$ e deletar subcaixas onde $\Phi(\mathbf{x}) > \bar{\phi} - \epsilon_f$ ao invés de $\Phi(\mathbf{x}) > \bar{\phi}$. Isso permite mais pontos sejam eliminados do que seriam quando fosse utilizada a desigualdade $\Phi(\mathbf{X}) > \bar{\phi}$.

O algoritmo fornece ambos limites, superior e inferior, e o intervalo que contém o mínimo global Φ^* . A solução da minimização deve conter o mínimo global, caso ele exista no intervalo inicial. Supondo-se que s caixas não foram excluídas, denota-se

essas caixas por $\check{\mathbf{X}}_i$ ($i = 1, \dots, s$). O algoritmo, então, avalia $\Phi(\check{\mathbf{X}}_i)$ para cada $i = 1, \dots, s$, determinando, assim, os limites superior e inferior do valor função na vizinhança do mínimo global.

O [Algoritmo 2](#) é utilizado para solução do problema de determinação do mínimo global baseando-se em álgebra intervalar, segundo o método de Hansen e Walster ([HANSEN; WALSTER, 2004](#)).

Algoritmo 2: Algoritmo para determinação do mínimo global de uma função por meio da álgebra intervalar.

Input: Lista L1 contendo todas os $\tilde{X}$ onde no mínimo um dos intervalos possua X^*

Output: Lista de intervalos L2 contendo o mínimo global de $\Phi(x)$

$HCf \leftarrow 0;$

$HCgrd \leftarrow 0;$

$atualizaX \leftarrow \text{verdadeiro};$

while $L1 \neq \emptyset$ **do**

if $atualizaX$ **then**

$X \leftarrow$ o vetor da lista L1 que produziu o menor valor inferior da função;

 Delete X da lista;

$atualizaX \leftarrow \text{falso};$

$HCf \leftarrow 0;$

$HCgrd \leftarrow 0;$

end

if $HCf \leq n$ **then**

 Aplique consistência para $\Phi(x) = \bar{\phi};$

if $X = \emptyset$ **then**

$atualizaX \leftarrow \text{verdadeiro};$

 continue;

end

if *Algoritmo 3* *for verdadeiro* **then**

 Coloque X na lista final L2;

$atualizaX \leftarrow \text{verdadeiro};$

 continue;

end

if *Caixa foi suficientemente reduzida* **then**

 Coloque X na lista L1;

$atualizaX \leftarrow \text{verdadeiro};$

 Continue;

end

end

if $HCgrd \leq n$

$HCf \leftarrow 1;$

 Aplique consistência para o gradiente;

 Incrementa $HCgrd;$

if $X = \emptyset$ **then**

$atualizaX = \text{verdadeiro};$

 continue;

end

```

Faça uma busca linear em  $\check{g}(x)$ ;
if  $\bar{\phi}$  reduziu then
    Incrementa  $HCf$ ;
    Aplique a consistencia para a função;
end
Aplique o método linear para  $\Phi(\check{x}) \leq \bar{\phi}$ ;
if  $X = \emptyset$  then
    atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
    continue;
end
if Algoritmo 3 for verdadeiro then
    atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
    continue;
end
if Algoritmo 4 for verdadeiro then
    atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
    continue;
end
if  $\omega(X) < \omega H$  then
    atualizaX  $\leftarrow$  falso;
    consistência  $\leftarrow$  BC;
     $HCf \leftarrow 1$ ;
     $HCgrd \leftarrow 1$ ;
    continue;
end
Aplique a consistência para  $H_{ii} \geq 0$ ;
Se o resultado for vazio então continue;
if  $H_{ii} < 0$  para algum  $i$  then
    if Algoritmo 3 for verdadeiro then
        atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
        continue;
    end
end

```

```

    if Algoritmo 4 for verdadeiro then
        atualizaX ← verdadeiro;
        continue;
    end
    atualizaX ← falso;
    consistência ← BC;
    continue;
end
Atualiza  $\omega H$ ;
else
    passo20 ← verdadeiro;
end
if  $\omega(X) < (\omega R + \omega I)/2$  ou passo20 for verdadeiro
    repeat
        Calcule o Jacobiano do gradiente;
        if diagonal de  $J_{xx}I$  é estritamente negativa then
            atualizaX ← verdadeiro;
            passo3 ← verdadeiro;
            pare;
        end
        Delete qualquer parte negative de  $J_{xx}I$   $B = J_{xx}I^{-1}$ ;
         $M_{xx}I = BJ_{xx}I$ ;
        if  $M_{xx}I$  é regular then
            Determine a solução do sistema linear  $g(x) - M_{xx}I(y - x) = 0$ ;
        else
            Aplique uma passada do método de Gauss-Seidel;
        end
        Atualize  $\omega I$  e  $\omega R$ ;
        if resultado for vazio então then
            atualizaX ← verdadeiro;
            passo3 ← verdadeiro;
            pare;
        end
        if método intervalar de newton provou a existencia da solução then
            SolucaoExiste = verdadeiro
        end
    end
end

```

```

    |  $HC_{grd} \leftarrow 1;$ 
    | if Algoritmo 3 for verdadeiro then
    | | atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
    | | passo3  $\leftarrow$  verdadeiro;
    | | pare;
    | end
    | enquanto a largura da caixa teve redução menor que 8
    | if passo3 for verdadeiro then
    | | passo3  $\leftarrow$  falso;
    | | continue;
    | end
    | if passo13 for verdadeiro then
    | | atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
    | | continue;
    | end
    | if Algoritmo 3 for verdadeiro then
    | | atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
    | | continue;
    | end
    | if Algoritmo 4 for verdadeiro then
    | | atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
    | | continue;
    | end
    | Determine analiticamente  $Bg(X)$ ;
    | Aplique a consistência de casco para  $Bg(X)$ ;
    | if método de consistência provou a existencia da solução then
    | | SolucaoExiste  $\leftarrow$  verdadeiro;
    | end
    | if Algoritmo 3 for verdadeiro then
    | | atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
    | | continue;
    | end
    | if Algoritmo 4 for verdadeiro then
    | | atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
    | | continue;
    | end
    | Aplique a consistência de casco para  $Bg(X)$ ;
end

```

```

if Algoritmo 3 for verdadeiro then
    | atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
    | continue;
end
Junte todos os intervalos que foram encontrados disjuntos em apenas um;
Divida a caixa  $\check{X}$  em subcaixas com intervalos das componentes do vetor
divididos;
Avalie  $\Phi$  no centro de cada nova caixa;
Atualize o limite superior;
atualizaX  $\leftarrow$  verdadeiro;
end
Delete todas as caixas da lista L2 que o limite inferior é maior do  $\bar{\phi}$ 

```

Algoritmo 3: Algoritmo para testar se o diâmetro máximo do intervalo das componentes do vetor X é menor que um limite ϵ_x definido pelo usuário. E também se o diâmetro do intervalos do valor da função objetivo Φ é menor que um valor ϵ_f também definido pelo usuário.

```

Input: L1
Output: falso ou verdadeiro
if  $\omega(X) < \epsilon_x$  e  $\omega(\Phi(\check{x})) < \epsilon_f$  then
    | retorna verdadeiro;
else
    | retorne falso;
end

```

Algoritmo 4: Algoritmo para verificação se o diâmetro das componentes do vetor X foram reduzidos..

```

Input: Lista L1
Output: Verdadeiro ou Falso
if caixa foi suficientemente reduzida then
    | Coloque X na lista L1;
    | retorne verdadeiro;
else
    | retorne falso;
end

```

Capítulo 3

Trabalhos Relacionados

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre os principais trabalhos da literatura que representam o estado da arte em calibração de câmeras. As tabelas 2, 3 e 4 apresentam um resumo com comparativo dos principais trabalhos em calibração de câmeras. Muito embora o problema de calibração de câmeras seja amplamente estudado ao longo dos anos, evidencia-se ainda uma forte carência por métodos que sejam capazes de obter resultados satisfatórios em cenários nos quais os dados de entrada estejam corrompidos por ruídos severos ou que não existam alvos de calibração apropriados (MEDIONI; KANG, 2004).

Conforme proposto em Medioni e Kang (2004), métodos baseados na utilização de alvos de calibração podem ser classificados em três diferentes grupos, os quais se diferenciam pelo número de dimensões do alvo considerado:

- **Métodos baseados em alvos de calibração 3D:** Nestes métodos, é utilizado um alvo de calibração tridimensional presente na cena, cuja geometria 3D é conhecida *com boa precisão* (MEDIONI; KANG, 2004). As Figuras 7(a) e 7(b) mostram dois exemplos típicos de alvos de calibração tridimensionais;
- **Métodos baseados em alvos de calibração 2D:** Neste caso, um alvo planar 2D, conforme ilustrado na Figura 7(c), é visualizado a partir de múltiplos pontos de vista. Esse processo torna mais fácil a etapa de otimização para obtenção

dos parâmetros. Calibração com alvos bidimensionais requerem múltiplas visualizações de um alvo de calibração, cuja geometria seja bem conhecida;

- **Métodos baseados em alvos de calibração 1D:** Neste tipo de calibração, os alvos utilizados são compostos por pontos colineares, como exemplo, aquele mostrado na [Figura 7\(d\)](#). Os parâmetros de calibração são recuperados utilizando-se diferentes visualizações de um alvo linear. Essas podem ser geradas pelo movimento do alvo em torno de um único ponto ou movimentos de translação e rotação da câmera.

Métodos **não** baseados na utilização de alvos de calibração, por sua vez, representam um quarto grupo de soluções, muitas vezes referenciados na literatura como métodos de autocalibração ([MEDIONI; KANG, 2004](#)). A seguir, os quatro grupos de métodos supracitados serão apresentados e discutidos em seções específicas, discutindo-se suas características, vantagens, desvantagens e restrições.

3.1 Métodos baseados em Alvos de Calibração 3D

A abordagem de calibração proposta neste trabalho pode ser enquadrada neste grupo de soluções, visto que os parâmetros de calibração são calculados a partir de aproximações de valores de coordenadas de pontos 3D pertencentes a objetos na cena. Isto é, tais objetos funcionam como eventuais alvos de calibração 3D, ao passo que as aproximações de valores de coordenadas se dão em intervalos cujos limites são estipulados com base no conhecimento a priori das possíveis dimensões de tais objetos. Esta flexibilização quanto ao conhecimento das localizações exatas de pontos de calibração SCCG contribui de forma determinante para automatização da calibração. A seguir, são discutidos alguns dos principais trabalhos na literatura baseados na utilização de alvos 3D, estabelecendo-se, sempre que possível, análises comparativas com a abordagem aqui proposta.

Em um artigo recente, Houssineau et al. ([HOUSSINEAU et al., 2016](#)) apresentam uma técnica para calibração de câmeras baseada em visão estéreo, rastreamento de objetos tridimensionais 3D e técnicas de correspondência de pontos. Para solução

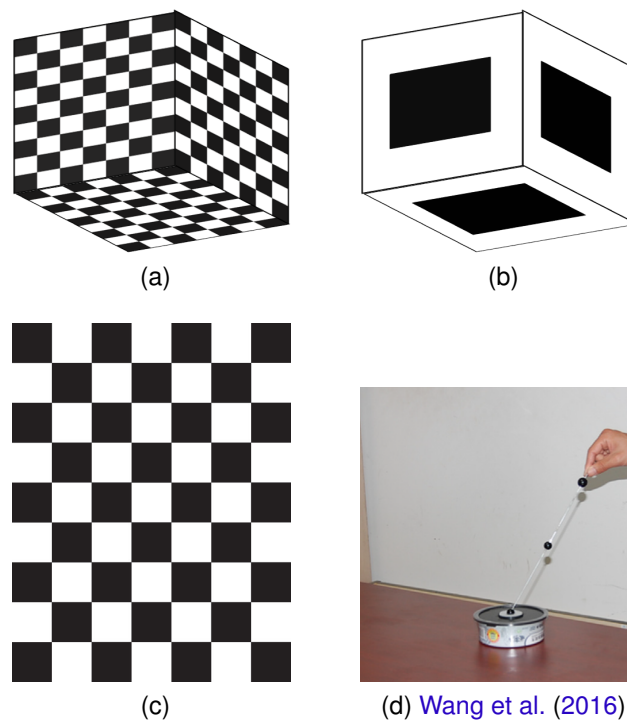


Figura 7 – Exemplos de alvos de calibração típicos: tridimensionais 3D (a) e (b), bidimensionais 2D (c) e unidimensionais (d).

do problema, os autores utilizam um framework de análise Bayesiana composto por ferramentas de estatística de conjunto finito. Os autores propõem introduzir as incertezas das medidas na localização dos pontos no processo de calibração. Para remover a dependência dos métodos de calibração de dados perfeitos, o problema é formulado como uma extensão do Problema de Estimativa Estocástica Multiobjetivo. Os autores propõem um modelo de calibração como um problema de inferência doubly-stochastic (SWAIN; CLARK, 2010), no qual as medidas na localização dos múltiplos objetos são condicionadas à orientação relativa de uma das câmeras de um sistema estéreo.

Nos experimentos realizados, Houssineau et al. (HOUSSINEAU et al., 2016) apresentam resultados comparativos a outros métodos, mostrando que o método proposto apresenta erros menores que aqueles apresentados no estado da arte. Sendo assim, este é um método de calibração que apresenta uma técnica promissora para

Autor/Publicação	Descrição	Comparação
Houssineau et al. (2016)	Apresenta uma metodologia de reconstrução 3D baseada em visualização múltiplas.	Limitado ao uso em visão estéreo.
Furukawa e Ponce (2009)	Calibração utilizando visualizações múltiplas.	Os autores consideram pontos no SCCG como ideais não considerando erros nas medias dos mesmos.
Telle et al. (2003)	Reconstrução tridimensional baseada em visão estéreo e análise intervalar	Não é um método de calibração. Não fazem a modelagem do problema utilizando álgebra intervalar.
Liu et al. (2002)	Utilizam uma técnica baseada na extração de características de objetos construídos pelo homem.	Forte dependência da solução inicial

Tabela 2 – Comparativo e relação dos métodos de calibração existentes no estado-da-arte com o trabalho proposto.

calibração de câmeras e rastreamento de objetos. Mesmo que os autores tenham apresentado resultados melhores que outros da literatura, vale observar que os erros quadráticos médios apresentados são crescentes, cumulativos de até 100 mm na localização da câmera em relação aos objetos ao longo de 100 execuções. Observa-se ainda que este método é limitado ao uso da calibração estéreo, dependendo de um aparato que vai além das câmeras. As medidas são realizadas considerando-se uma das câmeras como referência, caso haja erro na medida dos seus parâmetros, todas as previsões ficariam inconsistentes. Apesar da ideia apresentada em [Houssineau et al. \(2016\)](#) ser similar àquela proposta neste trabalho, que é considerar as incertezas das medidas dos pontos, o método proposto neste trabalho tem a vantagem de o processo de calibração poder ser realizado de forma contínua, o que evitaria erros cumulativos ao longo da utilização.

Furukawa e Ponce ([FURUKAWA; PONCE, 2009](#)) apresentam uma técnica para a

calibração de câmeras utilizando visualizações múltiplas. Um conjunto de parâmetros das câmeras são, previamente, calibrados utilizando-se pontos com a localização no SCCG conhecidas. Utilizando-se técnicas de correspondência de pontos, pirâmides de escala (imagens em diferentes resoluções) e métodos de otimização linear, aumentou-se a exatidão nos parâmetros de calibração. Essa técnica permite fazer a reconstrução 3D de objetos na cena. Os erros de projeção apresentados são menores que um pixel após cinco iterações do método. Os autores não consideram erros nas medidas dos pontos no SCCG, por este motivo apresentam resultados apenas para o erro de projeção. A técnica apresenta problemas quando a cena mostra uma textura ligeiramente homogênea, ou seja, se torna difícil diferenciar um número mínimo de pontos da cena.

Telle et al. (TELLE et al., 2003) apresentam uma técnica baseada em análise intervalar para determinação das matrizes de projeção e reconstrução 3D de uma cena de interesse. Na abordagem apresentada, os autores determinam a reconstrução da cena baseada em uma técnica de triangulação usando as matrizes de projeção recuperadas de mais de uma imagem em diferentes pontos de vista. Por meio do modelo de projeção utilizados para câmeras, os autores determinam um sistema de equações lineares com o objetivo de determinar as matrizes de projeção. Os dados utilizados para construção das equações são intervalos no SCCG e plano de imagem. A partir disso, os autores apresentam uma técnica para solução do sistema de equações lineares baseada na metodologia steepest descent. A principal diferença apresentada entre o método proposto pelos autores daquele aqui apresentado está no modelamento do problema. Na abordagem apresentada aqui, aplicou-se conceitos de álgebra intervalar no espaço projetivo. Além do mais, nosso objetivo principal é a determinação do conjunto de parâmetros intrínsecos e extrínsecos da câmera, o que consiste em alguns passos a mais do que simplesmente a determinação da matriz de projeção.

Liu et al. (LIU et al., 2002) utilizam uma técnica baseada na extração de características de objetos construídos pelo homem, como uma casa, um armário, entre muitos, para estimativa de movimento. É mostrado como determinar a direção das retas para um canto ortogonal em uma única imagem e a partir daí realizar a calibração.

Canto ortogonal é o ponto em que três retas se interceptam formando um ângulo de 90° entre si.

Por meio da posição dos cantos e das linhas das bordas de um objeto fabricado por humanos, são determinados os parâmetros extrínsecos de calibração, que são as matrizes de rotação e translação entre duas imagens em posições diferentes. O método apresenta uma grande sensibilidade a ruídos. Os testes de calibração realizados mostraram ruídos da ordem de 1 e 2 pixels na localização dos pontos na imagem. Os parâmetros extrínsecos da câmera apresentam uma variação de 1%, mas com a localização dos cantos e o conjunto de parâmetros intrínsecos exatos. Ainda se consideram como limitação do método a forte dependência da solução inicial. A propósito, esse é um dos problemas que o método de calibração proposto neste trabalho busca resolver.

No conjunto de técnicas de calibração que utilizam alvos tridimensionais, a que mais se destaca é a proposta por Tsai, em seu artigo (TSAI, 1987). Por razões históricas, faz-se necessário citar essa que é uma das primeiras técnicas de calibração utilizadas amplamente em visão computacional, senão a primeira. O método de Tsai para calibração de câmeras recupera os conjuntos de parâmetros intrínsecos e extrínsecos, a série de coeficientes de distorção e o fator de escala que melhor se ajustam às coordenadas dos pontos de referência fornecidas como entrada para o método. Tsai utilizou uma estratégia de dividir o problema em partes, solucionando-o inicialmente por meio de técnicas de otimização linear com mínimos quadrados, seguidas por uma etapa de ajuste iterativo não linear.

Na metodologia de calibração proposta por Tsai, um alvo com geometria conhecida é introduzido na cena e, a partir deste, são determinadas as localizações dos pontos correspondentes, tanto na imagem quanto no SCCG. Com esses dados, o autor realiza inicialmente a determinação da matriz de parâmetros extrínsecos e a distância focal de forma linear. Então, realiza um ajuste não linear para determinação dos parâmetros intrínsecos restantes, ângulo oblíquo e centro da imagem, assim como ajustes nos parâmetros extrínsecos e distância focal, já determinados na etapa anterior. A técnica de Tsai possui pequenas diferenças quando são tratados problemas de calibração com alvos 3D e 2D, no entanto, a estratégia de calibração

Autor/Publicação	Descrição	Comparação
Alemán-Flores et al. (2014)	Propõe uma técnica de calibração de câmeras baseada em formas primitivas presentes na cena	Utilização apenas em cenas onde estão disponíveis as formas. As medidas no SCCG devem ser conhecidas com precisão.
Loaiza et al. (2011)	Calibração de múltiplas câmeras com auxílio da autocalibração	Forte dependência da precisão na localização dos pontos nas diferentes câmeras.
Zhang (2000)	Propõe calibração baseada em diferentes visualizações de um alvo 2D.	Necessidade de que seja inserido um alvo de calibração na cena com geometria conhecida.

Tabela 3 – Comparativo e relação dos métodos de calibração existentes no estado-da-arte com o trabalho proposto.

permanece a mesma.

O método de Tsai constitui a base de muitos outros trabalhos como ([LUHMANN et al., 2016](#); [GEE et al., 2015](#); [ALEMÁN-FLORES et al., 2014](#); [LI; TIAN, 2013](#)), citando apenas alguns recentes. Todos os trabalhos citados nesta seção compartilham a mesma dependência da exatidão dos dados dos pontos no SCCG e das correspondentes projeções na imagem ([ZHANG, 2004](#)).

3.2 Métodos Baseados em Alvos de Calibração 2D

Em um artigo recente Alemán-Flores et al. ([ALEMÁN-FLORES et al., 2014](#)) propõem uma técnica de calibração de câmeras para cenários de eventos esportivos (quadras e campos) utilizando apenas uma imagem da cena. Utilizou-se um modelo de cena planar, que neste caso, é o mais adequado, já que, na maior parte das vezes, a câmera é posicionada longe da cena ([ALEMÁN-FLORES et al., 2014](#)). Uma série de operadores morfológicos são aplicados sobre a imagem para extrair as formas primitivas, círculos e linhas apresentadas na cena. Para cada canal, é definido um

limiar de binarização da imagem. Quando o valor do pixel é maior que esse limiar, o pixel assume valor 1. Estes limiares, t_R , t_G e t_B , que são destinados para os canais vermelho, verde e azul, respectivamente, são definidos de forma dinâmica, de acordo com o histograma de cada canal. Para separar a área do campo onde está sendo realizado o evento das outras regiões na imagem, faz-se uma mudança no sistema de cores da imagem, de RGB para HSV, e uma binarização na qual a matiz *hue* é definida para um intervalo referente ao verde da grama. Uma vez aplicados esses operadores, utilizou-se a transformada de *Hough* para determinar a localização das formas primitivas dentro do campo.

Os autores fazem algumas simplificações para determinação dos parâmetros intrínsecos, que são ângulo oblíquo igual a zero e centro da imagem coincidindo com o eixo z do sistema de coordenadas da câmera. Por isto, possuem coordenadas do centro e taxa de aspecto igual a um. O único parâmetro intrínseco determinado é a distância focal, considerando-se que os outros parâmetros são fixos, posto que a câmera é a mesma em todas as imagens. Uma vez determinada uma matriz de homografia, esta, junto com a imagem da cônica absoluta, são utilizadas para determinar a distância focal. Os resultados apresentados mostram erros pequenos, da ordem de 10^{-4} m. É importante observar que a abordagem proposta neste caso somente pode ser utilizada em eventos esportivos, nos quais as dimensões da arena de disputa são conhecidas.

Um método híbrido de calibração de múltiplas câmeras com auxílio da autocalibração é proposto em [Loaiza et al. \(2011\)](#). Especificamente, a autocalibração é utilizada para produzir uma solução inicial para os parâmetros de calibração, visando-se aumentar a exatidão de tais parâmetros em amplos campos de visão. A grande contribuição para calibração de múltiplas câmeras é a forma dos alvos de calibração. São eles de dois tipos: um alvo planar e outro que contém apenas um ponto chamado de adimensional, e ambos são invariantes à projeção.

Uma das técnicas mais consagradas de calibração de câmeras, apresentadas nos últimos 20 anos, é a descrita por Zhang em seu artigo ([ZHANG, 2000](#)). Esta técnica baseia-se em um número reduzido de visualizações de um alvo de calibração planar, como o mostrado na [Figura 7\(c\)](#). Para o processo de calibração, são obtidas imagens

desse alvo de diferentes pontos de vista. O plano que contém o alvo de calibração é definido como sendo o plano $Z = 0$ no sistema de coordenadas cartesianas globais (SCCG). Como o alvo é planar, todos os pontos que o compõem também estão nesse plano. A partir do conhecimento da posição dos pontos na cena (SCCG) e da correspondência desses com os pontos nas imagens, é possível determinar uma matriz de homografia H para cada imagem, bem como determinar os conjuntos de parâmetros intrínsecos e extrínsecos da câmera.

A técnica de Zhang apresenta excelentes resultados, com uma grande exatidão. No entanto, depende de um aparato de calibração, que são os alvos de calibração, o que torna o método dependente da interação com o usuário. É uma solução direcionada para utilização em computadores pessoais e não situações que se caracterizam por uma dinâmica muito grande. Outra limitação apresentada se deve ao fato de que, para que seja alcançada uma boa exatidão nos parâmetros de calibração, o alvo deve ocupar grande parte do campo de visão da câmera, o que pode tornar-se um problema de difícil solução caso haja um amplo campo de visão (LOAIZA et al., 2011).

Alguns autores propõem modificações no método de Zhang, com objetivo de diminuir o custo computacional, aumentar a exatidão na determinação dos parâmetros intrínsecos e extrínsecos ou diminuir a necessidade de interação com o usuário. Por exemplo, Da et al. (DA et al., 2012) fazem uma modificação em relação aos alvos de calibração. São utilizados círculos iguais no lugar do tabuleiro de xadrez. Por meio das coordenadas dos centros dos círculos e retas tangentes a eles, determinam-se as equações que serão utilizadas no processo de otimização para que se calcule os parâmetros intrínsecos. Os resultados apresentados são comparáveis ao método de Zhang, com a facilidade de ser uma técnica de calibração que não depende da interação com o usuário. Mas as necessidades específicas, como círculos de tamanhos iguais na cena, são um problema em tal método. Zhou et al. (ZHOU et al., 2012) apresentam uma nova abordagem na qual incluem uma etapa de ajuste não linear dos parâmetros recuperados, baseando-se no algoritmo de Lemvengerg-Marquardt. Os resultados apresentados mostram erros menores que os apresentados na técnica original de Zhang, com a desvantagem do aumento no custo computacional.

Autor/Publicação	Descrição	Comparação
Wang et al. (2016)	Realiza a calibração de câmeras utilizando diferentes vistas de um alvo unidimensional	Necessidade de inserção de um alvo com geometria conhecida na cena. Rigidez na determinação dos movimentos da câmera para realizar a calibração.
Wang et al. (2007)	Calibração unidimensional utilizando pontos no infinito	Forte dependência da precisão na localização dos pontos no SCCG.

Tabela 4 – Comparativo e relação dos métodos de calibração existentes no estado-da-arte com o trabalho proposto.

3.3 Métodos Baseados em Alvos de Calibração 1D

A técnica original para calibração proposta em Zhang (2004) baseia-se no conhecimento das distâncias relativas de três pontos colineares no SCCG e do movimento de rotação, centrado em um dos pontos. Este movimento de rotação pode ser realizado tanto pelo alvo de calibração, quanto pela câmera. Precisa-se de, no mínimo, seis pontos de visualização diferente do objeto unidimensional para a calibração.

Experimentos com dados reais e sintéticos são realizados em Zhang (2004). Nestes experimentos, para erros menores ou iguais a dois pixels na medida da localização dos pontos na imagem, o método obtém erros de até 25% na determinação do conjunto de parâmetros intrínsecos da câmeras.

Wang et al. (WANG et al., 2016), apresentam uma técnica para calibração unidimensional com o objetivo de aumentar a exatidão na determinação do conjunto de parâmetros intrínsecos e extrínsecos. A técnica é a mesma apresentada em Wang et al. (2007). No entanto, os autores utilizam uma metodologia de otimização mais adequada ao problema de calibração com múltiplas vistas. Essa técnica de otimização é chamada *Linear Matrix Inequalities relaxation (LMI)*, descrita em VanAntwerp e Braatz (2000).

Nos resultados apresentados, os autores utilizam uma imagem com a resolução de

3000 x 2000 e consideram erros de até 2 pixels. Fazem comparações do método apresentado com outros baseados em ajuste de massa (*Bundle Adjustment*). Como o ajuste de massa utiliza otimização não linear, a solução inicial é provida por diferentes meios, sendo: calibração normalizada unidimensional (ZHANG, 2004), algoritmo de similaridade invariante com pesos (SHI et al., 2012) e a técnica apresentada em Wang et al. (2007). Resultados apresentados pelos autores mostram erros menores que as técnicas utilizadas na comparação e também uma convergência mais rápida. Vale aqui ressaltar que os resultados apresentados mostram erros de até 25% na determinação dos parâmetros intrínsecos, mesmo com erros de apenas 0.06% na determinação da localização dos pontos na imagem. A localização dos pontos no SCCG apresenta erros iguais a zero, ou seja, os pontos são considerados ideais, mesmo para o caso real.

Wang et al. (WANG et al., 2007) propõem uma técnica de calibração baseada na metodologia proposta em Zhang (2004) com uma modificação, que é a utilização do ponto infinito. Como descrito na seção de fundamentação teórica, o ponto infinito é um ponto no plano infinito que representa a direção de uma reta no espaço projetivo. Com a utilização do ponto infinito, é possível determinar os parâmetros do modelo de transformação afim. Esse tipo de transformação faz parte do grupo projetivo que mantém invariante paralelismo entre retas. Ou seja, retas paralelas, após a transformação, permanecem paralelas (FAUGERAS et al., 2001). Esta transformação afim é transformada em métrica, utilizando a imagem da cônica absoluta e os pontos conhecidos no SCCG (ABC), conforme descrito em Hartley e Zisserman (2000). Os autores apresentam resultados para experimentos baseados em dados reais e sintéticos. Para os casos reais, alvos bi e tridimensionais são inseridos na cena para comparação dos dados obtidos pelo método proposto. Para os resultados dos experimentos com dados reais, os autores mostraram que o método proposto retorna resultados equivalentes e, em algumas vezes, melhores que os métodos baseados em alvos de calibração 2D e 3D. Para os resultados simulados, os autores adicionaram ruídos Gaussianos brancos de média zero e desvio padrão de até 2 pixels na imagem. Os autores não fornecem dados sobre ruídos inseridos nos pontos no SCCG, sendo assim, acredita-se que esses sejam iguais a zero. Para os níveis de ruído apresentados, os parâmetros são recuperados após o ajuste de massa,

apresentando erro máximo de 2%. Os erros, segundo os autores, apresentam um comportamento aproximadamente linear. Como pode-se observar, o método apresenta boa exatidão e facilita o processo de calibração, já que depende de um alvo unidimensional, mais simples de se inserir na cena. No entanto, quando comparado ao método proposto neste projeto de tese, percebe-se que tem uma finalidade diferente, já que é um método de calibração que não considera os erros na localização dos pontos no SCCG. Desta forma, tal método não poderia ser estendido para o caso de calibração em cenários nos quais não há alvos.

3.4 Métodos Não Baseados em Alvos de Calibração

Dentro do grupo de trabalhos não baseados em alvos de calibração, também chamados de métodos de autocalibração, há um conjunto importante, que são aqueles que utilizam uma metodologia baseada nas equações Kruppa. Faugeras et al. ([FAUGERAS et al., 1992](#)) descreveram pela primeira vez um método baseado na imagem da cônica absoluta e nas equações de Kruppa para solução do problema de autocalibração de câmeras. Apesar do rigor matemático da prova, de que o método está correto, ele tinha uma grande dependência da solução inicial para otimização dos parâmetros intrínsecos. Com o objetivo de vencer essa fragilidade, Loukaris e Deriche ([LOUKARIS; DERICHE, 1999](#)) propuseram uma modificação no método originalmente proposto por Faugeras, Luong e Maybank com a utilização da decomposição de valores singulares (SVD) da matriz fundamental. Métodos de autocalibração mais recentes como ([XU; DENG, 2015](#); [TAO et al., 2013](#); [GENG et al., 2013](#); [MERRAS et al., 2013](#)) utilizam abordagens diferentes de otimização, mas todos utilizam o trabalho de [Faugeras et al. \(1992\)](#) como fundamento. Como todos são métodos de autocalibração, compartilham dos mesmos problemas, que é a grande sensibilidade da solução a ruídos dos dados dos pontos correspondentes nas imagens. Outro problema do método proposto é a dificuldade na solução da função objetivo do problema de otimização, que possui um grande número de mínimos locais, o que dificulta consideravelmente o processo de calibração ([ZHANG, 2004](#)).

Outro grupo de métodos de autocalibração são aqueles que utilizam pontos no infinito. Um exemplo deste método de autocalibração é apresentado em [Wildenauer](#)

e Hanbury (2012). Neste artigo, os autores apresentam uma técnica baseada na detecção de pontos no infinito, ortogonais. Dois pontos no infinito são ditos ortogonais, quando as retas suportes as quais pertencem, também são ortogonais. Wildenauer e Hanbury (WILDENAUER; HANBURY, 2012) utilizam um filtro estatístico baseado em estimadores de máxima verossimilhança (MLE), por exemplo RANSAC, para eliminar pares de pontos no infinito que não sejam ortogonais. Para isto, utilizam um modelo mínimo, para o método MLE de calibração, baseado em três pontos no infinito e descrito por (HARTLEY; ZISSERMAN, 2000). Para um modelo mínimo, os autores consideram que a matriz de parâmetros intrínsecos é uma matriz diagonal contendo apenas a distância focal.

Nos resultados experimentais, os autores determinam o conjunto de parâmetros intrínsecos e/ou a matriz de rotação da câmera utilizando as retas com ruído. Com estas duas matrizes, já é possível fazer a projeção dos pontos no infinito. Em quase 100% dos casos, foi possível recuperar as matrizes de rotação e parâmetros intrínsecos quando os erros no paralelismo das retas, no plano de imagem, eram menores do que 4 *pixels*. O principal problema de técnicas baseadas em pontos no infinito é que nem sempre esses estão disponíveis para utilização (HARTLEY; ZISSERMAN, 2000). Essas abordagens funcionam apenas quando é possível a determinação de retas na imagem, além disso, é fundamental que essas retas sejam paralelas, o que pode ser uma tarefa fácil em lugares onde há construções, como prédios, casas, igrejas, entre outros. No entanto, essas retas podem não ser tão simples de encontrar em um ambiente genérico. Outro problema dos métodos baseados em pontos no infinito são os mesmos apresentados em métodos de autocalibração, isto é, consegue-se recuperar a geometria da cena a menos de um fator de escala.

Com o objetivo de aumentar a robustez dos métodos de autocalibração à ruídos nos pontos correspondentes nos planos de imagem, (FUSIELLO et al., 2004) apresentam uma técnica de calibração utilizando análise intervalar. Mais especificamente, eles usam um método de otimização global baseado no método de Hansen e Walster (HANSEN; WALSTER, 2004) para determinação da solução das equações de Kruppa. O algoritmo de otimização global é usado para determinar o conjunto de

parâmetros intrínsecos da câmera baseando-se em correspondência de pontos em imagens. Pode-se enfatizar aqui que o método proposto não utiliza álgebra intervalar na modelagem do problema, já que as matrizes fundamentais são determinadas utilizando-se pontos correspondentes obtidos por álgebra real. Os autores utilizam então a álgebra intervalar apenas na etapa de otimização, apenas com o algoritmo de otimização global.

Capítulo 4

Método proposto

Este capítulo descreve a metodologia proposta para a calibração de câmeras, baseada em álgebra intervalar. A [Figura 8](#) apresenta uma visão geral de tal metodologia, destacando as principais etapas que devem ser executadas, além de suas entradas e saídas. Adicionalmente, são apresentadas no início deste capítulo propostas de novas definições de operações intervalares no espaço projetivo, as quais são essenciais para a modelagem do problema abordado e para a adaptação de parte das técnicas computacionais aplicadas, em especial, o método de otimização proposto em [Hansen e Walster \(2004\)](#). Essas novas definições se fazem necessárias, visto que os métodos matemáticos baseados em álgebra intervalar atualmente existentes não são capazes de capturar completamente as relações existentes no âmbito de um dado modelo geométrico de câmera. Algumas dessas definições dizem respeito às relações existentes entre vetores e matrizes, que, se desconsideradas as peculiaridades da álgebra intervalar podem ser tornar sem sentido, um exemplo é a matriz de rotação.

4.1 Álgebra intervalar no espaço projetivo

Nesta subseção tem-se uma série de observações importante para aplicação da álgebra intervalar no espaço projetivo. Inicialmente considere-se o efeito da aplicação da álgebra intervalar na determinação da interseção de dois intervalos de segmentos de reta no espaço projetivo. A [Figura 9](#) apresenta um exemplo de intervalos de retas

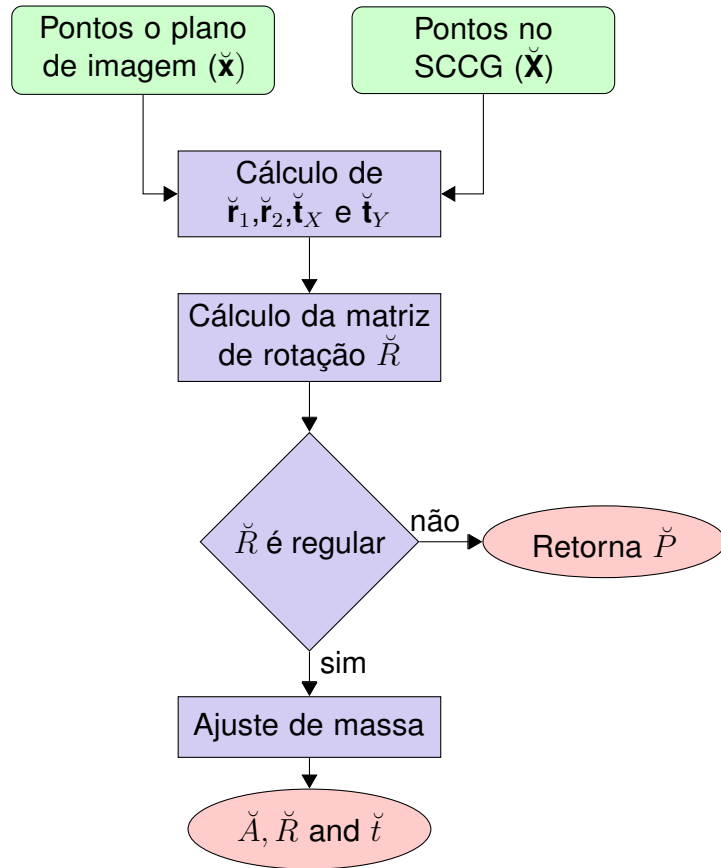


Figura 8 – Diagrama esquemático do método de calibração de câmeras. No diagrama $\check{r}_1$ e $\check{r}_2$ representam as linhas da matriz de rotação. As matrizes $\check{A}$ e $\check{R}$ parâmetros intrínsecos e de rotação respectivamente, $\check{t}$ o vetor de translação. A matriz $\check{P}$ representa a matriz de projeção.

não coincidentes no espaço projetivo $\mathbb{P}^2$. Nessa figura, são representadas apenas alguns segmentos de retas e pontos dos infinitos que pertencem ao intervalo de interseção $\check{x}$. Considerando-se que o produto vetorial é uma inclusão isotônica e não sofre com problemas de dependência, é possível estender esta definição utilizando-se apenas operações intervalares da seguinte forma:

$$\check{I} \times \check{I}' \subseteq \check{x},$$

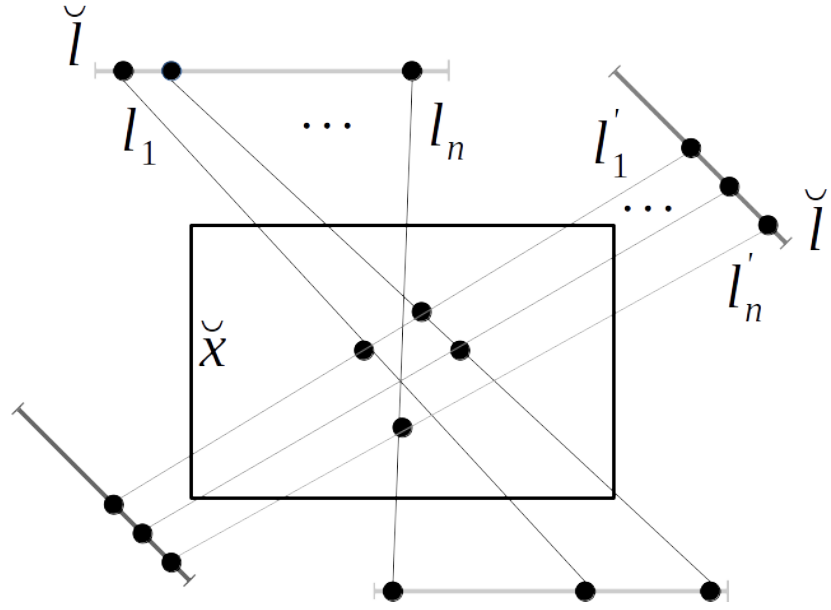


Figura 9 – Intervalos de retas não coincidentes no espaço projetivo.

onde o produto vetorial intervalar é dado por

$$\check{\mathbf{l}} \times \check{\mathbf{l}}' = \begin{pmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \check{l}_1 & \check{l}_2 & \check{l}_3 \\ \check{l}'_1 & \check{l}'_2 & \check{l}'_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

com $\check{l}_i$ e $\check{l}'_i$ como sendo as componentes dos vetores intervalares $\check{\mathbf{l}}$ e $\check{\mathbf{l}}'$, respectivamente.

Ainda, utilizando-se o teorema da dualidade, que é válido também para o caso intervalar, a reta que passa por dois intervalos de pontos $\check{\mathbf{x}}$ e $\check{\mathbf{x}}'$ pode ser definida como o produto vetorial entre estes

$$\check{\mathbf{l}} \subseteq \check{\mathbf{x}} \times \check{\mathbf{x}}'$$

No espaço projetivo $\mathbb{P}^2$, aplicando-se o teorema da dualidade, que diz que as definições e teoremas que se aplicam a hiperplanos também se aplicam a pontos, pode-se utilizar a interseção de dois intervalos de pontos para determinar os intervalos de reta que passam por dois intervalos de pontos. Um conjunto de pontos colineares dois

a dois definem um intervalo de retas. Quando esses intervalos são degenerados, tem-se apenas uma reta.

Esses conceitos são facilmente estendidos com aplicação da álgebra intervalar no espaço projetivo $\mathbb{P}^3$, sendo que as relações de incidência de pontos em hiperplanos permanecem as mesmas, a menos de que pontos intervalares em $\mathbb{P}^3$ sejam vetores homogêneos intervalares no $\mathbb{R}^{3+1}$. Um intervalo de planos $\check{\pi}$ é dado por um intervalo de pontos $\check{x}$ contendo no mínimo três pontos não colineares. Quando os intervalos dos pontos são degenerados, tem-se apenas um plano, que também é denominado degenerado.

Conforme descrito na [Subseção 2.1.2](#), um ponto cuja coordenada $x_{n+1} = 0$ pertence ao hiperplano infinito. Como um ponto intervalar é composto por infinitos pontos reais, esse conceito não pode ser diretamente estendido para o uso da álgebra intervalar. No entanto, utiliza-se a álgebra intervalar estendida, que define os casos para os quais o denominador da divisão é um intervalo, que contém o zero, para propor o [Teorema 4.1](#):

Teorema 4.1 *Um vetor intervalar no qual $0 \in \check{x}_{n+1}$ contém um conjunto de pontos finitos e infinitos a menos que $\check{x}_{n+1}$ seja um intervalo degenerado e igual a zero.*

Prova: A equação de um plano π_∞ é da forma $[0, 0, \dots, 1]$ sendo assim, pontos que pertencem a esse plano possuem a última coordenada como sendo igual a zero. Considerando que $0 \in \check{x}_{n+1}$ então para o intervalos de pontos $\check{x}$ tem-se pontos que pertencem ao plano infinito. No entanto, $\check{x}_{n+1}$ possui elementos cujo valor é diferente de zero, e portanto não pertencem ao plano π_∞ pertencendo então a planos reais. Pode-se concluir então que um intervalo de pontos cujo $\check{x}_{n+1} \subset 0$ possui pontos no plano infinito e outros em planos reais. $\square$

Para os caso onde $\check{x}_{n+1}$ é não degenerado, aritmética intervalar estendida especifica três casos. Considere-se um intervalo qualquer $\check{x}$ cujos limites inferior e superior são $[\underline{x}, \bar{x}]$, esses três casos podem ser representados da seguinte forma:

1. Se $\underline{x} = 0 < \bar{x}$, então $1/[\underline{x}, \bar{x}] = [1/\bar{x}, +\infty)$.

2. Se $\underline{x} < 0 < \bar{x}$, então $1/[\underline{x}, \bar{x}] = (-\infty, 1/\underline{x}] \cup [1/\bar{x}, +\infty)$.
3. Se $\underline{x} < \bar{x} = 0$, então $1/[\underline{x}, \bar{x}] = (-\infty, 1/\bar{x}]$.

O ponto de interseção de dois intervalos de retas no espaço projetivo é dado pela interseção de cada uma das retas obtidas por meio de intervalos degenerados pertencentes aos intervalos dos pontos projetivos. Sendo assim, não se pode definir operações intervalares no plano infinito a menos que, no intervalo de pontos, todos sejam pertencentes ao plano infinito, caso em que $\check{x}_{n+1}$ é um intervalo degenerado igual a zero, $[0, 0]$. No entanto, se no processo de homogeneização, que é a divisão das n componentes do vetor pela última coordenada, $n + 1$, houver divisão por zero, pode-se utilizar a álgebra intervalar estendida com intervalo de pontos cujas n primeiras coordenadas possuem intervalos dados por um dos casos acima.

4.1.1 Transformações projetivas

Como descrito na [Subseção 2.1.1](#), os grupos derivados da geometria projetiva são definidos de acordo com as transformações que são invariantes sobre pontos no espaço projetivo. Hartley e Zisserman ([HARTLEY; ZISSERMAN, 2000](#)) definem o conceito de projetividade da seguinte forma:

Definição 4.2 *Uma projetividade é um mapeamento inversível h de $\mathbb{P}^2$ para ele mesmo de forma que três pontos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$ estão em uma mesma reta apenas se $h(\mathbf{x}_1)$, $h(\mathbf{x}_2)$ e $h(\mathbf{x}_3)$ também estão.*

Esta definição leva ao [Teorema 4.3](#), também apresentado por Hartley e Zisserman:

Teorema 4.3 *Um mapeamento $h : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$ é uma projetividade se, e somente se, existe um matriz H não singular para a qual qualquer ponto em $\mathbb{P}^2$ representado por um vetor $\mathbf{x}$ a seguinte afirmação é verdadeira,*

$$h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x}.$$

Fundamentalmente, esse teorema mostra que qualquer transformação inversível, linear em coordenadas homogêneas, é uma projetividade. Se considerado o mapeamento através de uma matriz intervalar, tem-se que esse não é uma projetividade, pois esse mapeamento não é inversível, já que em álgebra intervalar não são definidos elementos inversos. Mas pode-se definir uma forma análoga a este mapeamento quando são utilizadas matrizes intervalares de homografia.

Definição 4.4 *Uma homografia intervalar $\check{H}$ é um mapeamento de intervalos de pontos $\mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$ no qual tem-se*

$$h(\check{x}) = \check{H}\check{x}.$$

Considerando-se a [Definição 4.4](#), o caso de um intervalo degenerado de pontos tem-se o mapeamento igual ao do [Teorema 4.3](#). No caso em que a matriz H é intervalar, $\check{H}$, essa deve ser regular e $\check{x}$ um intervalo de pontos em $\mathbb{P}^2$. Diferentemente do mapeamento utilizando pontos reais, no espaço projetivo, quando aplicado à álgebra intervalar, o mapeamento não é inversível. No entanto pode-se afirmar que o mapeamento inverso contém o ponto $\check{x}$, sendo assim,

$$\check{x} \subseteq \check{H}^{-1}\check{H}\check{x}.$$

Precisa-se, então, neste momento, definir o que é uma matriz inversa intervalar. Rohn e Farhadsefat ([ROHN; FARHADSEFAT, 2011](#)) definem a matriz inversa intervalar da seguinte forma:

Definição 4.5 *Para uma matriz intervalar regular $\check{A}$ define-se a inversa intervalar como sendo a matriz $\check{B} = [\underline{B}, \bar{B}] = \check{A}^{-1}$ por,*

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \min\{A^{-1} | A \in \check{A}\}, \\ \bar{B} &= \max\{A^{-1} | A \in \check{A}\}.\end{aligned}$$

Pelas diferenças em relação ao conceito de matriz inversa real, algumas vezes chama-se esta $\check{A}^{-1}$ apenas de *inversa intervalar*. A [Definição 4.5](#) é feita para matrizes

intervalares, no entanto, também é válida sobre intervalos degenerados, já que considera-se cada matriz A pertencente à matriz intervalar $\check{A}$. Dito isso, propõe-se neste trabalho que a [Definição 4.5](#) seja estendida utilizando-se o seguinte teorema:

Teorema 4.6 *Se uma matriz intervalar é regular, o produto intervalar dela pela sua inversa contém a identidade:*

$$I \subseteq \check{A}\check{A}^{-1}.$$

Prova: Para uma matriz A_i real qualquer, não singular, pertencente à matriz intervalar $\check{A}$, existe outra matriz $A_i^{-1} \in \check{A}^{-1}$. Sabe-se que $A_i A_i^{-1} = I$. Para a multiplicação $\check{A}\check{A}^{-1}$, tem-se que, pela definição de multiplicação matricial intervalar,

$$\check{A}\check{A}^{-1} = [\min(\underline{A}\bar{A}^{-1}, \underline{A}\underline{A}^{-1}, \bar{A}\bar{A}^{-1}, \bar{A}\underline{A}^{-1}), \max(\underline{A}\bar{A}^{-1}, \underline{A}\underline{A}^{-1}, \bar{A}\bar{A}^{-1}, \bar{A}\underline{A}^{-1})]$$

como

$$\underline{A} \leq A_i \leq \bar{A} \text{ e } \underline{A}^{-1} \leq A_i^{-1} \leq \bar{A}^{-1}.$$

então $I \in \check{A}\check{A}^{-1}$. $\square$

Considere novamente, então, o caso da matriz intervalar de mapeamento $\check{H}$. Fazendo-se a extensão intervalar, tem-se que este mapeamento fica da forma $\check{H}^{-1}\check{H}\check{x}$. Como $I \in \check{H}^{-1}\check{H}$ pelo princípio de inclusão isotônica, tem-se

$$\check{x} \subseteq I\check{x}$$

e pode-se concluir, então, que

$$\check{x} \subseteq \check{H}^{-1}\check{H}\check{x}.$$

O conceito de homografia é importante, pois é nele que se baseia o modelo fundamental das transformações geométricas presentes nas câmeras.

4.1.2 Modelo *pinhole* de câmera baseado em álgebra intervalar

Neste trabalho, o bem conhecido modelo de câmeras *pinhole* é devidamente adaptado de forma a contemplar a utilização da álgebra intervalar. Tal modelo é aqui

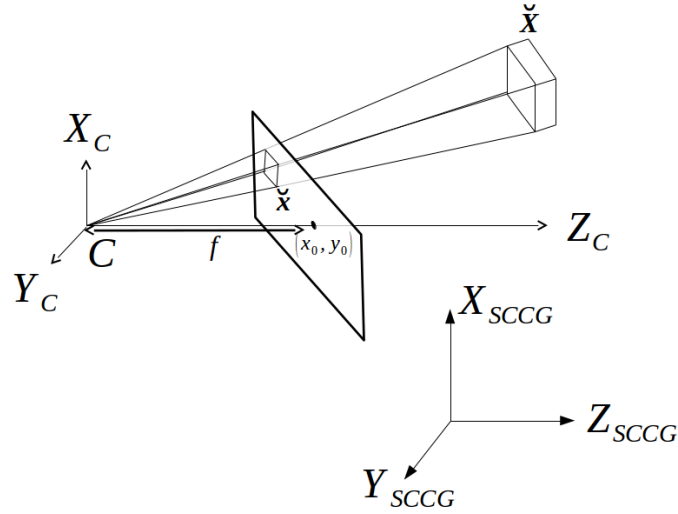


Figura 10 – Modelo simplificado de câmera utilizando-se álgebra intervalar. Nesse caso, o centro da câmera C é um intervalo degenerado, porque a distância focal é um valor real.

chamado de modelo *pinhole* intervalar e, basicamente, difere-se do modelo original pelo fato de utilizar intervalos de pontos, ao invés de pontos com valores reais. Isso introduz algumas especificidades nesse modelo fazendo com que seja possível uma calibração mais robusta, com resultados apresentando erros menores que a ordem de grandeza dos dados, mesmo em situações nas quais esses apresentam ruído uma ou duas ordens de grandeza maiores que os dados de referência (do inglês *ground truth*).

Para descrição do modelo *pinhole* intervalar, considere inicialmente a [Figura 6\(a\)](#), nela, vê-se o modelo geométrico de câmera utilizando-se o espaço projetivo real descrito na [Seção 2.2](#). Considerando-se que os pontos no SCCG são intervalos, tem-se o modelo visualizado na [Figura 10](#). Nesse caso vê-se que o raio óptico é a interseção do intervalo de segmentos de retas partindo do centro da câmera até o intervalo de pontos no SCCG e interceptam o plano de imagem no intervalo de pontos $\tilde{x}$. Utilizando o teorema de Thales em cada um dos pontos do intervalo,

têm-se que

$$\check{x} = f \frac{\check{X}}{\check{Z}} \text{ e } \check{y} = f \frac{\check{Y}}{\check{Z}},$$

observando-se que nesse caso f é um valor real, não um intervalo.

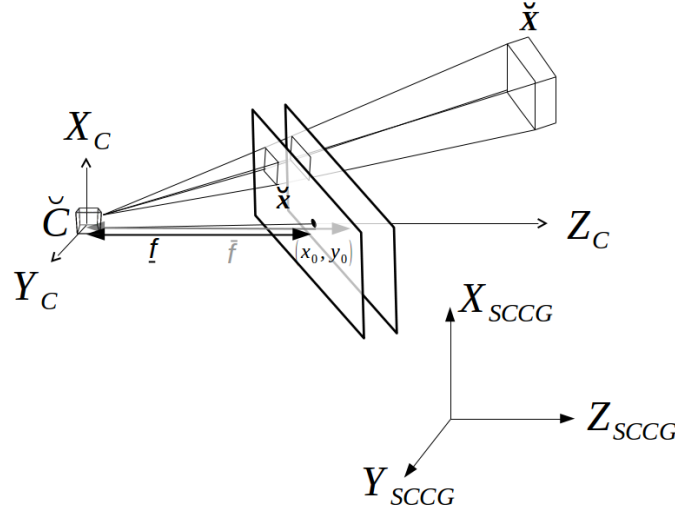


Figura 11 – Modelo simplificado de câmera utilizando álgebra intervalar. Neste caso o centro da câmera é um intervalo, pois devido a distância focal também é um intervalo.

Considere agora o modelo apresentado na [Figura 11](#). Tem-se $\check{f} = [\underline{f}, \bar{f}]$ também como uma variável intervalar. É importante notar que a localização do centro da câmera é dada por um cubo no espaço tridimensional, já que a distância focal f pode variar em um intervalo $\check{f}$. Sendo assim, no modelo intervalar *pinhole* fundamental tem-se as seguintes relações:

$$\check{x} = \check{f} \frac{\check{X}}{\check{Z}} \text{ e } \check{y} = \check{f} \frac{\check{Y}}{\check{Z}}.$$

Se os pontos no SCCG e na imagem são representados por vetores homogêneos o modelo de projeção central no espaço projetivo utilizando-se intervalos é expressado

como um mapeamento $\mathbb{P}^3 \mapsto \mathbb{P}^2$. Pode-se então escrever na forma matricial como sendo:

$$\begin{pmatrix} \check{X} \\ \check{Y} \\ \check{Z} \\ \check{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \check{f}\check{X} \\ \check{f}\check{Y} \\ \check{Z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \check{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \check{X} \\ \check{Y} \\ \check{Z} \\ \check{1} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Fazendo-se $\check{x} = (\check{f}\check{X}, \check{f}\check{Y}, \check{Z})$, tem-se uma forma mais compacta da [Equação 9](#) como sendo,

$$\check{x} = \check{P}\check{X}. \quad (10)$$

com $\check{P} = \text{diag}(\check{f}, \check{f}, 1) [I|0]$.

Na [Equação 10](#), assume-se que o eixo Z da origem do sistema de eixos coordenados fixado na câmera é igual a outro fixado no centro do plano de imagem. Isso quase nunca ocorre, pois no processo de obtenção e armazenamento da imagem, o sistema de eixos coordenados da câmera é fixado no canto superior esquerdo. Por isso, é preciso mapear o ponto $\check{x}$ deslocando-o para o centro do plano de imagem. Isso é feito somando-se um deslocamento $\check{p}_x$ e $\check{p}_y$ ao ponto no plano de imagem. Com esta correção, a projeção assume a seguinte forma,

$$(\check{X}_1, \check{X}_2, \check{X}_3)^\top \mapsto \left(\check{f} \frac{\check{X}_1}{\check{X}_2} + \check{p}_x, \check{f} \frac{\check{X}_2}{\check{X}_3} + \check{p}_y \right)^\top, \quad (11)$$

onde $(\check{p}_x, \check{p}_y)^\top$ são as coordenadas do ponto chamado de ponto principal, que é o ponto onde o eixo Z intercepta o plano de imagem. Pode-se expressar esta modificação quando se considera pontos intervalares em coordenadas homogêneas como

$$\begin{pmatrix} \check{X}_1 \\ \check{X}_2 \\ \check{X}_3 \\ \check{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \check{f}\check{X}_1 \\ \check{f}\check{X}_2 \\ \check{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \check{f} & 0 & \check{p}_x & 0 \\ 0 & \check{f} & \check{p}_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \check{X}_1 \\ \check{X}_2 \\ \check{X}_3 \\ \check{1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Para o modelo completo descrito na seção de Fundamentação Teórica, ainda são consideradas as dimensões dos *pixels* utilizados efetivamente no sensor de imagem.

Considerando-se esse modelo a matriz intervalar de parâmetros intrínsecos $\check{A}$ é

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \check{\alpha}_x & 0 & \check{p}_x \\ 0 & \check{\alpha}_y & \check{p}_y \\ 0 & 0 & [1, 1] \end{bmatrix}.$$

No caso acima tem-se que o centro de projeção da câmera coincide com a origem do SCCG. Naturalmente, entretanto, pode ocorrer de esse centro de projeção não estar exatamente na origem do SCCG. Pode ser também que as orientações desses dois sistemas de eixos coordenados não sejam a mesma, havendo, assim, ângulos de rotação entre eles. Sendo assim, é preciso relacionar esses dois sistemas de eixos coordenados, isso é feito por meio de uma matriz de rotação e um vetor de translação.

Uma das principais características da matriz de rotação é a ortogonalidade presente em suas linhas. Dois vetores que utilizam álgebra real são ditos ortogonais se o produto escalar entre eles é igual a zero. Essa definição perde o sentido quando é tratado o caso em que se tem vetores utilizando-se álgebra intervalar, pois não se pode ter $\check{a} \cdot \check{b} = 0$ para todo $a \in \check{a}, b \in \check{b}$. Sendo assim, faz-se necessário definir vetores intervalares ortogonais, pois essa informação será fundamental no processo de obtenção da matriz de rotação, que é parte do processo de calibração proposto neste trabalho. Dessa forma, propõe-se a seguir a [Definição 4.7](#):

Definição 4.7 *Dois vetores intervalares são ditos ortogonais se o produto escalar intervalar entre eles produz um intervalo que contém o zero, isto é:*

$$\check{a} \cdot \check{b} = \check{c} \text{ com } 0 \in \check{c}. \quad (13)$$

Dois vetores intervalares, $\check{a}$ e $\check{b}$, são considerados ortogonais se no mínimo dois vetores reais a e b pertencentes a eles são ortogonais. Utilizando-se novamente o princípio das extensões intervalares e inclusões isotônicas, pode-se ver que, se em dois intervalos $\check{a}$ e $\check{b}$ no mínimo um vetor é perpendicular, a relação dada pela [Equação 13](#) é válida.

Para uma matriz de rotação real ser uma matriz ortogonal, não é suficiente que suas linhas sejam ortogonais. As propriedades das matrizes reais ortogonais são:

- A inversa é igual a transposta $M^T = M^{-1}$;
- Suas colunas formam um conjunto ortonormal;
- Suas linhas formam um conjunto ortonormal;
- O determinante é $\det(M) = \pm 1$;
- Sua transposta também é ortogonal;
- Quando se multiplica a matriz M por uma constante c o resultado também é ortogonal.

Não se pode estender diretamente o conceito de matriz ortogonal real para matriz ortogonal intervalar, pois não é possível, por exemplo, que para toda matriz $A \in \check{A}$, o determinante seja igual a um. Sendo assim, propõe-se a seguir a modificação em algumas propriedades de matrizes com o objetivo de permitir o cálculo utilizando-se matrizes de rotação e baseado em álgebra intervalar, sem as quais estes cálculos tornam-se sem sentido.

A primeira delas é uma definição fundamental, pois é o principal requisito para que possam ser utilizadas matrizes intervalares de rotação, caso contrário a matriz de rotação perde o sentido geométrico.

Propriedade 1:

Deve existir no mínimo uma matriz $A^T \in \check{A}^T$, não singular, tal que

$$A^T = A^{-1} \quad (14)$$

Toda matriz ortogonal é regular, mas o contrário nem sempre é válido. O fato de a matriz $\check{A}$ ser regular não implica que essa é uma matriz ortogonal, pois, tem-se ainda outros requisitos a obedecer. Um destes requisitos é que a inversa esteja contida na transposta, sendo assim, tem-se a propriedade 2:

Propriedade 2:

Para uma matriz intervalar e ortogonal, toda matriz $A \in \check{A}$, a matriz real A possui inversa, o que implica que $\check{A}$ é definida como sendo regular.

Os métodos existentes para o cálculo da matriz inversa, que são computacionalmente factíveis, levam a matrizes intervalares cujos limites são o casco convexo da matriz inversa (ROHN; FARHADSEFAT, 2011). Sendo assim, utilizando-se esses métodos de inversão tem-se que $\check{A}^T \subseteq \check{A}^{-1}$. Nesse contexto, propõe-se a propriedade 3:

Propriedade 3:

Se uma matriz intervalar é ortogonal, então o seu determinante contém o intervalo degenerado $[1, 1]$:

$$[1, 1] \subseteq \det(\check{A})$$

Prova: Para uma matriz real tem-se que

$$\det(A) = \det(A^T),$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1.$$

Então

$$\det(A^T) \cdot \det(A^{-1}) = 1.$$

Uma vez que para matrizes ortogonais reais tem-se $A^{-1} = A^T$, conclui-se que

$$\det(A^T) \cdot \det(A^T) = 1. \quad (15)$$

Logo, de acordo com a Equação 15, tem-se que:

$$\det(A)^2 = 1$$

Portanto, se uma matriz real é ortogonal, então,

$$\det(A) = \pm 1$$

Para o determinante de uma matriz real A , pertencente à matriz intervalar $\check{A}$, tem-se que o determinante obedece à seguinte relação $\det(A) \in [\det(\underline{A}), \det(\bar{A})]$ sendo

$\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$ então $\det(\underline{A}) \leq \det(A) \leq \det(\bar{A})$. Se A é uma matriz degenerada cujo $\det(A) = 1$ então tem-se que $[1, 1] \subseteq \det(\check{A})$. $\square$

Matrizes reais ortonormais são aquelas cuja norma é igual a um. Moore et al. (MOORE et al., 2009) definem a norma de uma matriz intervalar como sendo

$$\|\check{A}\| = \max_i \sum_j |(\bar{A}_{ij})|, \quad (16)$$

que é uma extensão da norma infinita de uma matriz real. Similarmente,

$$\|\check{\mathbf{v}}\| = \max_i (\check{\mathbf{v}}). \quad (17)$$

Para que uma matriz real seja ortogonal, os vetores formados por suas linhas ou colunas têm de ser ortonormais. Vetores reais ortonormais são ortogonais e possuem norma igual a um. Pode-se estender esta definição para o caso intervalar considerando o seguinte:

Definição 4.8 *Dois vetores intervalares $\check{\mathbf{w}}$ e $\check{\mathbf{v}}$ são ditos ortonormais quando são ortogonais e*

$$\|\check{\mathbf{w}}\| = \|\check{\mathbf{v}}\| = 1. \quad (18)$$

Com isso, é possível garantir que não haja inconsistência nos termos da matriz rotação, dado que é construída através de operações sobre senos e cossenos cujo o valor máximo é ± 1 .

Como todas as linhas da matriz de rotação são ortogonais tem-se que a terceira linha é ortogonal às duas primeiras. Isso faz com que seja possível determinar a terceira linha da matriz de rotação pelo produto vetorial das duas primeiras. Baseando-se no conceito de produto vetorial intervalar e na ortogonalidade de vetores intervalares, se dois vetores intervalares, $\check{\mathbf{a}}$ e $\check{\mathbf{b}}$ são ortogonais, o produto vetorial intervalar entre eles tem como resultado um vetor também ortogonal. Para verificar essa afirmação, basta ver que se pelo menos um par de vetores reais pertencentes aos intervalos $\check{\mathbf{a}}$ e $\check{\mathbf{b}}$ forem ortogonais, o produto vetorial $\check{\mathbf{a}} \times \check{\mathbf{b}}$ conterá no mínimo um vetor real $\mathbf{c} \in \check{\mathbf{c}}$ que é ortogonal a $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Com isto, tem-se a [Definição 4.9](#):

Definição 4.9 *Uma matriz de rotação intervalar é ortogonal e apresenta as seguintes propriedades:*

- *A inversa contém a transposta $\check{M}^T \subseteq \check{M}^{-1}$;*
- *Suas colunas formam um conjunto ortonormal intervalar;*
- *Suas linhas formam um conjunto ortonormal intervalar;*
- *Para o determinante tem-se que $\pm 1 \in \det(\check{M})$;*
- *Sua transposta também é ortogonal intervalar;*
- *Quando se multiplica a matriz $\check{M}$ por uma constante real c o resultado também é ortogonal intervalar.*

De acordo com esses conceitos de matriz de rotação intervalar, é importante notar que a operação de rotação, utilizando-se álgebra intervalar, não tem a mesma propriedade da matriz de rotação real. Para o caso intervalar, utilizando-se as definições e teoremas descritos nesta seção, tem-se que

$$\check{x} \subseteq \check{R}^{-1} \check{R} \check{x},$$

diferentemente da inversa de uma matriz de rotação real, onde na rotação inversa tem-se novamente o ponto original.

A matriz de rotação da câmera é representada de forma mais intuitiva, quando utilizados os ângulos de Euler ([HARTLEY; ZISSERMAN, 2000](#)). Para o caso intervalar, essa representação se torna ainda mais importante devido à definição de inclusões isotônicas e o teorema fundamental da álgebra intervalar. A transformação entre a matriz de rotação real e os ângulos de Euler reais, juntamente com suas descrições completas, podem ser encontradas no livro de [Kim \(2013\)](#). A extensão intervalar da matriz de rotação não pode ser feita para quaisquer intervalos de ângulos. Sendo assim, todas as definições feitas abaixo sobre a matriz de rotação

são feitas considerando-se que os intervalos nos ângulos de rotação são tais que o teorema fundamental da álgebra intervalar não é violado.

Considerando-se as definições de matriz de rotação intervalar, pode-se definir a extensão do modelo *pinhole* real para o intervalar de câmeras como sendo:

$$\check{\mathbf{x}} = \check{A} \begin{bmatrix} \check{R} | \check{\mathbf{t}} \end{bmatrix} \check{\mathbf{X}}$$

onde $\check{\mathbf{x}}$ é o intervalo de pontos projetados no plano de imagem, $\check{A}$ a matriz intervalar de parâmetros intrínsecos, $\check{R}$ a matriz de rotação intervalar e $\check{\mathbf{t}}$ o resultado da rotação da origem do sistema de eixos coordenados fixados na câmera em relação a sua localização no SCCG. Sendo assim, tem-se que $\check{\mathbf{t}} = -\check{R}\check{\mathbf{C}}$. Nesse caso, $\check{\mathbf{C}}$ é a localização do centro da câmera em relação ao SCCG.

Finalmente, é possível recuperar a matriz intervalar de parâmetros intrínsecos $\check{A}$, bem como a de rotação $\check{R}$ e o vetor de translação $\check{\mathbf{t}}$ a partir da correspondência entre intervalos de pontos $\check{\mathbf{X}}$ no SCCG e $\check{\mathbf{x}}$ no plano de imagem.

4.2 Método de calibração intervalar

Em linhas gerais, o método de calibração de câmeras proposto neste trabalho baseia-se na correspondência entre intervalos de pontos no SCCG e intervalos de pontos no plano de imagem. A partir desse processo de correspondência, realiza-se uma estimativa inicial dos parâmetros intrínsecos e extrínsecos de forma linear e, em uma etapa seguinte, é realizado o ajuste de massa, responsável por determinar todo o conjunto de parâmetros. Para tanto, utiliza-se uma abordagem baseada na minimização de uma função não linear dada pela distância entre os intervalos de pontos projetados e os obtidos diretamente no plano de imagem, fornecidos como entrada para a calibração.

Na metodologia proposta, inicialmente assume-se que a posição do intervalo chamado de principal $(\check{p}_x, \check{p}_y)$ é conhecida e está no centro do plano de imagem. Trata-se de uma consideração razoável, já que é o que ocorre na maioria absoluta das aplicações em visão computacional (HARTLEY; ZISSERMAN, 2000). Considerando-se a localização de um dado intervalo no plano de imagem em pixels como sendo

$\check{\mathbf{x}} = (\check{x}_1, \check{x}_2)$ e a localização após o deslocamento do sistema de eixos coordenados da câmera para o centro como $\check{\mathbf{x}}' = (\check{x}'_1, \check{x}'_2)$, pode-se determinar

$$\check{x}' = \check{x}_1 - \check{p}_x \text{ e } \check{y}' = \check{x}_2 - \check{p}_y.$$

Usando-se a [Equação 5](#), tem-se

$$\frac{\check{x}'}{\check{y}'} = s \frac{\check{r}_{11}\check{X}_1 + \check{r}_{12}\check{X}_2 + \check{r}_{13}\check{X}_3 + \check{t}_X}{\check{r}_{21}\check{X}_1 + \check{r}_{22}\check{X}_2 + \check{r}_{23}\check{X}_3 + \check{t}_Y},$$

que é linear nas entradas da matriz de rotação intervalar $\check{r}_{ij}$. Logo:

$$s \left(\check{r}_{11}\check{X}_1 + \check{r}_{12}\check{X}_2 + \check{r}_{13}\check{X}_3 + \check{t}_X \right) \check{x}'_2 - \left(\check{r}_{21}\check{X}_1 + \check{r}_{22}\check{X}_2 + \check{r}_{23}\check{X}_3 + \check{t}_Y \right) \check{x}'_1 = 0, \quad (19)$$

resulta em uma equação, para cada correspondência entre os intervalos no SCCG $\check{\mathbf{X}} = (\check{X}_1, \check{X}_2, \check{X}_3, [1, 1])^\top$ e no plano de imagem $\check{\mathbf{x}} = (\check{x}'_1, \check{x}'_2, [1, 1])^\top$. Há sete incógnitas nessa equação, sendo assim, são necessários no mínimo oito intervalos correspondentes, $\check{\mathbf{x}} \leftrightarrow \check{\mathbf{X}}$, para determinar a solução do sistema linear intervalar.

Devido ainda à utilização de coordenadas homogêneas, os valores de $\check{r}_{ij}$, $\check{t}_X$ e $\check{t}_Y$ são obtidos a menos de um fator de escala. Sendo assim, pode-se utilizar, nessa etapa, uma escala arbitrária igual a $1/\check{t}_Y$. Dessa forma, não é necessário determinar $\check{t}_Y$ já que esse será igual a um, após aplicação da escala.

Então utilizando-se o valor de $\check{t}_Y$ igual a um intervalo degenerado $[1, 1]$, é determinado um sistema linear $\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{x}} = \check{\mathbf{b}}$, no qual a matriz intervalar $\check{\mathbf{A}}$ é uma matriz $2n \times 7$ com n sendo o número de correspondências de intervalos. Esse é um sistema de equações lineares intervalar, sendo que sua solução inicial pode ser determinada por meio de métodos de casco convexo (*Hull*) proposto em [Rohn \(1996\)](#). A solução por meio de métodos exatos apresenta dois problemas, o primeiro é que a matriz $\check{\mathbf{A}}$ quase nunca é regular, o que implica que o sistema linear, não possui solução exata. O segundo é que, mesmo quando essa matriz é regular, a solução apresenta intervalos com uma largura três a quatro vezes maiores do que a ordem de grandeza dos dados. Isso é um comportamento previsível pois as larguras dos intervalos da matriz $\check{\mathbf{A}}$ são muito maiores do que 10^{-3} ([ROHN; FARHADSEFAT, 2011](#)). Pensando-se

nesses dois problemas foi proposta uma etapa complementar utilizando-se um método de otimização não linear baseado em mínimos quadrados, que é apresentado no [Algoritmo 2](#). Sendo assim, após a solução, ou tentativa de solução, do sistema linear utilizando métodos exatos, é sempre executada uma etapa de otimização não-linear. Caso a matriz $\check{A}$ seja regular e o sistema possua solução intervalar exata, o método não-linear é utilizado para determinar o casco convexo ótimo, ou seja, casco convexo com o menor diâmetro, ao redor da solução ótima. Caso o sistema linear não possua solução exata, é utilizado apenas o algoritmo de otimização global baseado no método de mínimos quadrados para encontrar a solução.

Na etapa de otimização global a função objetivo de mínimos quadrados é

$$\left\| \check{A} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{r}}_{1j} \\ \check{t}_X \\ \check{\mathbf{r}}_{2j} \end{bmatrix} - \check{\mathbf{b}} \right\|^2. \quad (20)$$

Com os valores determinados para as duas primeiras linhas da matriz de rotação é possível calcular o fator de escala, neste trabalho definido como sendo igual $1/\check{t}_Y$. Esse pode ser determinado utilizando-se a informação de que a matriz de rotação é ortogonal e suas linhas ou colunas ortonormais. Então, tem-se que

$$\sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2} = 1 \text{ e } \sqrt{r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2} = 1.$$

Pode-se encontrar o fator de escala $\check{c}$ para ser aplicado a $\check{\mathbf{r}}_{1j}$, $\check{\mathbf{r}}_{2j}$ e $\check{t}_X$ com o objetivo de satisfazer a igualdade:

$$\check{c} = \frac{1}{\sqrt{\check{r}_{21}^2 + \check{r}_{22}^2 + \check{r}_{23}^2}} \quad (21)$$

A extensão intervalar dessas equações são triviais, já que essas são inclusões isotônicas. Então, esse fator $\check{c}$ é aplicado a $\check{\mathbf{r}}_{1j}$, $\check{\mathbf{r}}_{2j}$, $\check{t}_X$ e $\check{t}_Y$. Para que esse modelo linear esteja completo é preciso determinar a terceira linha da matriz de rotação, $\check{f}$ e $\check{t}_Z$.

Sabe-se que as duas primeiras linhas da matriz de rotação são ortonormais, sendo, assim é utilizada a estratégia descrita a seguir para forçar ortonormalidade. Dados

dois vetores reais $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, no $\mathbb{R}^3$, pode-se encontrar dois vetores ortogonais $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{b}'$ que são mais próximos possível de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ utilizando-se as Equações:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}' &= \mathbf{a} + k\mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= \mathbf{b} + k\mathbf{a}, \\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) + k^2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.\end{aligned}$$

A extensão intervalar é:

$$\check{\mathbf{a}}' = \check{\mathbf{a}} + k\check{\mathbf{b}}, \quad (22)$$

$$\check{\mathbf{b}}' = \check{\mathbf{b}} + k\check{\mathbf{a}}, \quad (23)$$

$$\check{\mathbf{a}}' \cdot \check{\mathbf{b}}' = \check{\mathbf{a}} \cdot \check{\mathbf{b}} + k(\check{\mathbf{a}} \cdot \check{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{b}} \cdot \check{\mathbf{b}}) + k^2\check{\mathbf{a}} \cdot \check{\mathbf{b}} = 0. \quad (24)$$

Utilizando-se a menor raiz da equação quadrática, pode-se determinar as duas primeiras linhas da matriz de rotação. A determinação das raízes dessa função racional intervalar utiliza uma metodologia para funções racionais quadráticas intervalares descrita em [Hansen e Walster \(2004\)](#).

Considere a equação racional quadrática intervalar

$$\check{A}x^2 + \check{B}x + \check{C} = 0 \quad (25)$$

As raízes intervalares da [Equação 25](#) são os conjuntos de raízes reais das equações quadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ para todo $a \in \check{A}, b \in \check{B}$ e $c \in \check{C}$.

Os intervalos $\check{rt}_i$, aos quais as raízes pertencem, podem ser expressos da seguinte forma:

$$\check{rt}_i \subseteq \frac{-\check{B} \pm \sqrt{(\check{B}^2 - 4\check{A}\check{C})}}{2\check{A}}. \quad (26)$$

Para o cálculo dos intervalos $\check{rt}_i$ utilizando-se a [Equação 26](#), tem-se o problema de dependência, pois as variáveis $\check{A}$ e $\check{B}$ ocorrem mais de uma vez na expressão. Então,

uma estratégia diferente é utilizada na determinação desse conjunto de raízes. Posto que $x^2 \geq 0$, $\check{A}x^2 = [\underline{A}x^2, \bar{A}x^2]$, então o termo $\check{B}x$ pode ser escrito como

$$\check{B}x = \begin{cases} [\underline{B}x, \bar{B}x] & \text{se } x \geq 0, \\ [\bar{B}x, \underline{B}x] & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Pode-se decompor a [Equação 25](#) como $[F_1(x), F_2(x)] = 0$ quando $x \geq 0$ e $[F_3(x), F_4(x)] = 0$ quando $x \leq 0$, onde

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \underline{A}x^2 + \underline{B}x + \underline{C}, \\ F_2(x) &= \bar{A}x^2 + \bar{B}x + \bar{C}, \\ F_3(x) &= \underline{A}x^2 + \bar{B}x + \underline{C}, \\ F_4(x) &= \bar{A}x^2 + \underline{B}x + \bar{C}. \end{aligned}$$

Dessa forma, os limites das raízes podem ser obtidos da seguinte forma

$$\underline{F}(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{se } x \geq 0, \\ F_3(x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad \bar{F}(x) = \begin{cases} F_2(x) & \text{se } x \geq 0, \\ F_4(x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (27)$$

Supondo-se que há um valor de x tal que

$$\underline{F}(x) \leq 0 \leq \bar{F}(x), \quad (28)$$

existem então um $a \in \check{A}$, $b \in \check{B}$ e $c \in \check{C}$ tais que $ax^2 + bx + c = 0$ para um valor de $x \in \check{r}t_i$ e todo intervalo degenerado em $\check{r}t_i$ satisfaz a [Equação 28](#). Nesse caso, $\check{r}t_i$ são chamados raízes intervalares de $\check{F}(x)$. No caso de coeficientes reais, a função quadrática pode ter nenhuma, uma ou duas raízes reais. Para o caso intervalar tem-se também nenhum, um ou dois intervalos disjuntos que contêm raízes de $\check{F}$. Mas há ainda um terceiro caso no qual se tem três intervalos disjuntos. Neste último, o limite inferior dos intervalos de raízes reais é $-\infty$ e o limite superior, $+\infty$.

Assumindo-se que $\bar{A} > 0$, tem-se o [Algoritmo 5](#) para determinação dos intervalos de raízes reais da função racional intervalar $\check{F}$.

Com os valores de $\check{A} = (\check{a} \cdot \check{b})$, $\check{B} = (\check{a} \cdot \check{a} + \check{b} \cdot \check{b})$ e $\check{C} = (\check{b} \cdot \check{b})$ e ainda se considerando que $\check{a} = \check{r}_{1j}$ e $\check{b} = \check{r}_{2j}$, pode-se determinar o valor intervalar para $\check{k}$ como sendo

Algoritmo 5: Algoritmo utilizado para determinação das raízes intervalares de uma função racional quadrática intervalar.

Input: $\check{A}, \check{B}$ e $\check{C}$;

Output: Intervalos contendo as raízes de $\check{F}(x)$;

$L \leftarrow$ raízes das funções reais $F_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$). L é uma lista contendo todas as raízes de F_i , raízes duplicadas devem ser entradas duas vezes. Deve ser utilizada álgebra intervalar para calcular as raízes das funções reais $F_i(x)$. Sendo assim, cada função irá produzir duas raízes com os limites superiores e inferiores da precisão do computador.

if $\underline{C} = 0$ **ou** $\bar{C} = 0$ **then**

$L \leftarrow 0$. Já que $F_1(x)$ e $F_3(x) = 0$ têm raízes $x = 0$ no primeiro caso e $F_2(x)$ e $F_4(x)$ no segundo.

end

if $\underline{A} < 0$ **ou** ($\underline{A} = 0$ e $\bar{B} > 0$) **ou** $\underline{A} = 0$ e $\bar{B} = 0$ e $\underline{C} \leq 0$ **then**

$L \leftarrow -\infty$

end

if $\underline{A} < 0$ **ou** ($\underline{A} = 0$ e $(\bar{B} > 0)$) **ou** ($\underline{A} = 0$) e $\bar{B} = 0$ e $\underline{C} \leq 0$) **then**

$L \leftarrow +\infty$

end

Faça a ordenação de L considerando apenas os limites inferiores dos intervalos das raízes.

$n \leftarrow$ Número de elementos em L

if $n = 0$ **then**

 Não há raízes intervalares

end

if $n = 2$ **then**

$\check{R} \leftarrow [L(1), L(4)]$

end

if $n = 4$ **then**

$\check{R}_1 \leftarrow [L(1), L(4)]$, $\check{R}_2 \leftarrow [L(5), L(8)]$

end

if $n = 6$ **then**

$\check{R}_1 \leftarrow [-\infty, L(4)]$, $\check{R}_2 \leftarrow [L(5), L(8)]$, $\check{R}_3 \leftarrow [L(9), +\infty]$

end

return $\check{R}$

o menor dos intervalos $\check{r}t_i$. Substituindo-se $\check{k}$ na [Equação 23](#), determina-se dois vetores intervalares que são aproximadamente ortogonais.

Mesmo determinando-se $\check{k}$ utilizando-se a [Equação 23](#), não se pode garantir que os vetores formados pela primeira e segunda linhas, $\check{r}_{1,j}$ e $\check{r}_{2,j}$, sejam realmente ortogonais, pois a função dada pela 22 possui os coeficientes $\check{A}$ e $\check{B}$ pequenos, já que $\check{r}_{1,j}$ e $\check{r}_{2,j}$ são quase ortogonais. Por isto, utiliza-se a estratégia de expansão heurística baseada em algoritmo genético para garantir que o vetor intervalar resultante seja realmente ortogonal, já que isso é muito importante para determinação da matriz de rotação. Foi elaborada a seguinte função objetivo

$$\Psi_{obj} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega(\check{x}_i)} + \frac{1}{\omega(\check{\mathbf{a}} \cdot \check{\mathbf{b}})} + \frac{1}{|(\check{\mathbf{a}} \cdot \check{\mathbf{b}})|}. \quad (29)$$

Para essa e outras etapas que necessitam de expansão heurística, propõe-se a utilização do algoritmo genético desenvolvido por Matthew Wall¹. Nesta implementação o genoma é composto por um mapeamento decimal para binário de 24 bits. Esse mapeamento é construído com o limite inferior igual a zero e o limite superior dado pelo valor superior do intervalo obtido no [Algoritmo 2](#) para cada uma das incógnitas.

Como resultado desse algoritmo, tem-se dois vetores intervalares ortogonais, sendo necessária a normalização para esses se tornarem ortonormais. Para determinar a terceira linha da matriz de rotação, foi feito o produto vetorial intervalar das duas primeiras linhas como se segue:

$$\check{\mathbf{r}}_{3j} = \check{\mathbf{r}}_{2j} \times \check{\mathbf{r}}_{1j}.$$

Com os procedimentos descritos acima, determina-se a matriz de rotação intervalar $\check{R}$ e as duas primeiras componentes do vetor de translação ($\check{t}_X, \check{t}_Y$). Para concluir a etapa linear do método de calibração, é necessário estimar a componente $\check{t}_Z$ da translação e a distância focal $\check{f}$. Considere-se então as equações que relacionam estas variáveis:

$$\frac{\check{x}'}{\check{f}} = s \frac{\check{r}_{11}\check{X} + \check{r}_{12}\check{Y} + \check{r}_{13}\check{Z} + \check{t}_X}{\check{r}_{31}\check{X} + \check{r}_{32}\check{Y} + \check{r}_{33}\check{Z} + \check{t}_Z} \text{ e } \frac{\check{y}'}{\check{f}} = \frac{\check{r}_{21}\check{X} + \check{r}_{22}\check{Y} + \check{r}_{23}\check{Z} + \check{t}_Y}{\check{r}_{31}\check{X} + \check{r}_{32}\check{Y} + \check{r}_{33}\check{Z} + \check{t}_Z}.$$

¹Disponível em: <http://lancet.mit.edu/ga/>

Fazendo-se a multiplicação cruzada encontra-se

$$\begin{aligned} s(\check{r}_{11}\check{X} + \check{r}_{12}\check{Y} + \check{r}_{13}\check{Z} + \check{t}_X)f - \check{x}'\check{t}_Z &= (\check{r}_{31}\check{X} + \check{r}_{32}\check{Y} + \check{r}_{33}\check{Z} + \check{t}_Z), \\ s(\check{r}_{21}\check{X} + \check{r}_{22}\check{Y} + \check{r}_{23}\check{Z} + \check{t}_Y)f - \check{y}'\check{t}_Z &= (\check{r}_{31}\check{X} + \check{r}_{32}\check{Y} + \check{r}_{33}\check{Z} + \check{t}_Z). \end{aligned}$$

Dado que já foi estimada a matriz de rotação $\check{R}$, tem-se duas equações lineares para as incógnitas $\check{f}$ e $\check{t}_Z$. Nesse caso também se utilizou a mesma metodologia utilizada anteriormente para solução de sistema de equações lineares intervalar. Em uma primeira etapa, tentou-se determinar a solução exata intervalar do sistema linear, seguiu-se então de uma etapa posterior de otimização baseada em mínimos quadrados com o [Algoritmo 2](#).

Uma observação importante aqui é que, para que seja possível a recuperação de $\check{f}$ e $\check{t}_Z$ de forma independente, é preciso que o alvo seja não coplanar. Caso isso não ocorra, o que se consegue é a determinação apenas da relação $\check{f}/\check{t}_Z$. Portanto, nesse caso, seria necessária mais do que uma vista para conseguir recuperar completamente a geometria da cena.

Nesse ponto tem-se uma etapa fundamental, que consiste em determinar se a matriz de rotação é regular. Essa verificação é feita utilizando-se o método de Rohn ([ROHN, 2009](#)), que determina as condições suficientes e necessárias para uma matriz intervalar ser regular. Caso a matriz de rotação seja regular o processo decorre normalmente e os parâmetros de calibração são determinados. Caso a matriz de rotação seja irregular é possível determinar apenas a matriz de projeção P . Neste trabalho quando a matriz de rotação é irregular o processo de calibração é paralisado e não é determinada a matriz de projeção, mesmo sendo possível. Foi feita essa escolha devido ao fato de o objetivo do trabalho ser a recuperação dos parâmetros intrínsecos e extrínsecos da câmera, o que não é possível devido à irregularidade da matriz $\check{R}$.

Após a determinação dos parâmetros descritos acima, tem-se uma etapa de ajuste não linear chamado de *ajuste de massa*. Nessa etapa é realizada a minimização da função da distância entre o ponto projetado e o utilizado para calibração, no plano

de imagem, representada por

$$\sum_i d\left(\check{\mathbf{x}}_i, \check{P}\check{\mathbf{X}}_i\right)^2. \quad (30)$$

Na etapa de ajuste de massa, a matriz $\check{P}$ foi parametrizada, pois o objetivo é a determinação dos conjuntos de parâmetros intrínsecos e extrínsecos. Esta parametrização ocorreu de modo que os parâmetros determinados pelo algoritmo são: os intervalos contendo os ângulos de Euler da matriz de rotação $(\check{\alpha}, \check{\beta}, \check{\gamma})$, as componentes $(\check{t}_X, \check{t}_Y, \check{t}_Z)^\top$ da translação, a distância focal em *pixels* nas direções x e y , $\check{f}_x$ e $\check{f}_y$ e as coordenadas do centro da imagem $(\check{p}_x, \check{p}_y)$. O ajuste de massa é dividido em duas etapas, na primeira é feita a utilização do algoritmo genético para realizar uma expansão heurística. A segunda é uma etapa de otimização global com o [Algoritmo 2](#). Na primeira etapa, foi utilizado uma heurística para determinar os diâmetros das variáveis objetivo que produzissem o erro quadrático médio de projeção em que o limite inferior fosse igual a zero e o limite superior o menor possível. Na segunda etapa foi utilizado o [Algoritmo 2](#) para reduzir ainda mais o limite superior do erro de projeção e também o valor mediano.

Na etapa heurística do ajuste de massa, foi utilizado o algoritmo genético com a função objetivo mostrada a seguir:

$$\check{\Psi} = \sum_i d\left(\check{\mathbf{x}}_i, \check{P}\check{\mathbf{X}}_i\right)^2, \quad (31)$$

$$\Psi_{obj} = -\left(10\omega(\check{f}) + \left(\check{f}\right)\right) + 2\left(\check{f}\right). \quad (32)$$

Finalmente, o [Algoritmo 6](#) apresenta o método de calibração de câmeras baseado em álgebra intervalar proposto neste trabalho.

No próximo capítulo serão apresentados os resultados da aplicação deste método em um cenário sintético, mostrando que o método proposto é eficaz para problemas de calibração onde a exatidão da localização dos dados é pequena.

Algoritmo 6: Algoritmo de calibração de câmeras utilizando álgebra intervalar.

Entrada: $\check{x}$ e $\check{X}$ intervalos correspondentes no plano de imagem e SCCG.

Saída: $\check{A}, \check{R}$ e $\check{t}$ parâmetros intrínsecos e extrínsecos

Determine $\check{r}_{1j}$, $\check{r}_{2j}$ e $\check{t}_X$ utilizando a [Equação 19](#) e o método de Rohn para solução de sistemas lineares intervalares.

Utilize o método mínimos quadrados junto com o algoritmo de Hansen e Walster para solução do problema de otimização global baseado em álgebra intervalar, para melhorar a solução.

if $\check{r}_{1j}$ e $\check{r}_{2j}$ *não são ortonormais* **then**

 Utilize uma técnica de ortogonalização para fazer com que os vetores intervalares das duas primeiras linhas da matriz de rotação, $\check{r}_{1j}$ e $\check{r}_{2j}$ sejam ortogonais.

if $\check{r}_{1j}$ e $\check{r}_{2j}$ *não são ortonormais* **then**

 Utilize um método de otimização baseado em Algoritmo Genético para forçar a ortonormalização.

end

end

Calcule a terceira linha da matriz de rotação $\check{r}_{3j}$ por meio do produto vetorial das duas primeiras linhas.

if A matriz de rotação intervalar $\check{R}$ *não for ortogonal* **then**

 Abandone.

end

Determine os valores de $\check{f}$ e $\check{t}_Z$ utilizando um método de Rohn para solução de sistemas lineares intervalares.

Utilize o método de mínimos quadrados junto com o de otimização global baseado em álgebra intervalar de Hansen e Walster ([HANSEN; WALSTER, 2004](#)) para melhorar a solução.

Determine todos os parâmetros intrínsecos e extrínsecos intervalares para o modelo completo utilizando uma heurística. Sugere-se, nesse caso, a utilização algoritmo genético.

Utilize o algoritmo de Hansen e Walster para determinar as soluções que produzem o menor valor médio do erro de projeção e o menor limite inferior desse mesmo erro.

return $\check{A}, \check{R}$ e $\check{t}$

Capítulo 5

Resultados Experimentais

Neste capítulo são apresentados e discutidos alguns resultados experimentais utilizando-se uma cena sintética. A partir dos experimentos realizados, foi possível observar o comportamento da metodologia proposta em cenários que apresentam diferentes valores de diâmetros dos intervalos para os dados, bem como para os ruídos nas localizações dos pontos tanto no SCCG quanto no plano de imagem. A avaliação do efeito desses ruídos é fundamental, já que a presença deles é crítica para todos os métodos de calibração (MEDIONI; KANG, 2004). Estudos sobre o estado da arte mostram que ruídos da ordem de alguns *pixels* nos pontos no plano de imagem e milímetros nos pontos no SCCG podem fazer com que os resultados retornados por esses métodos não possuam sentido geométrico (GENG et al., 2013). Nos experimentos apresentados neste capítulo são considerados ruídos severos nos dados, tanto nos pontos no SCCG quanto no plano de imagem. Com isto, pretendemos mostrar que a abordagem proposta é capaz de lidar com esse tipo de ruído, retornando erros de projeção que são suficientemente pequenos, da ordem de alguns *pixels*.

5.1 Métricas de Avaliação

Para a determinação da qualidade dos parâmetros de calibração calculados, foram utilizadas duas métricas diferentes: (1) o erro de projeção, o qual é responsável por permitir avaliar o nível de exatidão dos parâmetros intrínsecos e extrínsecos no que

diz respeito ao cálculo das coordenadas das projeções no plano de imagem dos pontos correspondentes no SCCG e (2) A distância dos parâmetros, métrica que visa avaliar o nível de exatidão dos parâmetros intrínsecos e extrínsecos em relação aos parâmetros de referência.

A forma de calcular as duas métricas são apresentadas a seguir. O erro de projeção, ϵ_p , é dado pela distância euclidiana média representada na [Equação 33](#),

$$\epsilon_p = \frac{1}{N} d(\check{\mathbf{x}}_i, \check{P}\check{\mathbf{X}}_i), \quad (33)$$

onde N é o número de intervalos. Nessa equação, $\check{\mathbf{x}}_i$ é o intervalo no plano de imagem e $\check{P}\check{\mathbf{X}}_i$ é a projeção no plano de imagem do intervalo $\check{\mathbf{X}}_i$ do SCCG correspondente ao ponto $\check{\mathbf{x}}_i$. A distância dos parâmetros é obtida pela diferença entre os parâmetros calculados e aqueles de referência. Com estas diferenças são calculados os desvio percentuais em relação aos parâmetros de referência.

Os pontos reais de referência, corrompidos com ruído ou não, foram utilizados também para realização do processo de calibração, por meio do conjunto de ferramentas desenvolvidas por Jean-Yves Bouguet chamado *Camera Calibration Toolbox for Matlab* ¹. Nesse conjunto de ferramentas, o autor implementou algoritmos de calibração baseados em uma série de métodos bem estabelecidos para calibração de câmeras, entre eles os métodos de Zhang ([ZHANG, 2000](#)) e Tsai ([TSAI, 1987](#)).

5.2 Custo Computacional

Uma questão importante na utilização de algoritmos e programas em sistemas computacionais diz respeito ao tempo gasto para sua execução. Em álgebra intervalar essa questão se torna ainda mais crítica, devido ao fato, principalmente, de operações intervalares serem mais dispendiosas computacionalmente do que operações que utilizam álgebra real. Isto se deve ao fato de que intervalos são pares de números reais e por isto, cada operação básica em álgebra intervalar gasta no mínimo o dobro de operações que a mesma em álgebra real. Para operações mais complexas como divisão, o tempo gasto é muito maior. Por isso, é importante que os

¹Disponível em: http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/index.html

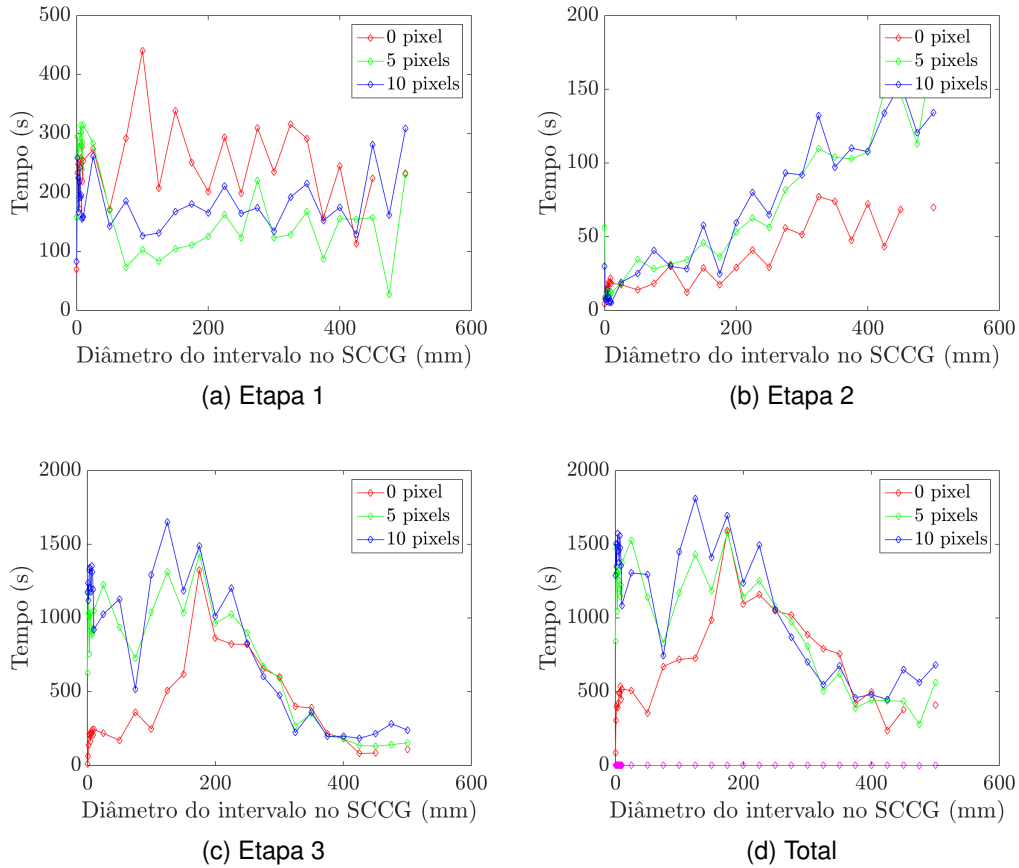


Figura 12 – Estudo do custo computacional para as três etapas do método de calibração utilizando álgebra intervalar proposto e o custo computacional total. Nestas figuras são apresentados os resultados para o diâmetro dos intervalos adicionados aos pontos no plano de imagem de 0, 5 e 10 *pixels*.

programas e os algoritmos de otimização sejam eficientes, fazendo o menor número de operações possível para que o tempo de computação não se torne proibitivo.

Neste trabalho é feita uma avaliação do custo computacional do processo completo de calibração baseado na metodologia apresentada utilizando álgebra intervalar. Os estudos referentes ao custo computacional foram realizados em um computador com o processador Intel Core i5-4590, que possui 4 núcleos com uma CPU cuja velocidade é 3.30GHz. A quantidade de memória do computador são 8 GB de Ram

DDR3 com a velocidade 1333Mhz. O sistema operacional utilizado foi o Linux - Ubuntu 16.04 LTS. Foram feitos experimentos em computadores com configurações mais velozes, mas como este estudo foi feito visando computadores de uso geral que podem ser utilizados em aplicações gerais, a configuração apresentada foi a escolhida para fazer este estudo de tempo.

Para fazer esse estudo do tempo de computação, o programa utilizado para implementar o método de calibração proposto nesta tese, foi dividido em três etapas.

- **Etapla 1** A determinação da matriz de rotação $\check{R}$ e das duas primeiras componentes do vetor de translação $\check{t}_X$ e $\check{t}_Y$.
- **Etapla 2** A determinação da distância focal $\check{f}$ junto com a terceira componente do vetor de translação $\check{t}_Z$.
- **Etapla 3** A última etapa é a do ajuste de massa, responsável por fazer ajustes finos nos parâmetros determinados nas duas primeiras etapas.

As Figuras 12 e 13 apresentam os resultados para o custo computacional em cada uma das etapas descritas e também o custo computacional total. O custo computacional total é comparado com o custo computacional apresentado pelo método de Bouguet.

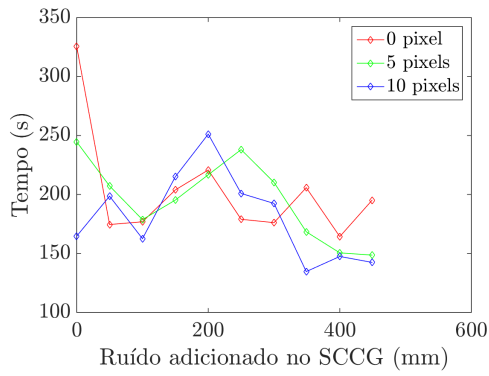
Na Figura 12 tem-se o custo computacional quando foi feito o estudo considerando-se a variação no diâmetro dos intervalos adicionados aos pontos no plano de imagem e no SCCG. Os diâmetros estudados são de 0, 5 e 10 *pixels* para o plano e imagem e 0 a 500 mm no SCCG. Pode-se observar que na Etapa 1 quando o diâmetro dos intervalos no SCCG aumentam não há uma tendência de crescimento ou diminuição dos custo computacional. Na Etapa 2 observa-se que o custo computacional cresce à medida que o diâmetro dos intervalos no SCCG aumentam. A Etapa 3 e o custo computacional total apresentam um comportamento muito parecido. Esse fato se deve principalmente por causa de a Etapa 3 ser justamente aquela com o maior custo computacional. O fato de esta etapa apresentar o custo computacional mais elevado se deve principalmente a dois fatores, primeiro é uma etapa com a função

objetivo não linear por isto com uma solução mais difícil de ser encontrada. Segundo devido ao número de variáveis objetivo, neste caso doze. Das três etapas a Etapa 3 é a que apresentam o maior número de variáveis para otimização. Observa-se nas Figuras 12(c) e 12(d) que o maior custo computacional é apresentado em torno de 200 mm de diâmetro do intervalo no SCCG, isso se deve ao fato de ser próximo ao ponto central entre o mínimo e o máximo dos valores dos diâmetros dos intervalos no SCCG. Então, este elevado custo computacional se deve ao fato de este ser o ponto onde gasta-se mais tempo tentando encontrar uma boa solução, tanto para o menor ruído adicionado no SCCG quanto para o maior. Já que para cada ruído adicionado aos pontos de referência no SCCG são feitos experimentos com o diâmetro do intervalo no SCCG variando de 0 a 500 mm.

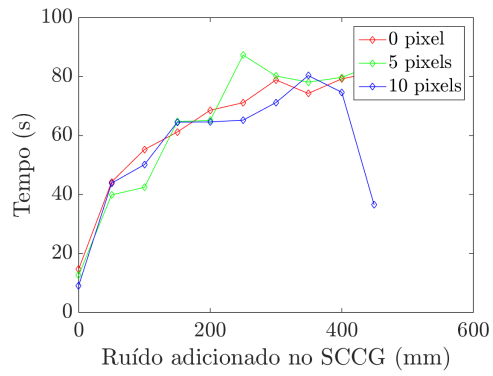
Avaliando-se ainda o gráfico apresentado na Figura 12(d) pode-se observar uma curva na cor magenta próxima do zero, que representa o custo computacional da calibração realizada utilizando-se o método de Bouguet. É visível que custo computacional total apresentado no método de Bouguet é muito menor que aquele apresentado pelo método proposto de calibração baseado em álgebra intervalar. Isto se deve principalmente a utilização da álgebra real, onde as operações algébricas fundamentais apresentam um custo computacional muito menor que as mesmas utilizando álgebra intervalar.

Na Figura 13 são apresentados os resultados quando avaliado o custo computacional em relação a um ruído gaussiano branco de média zero e desvio padrão σ_p adicionado aos pontos de referência no plano de imagem, e σ_w no SCCG. Na Etapa 1 mostrada na Figura 13(a) vê-se que há uma leve tendência de redução do custo computacional quando o ruído adicionado ao SCCG aumenta. Esta mesma tendência é apresentada nos gráficos das Figuras 13(c) e 13(d). Esta tendência deve-se ao fato de que no processo de otimização quando se realiza um número de iterações nos quais não se consegue a redução do diâmetro do intervalo do erro de projeção, ou no valor mínimo deste erro, o método de otimização finaliza e retorna o resultado com o menor erro de projeção encontrado e que possua o menor intervalo.

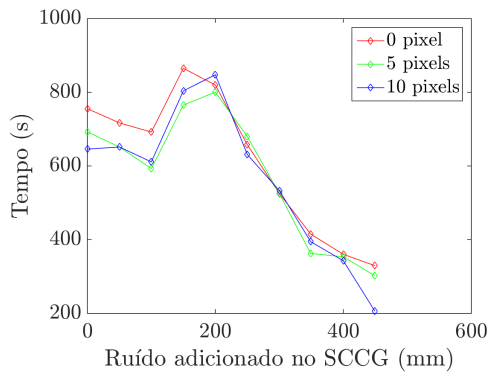
De forma geral é possível ver que o custo computacional mesmo sendo maior do que aquele apresentado pelo método de Bouguet não é proibitivo, ou seja, não



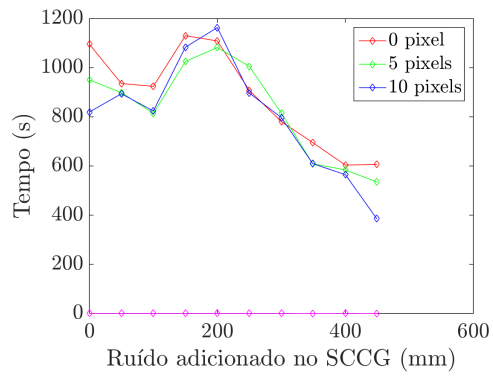
(a) Etapa 1



(b) Etapa 2



(c) Etapa 3



(d) Total

Figura 13 – Estudo do custo computacional para as três etapas do método de calibração utilizando álgebra intervalar, proposto, e o custo computacional total. Nestas figuras são apresentados os resultados para um ruído gaussiano branco de média zero e desvio padrão σ_p igual a 0, 5 e 10 pixels adicionados aos pontos no plano de imagem e um ruído gaussiano branco de média zero e desvio padrão σ_w variando de 0 a 500 mm no SCCG .



Figura 14 – Exemplo de uma cena criada no software de simulação 3D, contendo oito pessoas e uma câmera. A Figura 14(a), tem uma visão geral da cena. Na Figura 14(b), tem-se a imagem obtida para a câmera que compõe a cena.

impede que o método seja utilizado em muitas aplicações, já que o tempo máximo necessário para execução completa do processo de calibração é de no máximo 20 minutos. No entanto, esse é um ponto no qual o método pode ser melhorado atacando-se dois pontos, primeiro a utilização de processamento paralelo para realização das operações sobre intervalos e segundo melhorando o algoritmo de otimização baseado em álgebra intervalar utilizados. Ficando estas adaptações para serem estudadas como trabalhos futuros.

5.3 Cena Sintética

Com o objetivo de verificar a aplicabilidade da metodologia de calibração de câmeras proposta, criou-se uma cena sintética por meio do software de simulação de cenas 3D chamado *Blender*². Este é um software de construção de cenas tridimensionais extremamente versátil, que oferece várias opções de simulação. A Figura 14 ilustra a cena sintética criada para este experimento, contendo oito pessoas e uma câmera. Para obtenção dos resultados iniciais, devido à necessidade de um controle maior sobre as condições de ruídos nos dados, estes não foram inseridos diretamente no *Blender*, mas sim em um aplicativo em C++, construído neste trabalho para o pré-processamento dos dados.

²Disponível em: <https://www.blender.org/>

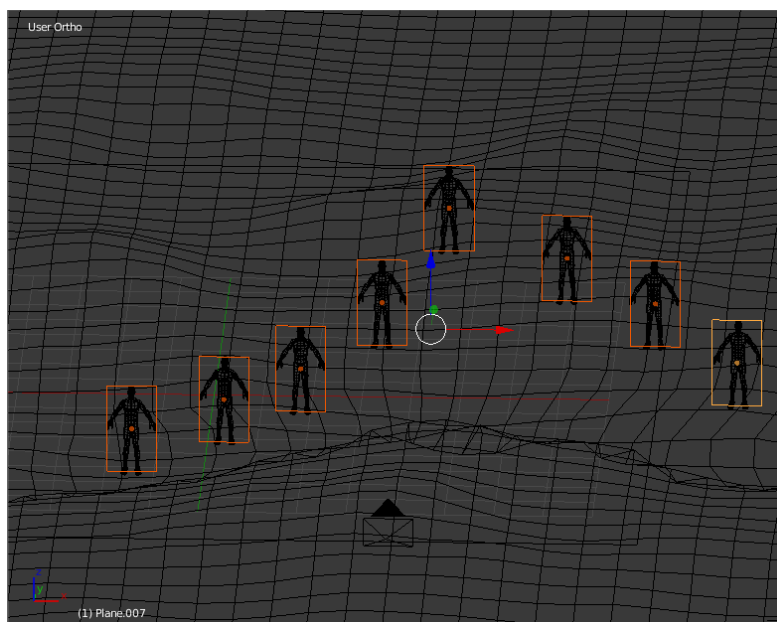


Figura 15 – Cena sintética contendo oito pessoas, criada a partir do software de simulação 3D e utilizada nos experimentos. Note que a cada pessoa foi adicionado um casco convexo na forma de um plano, de modo a facilitar a aquisição de informações de localização de tais pessoas em relação ao SCCG.

Na cena sintética construída com o *Blender*, foram adicionados cascos convexos na forma de cubos em torno de cada objeto (pessoa). No entanto, devido à dificuldade imposta quando a metodologia for adaptada à utilização de cenas reais para se conseguir definir um cubo em torno de objetos que estejam distantes da câmera, usou-se uma seção desses cubos, que são segmentos de planos obtidos a partir do ponto médio de suas larguras e paralelo à suas faces frontais. Sendo assim, foram desenhados apenas esses oito segmentos de planos presentes na cena, e esses estão ilustrados na [Figura 15](#). Especificamente, esses segmentos de planos receberam identificações com números de 1 a 8, sendo o Plano1 referente ao objeto 1, o Plano 2 referente ao objeto 2 e assim por diante. Nesse cenário, para a calibração de uma dada câmera que visualize tais objetos, considerou-se como entrada as localizações no SCCG dos pontos referentes aos vértices de tais segmentos de planos. Neste momento, por simplicidade, não foram consideradas oclusões, de modo que todos os quatro vértices de cada plano foram utilizados para calibração.

```

-<COLLADA version="1.4.1">
+<asset></asset>
-<library_cameras>
-  <camera id="Camera-camera" name="Camera.001">
-    <optics>
-      <technique_common>
-        <perspective>
-          <xfov sid="xfov">49.13434343434</xfov>
-          <aspect_ratio>1.7777777777778</aspect_ratio>
-          <znear sid="znear">0.1</znear>
-          <zfar sid="zfar">100</zfar>
-        </perspective>
-      </technique_common>
-    </optics>
-  </camera>
+  <extra></extra>
+  <camera id="Camera_001-camera" name="Camera.001"></camera>
+  <camera id="Camera_002-camera" name="Camera.000"></camera>
-</library_cameras>
+<library_lights></library_lights>
+<library_images></library_images>
+<library_effects></library_effects>
-<library_materials>
-  <material id="Material_001-material" name="Material_001">
-    <instance_effect url="#Material_001-effect"/>
-  </material>
-</library_materials>
-<library_geometries>
-  <geometry id="Cube-mesh" name="Cube">
-    <mesh>
-      <source id="Cube-mesh-positions">
-        <float_array id="Cube-mesh-positions-array" count="24">2 2 0 2 0 0 0

```

Figura 16 – Trecho do arquivo no formato XML com o padrão *Collada* para intercâmbio de informações entre o software *Blender* e a aplicação desenvolvida neste trabalho.

A partir da cena construída no *Blender* e ilustrada na Figura 15, foi gerado um arquivo com um padrão de dados para softwares tridimensionais chamado *Collada*³. Na Figura 16, pode-se ver um exemplo de trecho deste arquivo que contém algumas informações sobre as câmeras, como ângulo de visão, taxa de aspecto e as coordenadas dos vértices dos cubos, presentes na cena. Nesse padrão, as informações são colocadas em um arquivo cujo formato é o XML⁴. No arquivo XML são impressas informações das localizações de todos os vértices presentes na cena, assim como informações sobre a câmera.

Para implementação do leitor de arquivos XML, foi utilizada uma biblioteca chamada Xerces-C++, Versão 3.1.4⁵. Essa biblioteca implementa funções para leitura e busca em arquivos desse tipo. Ela é do tipo compartilhada, que provê acesso para:

³Disponível em: <https://collada.org/>

⁴Disponível em: <https://www.w3.org/XML/>

⁵Disponível em: <https://xerces.apache.org/xerces-c/>

separação, geração, manipulação e validação de documentos XML utilizando as API's DOM, SAX e SAX2. Esse leitor fornece bom desempenho com pequeno custo computacional e modularidade suficientemente grande para aplicações de pequeno porte como a aqui descrita.

Os dados dos parâmetros intrínsecos foram determinados diretamente no *Blender*. O software tem janelas de configuração nas quais é possível configurar a distância focal e o ponto central da imagem, por meio dessas janelas foi possível obter o conjunto de parâmetros intrínsecos. Por outro lado, os parâmetros extrínsecos que são a posição da câmera no SCCG e ângulos de rotação nos eixos $(X, Y, Z)^T$, foram obtidos utilizando o arquivo de dados *Collada*. Esses dados são utilizados como referência para avaliação do método de calibração proposto.

No que diz respeito às coordenadas dos pontos que representam as projeções ideais ou de referência no plano de imagem dos vértices dos planos, adicionou-se um ruído Gaussiano branco de média zero e desvio padrão igual σ_p em pixels. Em torno dessas coordenadas corrompidas por ruído, foi considerado ainda um intervalo com diâmetro ω_p . A [Figura 17](#) mostra um exemplo de como esse diâmetro foi adicionado aos pontos com ruído. No exemplo o ponto de referência é representado dentro dos limites dos intervalos em $\check{x}$ e $\check{y}$, no entanto, isso não é sempre verdade, de acordo com a forma de construção desses pontos descrita acima.

As coordenadas dos pontos ideais ou de referência no SCCG, isto é, as coordenadas dos vértices dos planos foram submetidas a um processamento análogo. Sendo assim, inicialmente adicionou-se um ruído branco de média zero e desvio padrão igual σ_w em metros. Em uma segunda etapa, foi considerado um intervalo de um diâmetro ω_w em torno desses pontos.

Para aplicação da metodologia de calibração proposta, foi construído um aplicativo em linguagem C/C++, para o sistema operacional LINUX, utilizando-se as bibliotecas YAML-cpp⁶, GTK+⁷, Eigen⁸ e PROFIL/BIAS.

⁶Disponível em: <https://github.com/jbeder/yaml-cpp>

⁷Disponível em: <http://www.gtk.org/>

⁸Disponível em: <http://eigen.tuxfamily.org/>

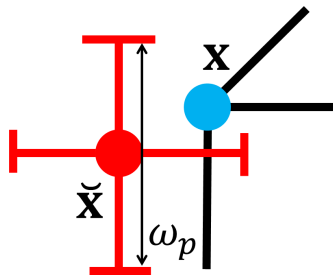


Figura 17 – Esquema da construção dos intervalos $\tilde{x}$ no plano de imagem utilizados como entrada para o algoritmo de calibração. Na imagem, o ponto azul, x , representa o ponto ideal ou de referência. O ponto vermelho encontra-se corrompido por um ruído Gaussiano branco de média zero e desvio padrão igual σ_p nas direções x e y em pixels. Os segmentos de retas vermelhos representam o diâmetro ω_p dos intervalos adicionados em torno do ponto com ruído.

A biblioteca YAML-cpp é utilizada para leitura e escrita de arquivos no formato YAML⁹. Esse é um formato no qual os dados são salvos em arquivos com uma linguagem mais intuitiva. Sendo assim, é possível salvar variáveis matriciais ou vetoriais de forma mais fácil. As variáveis intervalares foram armazenadas nesse formato, sendo assim, ele foi adaptado para o adequado armazenamento de matrizes e vetores intervalares.

GTK+ é uma biblioteca visual, multiplataforma para criação de interfaces gráficas para o usuário. Essa biblioteca é utilizada neste trabalho para construção de uma interface visual no sistema operacional LINUX. Essa interface tem como objetivo facilitar a entrada de dados, tanto para configuração do algoritmo quanto para dados para calibração. A Figura 18 mostra essa interface visual criada utilizando-se a biblioteca GTK+.

Para as partes do programa que utilizam álgebra matricial e vetorial real, utiliza-se a biblioteca chamada *Eigen*. Esta biblioteca implementa operações reais, como, decomposição em valores singulares, decomposição QR, e também alguns métodos para otimização.

⁹Disponível em: <http://yaml.org/>

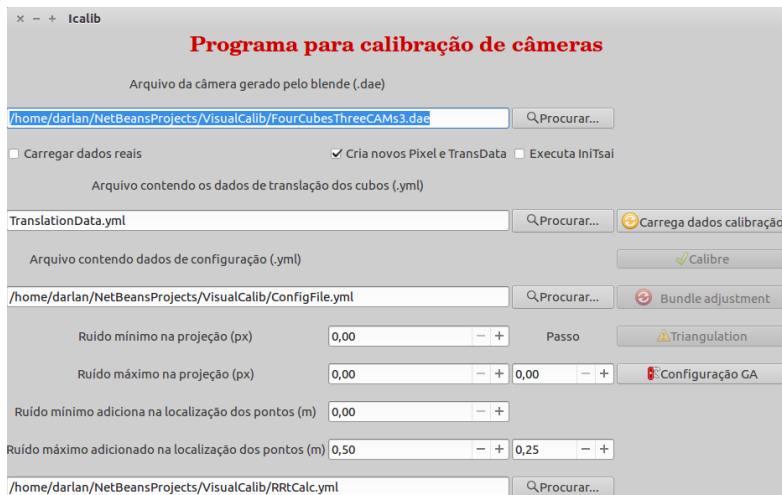


Figura 18 – Interface visual do aplicativo desenvolvido para calibração de câmeras, baseado na metodologia proposta neste trabalho.

Finalmente, utiliza-se a biblioteca PROFIL/BIAS para a realização das operações fundamentais sobre intervalos. Nela também são implementadas operações suplementares sobre álgebra intervalar como multiplicação de matrizes, funções trigonométricas intervalares, exponenciação entre outras. Deve-se ressaltar, contudo, que na biblioteca PROFIL/BIAS foram realizadas um grande número de modificações para adequação a este trabalho e incremento de sua estabilidade computacional. A instabilidade ocorria principalmente pela utilização de ponteiros. Sendo assim, em um número muito grande de execuções das iterações do método de otimização, por exemplo, era comum o computador travar por estouro de pilha. Outros métodos simplesmente não produziam resultados corretos como os de diferenciação automática. Foram modificados um grande número de métodos, garantindo assim o bom funcionamento dessa biblioteca para solução do problema de calibração, dando-se origem a uma nova biblioteca chamada PROFIL/BIAS-Calib, que está disponibilizada para utilização pública no sítio <https://github.com/dnunesbrito/Profil-Calib>. Na biblioteca PROFIL/BIAS, há ainda dois módulos suplementares de particular interesse para este trabalho, que são o módulo de diferenciação automática intervalar e o de otimização intervalar sem restrição. O primeiro foi utilizado, por exemplo, na etapa do método de Newton intervalar, que é parte do algoritmo de otimização global de Hansen e Walster. O segundo foi utilizado como base para implementação do

algoritmo de otimização global.

Os algoritmos utilizados na etapa de otimização possuem um pequeno conjunto de parâmetros, mas faz-se necessário a descrição de cada um deles para que os experimentos possam ser replicáveis. O primeiro deles é o número de intervalos iniciais fornecidos ao algoritmo de otimização de Hansen e Walster. Em todas as etapas que exigem solução de sistema de equações lineares intervalar foi utilizado o algoritmo de Rohn (ROHN, 1996) para calcular o casco convexo da solução. Nessas etapas foram utilizados dois parâmetros, o número máximo de iterações, que é chamado *MaxIter*, e o parâmetro f chamado no arquivo de configuração de *Eps*.

Outro algoritmo usado em muitas operações é o de otimização global apresentado por Hansen e Walster. Esse algoritmo tem um parâmetro que representa o número máximo de iterações, por simplicidade também é chamado no arquivo de configuração de *MaxIter*. Esse parâmetro não está presente no algoritmo proposto originalmente, mas foi adicionado para limitar o número máximo de iterações, que empiricamente notou-se ser extremamente grande no algoritmo original. *MaxBranches* define o número máximo de subdivisões dos intervalos das variáveis de otimização. Nas etapas do algoritmo de otimização global, as variáveis de otimização intervalares são divididas na busca pelo mínimo global da função, esse parâmetro *MaxBranches* limita o número de divisões feitas. A variável *MaxIterInnerLoop* é responsável por limitar o número máximo de iterações que serão executadas em cada subdivisão dos intervalos calculados das variáveis. Após a divisão dos intervalos da solução, o algoritmo de otimização global faz algumas operações com o objetivo principal de reduzir os diâmetros dos intervalos das variáveis de otimização, *MaxIterInnerLoop*, e limita o número máximo de iterações nesta etapa. O parâmetro *alpha_exp_factor* é usado na etapa de atualização do limite superior. Resumindo-se a utilização desse parâmetro, considere dois vetores: o primeiro é um vetor intervalar contendo a solução calculada até o momento pelo algoritmo de otimização global, o segundo é um vetor dos valores medianos das componentes intervalares do primeiro. As variáveis que são as medianas das componentes dos vetores solução são expandidos com intervalos baseados no gradiente da função objetivo. Esta expansão ocorre até que pelo menos uma das componentes dos

Parâmetro	Significado	Valor
Eps	Tamanho normalizado do intervalo que contém o mínimo	1
MaxIter	Número máximo de iterações	5000
MaxBranches	Número máximo de subdivisões dos intervalos	500
MaxIterInnerLoop	Número máximo de iterações na busca local	1000
alpha_exp_factor	Fator multiplicativo do gradiente intervalar	$1e - 8$
UpperBound	Limite superior, inicial do erro quadrático médio	$1e7$

Tabela 5 – Tabela contendo os valores dos parâmetros utilizados pelo algoritmo de otimização proposto, baseado em álgebra intervalar.

vetores expandidos não contenha a componente correspondente no vetor intervalar da solução inicial. O *alpha_exp_factor* é um fator que é multiplicado pelo gradiente intervalar da função objetivo. O resultado dessa multiplicação é um vetor intervalar que será posteriormente somado às medianas dos componentes dos vetores solução calculados iterativamente produzindo um intervalo maior. Então, o valor intervalar da função objetivo é calculado e o limite superior deste intervalo é o novo limite superior do algoritmo de otimização global. UpperBound é o valor inicial do limite superior da função objetivo. No [Algoritmo 2](#), esse limite superior é identificado pela variável $\bar{\phi}$. A [Tabela 5](#) apresenta uma breve descrição de todos os parâmetros com alguns valores utilizados.

Os parâmetros utilizados na etapa do algoritmo genético são aqueles comumente utilizados por outros trabalhos na literatura ([WHITLEY, 1994](#)). A [Tabela 5](#) lista tais parâmetros, os quais são descritos a seguir:

- **Número de gerações (ngen):** especifica o número máximo de gerações que serão produzidas. Cada geração é produzida baseando-se no cruzamento e mutação dos indivíduos da geração anterior;
- **Número de indivíduos (popsize):** especifica o número de indivíduos que cada geração conterá;
- **Probabilidade de cruzamento (pcross):** é a frequência na qual o cruzamento é realizado. Por exemplo, uma probabilidade de 0% implica que os descen-

Parâmetro	Significado	Valor
ngen	Número de gerações	3×10^4
popsiz	Tamanho da população	70
pcross	Probabilidade de cruzamento	0.6
pmut	Probabilidade de mutação	0.02

Tabela 6 – Tabela que contém os valores dos parâmetros utilizados em todas as execuções do algoritmo genético.

dentes são uma cópia exata dos pais. Se a probabilidade é de 100% toda a descendência é produzida por cruzamento;

- **Probabilidade de mutação (pmut):** É a probabilidade com a qual os cromossomos são alterados após o processo de cruzamento. Esse parâmetro não deve ser muito grande, pois assim o algoritmo genético torna-se de fato uma busca aleatória.

Em todas as etapas nas quais o algoritmo genético foi utilizado, o conjunto de parâmetros é o mesmo apresentado na [Tabela 6](#). Os valores para probabilidade de cruzamento e mutação foram os mesmos utilizados no exemplo fornecido pelo autor do método. Os parâmetros de números de indivíduos e gerações foram escolhidos de forma empírica, tal que retornassem o melhor resultado sem demandar um custo computacional muito elevado.

5.3.1 Análise dos Resultados

Com o objetivo de analisar os resultados é necessário descrever como foram realizados os experimentos. Esses foram realizados de duas maneiras diferentes nas etapas que foram necessárias otimização não linear. A diferença consiste na forma na qual os parâmetros intrínsecos e extrínsecos calculados foram propagados nas iterações do algoritmo de otimização global. Em ambas as formas após cada iteração, foi comparado se o erro quadrático médio apresentava um valor menor do que o calculado em iterações anteriores. No entanto, para a primeira, se o limite inferior do erro for menor do que o menor limite inferior anteriormente calculado este torna-se o novo menor limite inferior. Na segunda forma, é armazenada a solução que produz o

menor valor mediano do erro intervalar quadrático médio. A etapa linear não possui diferença em nenhuma das maneiras citadas. Ao final da execução do algoritmo de otimização global, são apresentadas duas soluções, a primeira é composta pelos conjuntos de parâmetros que apresentaram o menor limite inferior do erro quadrático médio de projeção intervalar. A segunda é a solução que apresentou o menor valor mediano do mesmo erro.

Como um exemplo da forma que os dados foram avaliados a [Figura 19](#) mostra o erro quadrático médio de projeção intervalar. Nos gráficos apresentados a calibração foi feita utilizando pontos no SCCG no qual foi adicionado um ruído Gaussiano branco de média zero e desvio padrão σ_w igual a 500mm. No plano de imagem também foi adicionado um ruído Gaussiano branco de média zero e desvio padrão σ_p igual a 10 *pixels*. Cada gráfico possui quatro curvas e alguns segmentos de reta verticais. As retas verticais representam o limite superior e inferior do erro quadrático médio de projeção. As curvas vermelha, verde e azul representam a mediana do intervalo do erro quadrático médio de projeção. A curva preta é o valor de referência do erro calculado pela aplicação em Matlab de Bouguet. Ela é uma reta devido ao fato de o valor do erro utilizando-se álgebra real encontrado pela aplicação de Bouguet não variar quando o diâmetro do intervalo adicionado aos pontos no SCCG ou no plano de imagem variam.

Pode-se sumarizar as formas como foram realizados os experimentos da seguinte forma:

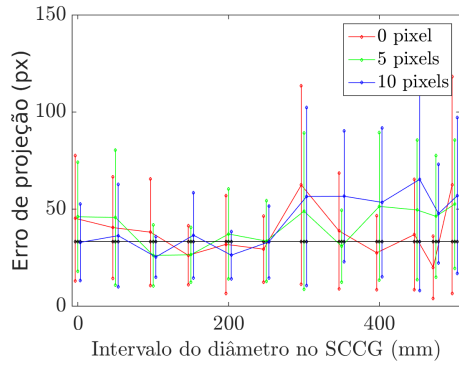
- **Teste 1**

Executando-se a busca local nos parâmetros que produziram o erro quadrático médio intervalar de projeção com o menor limite inferior.

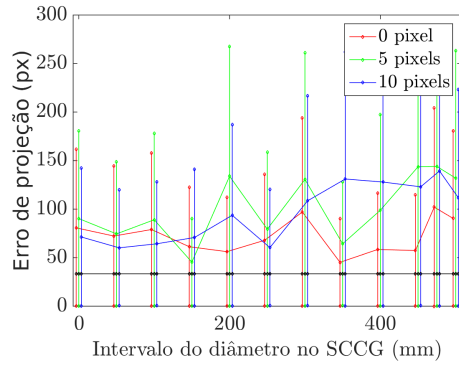
Projetando-se os intervalos com ruído utilizando-se a mediana dos parâmetros intervalares calculados.

- **Teste 2**

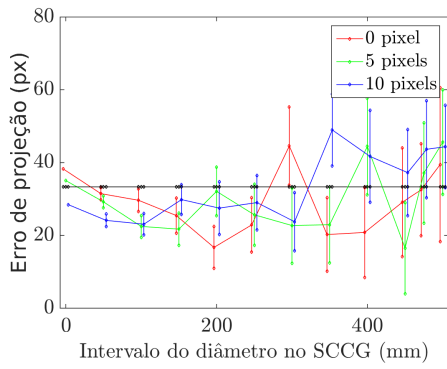
Executando-se a busca local nos parâmetros que produziram o erro quadrático médio intervalar de projeção com o menor limite inferior.



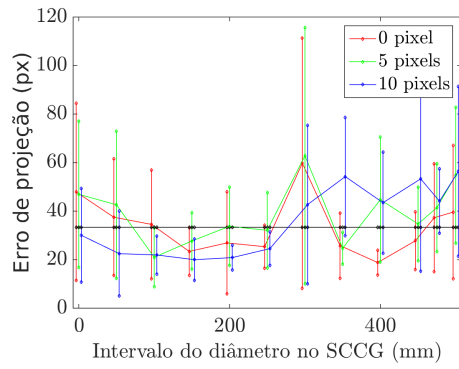
(a) Teste 1



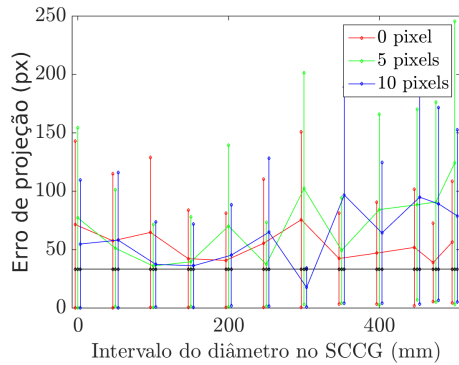
(b) Teste 2



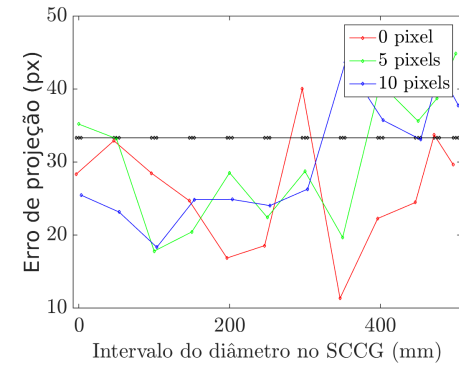
(c) Teste 3



(d) Teste 4



(e) Teste 5



(f) Teste 6

Figura 19 – Erro quadrático médio de projeção para os pontos e/ou intervalos projetados com os parâmetros recuperados pelo método de Bouguet e pela metodologia proposta. Todos os gráficos foram obtidos para os níveis de ruído $\sigma_w = 500mm$ e $\sigma_p = 10px$.

Projetando-se os intervalos com ruído utilizando-se os parâmetros intervalares calculados.

- **Teste 3**

Executando-se a busca local nos parâmetros que produziram o erro quadrático médio intervalar de projeção com o menor limite inferior.

Projetando-se pontos de referência utilizando-se os parâmetros intervalares calculados.

- **Teste 4**

Executando-se a busca local nos parâmetros que produziram o erro quadrático médio intervalar de projeção com o menor valor da mediana.

Projetando-se os intervalos com ruído utilizando-se a mediana dos parâmetros intervalares calculados.

- **Teste 5**

Executando-se a busca local nos parâmetros que produziram o erro quadrático médio intervalar de projeção com o menor valor da mediana.

Projetando-se os intervalos com ruído utilizando-se os parâmetros intervalares calculados.

- **Teste 6**

Executando-se a busca local nos parâmetros que produziram o erro quadrático médio intervalar de projeção com o menor valor da mediana.

Projetando-se pontos de referência utilizando-se a mediana dos parâmetros intervalares calculados.

As Figuras 19(a) - 19(c) foram criadas baseando-se nos dados calculados quando o erro quadrático médio intervalar foi calculado projetando-se os intervalos de pontos no SCCG que foram obtidos adicionando-se um intervalo aos dados de referência corrompidos com ruído. O erro médio de projeção intervalar é calculado tomando-se a distância euclidiana entre os intervalos de pontos ruidosos e os pontos de referência não intervalares no plano de imagem.

As Figuras 19(d) - 19(f) mostram os erros médios de projeção intervalar quando os dados de referência não intervalares no SCCG são projetados utilizando-se os parâmetros calculados pela abordagem proposta.

Para essas figuras, quando os diâmetros dos intervalos no SCCG aumentam, os limites superiores dos erros crescem e os limites inferiores diminuem. Esse efeito ocorre principalmente pela forma natural na qual os intervalos de pontos no SCCG são representados. No entanto, há ainda uma outra causa, que se trata do problema de dependência, que surge na solução tanto dos problemas lineares quanto não lineares. É importante observar que nossos resultados sempre, para algum diâmetro do intervalo no SCCG, apresentam um limite inferior do erro quadrático médio de projeção intervalar menor que a aplicação de Bouguet. Quando se considera os resultados com intervalos degenerados (diâmetro do intervalo iguais a zero) no plano de imagem, que são utilizados como entrada para a calibração, sempre para algum diâmetro no SCCG os limites inferiores e superiores do erro quadrático médio intervalar apresentam valores menores do que aqueles apresentados na aplicação de Bouguet. Esse comportamento é apresentado de forma geral em todos os experimentos realizados. Pode-se ainda enfatizar que os resultados apresentados na Figura 19(d) obtiveram um comportamento compartilhado por todos os experimentos. Essas figuras apresentam outro comportamento comum, o erro quadrático médio intervalar é menor quando usada a maneira na qual, para a entrada não-linear, o ponto armazenado é aquele que apresenta o menor valor mediano dos intervalos das variáveis objetivo.

As Figuras 20 - 22 apresentam um exemplo dos gráficos utilizados para representar as distâncias dos parâmetros calculados para os parâmetros de referência para: os ângulos de rotação, componentes do vetor de translação e distância focal. Esses gráficos apresentam as distâncias dos parâmetros para σ_w igual a 500mm e σ_p igual a 10 *pixels*. Mesmo para esses níveis de ruídos severos, as distâncias dos parâmetros para os ângulos de rotação apresentaram distâncias mínimas menores do que 5%, distâncias focais menores do que 1% e translações menores do que 50%. Pode-se destacar nesses gráficos que o melhor desempenho do método proposto por nós foi em relação à distância focal.

Figura 23 mostra a porcentagem de vezes que o método proposto retornou o erro quadrático médio menor do que aquele calculado pela aplicação de Bouguet. Nesses gráficos, a curva vermelha representa a porcentagem de vezes que método proposto calculou os parâmetros da câmera que retornaram o limite inferior do erro de projeção menores do que para aplicação de Bouguet. As curvas azuis representam o mesmo dado, no entanto, para o limite superior do erro, e a curva verde a mediana. As figura 23(a), 23(b) e 23(c) mostram as curvas que representam a porcentagem de vezes na qual o erro quadrático médio intervalar de projeção foi menor que aquele calculado pela aplicação de Bouguet. As figuras 23(d), 23(e) e 23(f) mostram os resultados quando na etapa não linear foram determinados os parâmetros da câmera que produzem o menor ponto médio do erro quadrático intervalar médio. Para todos os gráficos, a curva vermelha representa a porcentagem de vezes que nosso método calculou menor limite inferior do erro quadrático médio intervalar do que a aplicação de Bouguet. As curvas verdes representam a porcentagem de vezes que nosso método calculou o ponto da mediana do intervalo menor do que o método de Bouguet. Finalmente, a curva azul representa a porcentagem de vezes que o limite superior do intervalo do erro quadrático médio foi menor. Todos os gráficos foram construídos calculando-se o erro quadrático médio intervalar, projetando-se os pontos de referência no plano de imagem com os parâmetros calculados pelo nosso método e então calculando-se a distância Euclidiana entre os pontos de referência no plano de imagem e aqueles projetados.

Para construir os gráficos apresentados na Figura 24, foi adotado o mesmo procedimento descrito acima para as Figuras 19 e 23; entretanto, foi utilizado intervalos de pontos no SCCG que foram projetados no plano de imagem, então calculado o erro quadrático médio intervalar comparando com os pontos de referência não intervalares. Considerando a etapa não linear como descrita anteriormente foram mantidos os parâmetros que levaram ao menor limite inferior do erro quadrático médio intervalar ou os que levaram a um menor ponto mediano do erro médio quadrático de projeção. Os gráficos da Figura 24 foram construídos usando dados obtidos com um método não linear que mantém os parâmetros que levaram ao menor limite inferior do erro quadrático médio intervalar. Para estes gráficos o limite inferior do erro quadrático médio intervalar são pequenos, isto garante que o limite

inferior do erro intervalar seja quase sempre menor do que o erro quadrático médio de projeção não intervalares calculados utilizando a aplicação de Bouguet, como mostra claramente as figuras 24(a), 24(b) e 24(c). Além disto, nas Figuras 24(d), 24(e) e 24(f), quando são mantidos os parâmetros que levam ao menor ponto mediano do erro de projeção intervalar, o limite inferior do erro aumenta, no entanto o limite superior diminui, e pode-se ver que até o diâmetro dos intervalos no SCCG até 100 mm, ainda obtem-se o erro quadrático médio intervalar menores do que aqueles calculados pelo método de Bouguet em aproximadamente 20% dos casos estudados.

A outra métrica que foi utilizada como base para comparação é a distância entre os parâmetros que são apresentados nos gráficos das Figuras 25 - 31. Os resultados para os parâmetros da câmera que representam a distância focal foram quase sempre menores quando comparados aos parâmetros de referência do que aqueles calculados pela aplicação de Bouguet. Isso fica evidente quando são avaliados os gráficos das Figuras 25(a) até 25(f). Porém, os piores resultados obtidos pelo método apresentado por nós são para os parâmetros de translação da câmera. Dos valores apresentados para t_Y , ou seja, translação do centro da câmera na direção Y , aquele obtido pelo método apresentado por nós quase nunca retornou a um limite superior da distância intervalar do parâmetro menor do que a calculada pelo método de Bouguet.

Devido a esse conjunto de resultados preliminares, acredita-se que o método de calibração de câmeras que utiliza álgebra intervalar, proposto neste trabalho, apresenta um grande potencial para se tornar uma metodologia eficaz que irá contribuir significativamente para solução do problema de calibração de câmeras.

5.4 Discussão

O objetivo principal desta tese de doutorado foi apresentar um método para calibração de câmeras baseada em álgebra intervalar. Para atingir este objetivo, foram propostas algumas definições e teoremas ainda não presentes no estado da arte de álgebra intervalar aplicada à geometria projetiva. Além disto, foi proposta uma

	$\check{\mathbf{P}}_c \mathbf{X}_{WCF}$	$\mathbf{P}_c \mathbf{X}_{WCF}$	$\check{\mathbf{P}}_c \check{\mathbf{X}}_{IWCF}$	$\mathbf{P}_c \check{\mathbf{X}}_{IWCF}$
$\underline{\epsilon}$	74.7	58.5	81.8	70.5
$(\check{\epsilon})/2$	47.4	58.5	42.2	53.8
$\bar{\epsilon}$	32.3	58.5	22.2	41.7

Tabela 7 – Porcentagem de vezes em que o método apresentado levou a resultados cujos erros quadráticos médio intervalares foram menores que aqueles calculados utilizando-se álgebra real quando foram mantidos os parâmetros que levaram a menores erros medianos de projeção na etapa não linear.

nova abordagem para utilização da álgebra intervalar na geometria de imagens. Sendo assim, acredita-se que este trabalho constitui uma base para o surgimento de outros estudos em outras áreas da visão computacional aliando esses dois métodos matemáticos apresentados nesta tese.

Para demonstrar a força dessa nova abordagem, apresentou-se na [Seção 5.3](#) os resultados para solução do problema de calibração de câmeras baseado em alvos tridimensionais utilizando-se apenas uma imagem. Esse é um problema conhecido por apresentar uma solução difícil ([MAYBANK; FAUGERAS, 1992](#)). Os resultados mostraram que esta é uma abordagem promissora que apresentou resultados melhores que aqueles baseados em álgebra real. As porcentagens de vezes em que isso ocorre estão resumidas nas tabelas [7](#), [8](#) e [9](#).

A [Tabela 7](#) mostra a porcentagem de vezes em que a abordagem proposta levou a erros de projeção menores quando foram realizados os experimentos em que eram mantidos os parâmetros da câmera que levavam ao menor ponto médio na etapa não linear. A coluna $\check{\mathbf{P}}_c \mathbf{X}_{WCF}$ mostra os resultados para os erros quando foram projetados os pontos de referência no SCCG com os parâmetros intervalares da câmera calculados pelo método. A coluna $\mathbf{P}_c \mathbf{X}_{WCF}$ mostra quando foram projetados os mesmos pontos, no entanto, com os valores medianos dos parâmetros da câmera. As colunas $\check{\mathbf{P}}_c \check{\mathbf{X}}_{IWCF}$ e $\mathbf{P}_c \check{\mathbf{X}}_{IWCF}$ utilizam respectivamente os mesmos procedimentos de projeção, no entanto, utilizam os intervalos de pontos no SCCG que foram utilizados no processo de calibração para projeção e na posterior comparação com os pontos não intervalares de referência no plano de imagem. Todos os dados

apresentados na linha um da tabela representam a menor porcentagem de vezes que o método proposto levou a erros nos quais os limites inferiores são menores do que os apresentados pela aplicação de Bouguet. A linha dois para o ponto mediano e a linha três para o limite superior. Pode ser enfatizado nesses resultados apresentados que o nosso método apresentou um limite inferior do erro menor do que o da aplicação de Bouguet em mais de 60% das vezes, mesmo quando projetados os pontos ruidosos.

Considerando-se a média global para todos os parâmetros em que o método apresentado retornou distâncias menores do que aquelas representadas pela aplicação de Bouguet, os dados são apresentados na [Tabela 8](#). Nessa tabela, α_X , α_Y e α_Z são a porcentagem de vezes em que nosso método retornou distâncias menores do que aqueles calculados pela aplicação de Bouguet para os parâmetros dos ângulos de rotação da câmera nas direções X , Y e Z , respectivamente. Os parâmetros t_X , t_Y e t_Z são os parâmetros de translação f_X e f_Y , distância focal nas direções X e Y , respectivamente. As linhas são calculadas da mesma maneira como foi feito na [Tabela 7](#), linha um para o limite inferior da distância quando considerados os parâmetros que foram menores do que as calculadas pela aplicação de Bouguet. A linha dois foi calculada para os pontos médio e a linha três para os limites superiores das distâncias dos parâmetros. É importante notar que nosso método retornou uma distância menor para a distância focal em mais de 97% dos casos e para translação no eixo Z em 8.3% dos casos. Isso se deve principalmente ao fato de não serem utilizados os dados dos intervalos dos pontos no plano de imagem, normalizados. Mas, quando se compara os resultados obtidos para os erros de projeção, conclui-se que essa diferença leva a resultados nos quais o erro de projeção determinado com os parâmetros calculados pelo nosso método levou a erros menores em mais do que 22% das vezes, mesmo para o limite superior do erro quadrático médio de projeção.

A [Tabela 9](#) mostra os resultados para os quais o nosso método calculou limites inferiores do erro quadrático médio intervalar menores do que aqueles apresentados pela aplicação de Bouguet até 100 mm nas três primeiras colunas e até 500 mm nas três últimas colunas. As colunas $\epsilon_{\omega_p=0}$ utilizam pontos não intervalares na imagem para calcular os parâmetros de calibração. As colunas $\epsilon_{\omega_p=5}$ utilizam intervalos no

	α_X	α_Y	α_Z	t_X	t_Y	t_Z	f_X	f_Y
$\underline{\epsilon}$	30.9	56.7	67.5	47.0	2.4	25.5	97.9	97.9
$(\check{\epsilon})/2$	24.2	51.5	61.1	31.4	1.2	15.2	97.9	97.9
$\bar{\epsilon}$	21.1	47.0	54.7	22.4	0.8	8.3	97.9	97.9

Tabela 8 – Porcentagem de vezes em que o método proposto obteve erros quadráticos médios menores quando mantido os intervalos que levaram ao menor valor mediano do erro de projeção na etapa não linear.

	$\omega_w = 100mm$			$\omega_w = 500mm$		
σ_w	$\epsilon_{\omega_p=0}$	$\epsilon_{\omega_p=5}$	$\epsilon_{\omega_p=10}$	$\epsilon_{\omega_p=0}$	$\epsilon_{\omega_p=5}$	$\epsilon_{\omega_p=10}$
0px	61.0	39.6	33.3	63.2	59.0	50.0
5px	52.8	32.6	25.7	54.2	49.3	43.0
10px	50.8	30.0	27.0	52.4	38.9	33.3

Tabela 9 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou parâmetros de calibração que levaram a erros menores do que a aplicação de Bouguet para todos os experimentos quando utilizados intervalos de pontos SCCG para calibração.

plano de imagem com um diâmetro igual a 5 *pixels* e as colunas $\epsilon_{\omega_p=10}$ intervalos na imagem iguais a 10 *pixels*. As linhas representam diferentes ruídos Gaussianos adicionados aos pontos de referência antes de utilizá-los para calibração. Esse ruídos são ruídos Gaussianos brancos de média zero e desvio padrão σ_p iguais a 0, 5 e 10 *pixels*. Por meio dessa tabela pode-se concluir que quanto maior o diâmetro dos intervalos utilizados no SCCG, maior o número de vezes na qual o limite inferior do erro é menor do que o calculado pelo método de Bouguet. O mesmo comportamento não é observado quando se aumenta o diâmetro do intervalo no plano de imagem. Quando o diâmetro do intervalo aumenta, à medida que as linhas também aumentam, a porcentagem de vezes que o nosso método retorna erro médios calculados menores do que os do método de Bouguet diminuem. Isso evidencia que aumentar o diâmetro dos intervalos no plano de imagem não leva a bons resultados. Mas ainda assim, com intervalos maiores no plano de imagem, nosso método retornou parâmetros cujos erros quadráticos médios de projeção possuem limites inferiores menores em mais do que 29% de todos os casos.

A principal característica desta tese seja um novo conjunto de definições e teoremas

que podem ser utilizados para servirem de base para um grande número de estudos unindo álgebra intervalar e geometria de imagens. A potencialidade do nosso método foi comprovada quando se alcançou resultados melhores do que métodos apresentados na literatura e implementados na aplicação de Bouguet tanto para o erro de projeção, quanto para distância dos parâmetros, como mostram todas as tabelas e gráficos desta seção. Como mostrado na 19(a), nossa abordagem alcançou erros menores do que 5 *pixels* mesmo para ruídos severos tanto no plano de imagem quando no SCCG.

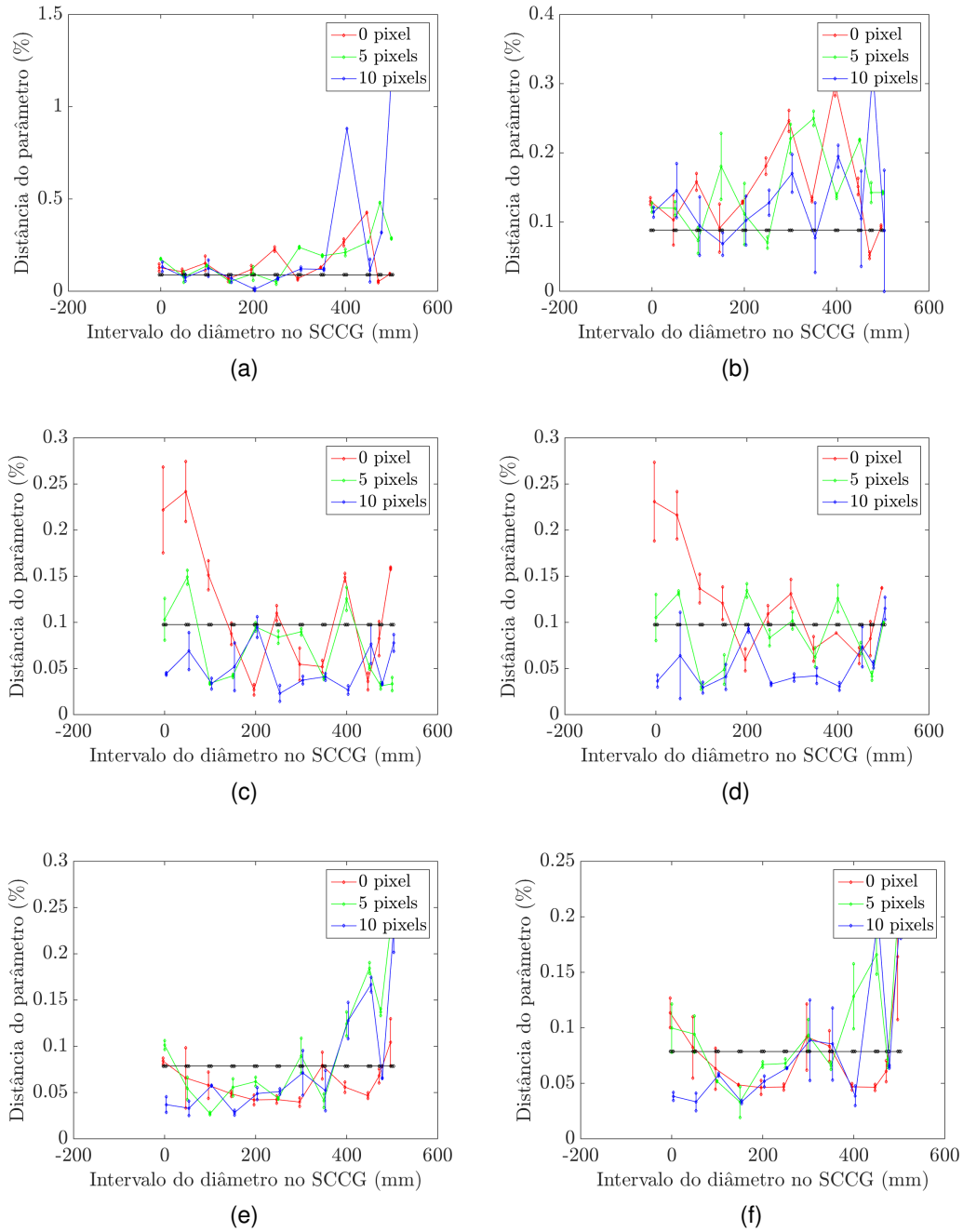


Figura 20 – Porcentagem da distância dos parâmetros calculados dos ângulos de rotação para os parâmetros de referência. As Figuras (a), (c) e (d) representam a distância dos parâmetros de referência para a mediana dos parâmetros calculados. As Figuras (b), (d) e (e) a distância para os parâmetros de referência e para os parâmetros intervalares. As Figuras (a) e (b) representam a distância para o ângulo de rotação na direção X, (c) e (d) na direção Y e (e) e (f) na direção Z.

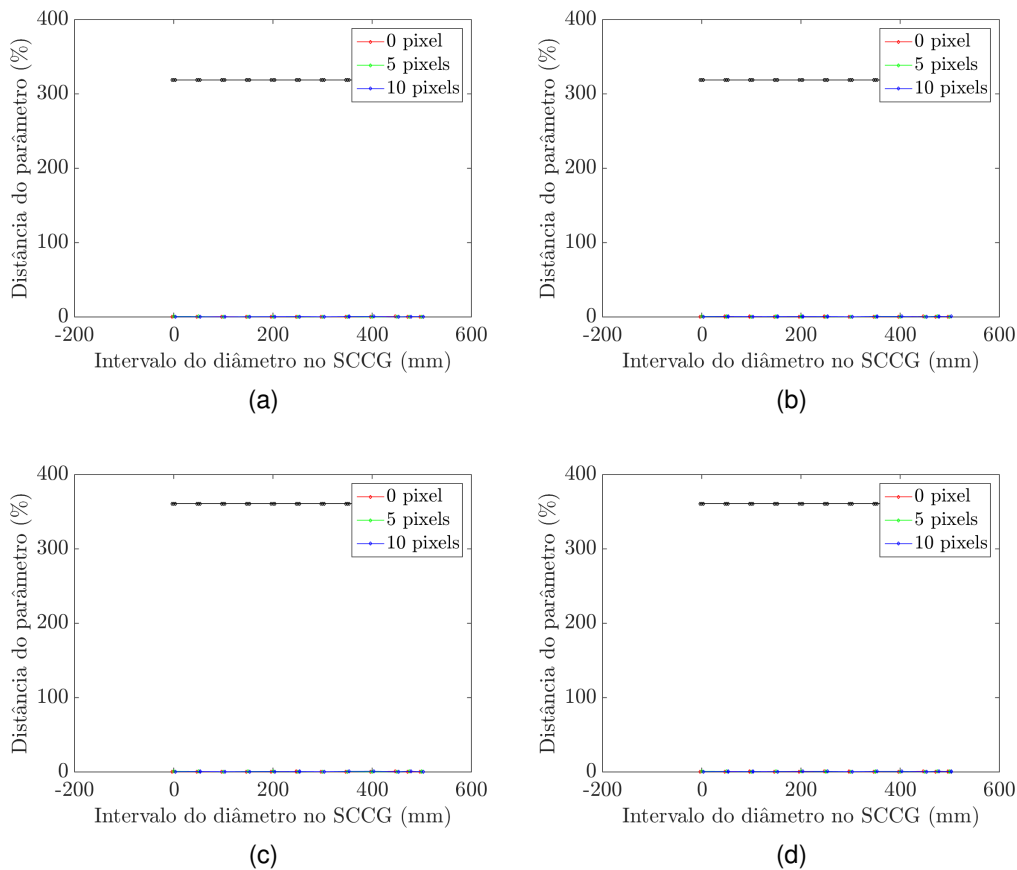


Figura 21 – Porcentagem da distância dos parâmetros calculados para os parâmetros de referência das distâncias focais. As Figuras (a) e (c) representam a distância dos parâmetros de referência para a mediana dos parâmetros calculados. As Figuras (b) e (d) a distância para os parâmetros de referência e para os parâmetros intervalares. As Figuras (a) e (b) representam a distância para o ângulo de rotação na direção X, (c) e (d) na direção Y.

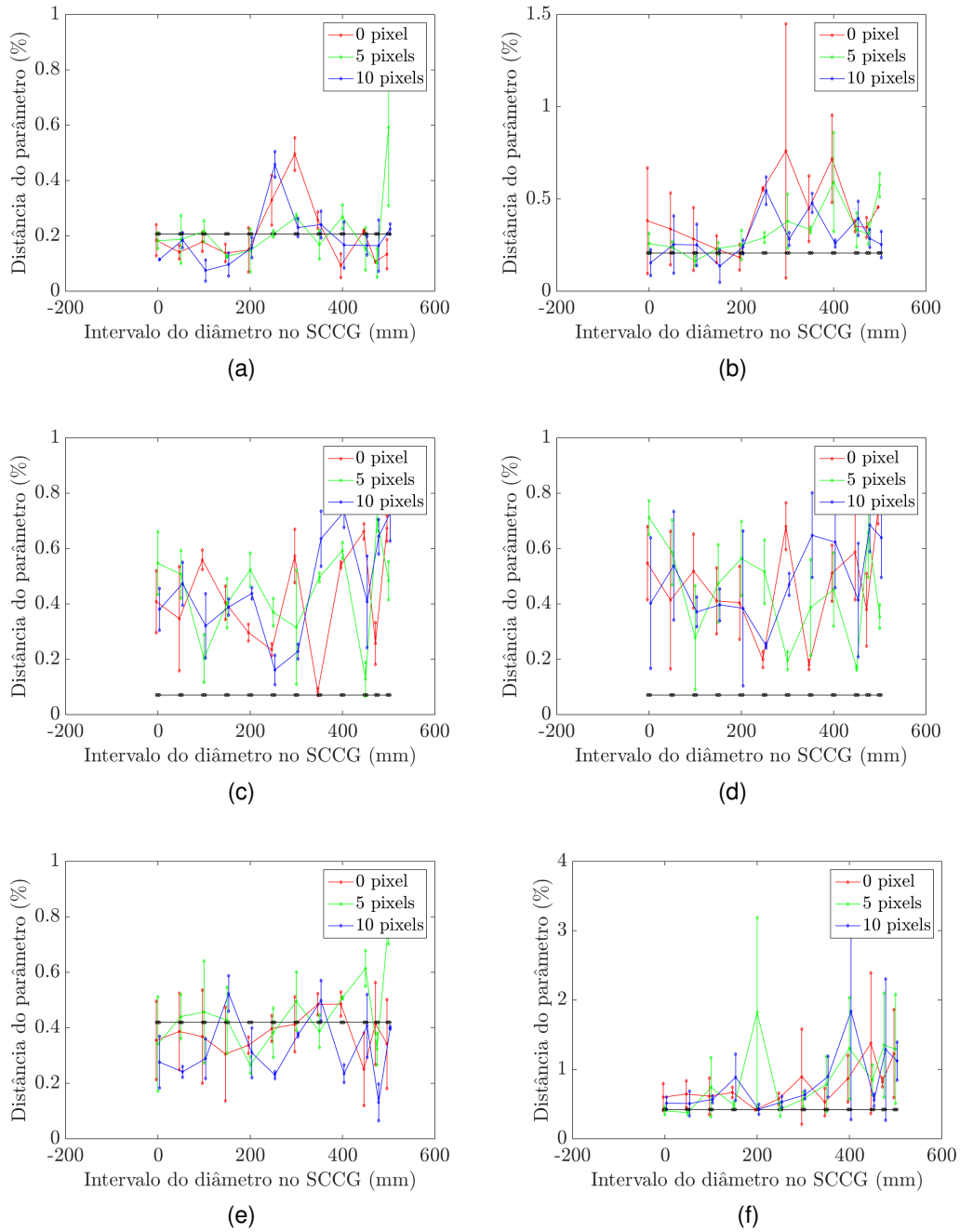


Figura 22 – Porcentagem da distância dos parâmetros calculados das translações para os parâmetros de referência. As Figuras (a), (c) e (d) representam a distância dos parâmetros de referência para a mediana dos parâmetros calculados. As Figuras (b), (d) e (e) a distância dos parâmetros de referência e para os parâmetros intervalares. As Figuras (a) e (b) representam a distância para o ângulo de rotação na direção X, (c) e (d) na direção Y e (e) e (f) na direção Z.

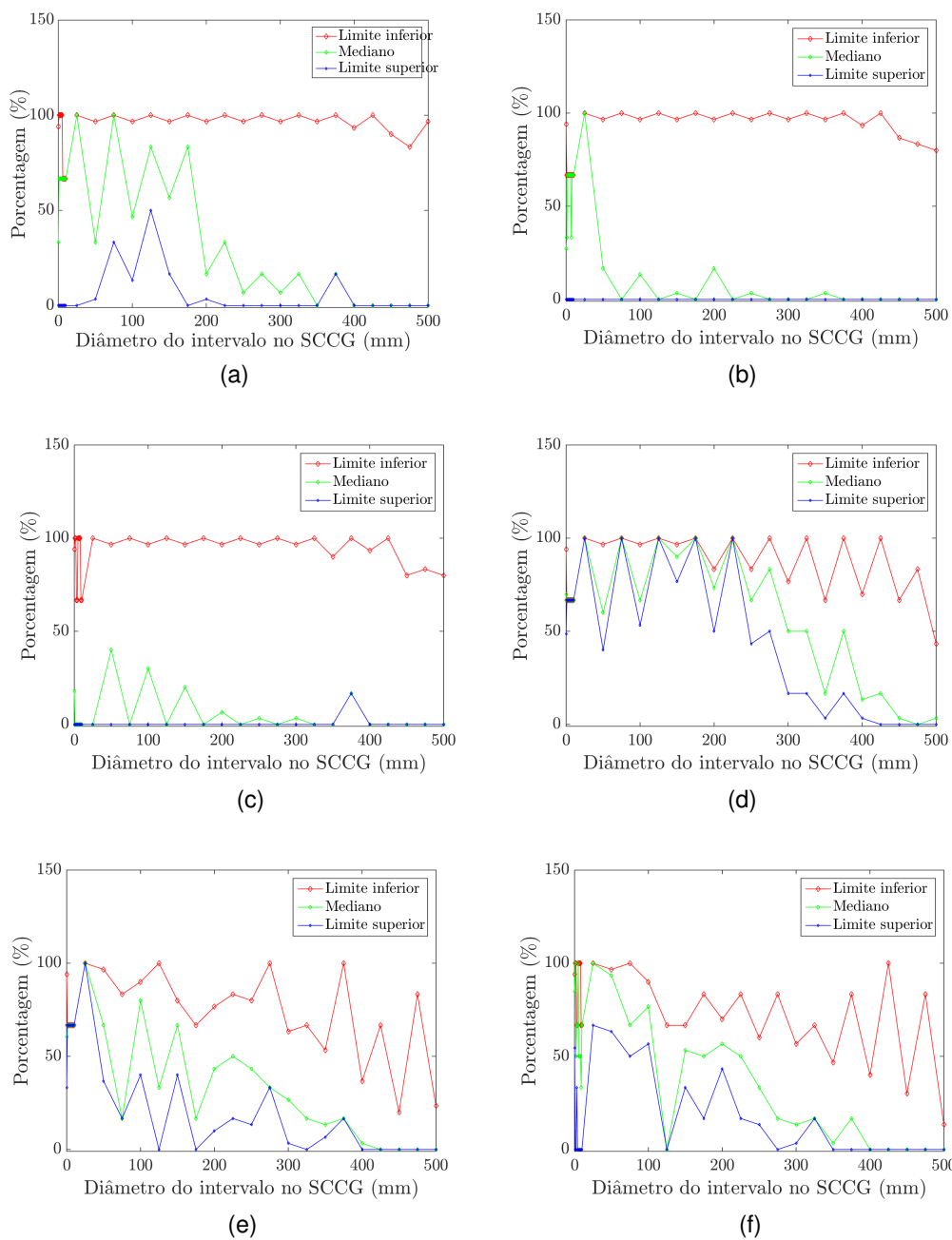


Figura 23 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou o erro quadrático médio de projeção, menor do que a aplicação de Bouquet quando projetados pontos de referência não intervalares do SCCG no plano de imagem pelos parâmetros calculados.

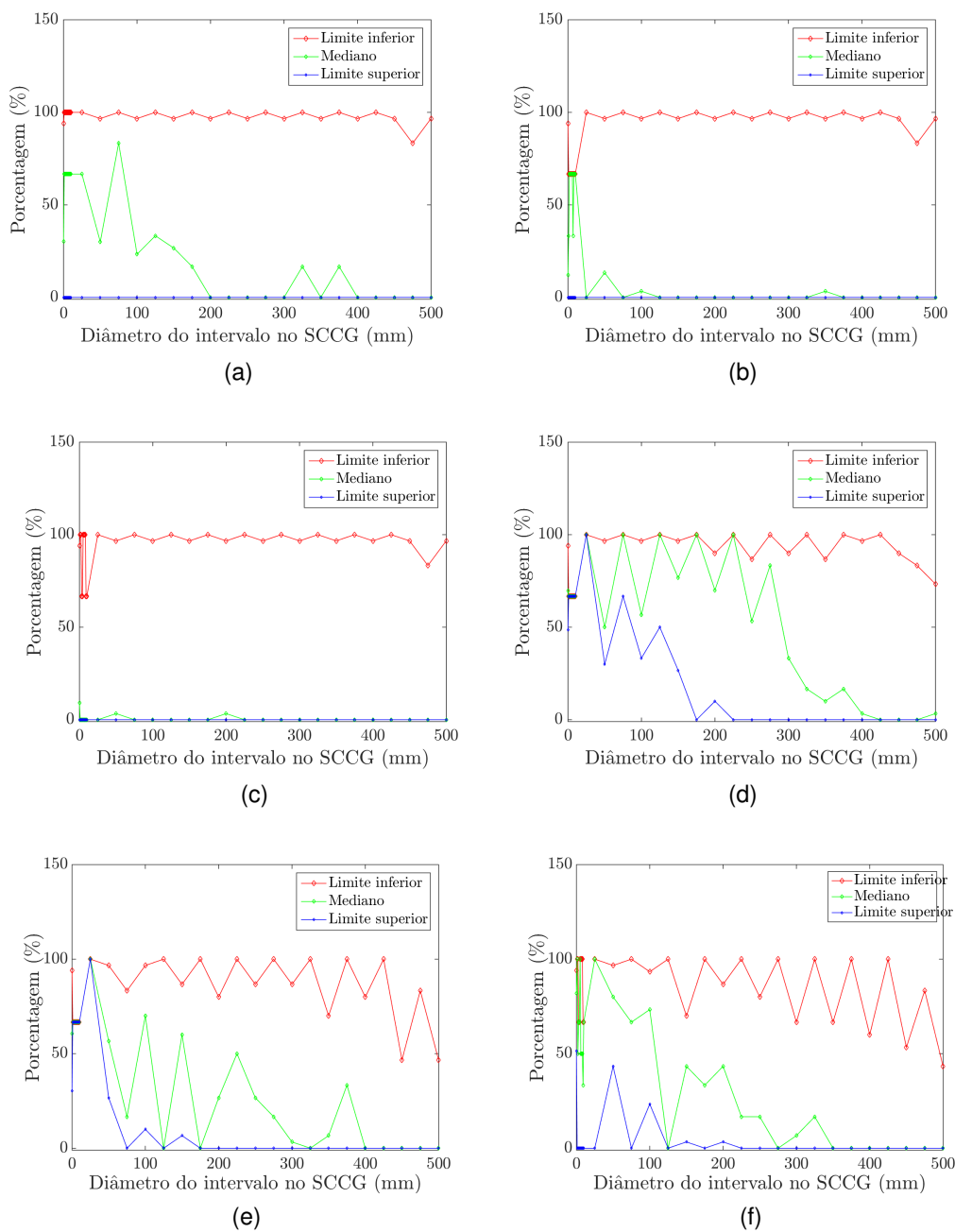
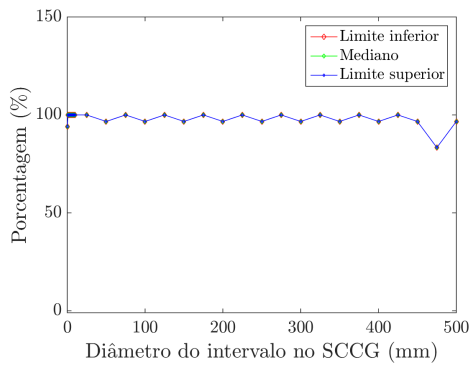
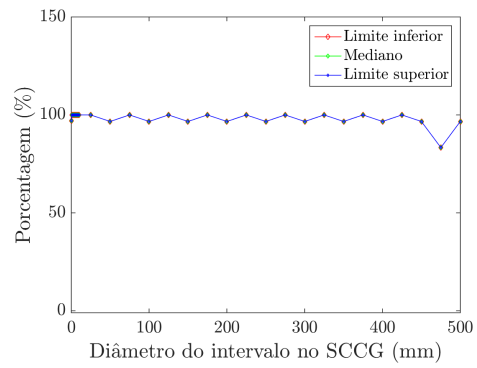


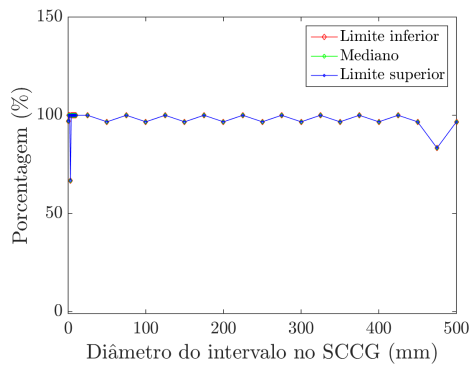
Figura 24 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou o erro quadrático médio de projeção menor do que o método de Bouquet quando projetados intervalos com ruído do SCCG no plano de imagem pelos parâmetros calculados.



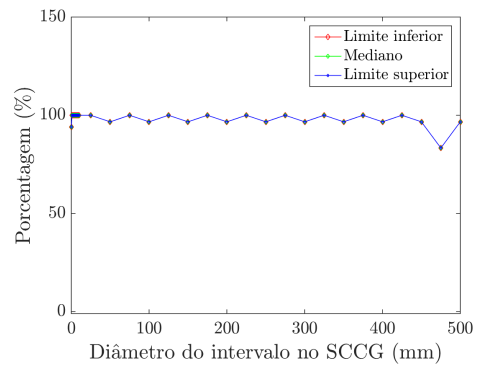
(a)



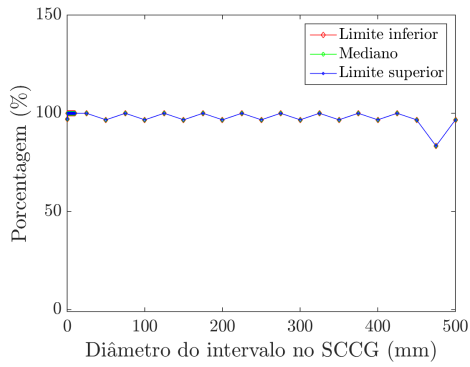
(b)



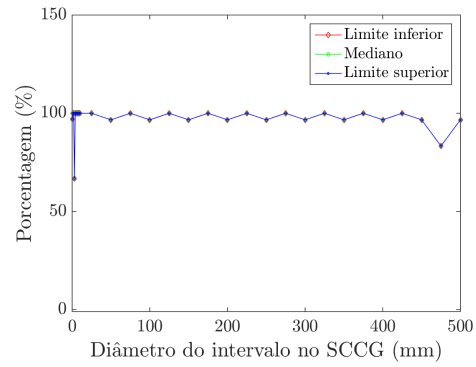
(c)



(d)

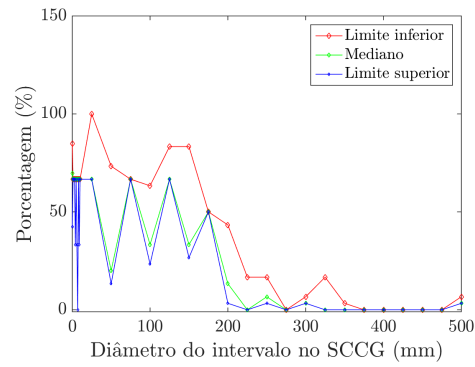


(e)

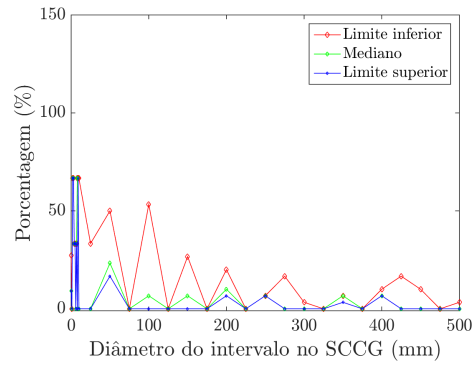


(f)

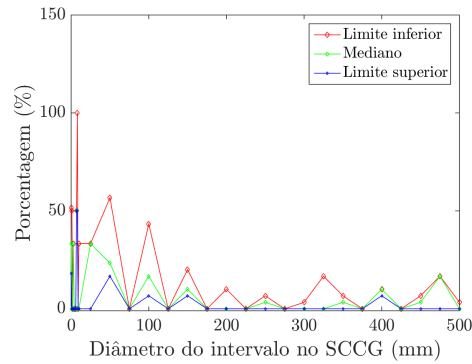
Figura 25 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou os parâmetros de distância focal da câmera com uma distância menor para os parâmetros de referência do que o método de Bouquet.



(a)

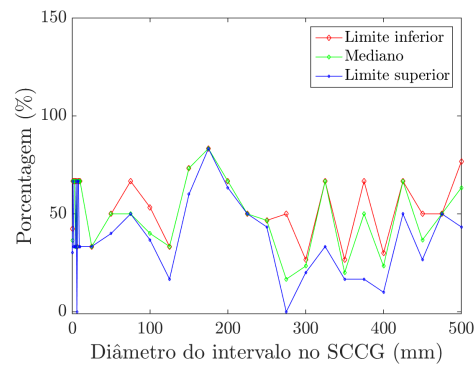


(b)

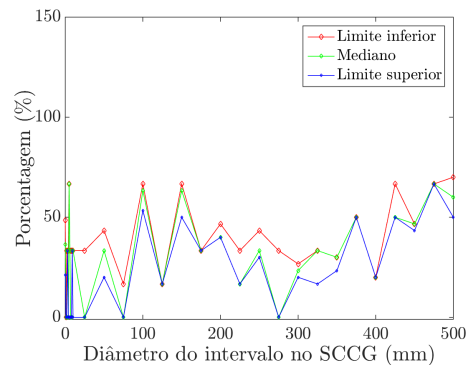


(c)

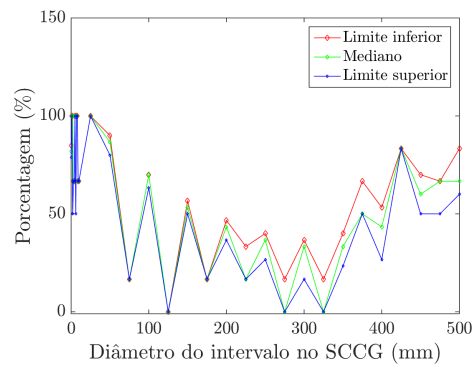
Figura 26 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou o parâmetro de rotação da câmera para, o eixo X , com uma distância menor para os parâmetros de referência do que o método de Bouguet.



(a)

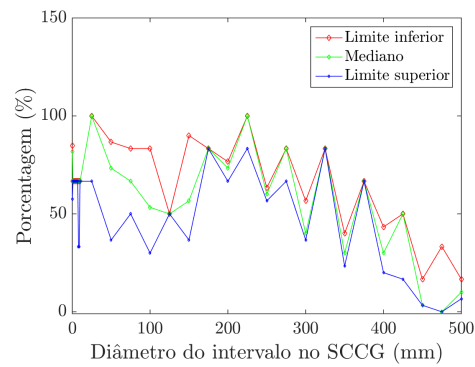


(b)

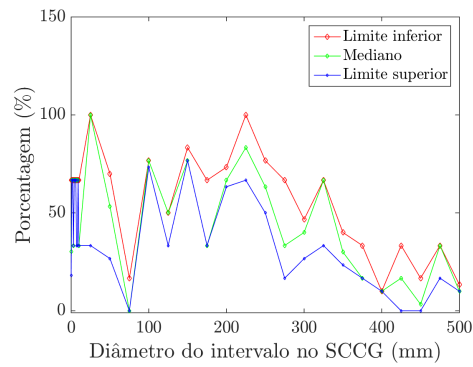


(c)

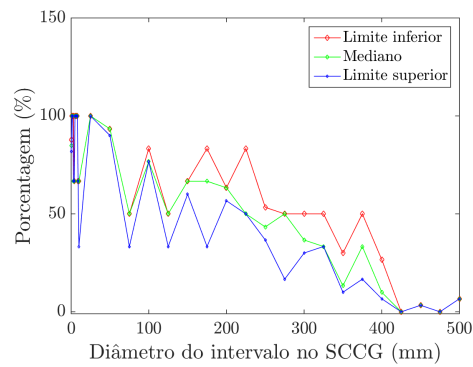
Figura 27 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou o parâmetro de rotação da câmera, para o eixo Y, com uma distância menor para os parâmetros de referência do que o método de Bouguet.



(a)

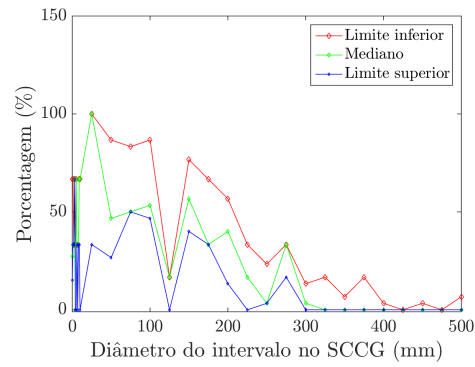


(b)

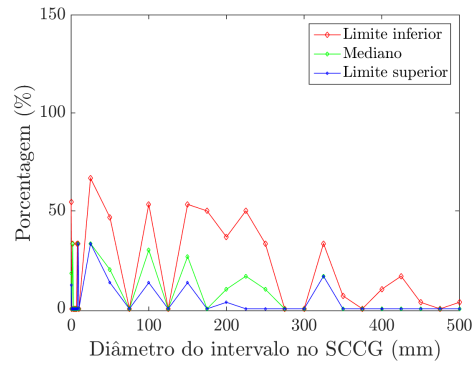


(c)

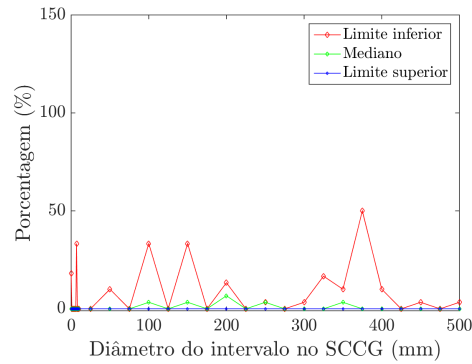
Figura 28 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou o parâmetro de rotação da câmera para, o eixo Z, com uma distância menor para os parâmetros de referência do que o método de Bouguet.



(a)

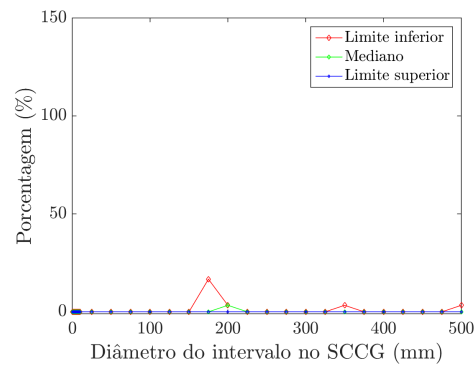


(b)

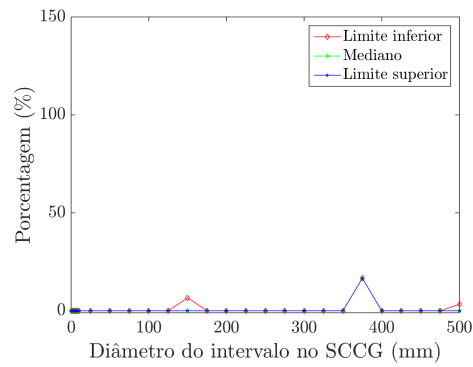


(c)

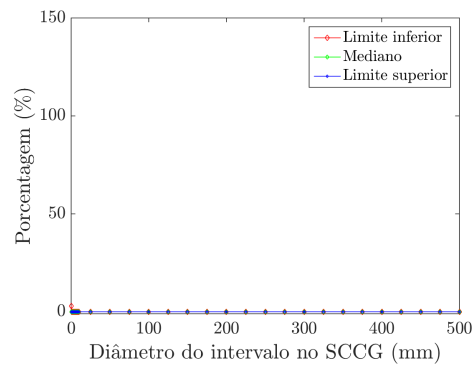
Figura 29 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou os parâmetros de translação da câmera, para o eixo X , com uma distância menor para os parâmetros de referência do que a aplicação de Bouguet.



(a)

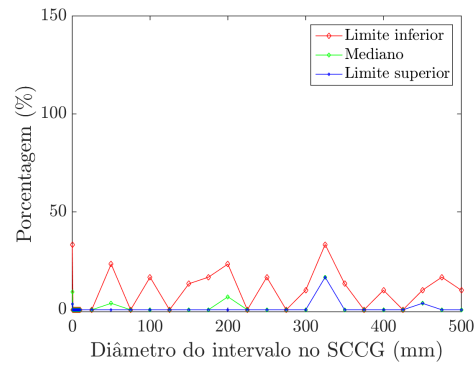


(b)

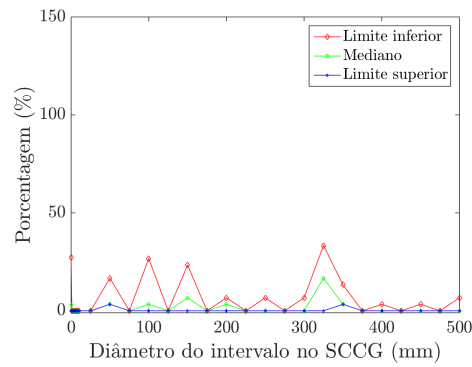


(c)

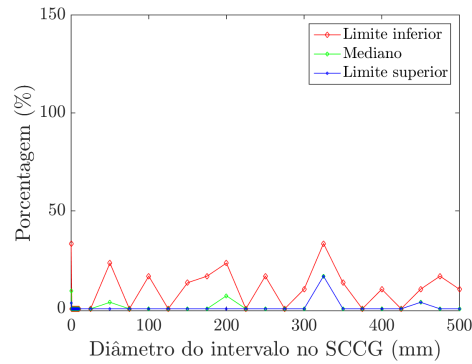
Figura 30 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou os parâmetros de translação da câmera, para o eixo Y , com uma distância menor para os parâmetros de referência do que a aplicação de Bouguet.



(a)



(b)



(c)

Figura 31 – Porcentagem de vezes em que nosso método calculou os parâmetros de translação da câmera, para o eixo Z , com uma distância menor para os parâmetros de referência do que a aplicação de Bouguet.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho propõe uma nova metodologia para calibração de câmeras baseada em uma abordagem matemática que utiliza álgebra intervalar. Para isso, foram propostas uma série de definições e novos teoremas que visam adaptar o espaço projetivo para utilização da álgebra intervalar. Foi desenvolvida ainda uma biblioteca de funções e métodos em C/C++ baseada na biblioteca já existente PROFIL/BIAS para implementar computacionalmente essas novas definições e teoremas.

Do ponto de vista teórico, as propostas de modificações na definição do espaço projetivo possibilitaram aplicar à metodologia de calibração, conceitos de álgebra intervalar. Essas modificações se referem principalmente à forma dos vetores projetivos, especialmente a planos, hiperplanos e pontos projetivos. Há ainda outro grupo de modificações referentes às operações sobre esses vetores, como multiplicação escalar e vetorial. Essas modificações foram fundamentais para se obter os resultados apresentados no [Capítulo 5](#). Esses novos conceitos apresentam ainda a possibilidade de utilização em diversas aplicações em visão computacional, o que permite ir além do problema de calibração de câmeras. De acordo ainda com a expectativa inicial, a álgebra intervalar se mostrou promissora para utilização na solução do problema de calibração de câmeras. Uma importante conclusão, ainda com respeito à álgebra intervalar, é sobre a eficiência do algoritmo de determinação de mínimos globais apresentado por [Hansen e Walster \(2004\)](#). Essa eficiência foi consideravelmente potencializada pela modificação proposta na utilização do algo-

ritmo genético para determinação do casco convexo da solução em torno do mínimo. Isso fez com que se chegasse a resultados cujo diâmetro do intervalo dos erros de projeção fossem da ordem de alguns *pixels* e da distância dos parâmetros de até 20%. Esses resultados apresentados no [Capítulo 5](#) portanto, confirmam que a utilização da álgebra intervalar é promissora, visto que os resultados encontrados superam os de métodos já bem estabelecidos na literatura.

Finalmente, nesta etapa do trabalho foram produzidos 04 (quatro) artigos, sendo 03 (três) publicados em periódicos especializados e 01 (um) submetido, os quais se relacionam ao problema de pesquisa aqui abordado e cujas informações são apresentadas a seguir:

- BRITO, D. N. ; PÁDUA, F. L. C. ; LOPES, A. P. C. E. . Using geometric interval algebra modeling for improved three-dimensional camera calibration. Journal of Mathematical Imaging and Vision (Submetido).
- Brito, D. N. ; Pádua, F. L. C. ; Lopes, A. P. C. ; Dalip, D. H. . Análise comparativa de detectores e descritores de características locais em imagens no âmbito do problema de autocalibração de câmeras. Revista Brasileira de Computação Aplicada, v. 8, n. 3, p. 85-99, 2016.
- Brito, D. N. ; Nunes, C. F. G. ; Pádua, F. L. C. ; Lacerda, A. M. . Evaluation of Interest Point Matching Methods for Projective Reconstruction of 3D Scenes. Revista IEEE América Latina, v. 14, p. 1393-1400, 2016.
- Brito, D. N. ; Pádua, F. L. C. ; Pereira, Guilherme A. S. . Temporal synchronization in mobile sensor networks using image sequence analysis. Machine Vision and Applications (Internet), v. 25, p. 1067-1076, 2014.

Por se tratar de uma abordagem matemática, novas possibilidades para trabalhos futuros apresentam muitos caminhos. Um deles é investigar outras propriedades do espaço projetivo intervalar que levem a resultados melhores para ruídos ainda mais severos. Há propriedades do espaço projetivo, como cônicas no infinito, que podem ser utilizadas para calibração utilizando-se múltiplas imagens, que ainda não

foram exploradas, quando utilizada a álgebra intervalar. Essas novas concepções poderiam ser utilizadas com dois propósitos, o primeiro seria aumentar a precisão dos parâmetros de calibração calculados e habilitar o método para utilizar alvos de calibração coplanares. Outra abordagem que também pode ser investigada é a utilização da decomposição em valores singulares para matrizes intervalares que levem à melhoria no processo de otimização de sistemas lineares, levando, assim, a parâmetros de calibração ainda mais precisos. Esses foram apenas alguns exemplos de estudos que podem e devem ser feitos futuramente com o objetivo de ampliar a utilização da álgebra intervalar em geometria de imagens.

Referências

ALEMÁN-FLORES, M.; ALVAREZ, L.; GOMEZ, L.; HENRIQUEZ, P.; MAZORRA, L. Camera calibration in sport event scenarios. **Pattern Recognition**, v. 47, n. 1, p. 89–95, 2014. ISSN 0031-3203. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 45.

BENNETT, S.; LASENBY, J.; KOKARAM, A.; INGUVA, S.; BIRKBECK, N. Reconstruction of the pose of uncalibrated cameras via user-generated videos. In: **Proceedings of the International Conference on Distributed Smart Cameras**. New York, NY, USA: ACM, 2014. (ICDSC '14), p. 3:1–3:8. ISBN 978-1-4503-2925-5. Citado na página 1.

BRÜCKNER, M.; BAJRAMOVIC, F.; DENZLER, J. Intrinsic and extrinsic active self-calibration of multi-camera systems. **Machine Vision and Applications**, v. 25, n. 2, p. 389–403, 2013. ISSN 0932-8092. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 7.

DA, F.; LI, Q.; ZHANG, H.; FANG, X. Self-calibration using two same circles. **Optics & Laser Technology**, v. 44, n. 6, p. 1924 – 1933, 2012. ISSN 0030-3992. Citado na página 47.

FAUGERAS, O.; LUONG, Q.-T.; PAPADOPOULOU, T. **The Geometry of Multiple Images: The Laws That Govern The Formation of Images of A Scene and Some of Their Applications**. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2001. 659 p. ISBN 0262062208. Citado 5 vezes nas páginas xiii, 15, 16, 17 e 49.

FAUGERAS, O. D.; LUONG, Q.-T.; MAYBANK, S. J. Camera self-calibration: Theory and experiments. In: SANDINI, G. (Ed.). **Computer Vision — ECCV 92**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1992, (Lecture Notes in Computer Science, v. 588). p. 321–334. Citado na página 50.

FURUKAWA, Y.; PONCE, J. Accurate camera calibration from multi-view stereo and bundle adjustment. **International Journal of Computer Vision**, Springer US, v. 84, n. 3, p. 257–268, 2009. ISSN 0920-5691. Citado na página 42.

FUSIELLO, A.; BENEDETTI, A.; FARENZENA, M.; BUSTI, A. Globally convergent autocalibration using interval analysis. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, IEEE, v. 26, n. 12, p. 1633–1638, 2004. Citado na página 51.

GEE, T.; DELMAS, P.; STONES-HAVAS, N.; SINCLAIR, C.; MARK, W. V. D.; LI, W.; FRIEDRICH, H.; GIMEL'FARB, G. Tsai camera calibration enhanced. In: **Machine**

Vision Applications (MVA), 2015 14th IAPR International Conference on. [S.l.: s.n.], 2015. p. 435–438. Citado na página [45](#).

GENG, L. C.; LI, S. Z.; SU, S. Z.; CAO, D. L.; LEI, Y. Q.; JI, R. R. A new camera self-calibration method based on csa. In: **Visual Communications and Image Processing (VCIP), 2013.** [S.l.: s.n.], 2013. p. 1–6. Citado 2 vezes nas páginas [50](#) e [78](#).

GÓMEZ, M. J.; GARCÍA, F.; MARTÍN, D.; ESCALERA, A. de la; ARMINGOL, J. M. Intelligent surveillance of indoor environments based on computer vision and 3D point cloud fusion. **Expert Systems with Applications**, v. 42, n. 21, p. 8156–8171, 2015. ISSN 09574174. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [4](#).

GRUM, M.; BORS, A. G. 3d modeling of multiple-object scenes from sets of images. **Pattern Recognition**, Elsevier, v. 47, n. 1, p. 326–343, 2014. ISSN 00313203. Citado na página [3](#).

HANSEN, E. Global optimization using interval analysis—the multi-dimensional case. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 34, n. 3, p. 247–270, 1980. Citado na página [29](#).

HANSEN, E.; WALSTER, G. W. **Global Optimization Using Interval Analysis.** [S.l.: s.n.], 2004. Citado 11 vezes nas páginas [21](#), [24](#), [27](#), [28](#), [31](#), [33](#), [51](#), [53](#), [71](#), [77](#) e [115](#).

HARTLEY, R.; ZISSERMAN, A. **Multiple view geometry in computer vision.** [S.l.]: Cambridge Univ Press, 2000. v. 2. Citado 7 vezes nas páginas [14](#), [20](#), [49](#), [51](#), [57](#), [67](#) e [68](#).

HORÁČEK, J.; HLADÍK, M. Computing enclosures of overdetermined interval linear systems. **arXiv preprint arXiv:1304.4738**, 2013. Citado na página [25](#).

HOUSSINEAU, J.; CLARK, D. E.; IVEKOVIC, S.; LEE, C. S.; FRANCO, J. A unified approach for multi-object triangulation, tracking and camera calibration. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 64, n. 11, p. 2934–2948, June 2016. ISSN 1053-587X. Citado 3 vezes nas páginas [40](#), [41](#) e [42](#).

JAN, S.; SCHWERING, A.; WANG, J.; CHIPOFYA, M. Ordering: A reliable qualitative information for the alignment of sketch and metric maps. In: **Cognitive Informatics Cognitive Computing (ICCI-CC), 2013 12th IEEE International Conference on.** [S.l.: s.n.], 2013. p. 203–211. Citado na página [5](#).

JO, K.; JO, Y.; SUHR, J. K.; JUNG, H. G.; SUNWOO, M. Precise localization of an autonomous car based on probabilistic noise models of road surface marker features using multiple cameras. **Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on**, v. 16, n. 6, p. 3377–3392, Dec 2015. ISSN 1524-9050. Citado na página [8](#).

JUAN, L.; GWUN, O. Surf applied in panorama image stitching. In: IEEE. **Image Processing Theory Tools and Applications (IPTA), 2010 2nd International Conference on**. [S.l.], 2010. p. 495–499. Citado na página 1.

KATO, T.; SHIMIZU, I.; PAJDLA, T. Selecting image pairs for sfm by introducing jaccard similarity. **IPSJ Transactions on Computer Vision and Applications**, v. 9, n. 1, p. 12, Apr 2017. ISSN 1882-6695. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/s41074-017-0021-8>>. Citado na página 9.

KENOUEFI, A. Linear algebra and differential calculus in pseudo-intervals vector space. 2016. Citado na página 129.

KIM, J.-K.; KIM, J.-S.; HA, G. J.; KIM, Y. Y. Tensile and fiber dispersion performance of {ECC} (engineered cementitious composites) produced with ground granulated blast furnace slag. **Cement and Concrete Research**, v. 37, n. 7, p. 1096–1105, 2007. ISSN 0008-8846. Citado na página 4.

KIM, P. **Rigid Body Dynamics For Beginners: Euler angles and Quaternions**. [S.l.]: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2013. ISBN 978-1493598205. Citado na página 67.

KUSE, M.; JAISWAL, S. Graph modelling of 3d geometric information for color consistency of multiview images. In: **Image Processing (ICIP), 2015 IEEE International Conference on**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1394–1398. Citado na página 9.

LEITNER, J.; HARDING, S.; FRANK, M.; FORSTER, A.; SCHMIDHUBER, J. Artificial neural networks for spatial perception: Towards visual object localisation in humanoid robots. In: **Neural Networks (IJCNN), The 2013 International Joint Conference on**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1–7. ISSN 2161-4393. Citado na página 9.

LI, D.; TIAN, J. An accurate calibration method for a camera with telecentric lenses. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 51, n. 5, p. 538 – 541, 2013. ISSN 0143-8166. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143816612003466>>. Citado na página 45.

LI, W.; ZHU, G.; LIN, B. Automatically-controlled system for detecting quartz crystal based on plc. In: JIN, D.; LIN, S. (Ed.). **Advances in Computer Science and Information Engineering**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2012, (Advances in Intelligent and Soft Computing, v. 169). p. 619–624. ISBN 978-3-642-30222-0. Citado na página 1.

LIU, Y.; ZHANG, X.; HUANG, T. Determining 3d structure and motion of man-made objects from image corners. In: **Image Analysis and Interpretation, 2002. Proceedings. Fifth IEEE Southwest Symposium on**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 26–30. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

LOAIZA, M. E.; RAPOSO, A. B.; GATTASS, M. Multi-camera calibration based on an invariant pattern. **Computers & Graphics**, v. 35, n. 2, p. 198–207, 2011. ISSN 0097-8493. Citado 3 vezes nas páginas 45, 46 e 47.

LOURAKIS, M. I.; DERICHE, R. **Camera self-calibration using the singular value decomposition of the fundamental matrix: From point correspondences to 3D measurements**. [S.l.], 1999. Citado na página 50.

LUHMANN, T.; FRASER, C.; MAAS, H.-G. Sensor modelling and camera calibration for close-range photogrammetry. **{ISPRS} Journal of Photogrammetry and Remote Sensing**, v. 115, p. 37 – 46, 2016. ISSN 0924-2716. Theme issue 'State-of-the-art in photogrammetry, remote sensing and spatial information science'. Citado na página 45.

MAYBANK, S.; FAUGERAS, O. A theory of self-calibration of a moving camera. **International Journal of Computer Vision**, Kluwer Academic Publishers, v. 8, n. 2, p. 123–151, 1992. Citado na página 99.

MEDIONI, G.; KANG, S. B. **Emerging Topics in Computer Vision**. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR, 2004. ISBN 0131013661. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 78.

MERRAS, M.; SAAIDI, A.; NAZIH, A. G.; SATORI, K. et al. A new method of camera self-calibration with varying intrinsic parameters using an improved genetic algorithm. In: IEEE. **Intelligent Systems: Theories and Applications (SITA), 2013 8th International Conference on**. [S.l.], 2013. p. 1–8. Citado na página 50.

MOORE, R. E.; KEARFOTT, R. B.; CLOUD, M. J. **Introduction to interval analysis**. [S.l.: s.n.], 2009. xii + 223 p. Citado 10 vezes nas páginas 5, 6, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 66 e 127.

MOULARD, T.; ALCANTARILLA, P.; LAMIRAUX, F. **Reliable Indoor Navigation on Humanoid Robots using Vision-Based Localization**. [S.l.], 2012. Citado na página 1.

MUDROVA, L.; HAWES, N. Task scheduling for mobile robots using interval algebra. In: **Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 383–388. Citado na página 5.

NORTH American robotics market sets new records in hot first half of 2015. 2014. Disponível em: <<http://australianroboticsreview.com/2015/08/04/north-american-robotics-market-sets-new-records-in-smokin-first-half-of-2015/>>. Citado na página 8.

ROHN, J. Enclosing solutions of overdetermined systems of linear interval equations. **Reliable Computing**, v. 2, n. 2, p. 167–171, Jun 1996. ISSN 1573-1340. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02425920>>. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 69 e 90.

ROHN, J. Forty necessary and sufficient conditions for regularity of interval matrices: A survey. **Electronic Journal of Linear Algebra**, v. 18, Jan 2009. Citado na página 75.

ROHN, J.; FARHADSEFAT, R. Inverse interval matrix: a survey. **Electronic Journal of Linear Algebra**, v. 22, n. 1, p. 46, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 58, 65 e 69.

RONALD, B. **Topology and Groupoids**. [S.l.: s.n.], 2006. Nenhuma citação no texto.

ROTA, G. **Interval Methods for Systems of Equations**. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 1990. Citado na página 27.

SAMANY, N. N.; DELAVAR, M. R.; CHRISMAN, N.; MALEK, M. R. Fia5: A customized fuzzy interval algebra for modeling spatial relevancy in urban context-aware systems. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 33, p. 116 – 126, 2014. ISSN 0952-1976. Citado na página 5.

SHI, K.; DONG, Q.; WU, F. Weighted similarity-invariant linear algorithm for camera calibration with rotating 1-d objects. **IEEE Transactions on Image Processing**, IEEE, v. 21, n. 8, p. 3806–3812, 2012. Citado na página 49.

SILVA, A. F. B.; SANTOS, A. V.; MEGGIOLARO, M. A.; NETO, M. S. A rough terrain traction control technique for all-wheel-drive mobile robots. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, scielo, v. 32, p. 489 – 501, 12 2010. ISSN 1678-5878. Citado na página 8.

STANFORD Autonomous Drive Team. 2010. Disponível em: <<http://driving.stanford.edu/>>. Citado na página 8.

SWAIN, A.; CLARK, D. E. First-moment filters for spatial independent cluster processes. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. **SPIE Defense, Security, and Sensing**. [S.l.], 2010. p. 76970I–76970I. Citado na página 41.

TAO, Z. S.; TU, D. W.; HE, S. S.; YE, J. A camera self-calibration for machine vision based on kruppa's equation. 2013. Citado na página 50.

TELLE, B.; ALDON, M.-J.; RAMDANI, N. Camera calibration and 3d reconstruction using interval analysis. In: IEEE. **Image Analysis and Processing, 2003. Proceedings. 12th International Conference on**. [S.l.], 2003. p. 374–379. Citado 2 vezes nas páginas [42](#) e [43](#).

TSAI, R. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3d machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses. **IEEE Journal on Robotics and Automation**, IEEE, v. 3, n. 4, p. 323–344, 1987. Citado 2 vezes nas páginas [44](#) e [79](#).

VANANTWERP, J. G.; BRAATZ, R. D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, v. 10, n. 4, p. 363 – 385, 2000. ISSN 0959-1524. Citado na página [48](#).

WANG, L.; WANG, W.; SHEN, C.; DUAN, F. A convex relaxation optimization algorithm for multi-camera calibration with 1d objects. **Neurocomputing**, p. –, 2016. ISSN 0925-2312. Citado 2 vezes nas páginas [41](#) e [48](#).

WANG, L.; WU, F.; HU, Z. Multi-camera calibration with one-dimensional object under general motions. In: IEEE. **2007 IEEE 11th International Conference on Computer Vision**. [S.l.], 2007. p. 1–7. Citado 2 vezes nas páginas [48](#) e [49](#).

WHITLEY, D. A genetic algorithm tutorial. **Statistics and Computing**, v. 4, n. 2, p. 65–85, 1994. Citado na página [91](#).

WILDENAUER, H.; HANBURY, A. Robust camera self-calibration from monocular images of manhattan worlds. In: **Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2012 IEEE Conference on**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 2831–2838. ISSN 1063-6919. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [51](#).

XU, J.; DENG, F. A camera self-calibration method based on ios-pso. In: **Chinese Automation Congress (CAC), 2015**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 489–494. Citado na página [50](#).

ZHANG, Z. A flexible new technique for camera calibration. **Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on**, v. 22, n. 11, p. 1330–1334, 2000. ISSN 0162-8828. Citado 4 vezes nas páginas [10](#), [45](#), [46](#) e [79](#).

ZHANG, Z. Camera calibration with one-dimensional objects. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 26, n. 7, p. 892–899, July 2004. ISSN 0162-8828. Citado 4 vezes nas páginas [45](#), [48](#), [49](#) e [50](#).

ZHOU, F.; CUI, Y.; PENG, B.; WANG, Y. A novel optimization method of camera parameters used for vision measurement. **Optics & Laser Technology**, v. 44, n. 6, p. 1840 – 1849, 2012. ISSN 0030-3992. Citado na página [47](#).

Apêndices

APÊNDICE A – Conceitos básicos em álgebra intervalar

A ideia central da álgebra intervalar é consequentemente o uso de operações sobre intervalos fechados. Um intervalo fechado denotado por $[a, b]$ é o conjunto de números reais definido como:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Diz-se que dois intervalos $\check{X}$ e $\check{Y}$ são iguais, se representam o mesmo conjunto. Isto acontece quando seus limites são iguais:

$$\check{X} = \check{Y} \iff \underline{X} = \underline{Y} \text{ e } \bar{X} = \bar{Y}.$$

Afirma-se que um intervalo é degenerado se $\underline{X} = \bar{X}$. Este intervalos contém um único número real x .

Três operações, união, interseção e a operação de encapsulamento (*Hull*) são operações básicas sobre conjuntos e descritas no Apêndice [A.3](#).

A *largura* de um intervalo $\check{X}$ é definida e denotada por

$$\omega(\check{X}) = \bar{X} - \underline{X}.$$

O *valor absoluto* de $\check{X}$, denotado por $|\check{X}|$, é o máximo do valor absoluto de seus limites:

$$|\check{X}| = \max\{|\underline{X}|, |\bar{X}|\}.$$

Note que $|x| \leq |\underline{X}| \forall x \in \check{X}$.

O *ponto médio* de $\check{X}$ é dado por

$$m(\check{X}) = \frac{1}{2}(\underline{X} + \bar{X}). \quad (34)$$

Dois intervalos obedecem a seguinte relação de ordem:

$$\check{X} < \check{Y} \Rightarrow \bar{X} < \underline{Y}. \quad (35)$$

Esta relação é transitiva pois $\check{X} < \check{Y} < \check{Z} \Rightarrow \check{X} < \check{Z}$.

A.1 Operações sobre intervalos

As definições para operações de soma, subtração, divisão e multiplicação de intervalos são encontradas na Tabela 10.

Operação	Definição	Definição
$\check{X} + \check{Y}$	$\check{X} + \check{Y} = \{x + y : x \in \check{X}, y \in \check{Y}\}$	$\check{X} + \check{Y} = [\underline{X} + \underline{Y}, \bar{X} + \bar{Y}]$
$\check{X} - \check{Y}$	$\check{X} - \check{Y} = \{x - y : x \in \check{X}, y \in \check{Y}\}$	$\check{X} - \check{Y} = [\underline{X} - \bar{Y}, \bar{X} - \underline{Y}]$
$\check{X} \cdot \check{Y}$	$\check{X} \cdot \check{Y} = \{xy : x \in \check{X}, y \in \check{Y}\}$	$\check{X} \cdot \check{Y} = [\min S, \max S],$ $S = \{X\underline{Y}, X\bar{Y}, \bar{X}\underline{Y}, \bar{X}\bar{Y}\}$
$\check{X} \div \check{Y}$	$\check{X} \div \check{Y} = \check{X} \cdot (1/\check{Y})$	$1/\check{Y} = \{y : 1/y \in \check{Y}\} = [1/\bar{Y}, 1/\underline{Y}]$

Tabela 10 – Definição das operações realizadas sobre intervalos.

A.2 Propriedades algébricas

Operações de adição e multiplicação sobre intervalos, têm a propriedade de comutatividade e associatividade logo tem-se

$$\check{X} + \check{Y} = \check{Y} + \check{X} \quad (36)$$

$$\check{X} + (\check{Y} + \check{Z}) = (\check{X} + \check{Y}) + \check{Z}, \quad (37)$$

$$\check{X}\check{Y} = \check{Y}\check{X} \quad (38)$$

$$\check{X}(\check{Y}\check{Z}) = (\check{X}\check{Y})\check{Z} \quad (39)$$

para quaisquer três intervalos $\check{X}$, $\check{Y}$ e $\check{Z}$.

Para as operações de multiplicação e soma os elementos identidade são intervalos degenerados de 0 e 1.

$$0 + \check{X} = \check{X} + 0 = \check{X}, \quad (40)$$

$$1 \cdot \check{X} = \check{X} \cdot 1 = \check{X}, 0 \cdot \check{X} = \check{X} \cdot 0 = 0, \quad (41)$$

para qualquer X .

O *elemento inverso* para adição não é $-\check{X}$ e sim definido como

$$\check{X} + (-\check{X}) = [X, \bar{X}] + [-\bar{X}, X] = [X - \bar{X}, \bar{X} - X], \quad (42)$$

que é igual a $[0, 0]$ somente se $X = \bar{X}$ e $\omega(X) = 0$.

Para também definir o elemento inverso da multiplicação considere-se $\check{X}/\check{X} = 1$ somente se $\omega(X) = 0$. Em geral

$$\check{X}/\check{X} = \begin{cases} [X/\bar{X}, \bar{X}/X] & \text{se } 0 \leq X, \\ [\bar{X}/X, X/\bar{X}] & \text{se } \bar{X} < 0. \end{cases} \quad (43)$$

A lei da distributividade para aritmética ordinária falha se aplicada diretamente sobre intervalos. Sendo assim pode-se definir uma lei equivalente que é chamada subdistributividade (MOORE et al., 2009)

$$\check{X}(\check{Y} + \check{Z}) \subseteq \check{X}\check{Y} + \check{X}\check{Z}. \quad (44)$$

A distributividade pode ser utilizada apenas quando considerada a multiplicação por números reais,

$$x(\check{Y} + \check{Z}) = x\check{Y} + x\check{Z}, \quad (45)$$

ou quando os termos da soma possuem o mesmo sinal,

$$\check{X}(\check{Y} + \check{Z}) = \check{X}\check{Y} + \check{X}\check{Z} \text{ dado que } \check{Y}\check{Z} > 0. \quad (46)$$

Intervalos simétricos são definidos como sendo

$$\underline{X} = -\bar{X}. \quad (47)$$

Faz-se agora a caracterização topológica da álgebra intervalar baseada na abordagem matemática da álgebra moderna.

Sendo G um conjunto não vazio com a operação:

$$* : G \times G \mapsto G \quad (48)$$

$$(x, y) \mapsto x * y \quad (49)$$

O par $(G, *)$ é um grupo se:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c, a, b, c \in G$.
2. Existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a$, para todo $a \in G$.
3. Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$

Diante das propriedades acima, pode-se então verificar se o conjunto da álgebra intervalar e suas operações formam um grupo. É possível verificar inicialmente o conjunto $(G, +)$:

Nesse caso, é possível observar que propriedade 1 é válida já que $\check{A} + (\check{B} + \check{C}) = (\check{A} + \check{C}) + \check{B}$ para $\check{A}, \check{B}$ e $\check{C}$ sendo intervalos (basta ver a definição do operador $+$ na [Seção A.1](#)).

Pode-se agora verificar a propriedade 2, por meio de um contra exemplo. Para isso precisa-se definir o elemento neutro da soma. Então tem-se que $\check{A} + \check{E} = \check{A}$ se e somente se $\check{E}$ for igual ao intervalo degenerado $[0, 0]$. Com isso, pode-se provar por um contra exemplo que esta propriedade não é obedecida. Considere inicialmente o intervalo $\check{A} = [-2, 1]$, o inverso de $\check{A}$ seria $\check{B} = [\underline{B}, \bar{B}]$, tal que

$$\check{A} + \check{B} = [0, 0] \text{ ou} \quad (50)$$

$$[-2 + \underline{B}, 1 + \bar{B}] = [0, 0] \Rightarrow \underline{B} = 2 \text{ e } \bar{B} = -1. \quad (51)$$

Como o limite inferior é maior que o limite superior tem-se que o resultado não é um elemento válido do conjunto de intervalos, logo o conjunto de intervalos não forma um grupo.

Veja-se agora o caso do conjunto $(G, \cdot)$. Como para adição, pode-se verificar a propriedade 1 para multiplicação. Usando-se a definição da operação de multiplicação de intervalos mostrado na [Tabela 10](#) tem-se que $\check{X} \cdot \check{Y} = [\min S, \max S]$. Para

verificação da propriedade 1 precisa-se de um terceiro intervalo no caso $\check{Z} = [\underline{Z}, \bar{Z}]$. Considerando-se então estes elementos tem-se que a multiplicação $(\check{X} \cdot \check{Y}) \cdot \check{Z}$ será igual a um intervalo $\check{S} = \check{Z} \cdot [\min S, \max S]$ usando-se novamente a definição da multiplicação tem-se que $\check{S} = \{\underline{Z} \min S, \bar{Z} \max S, \underline{Z} \max S, \bar{Z} \min S\}$.

Assim,

$$(\check{X} \check{Y}) \check{Z} = [\min \check{S}, \max \check{S}], \quad (52)$$

como a multiplicação entre números reais é comutativa, pode-se extrapolar este conceito para a operação sobre intervalos e tem-se, analogamente que

$$\check{X} (\check{Y} \check{Z}) = (\check{X} \check{Y}) \check{Z}. \quad (53)$$

O que comprova que a propriedade 1 é válida para o conjunto dos intervalos aplicado à multiplicação. Agora é preciso verificar as outras duas propriedades, já que, para ser um grupo precisa obedecer às três.

Fazendo-se de forma análoga, como feito na soma, o elemento neutro da multiplicação é o intervalo degenerado $[1, 1]$. Pode-se novamente provar com um contra exemplo que a operação de multiplicação não possui o elemento inverso para todo o conjunto. Para isso considere-se o intervalo $[0, 1]$ este intervalo não possui o inverso.

Provou-se assim então, que o conjunto dos intervalos não é um grupo, nem com a operação "+" nem com a operação de ".".

Tem-se também que o conjunto dos intervalos não é um anel, pois além de não ter o elemento inverso aditivo para todo elemento, também falha na propriedade distributiva (veja na [Seção A.1](#)). Logo, por não ser anel, o conjunto dos intervalos não é um espaço vetorial.

Desse modo, tem-se operações básicas definidas, mas não se pode colocar uma estrutura mais geral no conjunto dos intervalos.

Por outro lado, se pode restringir o conjunto dos intervalos para obter propriedades mais gerais. Para isto basta recorrer ao trabalho ([KENOUFI, 2016](#)).

Ressalta-se no entanto que as propriedades mais específicas restritas a subcon-

junto do conjunto dos intervalos não será necessária. O que garante assim que as definições e teomas descritos nesta tese são todos válidos.

A.3 Interseção, União e Envelope de intervalo (*Interval Hull*)

A interseção de dois intervalos $\check{X}$ e $\check{Y}$ é vazia se $\bar{Y} < \underline{X}$ ou $\bar{X} < \underline{Y}$. Caso contrário podemos definir como sendo

$$\check{X} \cap \check{Y} = \{z : z \in \check{X} \text{ e } z \in \check{Y}\} = [\max\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \min\{\bar{X}, \bar{Y}\}]. \quad (54)$$

A união é definida:

$$\check{X} \cup \check{Y} = \{z : z \in \check{X} \text{ e } z \in \check{Y}\} = [\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\bar{X}, \bar{Y}\}]. \quad (55)$$

Por vezes a união de dois intervalos não é um intervalo e sim o casco *hull* de dois intervalos que pode ser definido como

$$\check{X} \sqcup \check{Y} = [\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\bar{X}, \bar{Y}\}], \quad (56)$$

que é sempre um intervalo podendo ser utilizado como sendo

$$\check{X} \cup \check{Y} \subseteq \check{X} \sqcup \check{Y}, \quad (57)$$

para quaisquer dois intervalos $\check{X}$ e $\check{Y}$.

A.4 Vetores intervalares

Um vetor n -dimensional é um conjunto n de intervalos representado por $\check{\mathbf{X}} = (\check{X}_1, \dots, \check{X}_n)$. Vetores intervalares são representados por letras maiúsculas em negrito para diferenciação de vetores de números reais.

Com pequenas modificações, muitas noções da álgebra ordinária podem ser transferidas para vetores intervalares, o que torna de certa maneira intuitiva a definição de operações sobre este tipo de vetores. Considerando-se $x = (x_1, \dots, x_n)$ é um vetor

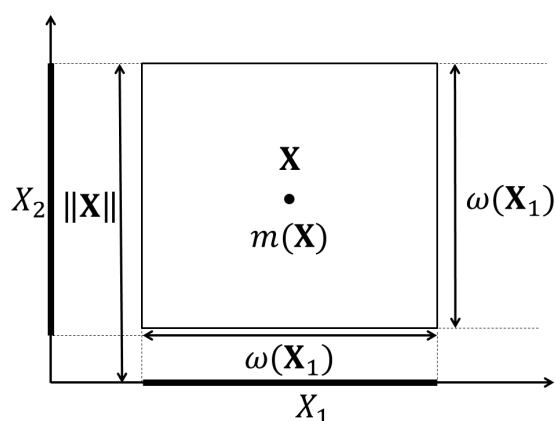


Figura 32 – Definições de largura, norma e ponto médio de um vetor $\check{\mathbf{X}} = (\check{X}_1, \check{X}_2)$.

Operações	Representação	Definição
Vetor real pertence a um vetor intervalar	$\mathbf{x} \in \check{\mathbf{X}}$	$\mathbf{x} \in \check{\mathbf{X}} \iff x_i \in \check{X}_i \forall i = 1, \dots, n$
Interseção vazia	$\check{X}_i \cap \check{Y}_i = \emptyset \forall i$	$\check{\mathbf{X}} \cap \check{\mathbf{Y}} = \emptyset$
Interseção	$\check{\mathbf{X}} \cap \check{\mathbf{Y}}$	$(\check{X}_1 \cap \check{Y}_1, \dots, \check{X}_n \cap \check{Y}_n)$
Subconjunto	$\check{\mathbf{X}} \subseteq \check{\mathbf{Y}}$	$\iff \check{X}_i \subseteq \check{Y}_i \forall i = 1, \dots, n$
A largura do vetor intervalar	$\omega(\check{\mathbf{X}})$	$\omega(\check{\mathbf{X}}) = \max_i \omega(\check{X}_i)$
Ponto médio de um vetor intervalar	$m(\check{\mathbf{X}})$	$m(\check{\mathbf{X}}) = (m(\check{X}_1), \dots, m(\check{X}_n))$
Norma	$ \check{\mathbf{X}} $	$\max_i \check{X}_i $

Tabela 11 – Operações sobre vetores intervalares

real e $\check{\mathbf{X}} = (\check{X}_1, \dots, \check{X}_n)$ é $\check{\mathbf{Y}} = (\check{Y}_1, \dots, \check{Y}_n)$ vetores intervalares, então pode-se definir as operações apresentadas na [Tabela 11](#)

Na [Figura 32](#) é feita a representação gráfica de um vetor intervalar bidimensional. Esta representação pode ser extrapolada para vetores n-dimensionais.

A.5 Matrizes intervalares

Por uma matriz intervalar entendemos o caso em que todos os elementos da matriz são intervalos, por exemplo:

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \check{A}_{11} & \check{A}_{12} \\ \check{A}_{21} & \check{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1, 2] & [-1, 1] \\ [-2, 4] & [5, -2] \end{bmatrix}$$

A norma de matrizes é dada por

$$\|\check{A}\| = \max_i \sum_j |\check{A}_{i,j}|, \quad (58)$$

para uma matriz intervalar $\check{A}$. Se B é uma matriz real contida na matriz intervalar $\check{A}$, então $\|B\| \leq \|\check{A}\|$. A largura $\omega(A)$,

$$\omega(\check{A}) = \max_{i,j} \omega(\check{A}_{i,j}).$$

O ponto médio de $\check{A}$ é uma matriz real denotada por $m(\check{A})$ cujos elementos são os pontos médios do elemento correspondente de A

$$(m(\check{A}))_{ij} = m(\check{A}_{i,j}).$$

O produto e a soma de intervalos são realizados da mesma forma que matrizes reais. Considerando-se, obviamente, que os elementos dos mesmo são intervalos.