



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI  
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE  
MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA



ANÁLISE DO ESPALHAMENTO  
ELETROMAGNÉTICO BIDIMENSIONAL  
UTILIZANDO O MÉTODO IIEFG E PML  
UNIAXIAL

LEONARDO BRUNO LOPES

BELO HORIZONTE  
FEVEREIRO DE 2019

LEONARDO BRUNO LOPES

ANÁLISE DO ESPALHAMENTO  
ELETROMAGNÉTICO BIDIMENSIONAL UTILIZANDO  
O MÉTODO IIEFG E PML UNIAXIAL

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Associação Ampla entre a UFSJ e o CEFET-MG, requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Elétricos

Linha de pesquisa: Eletromagnetismo Aplicado

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Úrsula do Carmo Resende

Centro Federal de Educação Tecnológica  
de Minas Gerais

Coorientador: Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente  
Gonçalves

Centro Federal de Educação Tecnológica  
de Minas Gerais

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

BELO HORIZONTE  
FEVEREIRO DE 2019

Lopes, Leonardo Bruno

L864a Análise do espalhamento eletromagnético bidimensional utilizando o método IEFM e PML Uniaxial/ Leonardo Bruno Lopes. – Belo Horizonte, 2019.

90 f. : il., gráfs, tabs.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do CEFET-MG em associação ampla com a Universidade Federal de São João Del Rei.

Orientadora: Úrsula do Carmo Resende

Coorientador: Sandro Trindade Mordente Gonçalves

Banca examinadora: Úrsula do Carmo Resende, Sandro Trindade Mordente Gonçalves, Marco Aurélio de Oliveira Schroeder e Alfred Gimpel Moreira Pinto.

Bibliografia: f. 77-80.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2018.

1. Ondas eletromagnéticas – Espalhamento – Teses. 2. Análise numérica – Teses. 3. Galerkin, Métodos de – Teses. 4. Eletromagnetismo – Modelos matemáticos – Teses. I. Resende, Úrsula do Carmo. II. Gonçalves, Sandro Trindade Mordente. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 621.34



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI  
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE  
MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA



LEONARDO BRUNO LOPES

## ANÁLISE DO ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO BIDIMENSIONAL UTILIZANDO O MÉTODO IIEFG E PML UNIAXIAL

Dissertação nº 187 apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Associação Ampla entre a Universidade Federal de São João Del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais em 17 de Dezembro de 2018 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Úrsula do Carmo Resende (Orientadora)  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

---

Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente Gonçalves (Coorientador)  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

---

Prof. Dr. Marco Aurélio de Oliveira Schroeder  
Universidade Federal de São João del-Rei

---

Prof. Dr. Alfred Gimpel Moreira Pinto  
Faculdade Pitágoras

---

Para ISABELA.



---

# Agradecimentos

Agradeço a DEUS pela vida, pela saúde e pela força que me deu para superar as dificuldades e não desistir. A Ele devo tudo o que sou e que tenho.

Agradeço a minha família por me apoiar e incentivar sempre. Em especial, agradeço a Taís, minha esposa e mãe da minha filha, por ser uma mulher maravilhosa que me faz muito feliz.

Agradeço imensamente à professora Úrsula do Carmo Resende que orientou esse trabalho. Além de pesquisadora, orientadora e servidora exemplar, ela provou a cada dia ser uma *pessoa* excelente. Sempre vou levar comigo o seu exemplo de trabalho persistente, dedicação e compromisso com o ensino e a pesquisa.

Agradeço também ao professor Sandro Gonçalves Trindade Mordente, meu coorientador. Esteve sempre disponível e também soube orientar com exemplo de vida quando retornou à sala de aula como aluno e demonstrou verdadeira dedicação aos seu orientandos.

Agradeço aos professores Márcio Matias e Alfred Gimpel que discutiram comigo e com a prof<sup>a</sup>. Úrsula assuntos relacionados a esse trabalho e deram valiosa contribuição.

Agradeço aos meus colegas de trabalho na DITIC/SGI dos quais destaco Clever, Marco Túlio, Ronan, Ulisses e Wanderley. O apoio de vocês, nas mais diversas formas que se fez mostrar, foi **muito** importante para que eu concluísse esse trabalho. Agradeço também ao pessoal da secretaria do PPGEL por me atender tão bem em todas as vezes que precisei.

Agradeço, por fim, aos colegas do PPGEL e do Lab. de Eletromagnetismo que deram sua parcela de contribuição, seja com um incentivo, ouvindo um desabafo, auxiliando nos trabalhos, dando dicas de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, oferecendo carona ou um copo de café. Paula, Rakelane, Bolt, Diego, Fabiano, Guilherme, Ícaro e Vinícius: a vocês, o meu sincero muito obrigado.

*“It appears to me, therefore, that the study of electromagnetism in all its extent has now become of the first importance as a means of promoting the progress of science.”*

JAMES CLERK MAXWELL,  
*A Treatise on Electricity & Magnetism – Vol. 1,*  
Prefácio à 1ª edição, 01 de Fevereiro de 1873.

# Resumo

A modelagem matemática de problemas de engenharia geralmente envolve o emprego de uma ou mais equações algébricas, diferenciais ou integrais. Determinar uma solução analítica é possível apenas para uma pequena parte desses problemas; na maior parte dos casos, é um processo extremamente complexo ou até impossível. Nestes casos é necessário utilizar técnicas numéricas computacionais que calculem soluções aproximadas. Uma importante classe dessas técnicas é a classe dos métodos sem malha ou *meshless*, cujo funcionamento, diferentemente de métodos como o de elementos finitos ou de diferenças finitas, não dependem da criação de malhas. Para a representação discreta do problema utilizam um conjunto de nós distribuídos ao longo do domínio e das suas fronteiras sem requerer, no entanto, que qualquer relação entre estes nós seja estabelecida. Métodos sem malha já foram aplicados com sucesso na solução de problemas de eletromagnetismo, tanto em baixas quanto em altas frequências, inclusive problemas de propagação de ondas. Os problemas de propagação como o do espalhamento eletromagnético são, em geral, problemas abertos ou ilimitados e a sua solução numérica exige a aplicação de alguma técnica de limitação do domínio computacional. As condições de contorno absorventes (ABCs), tradicionalmente utilizadas para esta finalidade, tem sido recentemente substituídas por técnicas baseadas no conceito de camadas perfeitamente casadas, ou PML. Dentre as diversas variações de PML existentes, destaca-se a PML uniaxial (UPML), desenvolvida a partir da interpretação física do conceito de PML originalmente proposto. Nessa abordagem, o domínio é envolvido em camadas de um material anisotrópico fictício cujas características são projetadas para que as camadas se comportem como um absorvedor eficiente perfeitamente casado com o material do domínio. A UPML limita o domínio simulando, contudo, o comportamento de uma onda que se propaga num meio ilimitado. Este trabalho analisa o problema do espalhamento eletromagnético em duas dimensões, suas definições e seu equacionamento matemático. Analisa também o método sem malha IIEFG (ou método de Galerkin interpolante livre de elemento), suas características, fundamentação matemática e formulação. O problema do espalhamento de uma onda plana por um cilindro condutor infinito na direção  $z$  é então solucionado pela técnica numérica combinada IIEFG-UPML. A análise da técnica proposta é realizada, primeiramente, na forma de análises paramétricas do método IIEFG e da UPML. Em seguida, avalia-se o desempenho do método e a precisão das soluções geradas aplicando-se os parâmetros determinados na solução do espalhamento por cilindros de diferentes dimensões. Utilizam-se nessas análises comparativas a solução analítica e a solução numérica obtida pelo método IIEFG-ABC em que o domínio é limitado pela condição absorvente de Bayliss-Turkel de primeira ordem.

**Palavras-chaves:** espalhamento eletromagnético. métodos sem malha. IIEFG. PML uniaxial.

# Abstract

The mathematical modeling of engineering problems often involves the use of one or more algebraic, differential or integral equations. However, it is possible to determine an analytical solution only for a small part of these problems. In most of the cases, it is an extremely complex or even impossible process. In these cases it is necessary to use computational numerical techniques in order to obtain approximated solutions for such problems. An important class of numerical techniques is the class of the meshless methods. These methods, differently from finite element or finite difference methods, does not rely on meshes. For the discrete problem domain representation they use a cloud of nodes scattered all over the domain and its boundaries, not requiring any relation to be established between the nodes. Meshless methods have already been successfully employed in the solution of electromagnetism problems, both in low and high frequencies, including wave propagation problems. Propagation problems like electromagnetic scattering are in general open or unlimited problems and its numerical solution demands the employment of some domain limitation technique. Absorbing boundary conditions, that were traditionally used to limit domains, have been replaced by newer techniques based on the perfect matched layers concept, the PML. Among the several existing PML variations, stands out the Uniaxial PML (UPML), which was developed from the physical interpretation of the PML originally proposed concept. According to this approach the domain is surrounded by layers of an anisotropic fictitious material whose characteristics are specially designed so the layers acts as an efficient absorber perfectly matched to the domain medium. The UPML limits the domain yet simulating the unbounded wave propagation. This work investigates the bidimensional electromagnetic scattering problem, its definitions and mathematical modeling. It also analyses the IIEFG (interpolating element-free Galerkin) meshless method, its characteristics, mathematical background and formulation. The plane wave scattering by a  $z$ -infinite conducting circular cylinder is solved by the combined IIEFG-UPML numerical technique. Analysis of the proposed technique is firstly done in the form of a parametric analysis of the IIEFG and UPML methods. Then, the method performance and the accuracy of the solutions generated by the new parameters set are evaluated while solving the scattering by cylinders of bigger dimensions. The analytical solution and the numerical solutions generated by the IIEFG-ABC method – with a first order Bayliss-Turkel absorbing condition – are used in this comparative analysis.

**Keywords:** electromagnetic scattering. meshless methods. interpolating EFG. uniaxial perfect matched layers.

# Lista de Figuras

Figura 2.1 – Espalhamento eletromagnético: a) fonte b) espalhador . . . . .	10
Figura 2.2 – Onda plana uniforme $TM^z$ incidente em um cilindro circular condutor infinito ao longo do eixo $z$ . . . . .	11
Figura 2.3 – Coeficiente de reflexão associado às condições de Engquist-Majda de primeira e segunda ordem. . . . .	16
Figura 2.4 – Coeficiente de reflexão associado a condição de contorno absorvente de segunda ordem. . . . .	17
Figura 3.1 – Uma onda plana $TM^z$ viajando no espaço livre (Região 1) incide num semiespaço formado por material com perdas (Região 2). . . . .	22
Figura 3.2 – Uma onda plana viajando no espaço livre (Região 1) incide num semi-espaço diagonalmente anisotrópico (Região 2). . . . .	29
Figura 3.3 – Domínios limitados por uma região de UPML em coordenadas retangulares. Em cada uma das camadas, valem as características do tensor referente ao eixo coordenado perpendicular à interface de incidência. . . . .	34
Figura 4.1 – Um domínio de suporte determina os nós (indicados por $\bullet$ ) que serão usados na interpolação da variável de campo no ponto $\mathbf{x}$ (indicado por $\circ$ ), podendo ter formas diferentes em cada ponto. . . . .	41
Figura 4.2 – Domínio de suporte $\Omega_I$ para pontos de interesse em $\mathbf{x}_I$ . $d_I$ é a dimensão do domínio de suporte retangular centrado em $\mathbf{x}_I$ . . . . .	42
Figura 4.3 – Domínio de influência dos nós. Na construção de funções de forma para o ponto $\mathbf{x}_I$ , os nós cujos domínios de influência cobrem $\mathbf{x}_I$ são usados. No exemplo, os nós 1 e 2 são incluídos, mas o nó 3 não. . . . .	43
Figura 4.4 – Critério da visibilidade. Os pontos dentro da região hachurada (identificados por $\otimes$ ) não são contabilizados no domínio de influência do nó $I$ . . . . .	45

Figura 5.1 – Definição do problema investigado: o espalhamento por um cilindro PEC imerso no espaço livre iluminado por uma onda plana $TM^z$ com o domínio computacional limitado por uma região de UPML. . . . .	54
Figura 5.2 – Definição do problema solucionado pelo método IIEFG-ABC: o espalhamento por um cilindro PEC imerso no espaço livre iluminado por uma onda plana $TM^z$ com o domínio computacional limitado por uma fronteira circular sobre a qual é imposta uma condição absorvente de primeira ordem. . . . .	56
Figura 5.3 – Modos de distribuição de nós investigados. As distribuições (a) e (b) são geradas internamente, enquanto a distribuição (c) é gerada pelo software <i>Gmsh</i> . . . . .	58
Figura 5.4 – Erro na norma $L^2$ em relação ao número de nós e de pontos de Gauss. . . . .	61
Figura 5.5 – Erro na norma $L^2$ em relação ao número de pontos de Gauss para diferentes densidade de nós. . . . .	61
Figura 5.6 – Erro na norma $L^2$ em função da variação da dimensão estimada do domínio de suporte $d_I$ . . . . .	62
Figura 5.7 – Variação do erro na norma $L^2$ em função da variação da posição da fronteira $\Gamma_{upml}$ , dada pela sua distância em relação à $\Gamma_C$ . . . . .	63
Figura 5.8 – Erro na norma $L^2$ em função do número de camadas $nc$ . Em (a), a largura das camadas $w_{upml}$ é variável, enquanto em (b) $w_{upml}$ é mantida fixa no valor $0, 1\lambda$ . . . . .	64
Figura 5.9 – $w_{upml}$ variável. . . . .	65
Figura 5.10 – Variação do parâmetro $p$ . Em (a) varia-se também o número $nc$ de camadas, mantendo a espessura $w_{upml}$ de cada uma fixa, e em (b) varia-se $w_{upml}$ para um configuração de camada única. . . . .	67
Figura 5.11 – Magnitude do campo elétrico, $r_C = 0, 5\lambda$ . . . . .	68
Figura 5.12 – Magnitude do campo elétrico, $r_C = 1, 0\lambda$ . . . . .	69
Figura 5.13 – Magnitude do campo elétrico, $r_C = 1, 0\lambda$ . . . . .	69
Figura 5.14 – Tempo médio de execução dos métodos IIEFG-UPML e IIEFG-ABC para cada um dos casos analisados. . . . .	71
Figura 5.15 – Condicionamento da matriz do sistema linear. . . . .	71
Figura 5.16 – Comportamento do erro $L^2$ com o aumento de $r_C$ . . . . .	73
Figura B.1 – Onda plana uniforme $TM^z$ incidente em um cilindro circular condutor infinito ao longo do eixo $z$ . . . . .	88



---

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Coeficientes para a condição absorvente de segunda ordem generalizada.	17
Tabela 5.1 – Valores iniciais dos parâmetros utilizados nas análises paramétricas. . .	55
Tabela 5.2 – Sensibilidade da solução numérica à alteração do número de pontos de integração de Gauss. . . . .	60
Tabela 5.3 – Comparação do desempenho dos métodos quanto à precisão da solução.	72



---

## Lista de Abreviaturas e Siglas

ABC	<i>Absorbing Boundary Conditions</i> , condições de contorno absorventes
CPML	<i>Convolutional PML</i>
FDTD	<i>Finite-Difference Time-Domain</i> , diferenças finitas no domínio do tempo
FEM	<i>Finite Element Method</i> , método dos elementos finitos
GIP	<i>Gauss integration points</i> , pontos de integração de Gauss
IEFG	<i>Interpolantig Element-free Galerkin</i> , método de Galerkin interpolante livre de elemento
MLS	<i>Moving Least Squares</i> , método dos mínimos quadrados móveis
IMLS	<i>Interpolating Moving Least Squares method</i> , método dos mínimos quadrados móveis interpolante
PEC	<i>Perfect Electric Conductor</i> , condutor elétrico perfeito
PML	<i>Perfect Matched Layers</i> , camadas perfeitamente casadas
RGN	Relação entre o número de GIP e o número de nós
SCPML	<i>Stretched-Coordinate PML</i>
TE	modo transverso-elétrico
TM	modo transverso-magnético
TME	tempo médio de execução
UPML	Uniaxial PML

---

## Lista de Símbolos

$a$	um dos termos genéricos do tensor uniaxial
$\bar{a}$	seguimento sobre o eixo $x$ limitado por $[-\Gamma_{upml}, -r_C]$ em que se avalia a magnitude de $E_z^s$
$A_I$	área do domínio de suporte $\Omega_I$
$b$	um dos termos genéricos do tensor uniaxial
$\bar{b}$	seguimento sobre o eixo $x$ limitado por $[r_C, \Gamma_{upml}]$ em que se avalia a magnitude de $E_z^s$
$B$	operador diferencial na forma fraca simplificada
$c$	um dos termos genéricos do tensor uniaxial
$c_n$	coeficientes a serem determinados
$c_i$	coeficientes a serem determinados
$d_I$	dimensão do domínio de suporte $\Omega_I$ centrado em $x_I$
$\mathbf{E}$	vetor intensidade de campo elétrico (V/m)
$\mathbf{E}^i$	campo elétrico incidente (V/m)
$\mathbf{E}^s$	campo elétrico espalhado (V/m)
$\mathbf{E}^t$	campo elétrico total (V/m)
$E_z^s$	componente de $\mathbf{E}^s$ na direção $z$
$E_0$	intensidade escalar de campo elétrico (V/m)

$EL^2$	erro dado na norma $L^2$
$F$	operador diferencial na forma fraca simplificada
$\mathbf{F}$	vetor de termos independentes do sistema linear
$H_0$	espaço de Hilbert
$H_0^1$	subespaço de Sobolev
$\mathbf{H}$	vetor intensidade de campo magnético (A/m)
$\mathbf{H}^i$	campo magnético incidente (A/m)
$\mathbf{H}^s$	campo magnético espalhado (A/m)
$\mathbf{H}^t$	campo magnético total (A/m)
$\mathbb{J}$	somatório dos resíduos ponderados no IMLS
$\mathbf{k}$	vetor de onda
$k_\xi$	cada uma das componentes $\xi = x, y, z$ de $\mathbf{k}$
$\mathbf{K}$	matriz de coeficientes do sistema linear
$L$	largura da região de PML/UPML
$L_D$	lado do quadrado que define o domínio global do problema
$L_{upml}$	lado do quadrado que define fronteira $\Gamma_{upml}$ do problema
$m$	número de termos da base polinomial $\mathbf{p}^T$
$n$	constante de ajuste de precisão na função de peso singular
$n_{A_I}$	número de nós dentro da área do domínio de suporte $\Omega_I$
$N$	número de nós utilizados na representação discreta do domínio
$p$	grau do polinômio no perfil de gradação da UPML
$p_j$	cada um dos termos da base polinomial $\mathbf{p}^T$
$\mathbf{p}^T$	base polinomial
$p_0$	parâmetro da ABC de Engquist-Majda
$p_2$	parâmetro da ABC de Engquist-Majda
$\mathbf{r}$	vetor deslocamento

$r_{abc}$	raio da fronteira ABC
$r_C$	raio do cilindro espalhador
$R^{TE}$	coeficiente de reflexão para o modo transverso-elétrico
$R^{TM}$	coeficiente de reflexão para o modo transverso-magnético
$s_\xi$	cada um dos termos do tensor diagonal $\bar{\bar{\Lambda}}$ , $\xi = x, y, z$
$S$	objeto espalhador
$T^{TE}$	coeficiente de transmissão para o modo transverso-elétrico
$T^{TM}$	coeficiente de transmissão para o modo transverso-magnético
$u$	função pertencente ao espaço $H_0(\Omega)$
$\mathbf{U}$	um campo vetorial qualquer
$w$	função pertencente ao espaço $H_0(\Omega)$
$w_{upml}$	largura de cada uma das camadas da região de PML/UPML
$\hat{W}$	função de peso de suporte compacto
$\mathbf{x}_I$	qualquer um do $N$ nós utilizados na representação discreta do domínio
$\alpha_1$	parâmetro da ABC de Bayliss-Turkel
$\alpha_S$	fator de escala adimensional para o cálculo de $d_I$
$\alpha$	constante de pequeno valor na função de peso singular
$\alpha_u$	parte real do termo complexo do tensor uniaxial
$\beta_u$	parte imaginária do termo complexo do tensor uniaxial
$\gamma$	parâmetro da ABC de Bayliss-Turkel
$\Gamma$	uma fronteira qualquer
$\Gamma_\Omega$	fronteira do domínio global
$\Gamma_S$	fronteira do objeto espalhador
$\Gamma_{upml}$	fronteira interna da região de UPML
$\epsilon$	permissividade elétrica do meio
$\bar{\bar{\epsilon}}$	tensor permissividade

$\eta$	impedância característica do meio
$\theta_i$	ângulo de incidência
$\theta_r$	ângulo de reflexão
$\theta_t$	ângulo de transmissão
$\overline{\overline{\Lambda}}$	tensor UPML
$\mu$	permeabilidade magnética do meio
$\overline{\overline{\mu}}$	tensor permeabilidade
$\rho$	coordenada radial do sistema de cilíndrico de coordenadas
$\phi$	coordenada angular do sistema de cilíndrico de coordenadas
$\Phi$	função de forma
$\psi$	derivada da solução na direção normal a $\Gamma$
$\sigma$	condutividade elétrica
$\sigma^*$	condutividade magnética
$\omega$	frequência angular ( <i>rad/s</i> )
$\Omega$	região de solução útil do problema limitado por PML, ou ainda um domínio qualquer
$\Omega_0$	domínio limitado, espaço livre
$\Omega_I$	domínio de suporte centrado em $x_I$
$\overline{\overline{\Omega}}$	união do domínio com a fronteira, $\Omega \cup \Gamma$

---

# Sumário

<b>1 – Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contextualização da pesquisa	1
1.2 Publicações sobre a utilização de métodos sem malha com PML em Eletromagnetismo	4
1.3 Motivação e relevância	5
1.4 Objetivos	6
1.5 Organização do texto	7
<b>2 – Espalhamento Eletromagnético em duas dimensões</b>	<b>9</b>
2.1 Introdução	9
2.2 O problema do espalhamento eletromagnético	9
2.2.1 Definição geral	10
2.2.2 O espalhamento em duas dimensões	11
2.3 Forma fraca para o espalhamento bidimensional	12
2.4 Condição de radiação e métodos de truncamento de domínio	14
2.4.1 Condições absorventes de Engquist-Majda	15
2.4.2 Condições absorventes de Bayliss-Turkel	18
2.5 Considerações finais	19
<b>3 – Perfectly Matched Layers</b>	<b>20</b>
3.1 Introdução	20
3.2 Definição de PML	20
3.3 A PML de Berenger	21
3.3.1 Incidência de onda plana num meio com perdas	21
3.3.2 Incidência de onda plana no meio PML de Berenger	23
3.3.3 Modificando as Equações de Maxwell por divisão de campos	24
3.3.4 Solução da equação da onda plana no meio de Berenger	26

3.4	A PML Uniaxial . . . . .	27
3.4.1	Incidência de onda plana num meio anisotrópico . . . . .	28
3.4.2	Coefficiente de reflexão do meio anisotrópico . . . . .	31
3.4.3	Propriedades do meio UPML . . . . .	32
3.4.4	Cálculo dos parâmetros UPML . . . . .	34
3.5	Incorporação da UPML à forma fraca . . . . .	37
3.6	Considerações finais . . . . .	37
<b>4</b>	<b>O Método IIEFG . . . . .</b>	<b>39</b>
4.1	Introdução . . . . .	39
4.2	Passos básicos para construção de soluções utilizando métodos sem malha	39
4.3	Discretização sem malha . . . . .	41
4.4	Domínio de Influência e funções de forma . . . . .	43
4.5	Propriedades das funções de forma para métodos sem malha . . . . .	44
4.6	Tratamento de descontinuidades . . . . .	45
4.7	Método de Galerkin . . . . .	46
4.8	O MLS e sua variante interpolante . . . . .	49
4.9	Considerações finais . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Resultados . . . . .</b>	<b>53</b>
5.1	Introdução . . . . .	53
5.2	Definição do problema do espalhamento . . . . .	53
5.3	Metodologia de avaliação da precisão . . . . .	54
5.3.1	A solução do espalhamento pelo método IIEFG-ABC . . . . .	55
5.4	Análise paramétrica: método IIEFG . . . . .	57
5.4.1	Distribuição de nós . . . . .	57
5.4.2	Número de nós e grade de integração . . . . .	59
5.4.3	Domínio de suporte . . . . .	61
5.5	Análise paramétrica: UPML . . . . .	62
5.5.1	Posição da fronteira $\Gamma_{upml}$ . . . . .	63
5.5.2	Número de camadas $nc$ . . . . .	63
5.5.3	Largura da camada $w_{upml}$ . . . . .	65
5.5.4	Condutividade máxima $\sigma_{max}$ . . . . .	66
5.5.5	O parâmetro $p$ . . . . .	66
5.6	Estudo de caso: espalhadores cilíndricos de maior dimensão . . . . .	66
5.6.1	Espalhador cilíndrico de raio $r_C = 0,5\lambda$ . . . . .	67
5.6.2	Espalhador cilíndrico de raio $r_C = 1,0\lambda$ . . . . .	68
5.6.3	Espalhador cilíndrico de raio $r_C = 1,5\lambda$ . . . . .	69
5.7	Análise do custo computacional . . . . .	70
5.7.1	Metodologia . . . . .	70

5.8	Análise do condicionamento da matriz do sistema linear . . . . .	71
5.9	Considerações finais . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros . . . . .</b>	<b>74</b>
6.1	Trabalhos futuros . . . . .	75
Referências . . . . .		77
<b>Apêndices</b>		<b>81</b>
<b>APÊNDICE A—A equação da onda eletromagnética e sua solução em 2D</b>		<b>82</b>
A.I	Equações de Maxwell . . . . .	82
A.I.1	Relações constitutivas . . . . .	83
A.II	Equação de Onda . . . . .	84
A.II.1	Solução da equação de onda . . . . .	85
<b>APÊNDICE B—Solução analítica do espalhamento por um cilindro circular</b>		<b>88</b>

---

# Introdução

## 1.1 Contextualização da pesquisa

A modelagem matemática de problemas de engenharia envolve, usualmente, o uso de uma ou mais equações algébricas, diferenciais ou integrais. No caso de problemas de eletromagnetismo, em geral, são utilizadas equações diferenciais parciais que, juntamente com as condições de contorno adequadas, permitem determinar a solução do problema em todo o espaço em que este é estudado, ou seja, no seu domínio espacial e, em alguns casos, no tempo. Determinar uma solução analítica é possível apenas para uma pequena parte desses problemas; na maioria dos casos, é um processo extremamente complexo ou impossível. Nestes casos é necessário utilizar técnicas numéricas computacionais para a determinação de soluções aproximadas para tais problemas [1].

Métodos numéricos para solução de equações são anteriores aos computadores, sendo que o seu emprego foi ampliado a partir da invenção destes, principalmente em função da possibilidade de realização de cálculos em alta velocidade. A partir de então ocorreu a disseminação dos métodos computacionais que passaram ser aplicados a problemas mais complexos e de maiores dimensões. Novas técnicas numéricas com melhores características de exatidão e eficiência também foram desenvolvidas.

Atualmente, com a rápida evolução dos computadores e a crescente disponibilidade de recursos de processamento, as técnicas numéricas e de simulação tem se tornado cada vez mais importantes na solução de problemas práticos complexos em engenharia e diversas outras áreas da ciência [1]. Cita-se como exemplos o método dos elementos finitos (*Finite Element Method*, FEM) [2, 3] e o método das diferenças finitas no domínio do tempo (*Finite-Difference Time-Domain*, FDTD) [4] que estão entre as técnicas numéricas mais estudadas e atualmente são considerados plenamente estabelecidas.

A ideia principal em qualquer método numérico consiste em transformar um problema complexo em uma descrição matemática discreta (geralmente mais simples) utilizada para recriar o problema no computador e obter uma solução aproximada. Assim, a discretização do domínio do problema sob investigação é uma importante etapa no processo de obtenção de soluções numéricas, o que sugere a classificação dos métodos pela forma como tal discretização é realizada.

Nos métodos FEM e FDTD o domínio espacial onde estão definidas as equações que regem o problema é discretizado utilizando-se malhas. Uma malha é definida como os espaços abertos entre as linhas de uma rede formada por nós conectados de maneira específica. No FDTD as malhas são também chamadas de *grids*, enquanto que no FEM são conhecidas como elementos. Já os chamados métodos sem malha utilizam um conjunto de nós distribuídos ao longo do domínio e das suas fronteiras. Nenhuma informação sobre a relação entre estes nós é requerida, de modo que estes conjuntos de nós não constituem malhas. Assim, esses métodos estabelecem um sistema de equações algébricas para todo o domínio do problema sem a utilização de uma malha predefinida [5].

Os métodos sem malha começaram a ser desenvolvidos no final da década de 1970, com a introdução do método Hidrodinâmica de Partículas (*Smoothed Particle Hydrodynamics*, SPH) [6, 7], que foi inicialmente desenvolvido como um método probabilístico para simulação de problemas de astrofísica. Mais tarde, foi modificado e sua variante determinística foi aplicada na solução de problemas de mecânica de sólidos e de fluidos [8]. Outros métodos sem malha foram desenvolvidos dentre os quais se pode citar o Método de Elemento Difuso (*Diffuse Element Method*, DEM) [9], o Método de Partícula com Núcleo Reproduzido (*Reproducing Kernel Particle Method*, RKPM) [10], o método de pontos finitos (*Finite Point Method*, FPM) [11], o Método de Petrov-Galerkin Local Sem Malha (*Meshless Local Petrov-Galerkin*, MLPG) [12] e o Método de Interpolação Radial de Pontos (*Radial Point Interpolation Method* – RPIM) [13]. Todos estes métodos compartilham da característica de não necessitar de uma malha predefinida, ao menos na interpolação da variável de campo [5].

O método de Galerkin livre de elemento (*Element-Free Galerkin*, EFG) surgiu em 1994 [14]. O EFG utiliza a *formulação fraca* do problema que deve ser satisfeita em cada nó do domínio; a solução do problema é então aproximada com a utilização de funções de forma. Tradicionalmente, tais funções são construídas utilizando-se o método dos mínimos quadrados móveis (MLS) [15, 1]. No entanto, as aproximações geradas pelo MLS tradicionalmente utilizam funções que não atendem à condição do delta de Kronecker sendo, portanto, consideradas aproximantes e não interpolantes. Isso torna necessária a utilização de técnicas adicionais para a imposição das condições de contorno que eventualmente elevam a complexidade do método, podendo ainda comprometer sua estabilidade e precisão.

Lancaster e Salkauskas [15] propuseram em 1981 o uso de funções singulares como funções de forma na minimização dos resíduos. Esse método, chamado de Método dos Mínimos Quadrados Móveis Interpolante (*Interpolating Moving Least Squares*, IMLS), foi então aplicado na construção de soluções numéricas baseadas no método EFG para problemas de eletromagnetismo [16, 17, 18]. A utilização do IMLS permite também a imposição das condições de contorno diretamente na forma fraca discretizada.

Para a solução numérica de problemas não limitados, como é o caso de muitos problemas de propagação de ondas eletromagnéticas, torna-se necessário determinar uma fronteira artificial que limite o domínio computacional. Visto que tal fronteira não existe no problema real, condições matemáticas devem ser impostas sobre essa região de forma que a solução não seja contaminada por reflexões espúrias provocadas por estas fronteiras e, portanto, de origem puramente numérica. A imposição destas condições também deve garantir a estabilidade da aproximação [19].

Condições matemáticas conhecidas como *condições de contorno absorventes* (Absorbing Boundary Conditions, ABCs) são usadas para a limitação do domínio em problemas abertos. Engquist-Majda [20] e Bayliss-Turkel [21] propuseram famílias de condições absorventes que estão entre as mais utilizadas em fronteiras artificiais e são tradicionalmente aplicadas tanto com o método dos elementos finitos como com métodos sem malha, como o EFG [3, 18].

As condições de Engquist-Majda são consideradas um caso especial das condições absorventes para fronteiras planas e tem comportamento ideal (ou seja, totalmente absorvente) para um ângulo de incidência nulo, sendo que a taxa de reflexões não físicas causadas pela imposição da fronteira artificial tende a aumentar conforme o ângulo de incidência tende a  $\pi/2$ . Isto exige que a fronteira seja posicionada de tal forma que a incidência dos campos na fronteira ocorra em direções mais próximas da normal, o que implica na colocação da fronteira a distâncias maiores [3].

Já as condições de Bayliss-Turkel são obtidas a partir da expansão de Wilcox, uma representação assintótica do campo elétrico [22]. Visto que tal expansão resulta numa soma infinita, normalmente utilizam-se apenas os dois primeiros termos. De forma geral, a condição de Bayliss-Turkel de  $n$ -ésima ordem garante que a solução concorde com os  $2n$  termos da expansão assintótica e elimina reflexões provocadas pela fronteira artificial até os termos de ordem  $O(\rho^{-2n-1/2})$  [22].

Uma nova classe de fronteiras absorventes chamada Perfectly Matched Layers (PML) foi proposta em 1994 [23]. Inicialmente aplicada para limitação de domínio na solução de problemas de eletromagnetismo utilizando-se o método FDTD, essa técnica consiste na utilização de um material fictício de caráter puramente matemático especialmente

projetado para que suas principais características fossem i) a absorção total de campos em qualquer ângulo de incidência, frequência e polarização, e ii) alta taxa de atenuação das ondas viajantes no seu interior.

Partindo dessas premissas, implementações diversas de PML foram propostas, posteriormente à introdução do conceito original por Berenger. Chew e Weedon [24] propuseram em 1994 a *Stretched Coordinate System* PML (SCPML), que modelava matematicamente as características do meio absorvente a partir da extensão complexa do sistema de coordenadas. Tal extensão é incluída nos operadores diferenciais espaciais (divergente e rotacional) que são redefinidos de tal forma que os campos sejam atenuados na região de PML, mas se comportem normalmente em qualquer outra parte do domínio.

Sacks *et al.* [25] sugerem o uso de um material absorvente diagonalmente anisotrópico cujas características eletromagnéticas são descritas por um tensor. Chamada de PML Uniaxial (UPML), essa interpretação particular apresenta a importante vantagem de não exigir qualquer modificação nas equações de Maxwell nem nos operadores diferenciais. A incorporação da UPML é então realizada a partir da substituição das quantidades escalares  $\epsilon$  e  $\mu$ , respectivamente permissividade elétrica e permeabilidade magnética pelos tensores equivalentes.

Em 2000 Roden e Gedney [26] apresentaram a *Convolutional* PML (CPML). Essa implementação, baseada na PML de coordenada estendida e no uso de frequência complexa deslocada (*Complex Frequency Shifted*, CFS), oferece diversas vantagens sobre as outras implementações: a formulação CPML é totalmente independente dos materiais que compõem o domínio podendo ser aplicada a meios não homogêneos, anisotrópicos, dispersivos ou não lineares, além de também ser capaz de absorver campos evanescentes.

## 1.2 Publicações sobre a utilização de métodos sem malha com PML em Eletromagnetismo

Uma avaliação ainda que superficial das publicações sobre PML e suas variantes, especialmente na área do eletromagnetismo, permite concluir que essa técnica está consolidada quando aplicada em conjunto com o método FDTD. Também já foi utilizada com o FEM, mas o uso de PML com métodos sem malha ainda pode ser considerado como uma técnica em estágio inicial de desenvolvimento e adoção. Segue-se uma breve apresentação das mais recentes publicações que utilizam a PML como técnica de limitação de domínio em conjunto com métodos sem malha, especificamente na solução de problemas de eletromagnetismo.

Mendes *et al.* [27] utilizaram em 2008 a formulação de PML originalmente proposta

por Berenger, chamada *split-field* PML, juntamente com o método Interpolação Suavizada de Partícula (*Smoothed Particle Interpolation*, SPI) que é uma versão generalizada do método SPH na solução numérica do problema de uma onda viajando entre duas placas paralelas condutivas infinitas.

A abordagem de Berenger também foi utilizada em [28] em 2010, dessa vez acoplada ao método RPIM para simular uma guia paralela de onda em que o coeficiente de reflexão teórico é comparado ao calculado numericamente. Uma antena cônica unipolar também é simulada, sendo que nesse caso a solução obtida pelo método RPIM é comparada à solução obtida pelo método FDTD.

O método RPIM também é utilizado em [29] e [30] para solucionar o problema do espalhamento eletromagnético por um cilindro perfeitamente condutor em duas dimensões utilizando uma implementação radial de PML. A modelagem matemática do problema é feita em coordenadas cilíndricas e a PML radial é obtida a partir da aplicação de transformações de coordenadas. Nessa abordagem, apenas os campos espalhados são calculados, e a solução numérica obtida é comparada à solução analítica.

Em [31] novamente o método RPIM é aplicado juntamente com a SCPML na simulação de um guia de onda retangular bidimensional. O método para solução da equação de onda pelo potencial vetor magnético é utilizado. Uma vez que o método RPIM para o potencial vetor magnético e a SCPML requerem distribuições de nós de características diferentes, é proposta uma distribuição de nós híbrida em que apenas os nós da região de PML são tratados de forma diferenciada, resultando numa técnica híbrida. Na análise, os coeficientes de reflexão numericamente calculados são comparados aos valores teóricos.

Mais recentemente, Nicomedes *et al.* [32] propõem o uso do MLPG para uma análise completamente sem malha do espalhamento por objetos condutores no domínio harmônico temporal. Trata-se de uma formulação mista cujas incógnitas são o vetor campo elétrico e um multiplicador de Lagrange. O método é aplicado na solução de problemas diversos. Os resultados obtidos e as taxas de convergência são comparados àqueles alcançados por outras técnicas.

### 1.3 Motivação e relevância

Este trabalho trata da aplicação conjunta de duas técnicas relativas à solução numérica de problemas em eletromagnetismo, quais sejam um método numérico sem malha para solução de equações diferenciais e um método de truncamento adequado à limitação de domínios inerentemente infinitos.

Do ponto de vista do método numérico propriamente dito, é inegável que o paradigma da solução independente de malhas apresenta vantagens quando em comparação à abordagem tradicional com malhas. Naturalmente não são vantagens absolutas, mas que são altamente desejáveis em aplicações cujo o processo de definição de malhas é altamente custoso do ponto de vista computacional, quando a variável de campo é descontínua nas interfaces dos elementos, ou ainda quando a geometria do problema é variável [5]. Cabe, porém, destacar que tais técnicas ainda são consideradas recentes e, embora sejam promissoras e já se mostrem aplicáveis em diversas áreas, espera-se que ainda sejam alvo de desenvolvimentos que resultem em otimizações e melhorias até que alcancem um patamar de maturidade semelhante ao do FEM [1]. Trata-se, portanto, de um campo de estudo de notável relevância.

No que diz respeito aos métodos de limitação de domínios, é sabido que as ABCs tem sido utilizadas com sucesso em métodos com e sem malha [19, 3, 18] para a solução de problemas de eletromagnetismo, sabe-se que a precisão dessa técnica é limitada visto que opera satisfatoriamente apenas em ângulos de incidência específicos, além de depender da frequência e da polarização dos campos [3]. Tais limitações não impactam o desempenho das PMLs, cuja principal característica é exatamente simular o espaço livre inclusive nas situações em que as ABCs operam com desvantagem. Por esse motivo são amplamente utilizadas em conjunto com o método FDTD [4] e até com o FEM [25, 33, 34]. A aplicação de PML com métodos sem malha, como visto anteriormente, ainda é pouco difundida. Especificamente, à exceção de [32], verifica-se neste casos a utilização da PML em conjunto com métodos sem malha no domínio do tempo. Considera-se, portanto, que a aplicação de métodos sem malha com limitação de domínio por PML ainda não foi alvo de extensa investigação.

Diante deste cenário, mostra-se oportuno e relevante o estudo de métodos sem malha em conjunto a PML, especificamente, no caso do presente trabalho, a variação interpolante do método EFG e a interpretação uniaxial do conceito de PML.

## 1.4 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal aplicar o método EFG utilizando funções de forma interpolante (daqui em diante abreviado como IIEFG) juntamente com a PML Uniaxial para o truncamento do domínio computacional visando à obtenção de soluções precisas do problema de espalhamento eletromagnético bidimensional.

Decorrem deste objetivo principal e mais geral alguns objetivos específicos; uma vez alcançados cada um deles, terá sido alcançado também o objetivo principal. Os objetivos específicos são os que seguem:

- revisar a teoria sobre os métodos sem malha, especificamente, o IIEFG em duas dimensões;
- revisar a teoria sobre o desenvolvimento de absorvedores fictícios do tipo PML, especificamente a abordagem uniaxial;
- revisar a teoria sobre o espalhamento eletromagnético por geometrias bidimensionais;
- desenvolvimento de modelo numérico para o cálculo do espalhamento eletromagnético utilizando o método IIEFG-UPML;
- aplicação do IIEFG-UPML na solução do espalhamento em duas dimensões;
- validação do método comparado-se os resultados obtidos a outros calculados analiticamente e pelo método IIEFG utilizando ABCs.

## 1.5 Organização do texto

O texto do presente trabalho é composto por seis capítulos e suas respectivas seções e subseções.

Este capítulo contém a introdução ao trabalho: contextualiza o problema, apresenta a motivação para a realização da pesquisa, os objetivos e a organização do texto.

O Capítulo 2 apresenta o problema do espalhamento eletromagnético em sua definição mais geral e a modelagem para duas dimensões, caso este que é objeto do estudo. A forma fraca para o problema é apresentada. São analisados os métodos tradicionais de truncamento de domínio.

O Capítulo 3 introduz concepção teórica de PML. A formulação da PML de Berenger é apresentada, seguida da formulação da PML na abordagem uniaxial.

No Capítulo 4 são introduzidos os métodos sem malha, especialmente o IIEFG, cuja construção e fundamentação teórica são detalhadas. O IIEFG é aplicado à forma fraca deduzida anteriormente.

O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos pela implementação do IIEFG-PML em MATLAB<sup>®</sup> aplicado a alguns casos. As soluções numéricas obtidas são comparadas às soluções analítica e numérica, sendo esta última obtida pelo método IIEFG utilizando condições absorventes. São analisados brevemente o custo computacional do método e o condicionamento dos sistemas de equações gerados.

As principais conclusões do trabalho são apresentadas no Capítulo 6. São relacionadas as principais dificuldades encontradas, eventuais contribuições e propostas de continuidade e ampliação da pesquisa.

---

O Apêndice A apresenta uma revisão da teoria eletromagnética, incluindo a solução da equação da onda eletromagnética em duas dimensões no modo  $TM_z$ , enquanto o Apêndice B descreve a solução analítica do espalhamento bidimensional da onda plana  $TM_z$  por um cilindro condutor.

---

# Espalhamento Eletromagnético em duas dimensões

## 2.1 Introdução

Neste capítulo objetiva-se apresentar o problema do espalhamento eletromagnético em sua definição mais geral e a modelagem matemática do caso específico em duas dimensões para meios lineares, homogêneos, isotrópicos e sem fontes, que é o caso abordado neste trabalho.

Apresenta-se, inicialmente, a definição geral do problema de espalhamento seguida da particularização para duas dimensões. Os fundamentos matemáticos no qual se embasa o equacionamento da forma fraca são apresentados, assim como a própria forma fraca. Em seguida são apresentados os métodos tradicionais de limitação de domínio a partir das condições de contorno absorventes. Por fim, são apresentados de forma sintetizada os temas essenciais abordados ao longo do capítulo.

## 2.2 O problema do espalhamento eletromagnético

A propagação de ondas eletromagnéticas em meios livres e ilimitados é um tanto idealista, apesar de constituir um modelo de baixa complexidade matemática adequado ao exame inicial do comportamento da onda. No caso mais geral, entretanto, o estudo da propagação de ondas deve levar em conta a presença de outras estruturas, principalmente quando estes se encontram próximos da fonte ou do receptor dessas ondas. A partir dessa análise, define-se o fenômeno do espalhamento eletromagnético [35].

### 2.2.1 Definição geral

Entende-se por espalhamento eletromagnético o fenômeno caracterizado pela interação de um corpo com um campo eletromagnético sob cuja influência está. O campo eletromagnético induz correntes na superfície ou no volume do objeto que passa, por sua vez, a radiar ondas eletromagnéticas. Identificam-se aqui, além do obstáculo, também designado objeto espalhador, três entidades distintas: i) os campos elétrico  $\mathbf{E}^i$  e magnético  $\mathbf{H}^i$  incidentes; ii) os campos elétrico  $\mathbf{E}^s$  e magnético  $\mathbf{H}^s$  espalhados; e iii) os campos eletromagnéticos totais  $\mathbf{E}^t$  e  $\mathbf{H}^t$ , resultantes da soma, por superposição, dos campos incidentes e espalhados, conforme mostram as equações (2.1a) e (2.1b) [35].

$$\mathbf{E}^t = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{H}^t = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s \quad (2.1b)$$

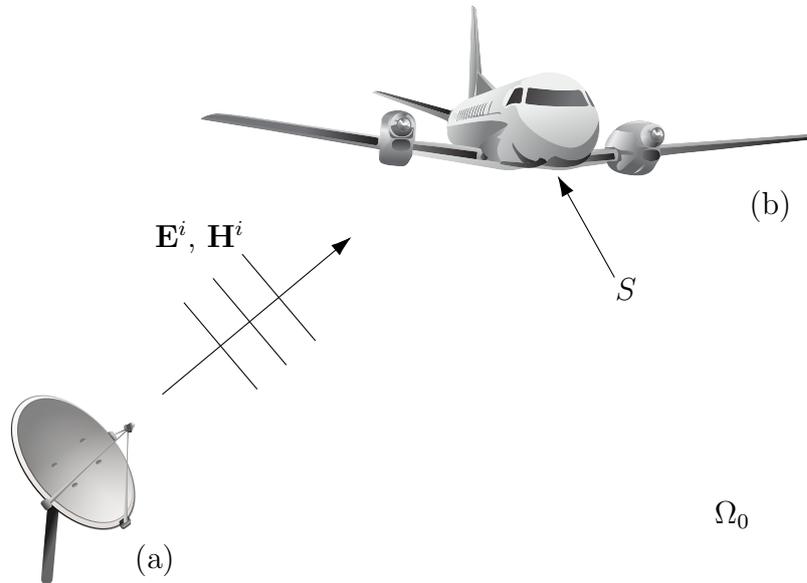


Figura 2.1 – Espalhamento eletromagnético: a) fonte b) espalhador

Fonte: Adaptado de [36].

A Figura 2.1 ilustra o fenômeno do espalhamento em que  $S$  é o objeto espalhador, de forma e materiais arbitrários, imerso no espaço livre  $\Omega_0$  (domínio ilimitado). Na configuração prática mostrada, a onda irradiada pela fonte localizada na região (a) se propaga por  $\Omega_0$ . O objeto  $S$ , por sua vez, iluminado pelos campos eletromagnéticos incidentes originados em (a), passa a se comportar como uma fonte em virtude das correntes induzidas pelos campos incidentes que circulam sobre ele. Os campos radiados pelo objeto espalhador são chamados de campos magnéticos espalhados [36].

São consideradas verdadeiras aqui as seguintes hipóteses: i) as regiões indicadas por (a) e (b) estão posicionadas a uma distância tal que a onda emitida em (a) é plana

e uniforme na região (b); e ii) a região (a), designada região de fonte, é desconsiderada, sendo computada apenas a sua influência sobre o objeto espalhador e na sua vizinhança.

Uma vez constatada a existência de campos eletromagnéticos de naturezas incidente e espalhado, pode-se também definir duas classificações para o problema de espalhamento: o espalhamento direto e o espalhamento inverso. Enquanto este objetiva encontrar informações sobre o campo incidente sendo o objeto espalhador conhecido, aquele cuida de determinar, a partir do conhecimento dos campos, as características geométricas e eletromagnéticas do objeto espalhador [36]. Neste trabalho apenas o problema do espalhamento direto é estudado.

### 2.2.2 O espalhamento em duas dimensões

O problema de espalhamento ocorre no espaço tridimensional. Uma abordagem bidimensional, no entanto, pode ser feita considerando-se que nem os campos eletromagnéticos nem as propriedades dos materiais que compõem o domínio sob análise não variam ao longo da direção de um dos eixos coordenados.

Define-se, portanto, o problema que é alvo de investigação neste trabalho: trata-se do espalhamento eletromagnético por um obstáculo  $S$  cuja forma é um cilindro de comprimento infinito na direção  $z$  dos sistemas de coordenadas retangular ou cilíndrico.  $S$  está imerso no espaço livre  $\Omega_0$  e sob a influência de campos eletromagnéticos incidentes  $\mathbf{E}^i$  e  $\mathbf{H}^i$ . A seção transversal do cilindro, limitada pela fronteira  $\Gamma_c$  é circular, e não sofre variação ao longo de  $z$ . A Figura 2.2 ilustra a situação particular aqui descrita.

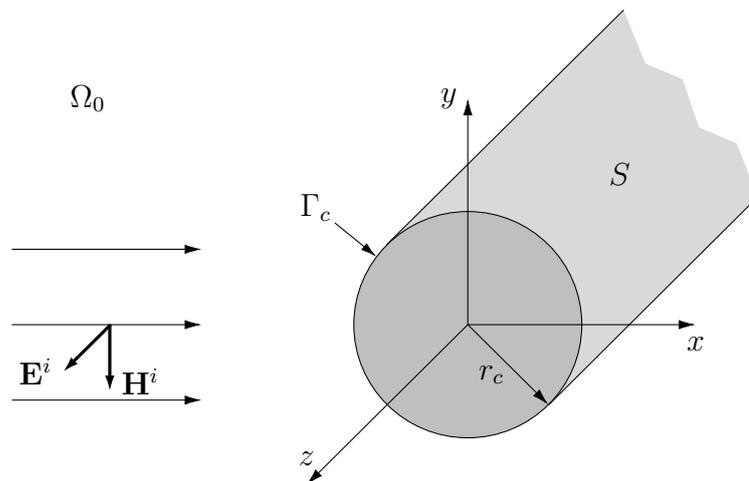


Figura 2.2 – Onda plana uniforme  $TM^z$  incidente em um cilindro circular condutor infinito ao longo do eixo  $z$ .

Fonte: Adaptado de [35].

O espalhador  $S$  pode ser constituído de um ou mais materiais quaisquer. Neste trabalho é considerado um espalhador formado por condutor elétrico perfeito (PEC).

## 2.3 Forma fraca para o espalhamento bidimensional

A dedução da equação da onda eletromagnética a partir das equações de Maxwell é apresentada na seção A.II do Apêndice A. Essa equação, conhecida como equação de Helmholtz, sujeita à condição de radiação de Sommerfeld, constitui a formulação forte do problema de espalhamento eletromagnético bidimensional. Dada sua importância, convém apresentar novamente essa equação.

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathbf{U}) + k^2 \alpha_2 \mathbf{U} = 0, \quad (2.2)$$

em que  $\mathbf{U}$  pode ser o campo elétrico ou magnético.

Nota-se, no entanto, que essa formulação exige que o campo  $\mathbf{U}$  seja solução de (2.2) em todo o domínio  $\Omega_0$ , o que é uma exigência bastante forte. Bastará, por exemplo, que o domínio esteja preenchido por materiais diferentes e a solução não será válida na interface de separação desses materiais.

A reformulação dessa modelagem de modo que se admitam soluções mais fracas para  $\mathbf{U}$  e suas derivadas constitui uma forma de contornar esta situação. A nova formulação, denominada formulação fraca ou variacional do problema, é especialmente adequada para a solução por técnicas numéricas diferenciais, como FEM e IIEFG [36, 18].

Importa mostrar aqui, antes da dedução da formulação fraca propriamente dita, os conceitos matemáticos que permitem realizar tal dedução. Seja, portanto, o espaço de funções definido por:

$$H_0(\Omega) = \left\{ u : \int_{\Omega} u^2(\mathbf{r}) d\Omega < +\infty \right\}, \quad (2.3)$$

onde  $H_0$  é o espaço de funções escalares cujo quadrado possui integral definida em  $\Omega$  e  $u$  é uma função da posição  $\mathbf{r}$ . Este é um espaço de Hilbert capaz de representar campos vetoriais como o elétrico e magnético. O produto escalar de duas funções  $u$  e  $w$  em  $H_0$  é definido por [36]:

$$\langle u, w \rangle = \int_{\Omega} u(\mathbf{r})w(\mathbf{r}) d\Omega \quad \forall u, w \in H_0(\Omega), \quad (2.4)$$

enquanto a norma euclidiana para  $u \in H_0$  é definida por:

$$\|u\| = \sqrt{\int_{\Omega} u^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}. \quad (2.5)$$

Os subespaços de  $H_0$  em que se definem operações de gradiente, rotacional e divergente são os espaços de Sobolev. O conjunto das funções deste subespaço que possuem

gradiente com quadrado integrável é definido por [36]:

$$H_0^1(\text{grad}; \Omega) = \{u \in H_0(\Omega) : \nabla u \in H_0(\Omega)\}. \quad (2.6)$$

Para a dedução da formulação fraca, considera-se uma solução aproximada  $u'$  para a Equação 2.2. Se  $u$  é a solução exata, pode-se definir um resíduo da aproximação tal que:

$$\tau = \nabla \cdot (\alpha_1 \nabla u') + k_0^2 \alpha_2 u'. \quad (2.7)$$

Definidas as soluções exata e aproximada, passa-se a utilizar  $u$  para designar a solução aproximada, como forma de simplificar a notação.

Deseja-se que o resíduo definido seja o menor possível; para tanto aplica-se o método dos resíduos ponderados que consiste em multiplicar a expressão da Equação 2.7 por uma função de peso  $w$  e integrar este produto em todo o domínio  $\Omega$ . O resultado é finalmente forçado a zero.

$$\int_{\Omega} \tau w \, d\Omega = 0 \quad \forall w \in H_0^1. \quad (2.8)$$

Substituindo-se (2.7) em (2.8) e aplicando-se o Teorema de Gauss, obtém-se:

$$\int_{\Omega} [(\alpha_1 \nabla u) \cdot \nabla w - k_0^2 \alpha_2 u w] \, d\Omega + \int_{\Gamma} \psi w \, d\Gamma = 0, \quad (2.9)$$

onde  $\psi$  representa a derivada de  $u$  na direção normal a  $\Gamma$ , ou seja:

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\psi. \quad (2.10)$$

A expressão para o campo elétrico pode ser obtida simplesmente pela substituição de  $u$  por  $E_z$ , e utilizando-se valores adequados de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . A Equação 2.9 pode ser então rescrita como:

$$\int_{\Omega} [(\mu^{-1} \nabla E_z) \cdot \nabla w - k_0^2 \epsilon E_z w] \, d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \mathbf{n}} w \, d\Gamma = 0. \quad (2.11)$$

A Equação 2.11 é, portanto, a forma fraca para o espalhamento por uma onda plana  $TM^z$  em duas dimensões. Essa equação, em comparação com a forma forte (2.2), apresenta apenas derivadas de primeira ordem. Diminui-se, portanto, a regularidade requerida para solução, ampliando as classes de funções candidatas [36].

## 2.4 Condição de radiação e métodos de truncamento de domínio

O espalhador cilíndrico ilustrado na Figura 2.2 encontra-se no domínio  $\Omega_0$  que é o espaço livre. Se tanto o objeto espalhador como a onda eletromagnética incidente estão imersos no espaço livre que, por definição, é um meio ilimitado, e situados a uma distância finita da origem do sistema de coordenadas, a condição que os campos eletromagnéticos devem satisfazer idealmente é a condição de radiação de Sommerfeld. A Equação 2.12 mostra a forma geral desta condição para o campo elétrico, enquanto a Equação 2.13 é a forma desta mesma condição para campos elétricos bidimensionais, como o que é dado pela Equação A.14.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \nabla \times \mathbf{E} + jk_0 \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} \right] = 0, \quad (2.12)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\partial E_z^s}{\partial \rho} = -jk E_z^s. \quad (2.13)$$

em que  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$  e  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Esta condição é imposta à fronteira de  $\Omega_0$  situada no infinito de modo que a parte da solução relacionada à onda que se aproxima seja suprimida. Por exigir que a condição seja aplicada a uma distância infinita do espalhador, a condição de radiação de Sommerfeld não é de uso prático e quando aplicada de forma aproximada, produz valores de baixa exatidão, sendo muitas vezes considerada a condição de radiação de menor ordem [3].

Para a solução prática de problemas abertos, entretanto, é desejável que o domínio seja truncado. Esse processo equivale a deslocar a fronteira de  $\Omega_0$  da sua posição original no infinito para uma posição mais próxima do domínio de interesse onde uma nova fronteira fictícia  $\Gamma$  é estabelecida. Aí deve-se também estabelecer condições que permitam encontrar uma solução única para o problema. Em se tratando de métodos numéricos de solução única, a imposição destas condições deve garantir também a estabilidade da aproximação [19].

Apesar de serem artificiais, espera-se que tais fronteiras e suas condições não afetem a solução do problema de forma que esta se aproxime daquela que seria obtida no espaço livre, caso fosse calculada. Particularmente, deseja-se minimizar qualquer efeito de reflexão causado pela fronteira artificial. Estas condições são conhecidas como condições de contorno absorventes ou ABCs.

Diversos tipos de condição de contorno absorventes são aplicáveis sobre as fronteiras artificiais. Porém, devido ao fato de serem globais, tais condições acoplam informações do campo ao redor de toda a fronteira [22].

Assim, outras condições absorventes foram propostas para a utilização em fronteiras posicionadas a distâncias finitas da região de interesse, dentre elas as famílias de condições de Engquist-Majda [20] e de Bayliss-Turkel [21].

### 2.4.1 Condições absorventes de Engquist-Majda

As condições de Engquist-Majda são consideradas um caso especial das condições absorventes para fronteiras planas [3]. Para obtê-las, considera-se, inicialmente, uma onda plana que se propaga num meio ilimitado cuja representação matemática pode ser dada pela Equação 2.14:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-jk_0(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)}, \quad (2.14)$$

onde  $E_0$  é constante e  $\theta_i$  é o ângulo de incidência da onda na fronteira. A derivada de  $\mathbf{E}$  em relação a  $x$  resulta em:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = -jk_0 \mathbf{E} \cos(\theta_i). \quad (2.15)$$

A relação expressa na Equação 2.15 é considerada uma condição de contorno exata que proporciona absorção perfeita para uma onda plana que incide na fronteira com ângulo  $\theta_i$ . No entanto, esta condição não pode ser usada na solução numérica de problemas genéricos, principalmente porque o ângulo de incidência normalmente não é conhecido [3].

Uma vez que uma onda qualquer pode ser decomposta em diversas ondas planas viajando em diversas direções que, por sua vez, são percebidas por um ponto na fronteira artificial, conclui-se então que a condição nesta fronteira deve ser independente do ângulo de incidência. Fazendo  $\theta_i = 0$  na Equação 2.15, obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \approx -jk_0 \mathbf{E}, \quad (2.16)$$

que é a condição absorvente de primeira ordem cujo coeficiente de reflexão associado é [3]:

$$R = \frac{\cos \theta_i - 1}{\cos \theta_i + 1}. \quad (2.17)$$

Uma condição melhor pode ser obtida fazendo-se  $k_0 = \sqrt{k_0^2 - k_y^2}$  na Equação 2.18.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = -j\sqrt{k_0^2 - k_y^2} \mathbf{E} = -j\sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2} \mathbf{E}. \quad (2.18)$$

A expansão do radical em série de Taylor é possível uma vez que  $(k_y^2/k_0^2) < 1$ . Mantendo-se os dois primeiros termos da expansão, obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \approx -jk_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{k_y}{k_0} \right)^2 \right] \mathbf{E} = -jk_0 \mathbf{E} + \frac{j}{2k_0} k_y^2 \mathbf{E}. \quad (2.19)$$

Mas,  $\partial^2 \mathbf{E} / \partial y^2 = -k_y^2 \mathbf{E}$ , então:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -jk_0 \mathbf{E} - \frac{j}{2k_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} \quad (2.20)$$

é a condição absorvente de segunda ordem associada ao coeficiente de reflexão dado por:

$$R = \frac{\cos \theta_i + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \theta_i - 1}{\cos \theta_i - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \theta_i + 1}. \quad (2.21)$$

Os coeficientes de reflexão (em módulo) para as condições de primeira e segunda ordem são mostrados na Figura 2.3.

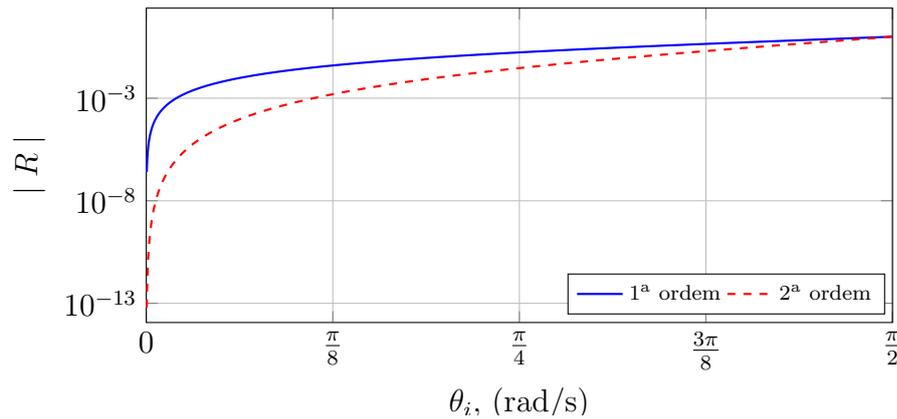


Figura 2.3 – Coeficiente de reflexão associado às condições de Engquist-Majda de primeira e segunda ordem.

Fonte: Adaptado de [3].

Em ambos os casos, nota-se que as condições são totalmente absorventes para um ângulo de incidência nulo. Porém, o coeficiente de reflexão aumenta com  $\theta_i$  até chegar a 1 (que corresponde à condição de reflexão total) quando  $\theta_i = \pi/2$ . Assim, visando à redução do erro introduzido pela reflexão em ângulos próximos de  $\pi/2$ , a fronteira deve ser posicionada a uma distância tal do espalhador que a maior parte das ondas incidam na fronteira em direções praticamente normais [3].

Ainda na Figura 2.3, observa-se que a condição de segunda ordem resulta em reflexões bem menores para uma faixa maior de valores do ângulo de incidência, quando comparada à condição de primeira ordem. Isto implica que uma fronteira absorvente submetida a essa condição pode ser colocada em posição significativamente mais próxima do espalhador.

A condição absorvente de segunda ordem pode ser generalizada a partir da introdução dos parâmetros  $p_0$  e  $p_2$  na Equação 2.19, resultando em [37, 3]:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -jk_0 p_0 E + \frac{jp_2}{2k_0} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}, \quad (2.22)$$

com o seguinte coeficiente de reflexão associado:

$$R = \frac{\cos \theta_i - p_0 - p_2 \sin^2 \theta_i}{\cos \theta_i + p_0 + p_2 \sin^2 \theta_i}. \quad (2.23)$$

A Tabela 2.1 lista valores típicos para estes parâmetros e os ângulos para perfeita absorção, e a Figura 2.4 mostra o comportamento do coeficiente de reflexão utilizando-se os parâmetros dos tipos A, B e C na condição de segunda ordem generalizada.

Tabela 2.1 – Coeficientes para a condição absorvente de segunda ordem generalizada.

Tipo	$p_0$	$p_2$	$\theta_i$ (rad/s)
A	1,00000	-0,50000	0,0
B	1,00023	-0,51555	0,133 e 0,326
C	1,03084	-0,73631	0,386 e 1,124

Fonte: Adaptado de [3].

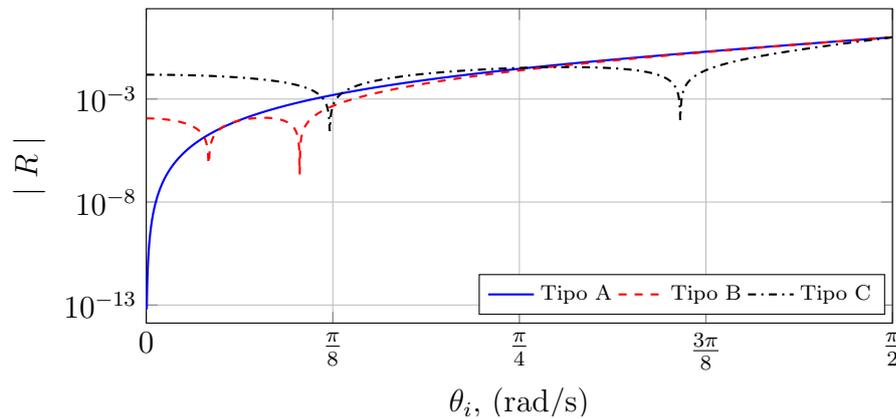


Figura 2.4 – Coeficiente de reflexão associado a condição de contorno absorvente de segunda ordem.

Fonte: Adaptado de [3].

Os parâmetros  $p_0$  e  $p_2$  permitem deslocar o ângulo de absorção perfeita para posições diferentes da de incidência normal. Os parâmetros referentes ao Tipo C, por exemplo, permitem reduzir o coeficiente de reflexão a valores significativamente baixos para um ângulo de incidência próximo de  $3\pi/8$  rad/s.

### 2.4.2 Condições absorventes de Bayliss-Turkel

As condições de contorno obtidas na subseção 2.4.1 são adequadas para uso em fronteiras planas. Podem, também, ser utilizadas em fronteiras curvas, caso em que a precisão será levemente degradada, já que a formulação não leva em consideração o efeito da curvatura. Uma condição de contorno absorvente passível de ser utilizada em fronteiras curvas pode ser obtida a partir da representação assintótica da equação do campo elétrico (em coordenadas cilíndricas), conforme mostrado na Equação 2.24 [22, 3].

$$E_z^s \approx \frac{e^{-jk_0\rho}}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(\phi)}{\rho^n} \approx \frac{e^{-jk_0\rho}}{\sqrt{\rho}} \left( E_o(\phi) + \frac{E_1(\phi)}{\rho} + \frac{E_2(\phi)}{\rho^2} + \frac{E_3(\phi)}{\rho^3} + \dots \right), \quad (2.24)$$

sendo o campo elétrico dado apenas em função da coordenada angular  $\phi$ .

Esta expansão – conhecida como a expansão de Wilcox para a equação da onda – é válida para grandes valores de  $\rho$  e, conforme  $\rho \rightarrow \infty$ , satisfaz a condição de radiação de Sommerfeld. Entretanto, impor tal condição a um  $\rho$  finito, leva a solução resultante a concordar apenas com o primeiro termo da expansão na Equação 2.24, o que significa que ainda haverá um resíduo que provocará reflexões não físicas da onda que se distancia do espalhador.

Bayliss e Turkel [21] observaram que o termo de maior ordem que aparece no resíduo é igual ao primeiro termo na expansão da Equação 2.24 e então propuseram uma família de condições que garante a concordância do campo espalhado com qualquer número de termos da expansão. Assim, desprezando-se os termo de ordem  $O(\rho^{-5/2})$  ou superior, a condição absorvente de Bayliss-Turkel de primeira ordem pode ser escrita como:

$$\left( jk_0 + \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{2\rho} \right) E_z^s = 0. \quad (2.25)$$

Raciocínio semelhante pode ser utilizado para obter a condição absorvente de Bayliss-Turkel de segunda ordem, desta vez desprezando-se os termos de ordem  $O(\rho^{-9/2})$  ou superior [22]:

$$\left( jk_0 + \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{5}{2\rho} \right) \left( jk_0 + \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{2\rho} \right) E_z^s = 0. \quad (2.26)$$

De forma geral, a condição de Bayliss-Turkel de  $n$ -ésima ordem garante que a solução concorde com os  $2n$  termos da expansão assintótica da Equação 2.24 e elimina reflexões provocadas pela fronteira artificial até os termos de ordem  $O(\rho^{-2n-1/2})$ .

Usando a equação de Helmholtz na sua forma escalar em coordenadas cilíndricas, a condição de Bayliss-Turkel de primeira ordem (Equação 2.25) pode ser rescrita como

$$\alpha_1 \frac{\partial E_z^s}{\partial \rho} = q - \gamma E_z^s, \quad (2.27)$$

onde  $q$  e  $\gamma$  são definidos como:

$$\gamma = \alpha_1 \left[ jk_0 + \frac{1}{2\rho} \right], \quad q = \alpha_1 \frac{\partial E_z^s}{\partial \rho} + \alpha_1 \left[ jk_0 + \frac{1}{2\rho} \right] E_z^s. \quad (2.28)$$

Semelhantemente, a condição de Bayliss-Turkel de segunda ordem – Equação 2.26 – pode ser reescrita como [22]:

$$\frac{\partial E_z^s}{\partial \rho} = \alpha(\rho) E_z^s + \beta(\rho) \frac{\partial^2 E_z^s}{\partial \phi^2}, \quad (2.29)$$

onde  $\alpha(\rho)$  e  $\beta(\rho)$  são definidos como:

$$\alpha(\rho) = \frac{-jk_0 - 3/2\rho + j3/8k_0\rho^2}{1 - j/k_0\rho}, \quad \beta(\rho) = \frac{-j/2k_0\rho^2}{1 - j/k_0\rho}. \quad (2.30)$$

A menos que  $\rho \rightarrow \infty$ , as equações (2.27) e (2.29) são apenas aproximações, embora, em alguns casos, seja possível obter soluções de precisão razoável mesmo para fronteiras próximas ao espalhador [22].

## 2.5 Considerações finais

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática geral e em duas dimensões para o problema do espalhamento eletromagnético.

Objetivando encontrar uma formulação que apresentasse exigências mais fracas na admissão de soluções, foi deduzida a equação conhecida como formulação fraca. Esta é, portanto, adequada à solução do problema por métodos numéricos.

Após a análise do domínio de solução – que, a princípio, é infinito – conclui-se que é necessário incluir uma fronteira artificial que o torne limitado, e então determinar sobre esta fronteira condições de contorno específicas, chamadas de condições absorventes, que anulem a influência da fronteira na solução do problema. As condições de Bayliss-Turkel e de Engquist-Majda são apresentadas, assim como o desempenho dessas condições para diversos ângulos de incidência.

---

## Perfectly Matched Layers

### 3.1 Introdução

Neste capítulo analisa-se a técnica PML para a limitação de domínios. Inicialmente introduzem-se os conceitos fundamentais e alguns marcos históricos envolvidos no desenvolvimento da PML e de algumas de suas variantes. A PML de Berenger e suas características principais são apresentadas. Segue-se o equacionamento matemático, tomando como base a análise da incidência (inicialmente normal e depois oblíqua) de ondas planas. A formulação *split-field* é apresentada.

Em seguida o conceito da PML uniaxial é apresentado, bem como a sua formulação matemática. O coeficiente de reflexão do meio UPML é deduzido e a formulação dos parâmetros é apresentada. Os conceitos, análises e formulações abordados no presente capítulo são, por fim, sinteticamente reapresentados.

### 3.2 Definição de PML

Desde que foram inicialmente propostas, as condições de contorno absorventes tem sido amplamente utilizadas em conjunto com diversas técnicas numéricas, inclusive sem malha [18], na solução de problemas de eletromagnetismo.

No entanto, nenhuma dessas condições simulam o espaço livre de forma perfeita; a absorção completa dos campos com reflexão desprezível ocorre apenas em casos particulares como, por exemplo, um onda plana incidindo perpendicularmente na fronteira entre dois meios. Estas características limitam a precisão alcançada pelas soluções obtidas com o uso das ABCs [23].

Uma nova técnica de truncamento de domínio capaz de simular o espaço livre foi

desenvolvida e apresentada por Berenger em 1994 para a solução numérica de problemas abertos, inicialmente com o método FDTD. Conhecida como camadas perfeitamente casadas ou *Perfect Matched Layers* (PML), essa técnica se baseia no uso de uma camada absorvente especialmente projetada para absorver ondas eletromagnéticas sem provocar qualquer reflexão. É também capaz de absorver ondas planas em qualquer ângulo de incidência e com polarização e frequência arbitrárias [23].

Outro resultado importante que decorre dessa proposta é que a PML pode ser utilizada para terminar domínios formados por meios não homogêneos, dispersivos, anisotrópicos e até mesmo não lineares, algo até então impossível de ser alcançado quando se utilizava ABCs derivadas analiticamente [4].

### 3.3 A PML de Berenger

A PML de Berenger, na forma como foi concebida inicialmente, consiste na modificação das equações de Maxwell em que cada componente vetorial de campo é dividida em duas componentes ortogonais [23], resultando em um conjunto de 12 equações diferenciais de primeira ordem acopladas. Por esse motivo, a abordagem de Berenger é conhecida como PML *split-field*.

#### 3.3.1 Incidência de onda plana num meio com perdas

Visando ao estabelecimento dos fundamentos para a discussão da PML, passa-se a revisar os conceitos relacionados à incidência de uma onda plana sobre um material com perdas em um ângulo  $\theta_i$  qualquer, em relação ao eixo  $x$ . Considera-se, especificamente, o caso de uma onda  $TM^z$  viajando na Região 1, o semiespaço  $x < 0$  sem perdas, em direção a Região 2, o semiespaço  $x > 0$  cujo meio exibe perdas relacionadas a uma condutividade elétrica  $\sigma_2$  e uma condutividade magnética  $\sigma_2^*$ , conforme a ilustração da Figura 3.1. O campo elétrico incidente é dado por [4]:

$$\mathbf{E}^i = E_0 e^{-jk_x x} \hat{\mathbf{a}}_z. \quad (3.1)$$

Então, os campos totais na Região 1 são dados por:

$$\mathbf{E}_1 = \left[ E_0 (1 + R^{TM}) e^{-jk_x x} \right] \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{H}_1 = \left[ -\hat{\mathbf{a}}_x \frac{k_{1y}}{\omega \epsilon_1} (1 + R^{TM} e^{2jk_{1x} x}) - \hat{\mathbf{a}}_y \frac{k_{1x}}{\omega \epsilon_1} (1 - R^{TM} e^{2jk_{1x} x}) \right] E_0 e^{-jk_{1x} x - jk_{1y} y} \quad (3.2b)$$

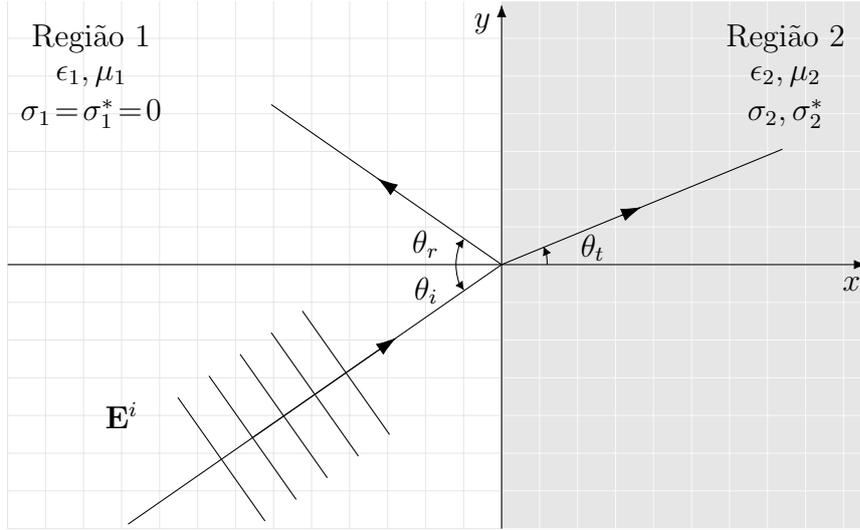


Figura 3.1 – Uma onda plana  $TM^z$  viajando no espaço livre (Região 1) incide num semiespaço formado por material com perdas (Região 2).

Fonte: Adaptado de [4].

Os campos transmitidos para a Região 2, por sua vez, são dados por:

$$\mathbf{E}_2 = \left[ E_0 T^{TM} e^{-jk_{2x}x - k_{2y}y} \right] \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{H}_2 = \left[ -\hat{\mathbf{a}}_x \frac{k_{2y}}{\omega\epsilon_1 \left(1 + \frac{\sigma_2}{j\omega\epsilon_2}\right)} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{k_{2x}}{\omega\epsilon_2 \left(1 + \frac{\sigma_2}{j\omega\epsilon_2}\right)} \right] E_0 T^{TM} e^{-jk_{2x}x - jk_{2y}y} \quad (3.3b)$$

$R^{TM}$  e  $T^{TM}$  são, respectivamente, os coeficientes de reflexão e transmissão do campo elétrico para a polarização  $TM$  e:

$$k_{1x} = k_1 \cos \theta; \quad k_{1y} = k_1 \sin \theta \quad \left. \vphantom{k_{1x}} \right\} \quad x < 0, \quad (3.4a)$$

$$k_{2x} = \sqrt{(k_2)^2 \left(1 - \frac{\sigma_2}{j\omega\epsilon_2}\right) \left(1 - \frac{\sigma_2^*}{j\omega\mu_2}\right) - (k_{2y})^2} \quad \left. \vphantom{k_{2x}} \right\} \quad x > 0, \quad (3.4b)$$

onde  $k_i = \omega\sqrt{\mu_i\epsilon_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Aplicando as condições de continuidade aos campos tangenciais na fronteira em  $x = 0$  leva a  $k_{2y} = k_{1y} = \sin\theta_i$ , além de:

$$R^{TM} = \left[ \frac{k_{1x}}{\omega\epsilon_1} - \frac{k_{2x}}{\omega\epsilon_2(1 + \sigma_2/j\omega\epsilon_2)} \right] / \left[ \frac{k_{1x}}{\omega\epsilon_1} + \frac{k_{2x}}{\omega\epsilon_2(1 + \sigma_2/j\omega\epsilon_2)} \right], \quad T^{TM} = 1 + R^{TM}. \quad (3.5)$$

No caso mais geral,  $R^{TM} \neq 0$  para um ângulo de incidência  $\theta_i$  qualquer. Entretanto, para o caso especial em que a onda incide com  $\theta_i = 0$ , tem-se:

$$R^{TM} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}, \quad (3.6)$$

onde as impedâncias características  $\eta_1$  e  $\eta_2$  das regiões 1 e 2 são dadas por:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \quad , \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2(1 + \sigma_2^*/j\omega\mu_2)}{\epsilon_2(1 + \sigma_2/j\omega\epsilon_2)}} \quad (3.7)$$

Portanto, definindo-se  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  e  $\mu_1 = \mu_2$ , e aplicando-se a condição:

$$\sigma_2^*/\mu_1 = \sigma_2/\epsilon_1 \quad \rightarrow \quad \sigma_2^* = \sigma_2\mu_1/\epsilon_1 = \sigma_2(\eta_1)^2, \quad (3.8)$$

resulta em  $k_1 = k_2$  e  $\eta_1 = \eta_2$ . Isso leva a  $R^{TM} = 0$ , ou seja, a fronteira entre as regiões 1 e 2 não provoca nenhuma reflexão para ondas normalmente incidentes. Da Equação 3.4b, obtém-se para esse caso [4]:

$$k_{2x} = \left(1 + \frac{\sigma_2}{j\omega\epsilon_1}\right) k_1 = k_1 - j\sigma_2\eta_1, \quad (3.9)$$

e os campos transmitidos na região 2 são dados por:

$$\mathbf{H}_2 = \eta_1 E_0 e^{-jk_1 x} e^{-\sigma_2 \eta_1 x} \hat{\mathbf{a}}_y, \quad \mathbf{E}_2 = H_0 e^{-jk_1 x} e^{-\sigma_2 \eta_1 x} \hat{\mathbf{a}}_z. \quad (3.10)$$

Nota-se que, para o caso da incidência normal, a onda transmitida para a Região 2 atenua exponencialmente ao longo da direção normal à interface entre as regiões. Nota-se ainda que, mesmo se propagando em um meio com perdas, a onda transmitida é não-dispersiva, ou seja, sua velocidade não depende da frequência. Portanto, o material do semi-espaço da Região 2 cujas características são definidas a partir da condição da Equação 3.8, está perfeitamente casado com a Região 1 para incidência normal [4].

### 3.3.2 Incidência de onda plana no meio PML de Berenger

O meio sem perdas discutido na subseção 3.3.1 poderia ser utilizado com algum sucesso como meio absorvente para terminar fronteiras externas de domínios computacionais [4]. A principal dificuldade reside no fato de que o meio absorvente é casado com o meio adjacente de que é composto, por exemplo, o domínio computacional analisado por alguma técnica numérica, apenas para incidências normais. Ondas que incidam obliquamente são parcialmente refletidas para o domínio computacional corrompendo a solução. Assim, esse absorvedor não se mostra útil para a maior parte dos problemas de interesse prático.

O trabalho de Berenger trouxe a ideia inicial de que um absorvedor não físico pudesse ser projetado de tal modo que casasse como o meio do domínio independentemente da frequência e do ângulo de incidência da onda incidente. Isso pode ser feito a partir da

exploração de outros graus de liberdade que surgiram de uma nova estratégia de divisão de campos (*field-splitting*, na expressão original em inglês), e levou à construção do que hoje é conhecido como uma camada perfeitamente casada, adjacente à fronteira externa do domínio para a absorção de todas as ondas incidentes. Berenger obteve reflexões locais extremamente baixas, comparadas àquelas observadas ao se utilizar condições absorventes analíticas [23, 4].

Segue-se uma revisão da base teórica do meio PML de Berenger para o caso de uma onda plana incidente sobre um semi-espaco formado por esse meio, para o caso da polarização  $TM^z$  em duas dimensões.

### 3.3.3 Modificando as Equações de Maxwell por divisão de campos

Considera-se novamente o caso de uma onda plana  $TM^z$  incidindo sobre a interface plana  $x = 0$  da Região 2 do semiespaço. Dentro dessa região, as Equações de Maxwell conforme modificadas por Berenger são expressas na forma temporal como [23]:

$$\mu_2 \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma_y^* H_x = -\frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (3.11a)$$

$$\mu_2 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma_x^* H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (3.11b)$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad (3.11c)$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (3.11d)$$

Aqui assume-se  $E_z$  dividido em duas subcomponentes, ou seja  $E_z = E_{zx} + E_{zy}$ . Adicionalmente, os parâmetros  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  representam condutividades elétricas enquanto  $\sigma_x^*$  e  $\sigma_y^*$  representam perdas magnéticas no meio da Região 2 nas direções  $x, y$ . O índice 2 foi aqui suprimido com vistas à simplificação da notação, já que na Região 1 estas perdas são nulas.

Essa formulação pode ser entendida como uma generalização da modelagem tradicional dos meios físicos já, que se  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  e  $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$ , as equações (3.11a)–(3.11d) se reduzem às equações de Maxwell para um meio sem perdas, e se  $\sigma_x = \sigma_y \neq 0$  e  $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$ , o meio descrito é um condutor elétrico. Se, por outro lado,  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\sigma_x = \sigma_y \neq 0$ ,  $\sigma_x^* = \sigma_y^* \neq 0$  e a condição na Equação 3.8 é satisfeita, e as equações (3.11a)–(3.11d) descrevem um meio absorvente cuja impedância é casada com a impedância do meio da Região 1 para ondas planas com incidência normal, conforme discutido anteriormente. Há ainda outras possibilidades. Se  $\sigma_y = \sigma_y^* = 0$  então o meio pode absorver ondas planas com componentes  $(H_y, E_{zx})$  propagando-se ao longo de  $x$ , porém não absorve um onda com as

componentes  $(H_x, E_{zy})$  propagando-se ao longo de  $y$ , pois o primeiro caso de propagação é governado pelas equações (3.11b),(3.11c) e o segundo, pelas equações (3.11a), (3.11d). A situação inversa para ondas  $(H_y, E_{zx})$  e  $(H_x, E_{zy})$  se  $\sigma_x = \sigma_x^* = 0$  também é verdadeira [4].

Estas propriedades do meio de Berenger caracterizado pelos conjuntos de parâmetros  $(\sigma_x, \sigma_x^*, 0, 0)$  e  $(0, 0, \sigma_y, \sigma_y^*)$  estão intimamente relacionadas à premissa fundamental da PML, ou seja, se os pares de perdas elétrica e magnética satisfazem a Equação 3.8 então, nas interfaces perpendiculares a  $x$  e a  $y$ , respectivamente, o meio de Berenger tem reflexão zero de ondas eletromagnéticas. Considera-se agora as equações (3.11a)-(3.11d) no meio de Berenger na forma harmônica temporal.

$$j\omega\mu_2 \left(1 + \frac{\sigma_y^*}{j\omega\mu_2}\right) H_x = -\frac{\partial}{\partial y} (E_{zx} + E_{zy}), \quad (3.12a)$$

$$j\omega\mu_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^*}{j\omega\mu_2}\right) H_y = \frac{\partial}{\partial x} (E_{zx} + E_{zy}), \quad (3.12b)$$

$$j\omega\epsilon_2 \left(1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_2}\right) E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad (3.12c)$$

$$j\omega\epsilon_2 \left(1 + \frac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_2}\right) E_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (3.12d)$$

A notação das equações (3.12a)-(3.12d) pode ser simplificada introduzindo-se as variáveis  $s_\xi$  e  $s_\xi^*$ , em que  $\xi = x, y$ , de acordo com a seguinte definição:

$$s_\xi = \left(1 + \frac{\sigma_\xi}{j\omega\epsilon_2}\right), \quad s_\xi^* = \left(1 + \frac{\sigma_\xi^*}{j\omega\mu_2}\right). \quad (3.13)$$

Então, as equações (3.12a)-(3.12d) podem ser rescritas como:

$$j\omega\mu_2 s_y^* H_x = -\frac{\partial}{\partial y} (E_{zx} + E_{zy}), \quad (3.14a)$$

$$j\omega\mu_2 s_x^* H_y = \frac{\partial}{\partial x} (E_{zx} + E_{zy}), \quad (3.14b)$$

$$j\omega\epsilon_2 s_x E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad (3.14c)$$

$$j\omega\epsilon_2 s_y E_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (3.14d)$$

### 3.3.4 Solução da equação da onda plana no meio de Berenger

Obtém-se agora a solução da equação de uma onda plana viajando no interior do meio de Berenger. Inicialmente, deriva-se (3.14a) em relação  $y$  e (3.14b) em relação  $x$ . Substitui-se então as expressões de  $\partial H_y/\partial x$  e  $\partial H_x/\partial y$  pelas suas definições em (3.14c) e (3.14d), resultando em [4]:

$$\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 E_{zy} = -\frac{1}{s_y^*} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} (E_{zx} + E_{zy}), \quad (3.15a)$$

$$-\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 E_{zx} = \frac{1}{s_x^*} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} (E_{zx} + E_{zy}). \quad (3.15b)$$

Somando-se (3.15a) e (3.15b), e aplicando-se a relação  $E_z = E_{zx} + E_{zy}$ , a equação de onda resultante é dada por:

$$\frac{1}{s_x^*} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} E_z + \frac{1}{s_y^*} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} E_z + \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 E_z = 0. \quad (3.16)$$

Esta equação de onda suporta soluções como as definidas na subseção A.II.1, ou seja:

$$E_z = E_0 e^{-j\sqrt{s_x s_x^*} k_{2x} x}, \quad (3.17)$$

com a seguinte relação de dispersão:

$$(k_{2x})^2 + (k_{2y})^2 = (k)^2 \quad \leftarrow \quad k_{2x} = \left[ (k)^2 - (k_{2y})^2 \right]^{1/2}. \quad (3.18)$$

Note-se que, apesar da divisão dos campos, a continuidade das componentes tangenciais dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  devem ser preservadas ao longo da interface  $x = 0$ . Para garantir tal condição, faz-se  $s_y = s_y^* = 1$  ou, de forma equivalente,  $\sigma_y = \sigma_y^* = 0$ , o que leva à condição de casamento de fase  $k_{2y} = k_{1y} = k_1 \sin \theta_i$ . Adicionalmente, derivam-se os coeficientes de reflexão e transmissão do campo  $\mathbf{E}$  [4]:

$$R^{TM} = \left( \frac{k_{1x}}{\omega \epsilon_1} - \frac{k_{2x}}{\omega \epsilon_2} \sqrt{\frac{s_x^*}{s_x}} \right) \left( \frac{k_{1x}}{\omega \epsilon_1} + \frac{k_{2x}}{\omega \epsilon_2} \sqrt{\frac{s_x^*}{s_x}} \right)^{-1}; \quad T^{TM} = R^{TM} + 1. \quad (3.19)$$

Agora, assume-se  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$  e  $s_x = s_x^*$ , o que é equivalente a  $k_1 = k_2$ ,  $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$  e  $\sigma_x^*/\epsilon_1 = \sigma_x/\mu_1$  (ou seja,  $\sigma_x$  e  $\sigma_x^*$  satisfazem à Equação 3.8). Com  $k_{2y} = k_{1y}$ , (3.18) se torna  $k_{2x} = k_{1x}$ .

Substituindo-se essas relações na Equação 3.19, obtém-se a condição de reflexão nula  $R^{TM} = 0$  para todos os valores do ângulo de incidência  $\theta$ . Para esse caso, o campo elétrico transmitido para o interior do meio de Berenger,  $x > 0$ , é:

$$E_z = E_0 e^{-js_x k_{1x} x - jk_{1y} y} = E_0 e^{-jk_{1x} x - jk_{1y} y} e^{-\sigma_x x \eta_1 \cos \theta} \quad (3.20)$$

Assim, dentro do meio de Berenger casado, a onda transmitida se propaga com as mesmas velocidade e direção da onda incidente, sofrendo simultaneamente decaimento exponencial ao longo do eixo  $x$ , perpendicular à interface entre as Regiões 1 e 2. Nota-se também que o fator de atenuação  $\sigma_x x \eta_1 \cos \theta_i$  independe da frequência. Diferentemente do material com perdas considerado na subseção 3.3.1, essas características se aplicam a quaisquer ângulos de incidência; daí o sentido do termo “perfeitamente” presente no nome da técnica.

### 3.4 A PML Uniaxial

Após o trabalho inicial de Berenger, diversos trabalhos foram publicados, alguns validando a técnica, outros propondo modificações para melhorar o desempenho da PML com diferentes interpretações do conceito original da PML.

A PML *split-field* apresentada por Berenger é um meio hipotético baseado num modelo matemático e, assim como a abordagem de coordenadas estendidas, não correspondem a nenhum meio ou material físico. Devido ao fato de os termos relacionados às perdas dependerem fortemente das coordenadas, caso esse meio físico existisse, seria necessariamente anisotrópico.

Em 1996 Sacks *et. al* introduziram o conceito da PML como um meio anisotrópico uniaxial [25]. Chamado de PML uniaxial ou UPML, tal conceito é baseado numa formulação maxwelliana e não em um modelo puramente matemático, visto que, neste caso, o meio PML é análogo a qualquer outro material fisicamente realizável. Em razão dessas características, a utilização da UPML em conjunto com métodos numéricos baseados em formulações variacionais no domínio da frequência é natural, embora sua eficácia também tenha sido demonstrada quando utilizada com o método FDTD [33].

Um meio é dito anisotrópico quando suas características eletromagnéticas são diferentes em cada direção coordenada. Assim, propriedades como a permissividade e a permeabilidade não são mais representadas por escalares, mas por tensores. No caso mais geral,  $\bar{\bar{\epsilon}}_r$  e  $\bar{\bar{\mu}}_r$  são como na Equação 3.21:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

As equações de Maxwell (A.1a) e (A.1b) para um meio anisotrópico sem fontes podem então ser rescritas como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \bar{\mu} \mathbf{H} \quad (3.22a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \bar{\epsilon} \mathbf{E}, \quad (3.22b)$$

Um dos possíveis casos particulares de anisotropia ocorre quando o tensor tem a forma de uma matriz diagonal. As equações (3.22a) e (3.22b) para um meio diagonalmente anisotrópico podem ser então expandidas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = -j\omega \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (3.23a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = j\omega \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (3.23b)$$

### 3.4.1 Incidência de onda plana num meio anisotrópico

Segue-se uma introdução das bases teóricas para a formulação da PML uniaxial. Considera-se um onda plana de polarização qualquer no domínio harmônico temporal propagando-se na Região 1, o semiespaço isotrópico  $z < 0$  da Figura 3.2. Esta onda incide com ângulo  $\theta_i$  na Região 2, o semiespaço  $z > 0$  formado por um meio diagonalmente anisotrópico de características  $\bar{\epsilon}$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\sigma$  e  $\sigma^*$ .

A seguinte condição é necessária para o casamento da impedância intrínseca da Região 2 com o meio da Região 1, que é o espaço livre:

$$\frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0}, \quad (3.24)$$

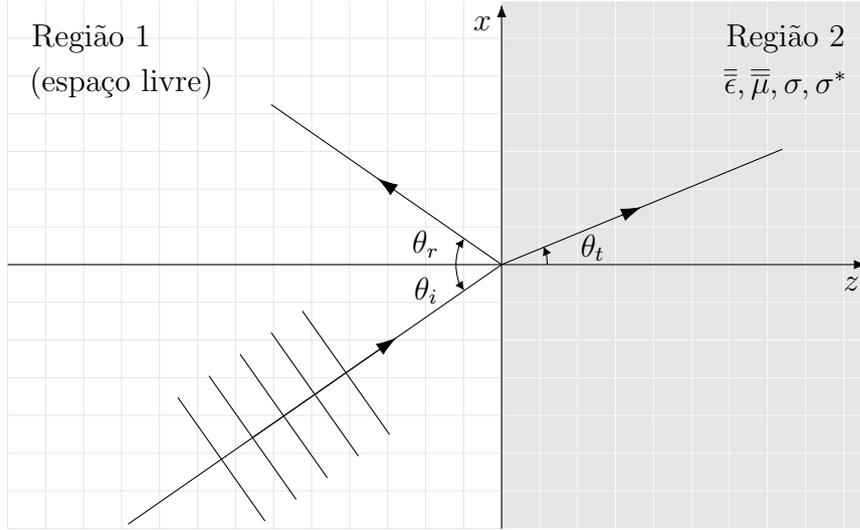


Figura 3.2 – Uma onda plana viajando no espaço livre (Região 1) incide num semiespaço diagonalmente anisotrópico (Região 2).

Fonte: Adaptado de [25].

e, portanto, os tensores  $\bar{\bar{\epsilon}}, \bar{\bar{\mu}}$  podem ser redefinidos genericamente para um meio diagonalmente anisotrópico como [25]:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_0 \bar{\bar{\Lambda}}, \quad \bar{\bar{\mu}} = \mu_0 \bar{\bar{\Lambda}}, \quad \bar{\bar{\Lambda}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Consequentemente, as equações (3.22a) e (3.22b) no meio da Região 2 ficam:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \bar{\bar{\Lambda}} \mathbf{H}, \quad (3.26a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 \bar{\bar{\Lambda}} \mathbf{E}. \quad (3.26b)$$

Pode-se demonstrar que ondas planas constituem soluções das equações de Maxwell no meio diagonalmente anisotrópico. Soluções gerais para  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  podem ser construídas a partir da combinação linear de ondas planas da forma [25]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}; t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}; t) = \mathbf{H}_0 e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.27b)$$

onde  $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{a}}_x + k_y \hat{\mathbf{a}}_y + k_z \hat{\mathbf{a}}_z$ ,  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{H}_0$  são vetores constantes. Substituindo-se (3.27) em

(3.26), obtém-se:

$$\mathbf{k} \cdot \bar{\bar{\Lambda}} \mathbf{E}_0 = \mathbf{k} \cdot \bar{\bar{\Lambda}} \mathbf{H}_0 = 0, \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{k} \times \bar{\bar{\Lambda}} \mathbf{E}_0 = \omega \mu_0 \bar{\bar{\Lambda}} \mathbf{H}_0, \quad (3.28b)$$

$$\mathbf{k} \times \bar{\bar{\Lambda}} \mathbf{H}_0 = -\omega \epsilon_0 \bar{\bar{\Lambda}} \mathbf{E}_0. \quad (3.28c)$$

Pode-se então calcular a relação de dispersão que determina a forma do vetor de propagação  $\mathbf{k}$ . Isto pode ser feito utilizando-se a seguinte mudança de variáveis [25]:

$$\mathbf{E}'_0 = \bar{\bar{\Lambda}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}_0, \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{H}'_0 = \bar{\bar{\Lambda}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}_0, \quad (3.29b)$$

$$\mathbf{k}'_0 = \frac{1}{\sqrt{abc}} \bar{\bar{\Lambda}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{k}. \quad (3.29c)$$

Aplicando as transformações de (3.29) a (3.27) resulta em:

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{E}'_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}'_0 = 0, \quad (3.30a)$$

$$\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0 = \omega \mu_0 \mathbf{H}'_0, \quad (3.30b)$$

$$\mathbf{k}' \times \mathbf{H}'_0 = -\omega \epsilon_0 \mathbf{E}'_0. \quad (3.30c)$$

Visto que  $\mathbf{k}$  é perpendicular a  $\mathbf{E}'_0$  e a  $\mathbf{H}'_0$ , pode-se obter a relação de dispersão dada por:

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0. \quad (3.31)$$

E, finalmente, utilizando a transformação inversa das variáveis em (3.29), a relação acima se torna:

$$\frac{k_x^2}{bc} + \frac{k_y^2}{ac} + \frac{k_z^2}{ab} = k_0^2. \quad (3.32)$$

A Equação 3.32 é a equação de um elipsoide cujas soluções são da forma:

$$k_x = k_0 \sqrt{bc} \sin \theta \cos \phi, \quad (3.33a)$$

$$k_y = k_0 \sqrt{ac} \sin \theta \sin \phi, \quad (3.33b)$$

$$k_z = k_0 \sqrt{ab} \cos \theta, \quad (3.33c)$$

o que sugere a manipulação das componentes do vetor de propagação  $\mathbf{k}$  a partir da escolha dos valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

### 3.4.2 Coeficiente de reflexão do meio anisotrópico

Passa-se agora à determinação do coeficiente de reflexão da interface mostrada na Figura 3.2 em que uma onda plana se propaga paralelamente ao plano  $xz$ . O vetor  $\mathbf{k}$ , portanto, tem as seguintes componentes:

$$k_x = k_0 \sqrt{bc} \sin \theta_i, \quad (3.34a)$$

$$k_y = 0, \quad (3.34b)$$

$$k_z = k_0 \sqrt{ab} \cos \theta_i. \quad (3.34c)$$

Uma onda plana de polarização arbitrária pode ser decomposta em um combinação linear de modos  $TE^y$  e  $TM^y$ . Para o caso  $TE^y$ , os campos incidentes, refletidos e transmitidos são [35, 25]:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-jk_0(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}, \quad (3.35a)$$

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = R^{TE} \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-jk_0(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}, \quad (3.35b)$$

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = T^{TE} \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-jk_0(\sqrt{bc} \sin \theta_t x + \sqrt{ab} \cos \theta_t z)}, \quad (3.35c)$$

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \eta_0 (-\cos \theta_i \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \theta_i \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-jk_0(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}, \quad (3.35d)$$

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{r}) = R^{TE} \eta_0 (\cos \theta_r \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \theta_r \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-jk_0(\sin \theta_r x + \cos \theta_r z)}, \quad (3.35e)$$

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{r}) = T^{TE} \eta_0 \left( -\sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t \hat{\mathbf{a}}_x + \sqrt{\frac{b}{c}} \sin \theta_t \hat{\mathbf{a}}_z \right) e^{-jk_0(\sqrt{bc} \sin \theta_t x + \sqrt{ab} \cos \theta_t z)}, \quad (3.35f)$$

onde  $R^{TE}$  e  $T^{TE}$  são, respectivamente, os coeficientes de reflexão e transmissão para a polarização  $TE^y$ . A imposição da condição de continuidade dos campos tangenciais  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  requer o casamento da magnitude e da fase das componentes  $E_{y-}$  e  $H_{x-}$ . O casamento da magnitude resulta em:

$$1 + R^{TE} = T^{TE}, \quad (3.36a)$$

$$\cos \theta_i - R^{TE} \cos \theta_i = T^{TE} \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t, \quad (3.36b)$$

enquanto o casamento da fase é uma generalização da lei de Snell, dada por [25]

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r, \quad (3.37a)$$

$$\sqrt{bc} \sin \theta_t = \sin \theta_i. \quad (3.37b)$$

Resolvendo as equações (3.36) e (3.37) para  $R^{TE}$ , resulta em:

$$R^{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t}. \quad (3.38)$$

Procedimento semelhante pode ser feito para a determinação de  $R^{TM}$ :

$$R^{TM} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t - \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t}. \quad (3.39)$$

Impor que  $\sqrt{bc} = 1$  simplifica a condição de casamento de fases. Uma vez que  $\theta_i = \theta_r$ , os coeficientes de reflexão não dependem do ângulo de incidência  $\theta_i$ . Impor também que  $a = b$ , faz a interface ser completamente irreflexiva para qualquer frequência, ângulo de incidência ou polarização. Note-se que a independência em relação à polarização fica evidente ao longo do capítulo: as deduções da PML de Berenger e da UPML são desenvolvidas a partir de diferentes configurações de incidência e polarização, mas chegam-se a resultados equivalentes, como já era esperado.

### 3.4.3 Propriedades do meio UPML

Os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  não são independentes; antes guardam entre si a relação:

$$a = b = \frac{1}{c}, \quad (3.40)$$

de tal forma que a camada PML possa ser caracterizada por um número complexo  $a = \alpha_u - j\beta_u$ . Quando  $\alpha_u, \beta_u > 0$ , então a onda transmitida para o meio anisotrópico da Região 2 será atenuada, como pode ser claramente observado aplicando-se a relação (3.40) à equação do campo elétrico transmitido (3.35c):

$$\mathbf{E}_t(x, z) = \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-k_0 \beta_u \cos \theta_t z} e^{-jk_0(\sin \theta_t x + \alpha_u \cos \theta_t z)} e^{j\omega t}. \quad (3.41)$$

Ao se analisar a Equação 3.41 pode-se perceber facilmente que  $\alpha_u$  determina o comprimento de onda dentro do absorvedor anisotrópico, enquanto  $\beta_u$  determina a taxa de atenuação da onda transmitida.

Importa agora determinar as características do material anisotrópico do meio UPML. Já que este é um meio com perdas, uma escolha natural para determinação dos tensores é  $a = \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0}\right)$  [23, 33]. O tensor  $\bar{\bar{\Lambda}}$  em (3.25) pode então ser redefinido de forma

mais geral, tendo em vista as variáveis introduzidas em (3.13), como:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \bar{\bar{\Lambda}}, \quad \bar{\mu} = \mu_0 \bar{\bar{\Lambda}}, \quad \bar{\bar{\Lambda}} = \begin{bmatrix} s_z & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & s_z^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Os tensores definidos Equação 3.42 são uniaxiais e descrevem as características do meio anisotrópico ao longo da direção  $z$  sendo, portanto, adequados ao caso de uma onda que incide em uma única fronteira plana. Entretanto, no caso de problemas abertos, o domínio precisará ser limitado em 4 ou 6 lados, dependendo se a análise é bi ou tridimensional, respectivamente [33]. Os tensores equivalentes nas direções  $x$  e  $y$ , são dados na Equação 3.43:

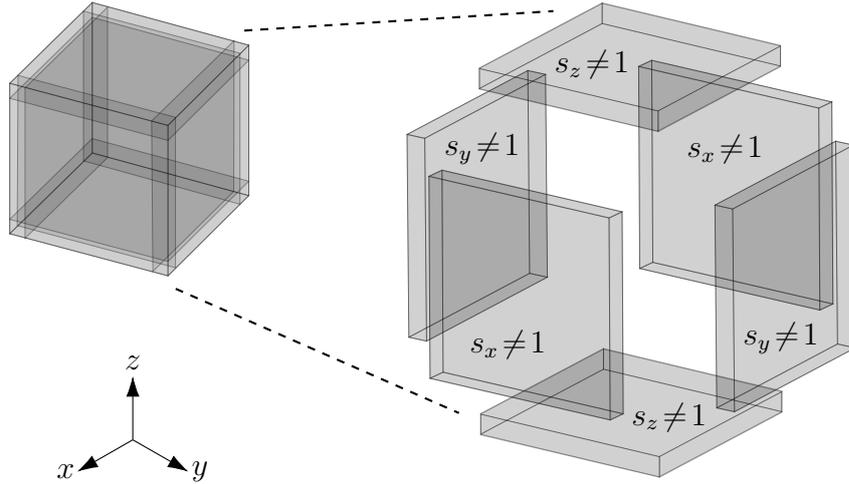
$$\bar{\bar{\Lambda}}_x = \begin{bmatrix} s_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\Lambda}}_y = \begin{bmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & s_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s_y \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Naturalmente, esses tensores podem ser combinados em um único tensor que represente as características do meio ao longo de duas ou três direções coordenadas, como mostrado na Equação 3.44 [33]:

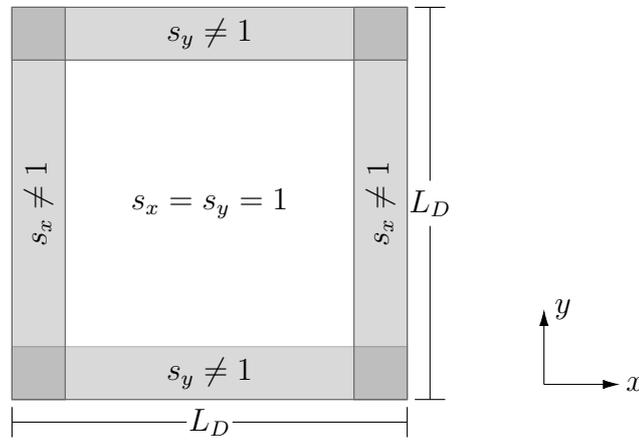
$$\bar{\bar{\Lambda}}_{xy} = \bar{\bar{\Lambda}}_x \cdot \bar{\bar{\Lambda}}_y = \begin{bmatrix} s_y/s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_x/s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_x s_y \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\Lambda}}_{xyz} = \bar{\bar{\Lambda}}_{xy} \cdot \bar{\bar{\Lambda}}_z = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_x s_z}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Um domínio tridimensional da forma de um prisma retangular limitado por uma região de UPML pode ser visto na Figura 3.3a. Em cada uma das camadas, valem as características do tensor relacionado ao eixo coordenado perpendicular à interface plana com o meio do domínio interior, e nas quinas valem as características combinadas das camadas sobrepostas. O caso análogo de um domínio bidimensional é mostrado na Figura 3.3b.

A incorporação da UPML nas Equações de Maxwell e na equação de onda é feita naturalmente e sem qualquer modificação nas suas formas, já que estas também são válidas para meios anisotrópicos. Basta que a permeabilidade e a permissividade escalares sejam substituídos pelos tensores equivalentes. Conseqüentemente, algoritmos numéricos necessitam sofrer alterações mínimas para utilizar a UPML.



(a) Domínio tridimensional.



(b) Domínio bidimensional.

Figura 3.3 – Domínios limitados por uma região de UPML em coordenadas retangulares. Em cada uma das camadas, valem as características do tensor referente ao eixo coordenado perpendicular à interface de incidência.

Fonte: Adaptado de [38].

A forma final das leis de Faraday e Ampère para um meio UPML é:

$$\nabla \times \mathbf{E} = k_0 \mu_0 \bar{\bar{\Lambda}} \mathbf{H}, \quad (3.45a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = k_0 \epsilon_0 \bar{\bar{\Lambda}} \mathbf{E}, \quad (3.45b)$$

enquanto a equação de Helmholtz para o campo elétrico, também no meio UPML é:

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{\mu}}_r^{-1} \nabla \mathbf{E}) - jk \bar{\bar{\epsilon}}_r \mathbf{E} = 0. \quad (3.46)$$

### 3.4.4 Cálculo dos parâmetros UPML

De forma similar à PML de Berenger, a propriedade irreflexiva da UPML na Região é válida para qualquer expressão de  $s_\xi$ . Escolhe-se, por exemplo,  $s_\xi = 1 + \frac{\sigma_\xi}{j\omega\epsilon_2} = 1 - \frac{j\sigma_\xi}{\omega\epsilon_2}$ ,

que constitui uma forma adequada para a inclusão das perdas elétricas e magnéticas.

Teoricamente, a transmissão de ondas ocorre sem reflexão através da interface UPML entre meios contínuos. No entanto, em qualquer representação discreta das equações de Maxwell artefatos numéricos surgem em função da discretização espacial finita. Conseqüentemente, implementar a UPML na forma de uma única descontinuidade de  $\sigma$  e  $\sigma^*$  pode levar a consideráveis reflexões espúrias na interface UPML [4].

Visando à redução do erro causado por estas reflexões, Berenger propôs que as perdas dentro da região de PML ao longo da direção normal à interface entre os meios fossem gradualmente aumentadas a partir de zero [23]. Adotar um valor não unitário e com variação gradual na parte real de  $s_\xi$  na Equação 3.13 também contribui neste sentido. Considera-se, para exemplo, uma onda plana viajando na direção  $+x$  atingindo a interface da região de UPML de largura  $L$ . Um perfil de gradação possível para  $\sigma_x(x)$  e para a parte real de  $s_x \kappa_x$  é o perfil polinomial:

$$\sigma_x(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^p \sigma_{max} \quad ; \quad \kappa_x(x) = 1 + (\kappa_{max} - 1) \left(\frac{x}{L}\right)^p, \quad (3.47)$$

em que  $p$  é o grau desejado da gradação polinomial e  $\sigma_{max}$ ,  $\kappa_{max}$  são os valores máximos dos parâmetros.

Isto faz o valor de  $\sigma_x$  aumentar de 0 na superfície da UPML para  $\sigma_{max}$  em  $x = L$ . De maneira similar, o parâmetro  $\kappa_x$  varia de 1 em  $x = 0$  a  $\kappa_{max}$  em  $x = d$ . Um valor alto para  $p$  resulta em uma distribuição de  $\sigma_x(x)$  mais suave perto da interface da UPML, mas à medida que o valor de  $x$  se aproxima de  $d$ , no entanto,  $\sigma_x(x)$  cresce mais rapidamente que para valores pequenos de  $p$ . Simulações em FDTD indicam que  $3 \leq p \leq 5$  conduzem a bons resultados [23, 33], enquanto  $1 \leq \kappa_{max} \leq 5$  [38]. Naturalmente, quando  $\kappa_{max} = 1$ ,  $\kappa_x$  é sempre unitário.

Uma abordagem híbrida pode ser utilizada, mantendo-se a gradação polinomial para  $\kappa_x$ , mas adotando um perfil senoidal para  $\sigma_x(x)$  [38]:

$$\sigma_x(x) = \sigma_{max} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi x}{2L}\right)^p. \quad (3.48)$$

As relações da Equação 3.49 permitem construir tensores que podem ser aplicados em todo o domínio computacional. Na região interior à UPML, o tensor de torna a matriz identidade enquanto na região da UPML, as características específicas são calculadas apropriadamente. Nota-se, novamente, que nas regiões de quinas 2 ou 3 coeficientes serão não unitários, nos casos de análises em 2 ou 3 dimensões, respectivamente. O tensor assim

definido não é mais estritamente uniaxial, mas a PML ainda é chamada uniaxial.

$$\kappa_x = \begin{cases} \kappa_x(x) & x_{min} \leq x \leq x_{max} \\ 1 & x < x_{min}; x > x_{max} \end{cases}; \quad \sigma_x = \begin{cases} \sigma_x(x) & x_{min} \leq x \leq x_{max} \\ 0 & x < x_{min}; x > x_{max} \end{cases} \quad (3.49a)$$

$$\kappa_y = \begin{cases} \kappa_y(y) & y_{min} \leq y \leq y_{max} \\ 1 & y < y_{min}; y > y_{max} \end{cases}; \quad \sigma_y = \begin{cases} \sigma_y(y) & y_{min} \leq y \leq y_{max} \\ 0 & y < y_{min}; y > y_{max} \end{cases} \quad (3.49b)$$

$$\kappa_z = \begin{cases} \kappa_z(z) & z_{min} \leq z \leq z_{max} \\ 1 & z < z_{min}; z > z_{max} \end{cases}; \quad \sigma_z = \begin{cases} \sigma_z(z) & z_{min} \leq z \leq z_{max} \\ 0 & z < z_{min}; z > z_{max} \end{cases}, \quad (3.49c)$$

em que  $\xi_{min}$  e  $\xi_{max}$  são os limites inferior e superior da região de UPML para cada uma das direções  $\xi = x, y, z$ , tais que a largura  $L$  da UPML seja dada por  $L = \xi_{max} - \xi_{min}$ .

Embora a utilização de perfis graduais diminua substancialmente os problemas de reflexões numéricas que surgem da discretização do domínio, o parâmetro  $\sigma_{max}$  desempenha um importante papel na implementação desta técnica, por estar relacionado à atenuação dos campos no interior da UPML e, principalmente, à taxa de reflexões na interface com o meio interior. Considerando ainda que a região de PML é uma extensão do domínio computacional, permanece a necessidade de terminar este domínio com uma fronteira exterior. Naturalmente que, uma vez que se espera a completa extinção dos campos viajantes na região da PML, os requisitos para tal limitação são menores. Pode-se, por exemplo, utilizar como fronteira uma camada de PEC (*Perfect Electric Conductor*, condutor elétrico perfeito) que, reffetirá ao domínio computacional quaisquer ondas que nela incidam. Para o exemplo da onda plana viajando na direção  $+x$ , se for usado um perfil de gradação  $\sigma(x)$ , o coeficiente de reflexão para um ângulo de incidência  $\theta_i$  é dado por [33, 4]:

$$R_{UPML}(\theta_i) = e^{-2\eta_0\theta_i \int_0^L \sigma_x(x)dx} \quad (3.50)$$

O cálculo de  $\sigma_{max}$  é feito considerando-se o pior caso de incidência  $\theta_i = 0$ . Atribui-se então o valor desejado para coeficiente de reflexão  $R_{UPML}(0)$  e substitui-se o perfil de gradação para  $\sigma_x$  na integral em (3.50). Para o perfil polinomial [33, 4]:

$$\sigma_{max} = -\frac{(p+1)\ln[R_{UPML}(0)]}{2\eta_0 L}. \quad (3.51)$$

Naturalmente que a mesma abordagem pode ser usada para se calcular  $\sigma_{max}$  para outros perfis de gradação, como o senoidal da Equação 3.48.

### 3.5 Incorporação da UPML à forma fraca

Conforme discutido ao longo das seções anteriores e, de forma mais específica, na subseção 3.4.3, a aplicação da UPML às equações de Maxwell é direta, sem a necessidade de qualquer modificação, já que o caso de campos eletromagnéticos interagindo com um meio anisotrópico é apenas um dos casos em que tais equações são perfeitamente aplicáveis. O mesmo vale para a equação da onda eletromagnética que, como visto, constitui a forma forte para o problema do espalhamento. Segue-se que a incorporação da UPML à forma fraca também ocorre naturalmente, bastando apenas substituir  $\epsilon$  e  $\mu$  pelos termos equivalentes do tensor  $\bar{\bar{\Lambda}}$ , em procedimento análogo ao adotado para as equações de Maxwell e para a equação de Helmholtz. A forma fraca para a solução do espalhamento utilizando-se UPML é:

$$\int_{\Omega} \left[ (\bar{\bar{\mu}}^{-1} \nabla E_z) \cdot \nabla w - k^2 \bar{\bar{\epsilon}} E_z w \right] d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = 0, \quad (3.52)$$

em que  $\bar{\bar{\mu}}$  e  $\bar{\bar{\epsilon}}$  são os tensores definidos em (3.42) e  $k$  é o número de onda, agora calculado de acordo com  $\bar{\bar{\mu}}$  e  $\bar{\bar{\epsilon}}$ .

Uma análise da forma fraca conforme definida na Equação 3.52 revela que essa formulação ainda prevê o cálculo de integrais ao longo da fronteira genérica  $\Gamma$ . Considerando que o domínio é geometricamente limitado pelas fronteiras  $\Gamma_C$  (do cilindro) e  $\Gamma_{\Omega}$  (do domínio global), essa integral se divide em duas, uma ao longo de  $\Gamma_C$  e outra ao longo de  $\Gamma_{\Omega}$ . No entanto, sobre  $\Gamma_{\Omega}$ , o campo elétrico total  $E_z^t$  é nulo devido à terminação da região de UPML por uma camada PEC e, tendo em vista que nessa fronteira  $E_z^i$  também deverá se anular após ser completamente atenuado devido à ação da UPML, resulta que o campo espalhado  $E_z^s$  também será nulo e a integral ao longo de  $\Gamma_{\Omega}$  não precisa ser calculada. Adicionalmente, ao longo de  $\Gamma_C$ ,  $E_z^s$  é conhecido e vale  $E_z^i$  e a integral sobre  $\Gamma_C$  também não é calculada. A forma fraca para o problema agora é dada por:

$$\int_{\Omega} \left[ (\bar{\bar{\mu}}^{-1} \nabla E_z) \cdot \nabla w - k^2 \bar{\bar{\epsilon}} E_z w \right] d\Omega = 0, \quad (3.53)$$

### 3.6 Considerações finais

Este capítulo estuda em detalhes a técnica de limitação de domínio baseada no conceito de PML. Partindo da definição, apresenta-se inicialmente a PML conforme idealizada por Berenger. Segue-se a completa dedução a partir da análise da incidência oblíqua de uma onda plana, primeiramente em um meio com perdas e, depois no meio de Berenger. A modificação das equações de Maxwell e a forma final da PML *split-field* são apresentadas.

Passa-se a discutir a PML uniaxial analisando a incidência de uma onda plana num meio anisotrópico com perdas ainda indeterminado. Aplicam-se as condições necessárias para que tal meio se comporte como uma PML e deduzem-se os coeficientes de reflexão para os modos TM e TE. As equações para o cálculo dos parâmetros da UPML são definidas e a UPML é, por fim incorporada à forma fraca do problema do espalhamento.

---

## O Método IIEFG

### 4.1 Introdução

No presente capítulo, a forma fraca (ou forma variacional) anteriormente obtida é submetida ao método IIEFG. São definidos, primeiramente, os espaços de busca de soluções, a partir da definição da forma fraca os conceitos relacionados às funções de peso e aos domínios de influência. Em seguida, discute-se o método de Galerkin e sua metodologia de definição da função de peso.

A discretização do domínio bidimensional é então analisada; o conceito de domínio de influência também é discutido. O método EFG é, em seguida, sintetizado a partir dos conceitos anteriormente discutidos. A aproximação por MLS é discutida bem como o problema da não conformidade com a propriedade do delta de Kronecker; apresenta-se o método ILMS.

### 4.2 Passos básicos para construção de soluções utilizando métodos sem malha

Os métodos numéricos diferem consideravelmente quanto às suas formulações e às formas como tratam a representação discreta do domínio, a imposição das condições de contorno e as descontinuidades. A seguir, apresenta-se de forma resumida a metodologia de construção dos métodos sem malha. Oportunamente, definem-se alguns termos utilizados frequentemente no contexto dos métodos sem malha.

**Passo 1: Representação do domínio.** O problema sob análise é, primeiramente, representado utilizando-se conjuntos de nós distribuídos ao longo do domínio e da sua fronteira. As condições de fronteira são então especificadas no modelo matemático para a solução

numérica. Por carregarem o valor da variável de campo, os nós são também chamados de nós de campo.

A densidade de nós, bem como a uniformidade da distribuição, são definidas de acordo com os requerimentos de precisão na análise do problema e com os recursos computacionais disponíveis. Embora, por definição, os métodos sem malha não demandem um padrão específico de distribuição de nós, uma maior densidade de nós pode ser desejável nas regiões em que se espere que o gradiente da variável de campo analisada assuma valores maiores.

**Passo 2: Interpolação.** Visto que uma malha de elementos (como a do FEM) não é utilizada, a variável de campo em qualquer ponto  $\mathbf{x}_I$  do espaço dentro do domínio de solução do problema deve ser obtida por interpolação utilizando-se os nós dentro do domínio de suporte do ponto. Matematicamente,

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x})u_i = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (4.1)$$

onde  $N$  é o número de nós pertencentes em um pequeno domínio local chamado de domínio de suporte do ponto  $\mathbf{x}$ ,  $u_i$  é o valor da variável de campo sobre o  $i$ -ésimo nó do domínio local,  $\mathbf{U}$  é o vetor que contém todos valores da variável de campo em todos os nós e  $\Phi_i(\mathbf{x})$  é uma função de forma para o  $i$ -ésimo nó, determinada utilizando-se os nós incluídos no domínio local de  $\mathbf{x}$ . O domínio de suporte de  $\mathbf{x}$  determina o número de nós a serem utilizados para aproximar o valor da função incógnita no ponto  $\mathbf{x}$ .

Um domínio de suporte pode ser, embora isto não seja mandatório, ponderado por uma função de peso. Pode também ter formas e tamanhos variados (que podem inclusive variar de um ponto de interesse para outro, conforme ilustrado na Figura 4.1), embora as formas mais comuns sejam a circular e a retangular.

Note-se que o uso do conceito de domínio de suporte é aceitável se a densidade de nós não varia consideravelmente ao longo do domínio. Entretanto, na solução de problemas práticos, é possível que se tenha variações drásticas de densidade, o que pode levar a uma seleção desbalanceada de nós para a construção das funções de forma. Em casos extremos, todos os nós utilizados podem estar localizados em um lado apenas, resultando em erros grosseiros por extrapolação. Tais problemas podem ser evitados se for utilizado o conceito de domínio de influência, cuja definição detalhada encontra-se na seção 4.4.

Note-se também que a interpolação definida na Equação 4.1 é computada para todas as componentes da variável de campo no mesmo domínio de suporte, e a mesma função de forma é utilizada para o cálculo dessas componentes.

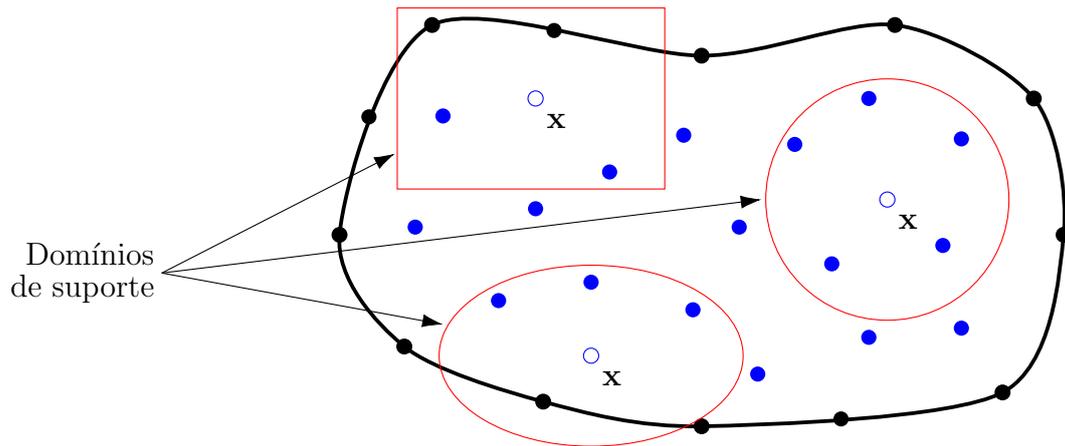


Figura 4.1 – Um domínio de suporte determina os nós (indicados por  $\bullet$ ) que serão usados na interpolação da variável de campo no ponto  $\mathbf{x}$  (indicado por  $\circ$ ), podendo ter formas diferentes em cada ponto.

Fonte: Adaptado de [1].

**Passo 3: Formação do sistema de equações.** As equações discretas do método sem malha podem ser formuladas utilizando-se as funções de forma em conjunto com a equação do problema na forma forte ou na forma fraca. Estas equações são geralmente escritas na forma de uma matriz nodal e montadas como a matriz global de um sistema para todo o domínio do problema. O sistema global pode ser um conjunto de equações algébricas ou diferenciais, dependendo do tipo do problema analisado, e o procedimento para a sua construção difere de um método específico para outro.

**Passo 4: Solução do sistema global de equações.** A solução do sistema global de equações determina a solução do problema em cada um dos nós. No caso de um sistema global de equações algébricas lineares, métodos de solução como o da eliminação de Gauss, decomposição LU, ou ainda métodos iterativos e suas variantes mais especializadas podem ser usados.

### 4.3 Discretização sem malha

A discretização do domínio consiste em subdividir o domínio total em vários subdomínios – chamados de domínios de suporte ou de influência – sobre os quais a solução aproximada possa ser determinada. Uma vez que cada subdomínio esteja analisado, todo o domínio também terá sido; assim, as integrais definidas nas equações (4.14) e (4.13) poderão ser calculadas a partir da contribuição de cada subdomínio.

Considera-se, então, um domínio bidimensional  $\Omega$  qualquer sobre o qual se deseja estudar o espalhamento. Assim, o domínio total  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  será descrito por um conjunto de nós  $\mathbf{x}_I, I = 1, 2, 3, \dots, N$ , localizados por coordenadas espaciais, sendo  $N$  o número total de nós dentro de  $\bar{\Omega}$  [39].

A Figura 4.3 mostra um domínio  $\Omega$  qualquer e diversos domínios de suporte  $\Omega_I$  centrados nos pontos de interesse,  $\mathbf{x}_I \in \mathbb{R}^2$ .

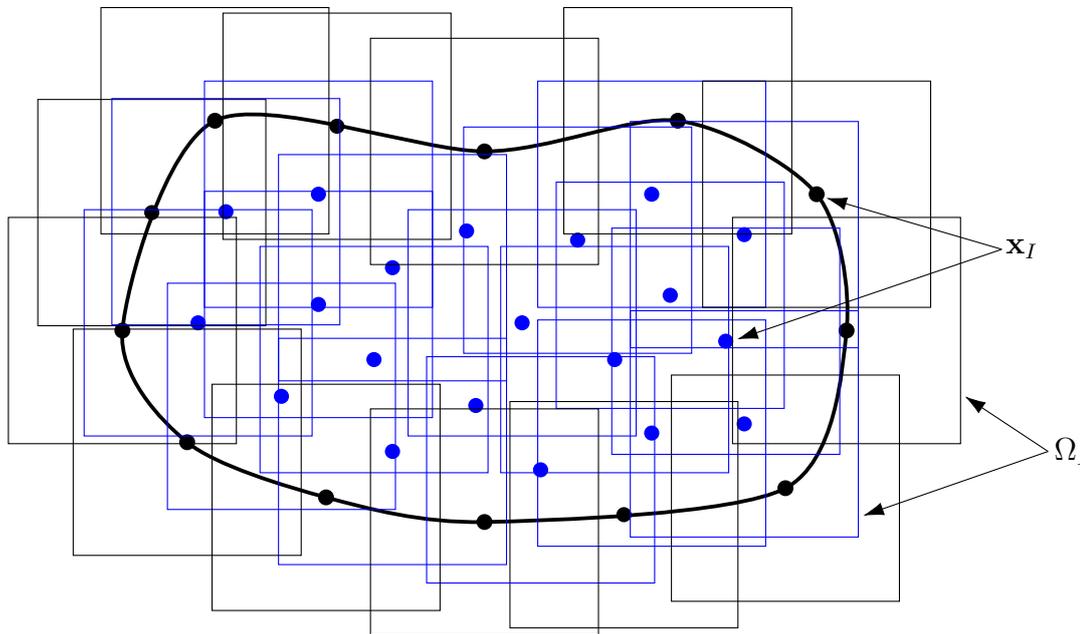


Figura 4.2 – Domínio de suporte  $\Omega_I$  para pontos de interesse em  $\mathbf{x}_I$ .  $d_I$  é a dimensão do domínio de suporte retangular centrado em  $\mathbf{x}_I$ .

Fonte: Adaptado de [1].

Para contabilizar a contribuição de cada domínio de suporte na forma de uma combinação linear que represente a solução do problema, funções de forma associadas a cada nó devem ser construídas. A equação da forma fraca do espalhamento em 2D (Equação 2.9) já explicitava o uso dessas funções – representadas por  $\Phi$  – mas estas não haviam sido definidas até então.

Um função de forma adequada deve atender, dentre outros, os seguintes requerimentos: 1) deve suportar distribuições arbitrárias de nós; 2) deve ser numericamente estável; 3) deve valer zero se avaliada fora do domínio de suporte; 4) deve ser computacionalmente eficiente, e 5) deve possuir a propriedade do delta de Kronecker, ou seja, a função deve possuir valor unitário sobre o nó de interesse e valor zero sobre qualquer outro ponto fora do domínio de suporte. Por isso estas funções de forma são também conhecidas como funções de suporte local [1]. Uma função de forma que atenda a estes critérios será determinada na seção 4.8 a partir do método dos mínimos quadrados móveis interpolante.

A exatidão da interpolação depende dos nós contidos no domínio de suporte e, portanto, um domínio de suporte adequado deve ser escolhido. Se  $\mathbf{x}_I$  é o ponto onde se localiza o nó de interesse, a dimensão  $d_I$  do domínio de suporte  $\Omega_I$  é [1]:

$$d_I = \alpha_S d_C, \quad (4.2)$$

onde  $\alpha_S$  é um fator de escala adimensional para o cálculo de  $d_I$  e  $d_C$  é o espaçamento entre os nós, nas proximidades de  $\mathbf{x}_I$ .  $d_C$  vale exatamente a distância entre dois nós vizinhos, para o caso de nós igualmente espaçados, ou distância média entre eles, no caso de uma distribuição arbitrária. O domínio de suporte é centrado em  $\mathbf{x}_I$ . Para problemas bidimensionais, uma forma de se determinar  $d_C$  é utilizando-se a equação [1]:

$$d_C = \frac{\sqrt{A_I}}{\sqrt{n_{A_I} - 1}}, \quad (4.3)$$

onde  $A_I$  é a área estimada do domínio  $\Omega_I$  e  $n_{A_I}$  é o número de nós localizados dentro de  $\Omega_I$  [1].

#### 4.4 Domínio de Influência e funções de forma

Embora o termo domínio de influência seja, por vezes, utilizado como sinônimo de domínio de suporte conforme a definição apresentada neste trabalho, há que se definir a distinção entre estes dois conceitos.

Define-se como domínio de influência o domínio sobre o qual determinado nó exerce influência, estando, portanto, relacionado primariamente com o nó. O domínio de suporte, por outro lado, está relacionado com um ponto de interesse que não necessariamente precisa estar localizado na mesma posição do nó [1].

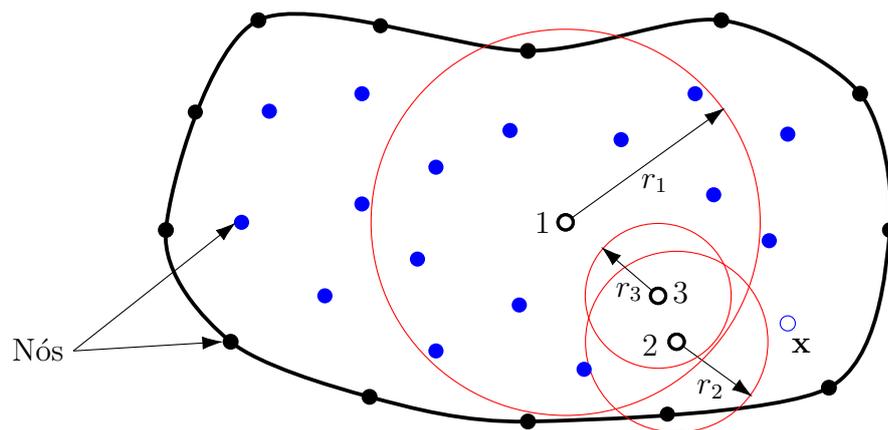


Figura 4.3 – Domínio de influência dos nós. Na construção de funções de forma para o ponto  $\mathbf{x}_I$ , os nós cujos domínios de influência cobrem  $\mathbf{x}_I$  são usados. No exemplo, os nós 1 e 2 são incluídos, mas o nó 3 não.

Fonte: Adaptado de [1].

O uso do domínio de influência constitui uma forma alternativa de se selecionar os nós para o cálculo da interpolação, apresentando bom desempenho inclusive para discretizações com distribuição de nós altamente irregular.

O domínio de influência é definido para cada nó no domínio do problema, podendo ser diferente em cada nó, visando representar a influência deste nó, conforme mostra a Figura 4.3. Observa-se que o nó 1 tem um raio de influência  $r_1$  enquanto o nó 2 tem raio de influência  $r_2$  e o nó 3, raio de influência  $r_3$ .

O nó será envolvido na construção da função de forma para qualquer ponto que esteja dentro do seu domínio de influência. No exemplo da Figura 4.3, na construção das funções de forma para o ponto  $\mathbf{x}_I$ , os nós 1 e 2 serão usados, mas não o nó 3.

O fato de que as dimensões do domínio de influência possam ser diferentes em cada nó permite que alguns desses nós tenham maior influência que outras de tal modo que uma distribuição desbalanceada impacte na construção das funções de forma. Observa-se, ainda no exemplo da Figura 4.3, que o nó 1 não é utilizado mesmo estando mais próximo de  $\mathbf{x}_I$  do que o nó 2.

As dimensões do domínio de influência podem ser determinadas utilizando-se procedimentos diversos, podendo-se inclusive utilizar uma dimensão padrão para todos. No caso do método EFG, os domínios também podem ser também determinados tomando-se como base as células de integração [1].

## 4.5 Propriedades das funções de forma para métodos sem malha

Uma condição imprescindível que uma função de forma deve satisfazer é camada de partição da unidade, ou seja:

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x}) = 1. \quad (4.4)$$

Esta condição é necessária para que a função de forma seja capaz de reproduzir o seu comportamento em qualquer ponto do domínio.

É desejável que a função de forma ainda satisfaça outras condições, embora estas não sejam mandatórias. A primeira delas é a condição de reprodução linear do campo:

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x}) x_i = \mathbf{x}. \quad (4.5)$$

Esta condição é necessária para que a função de forma passe no teste *standard patch* que tem sido comumente utilizado para testar elementos finitos. No entanto, ainda que falhe neste teste, poderá ser utilizada caso seja capaz de produzir uma solução convergente.

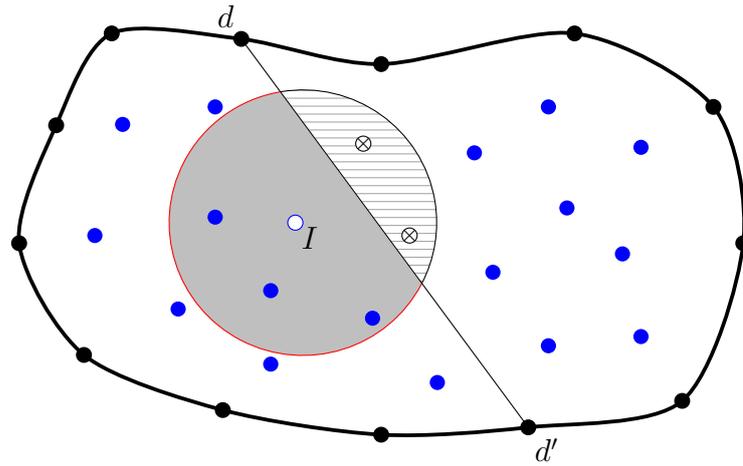


Figura 4.4 – Critério da visibilidade. Os pontos dentro da região hachurada (identificados por  $\otimes$ ) não são contabilizados no domínio de influência do nó  $I$ .

Outra condição desejável é a da propriedade da função delta de Kronecker, ou seja:

$$\Phi_i(\mathbf{x} = \mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ 0 & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (4.6)$$

De forma prática, essa condição obriga que o valor da função de forma seja unitário sobre o ponto de interesse e nulo em qualquer ponto fora do domínio de suporte. É considerada desejável porque, uma vez atendida pela função de forma, permite que as condições de fronteira essenciais sejam impostas utilizando-se procedimentos simples.

## 4.6 Tratamento de descontinuidades

Os métodos sem malha constituem uma boa opção para a solução de problemas com geometrias complexas. No entanto, devido à inexistência de conexão entre os nós, surgem dificuldades na determinação do domínio de influência de um nó. Tipicamente, os domínios de influência tem formas simples, como um círculo ou retângulo. Nos casos de problemas simples, basta centrar um círculo de raio  $r_I$  no nó de interesse que a sua influência sobre quaisquer pontos localizados a uma distância menor que  $r_I$  será computada com o auxílio das funções de peso. Para problemas complexos envolvendo descontinuidades de material, por exemplo, um domínio de influência pode conter nós associados a diversos materiais de forma que o cálculo baseado unicamente na distância nodal pode ser impreciso já que a descontinuidade da variável de campo não é levada em conta. Dentre as possíveis técnicas para tratamento de descontinuidades citam-se os métodos da visibilidade, da difração e da transparência, sendo que o método (ou critério) da visibilidade, proposto por [14], foi um dos primeiros utilizados [5].

A essência do critério da visibilidade é que qualquer descontinuidade é tratada como sendo opaca quando se constrói as funções de peso. De acordo com essa abordagem, a linha que liga um ponto ao nó é imaginada como sendo um raio de luz. Se o raio encontra uma superfície opaca (ou uma descontinuidade), este é extinto e o ponto é excluído do domínio de influência. Um exemplo do uso do critério da visibilidade é ilustrado na Figura 4.4, em que quaisquer pontos dentro da região hachurada são excluídos do domínio de influência de um nó genérico  $I$ . Apesar de simples e direto, essa técnica torna as funções de peso descontínuas dentro do domínio de influência. Ao longo da linha  $d - d'$ , a função de peso é não nula à esquerda, mas vale zero ao lado direito. Em consequência, as funções de forma também são descontínuas, algo indesejável nas aproximações sem malha [5].

No caso do problema analisado no presente trabalho, embora a introdução da UPML signifique uma descontinuidade no meio material do domínio, destaca-se que a aplicação do critério da visibilidade ou de qualquer outra técnica de tratamento de descontinuidades se mostra desnecessária, já que o campo elétrico é contínuo ao longo da interface  $\Gamma_{upml}$  entre o ar e a região de UPML.

## 4.7 Método de Galerkin

Conforme apresentado na seção 2.3, problemas práticos bi ou tridimensionais, ou aqueles que envolvam descontinuidades de características físicas possuem solução analítica complexa ou mesmo impossível, daí a necessidade de se desenvolver para o problema uma formulação alternativa que admita condições menos restritas para solução e suas derivadas.

Se considerada sob a ótica do tratamento clássico das equações diferenciais, a solução  $u$  deverá satisfazer a Equação A.13 em todos os pontos do domínio, o que constitui uma exigência muito forte; por isso faz-se necessário reformular o problema numa forma menos restritiva conhecida como forma fraca. O problema passa, então, a ser descrito por uma única equação diferencial que inclui as condições de contorno e interface e possui todas as características da solução clássica [39].

A busca de soluções para a forma fraca definida pela Equação 2.11 dentro do espaço  $H_0^1(\Omega)$  – Equação 2.6 – ainda é muito custosa, mesmo se aplicadas as restrições relacionadas à ordem das derivadas, visto que este espaço de busca de soluções é um espaço de dimensão infinita.

Define-se, então, um novo espaço: seja  $H_0^h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$  o espaço de dimensão finita formado por todas as combinações lineares tais que [36]:

$$\omega^h = \sum_{i=1}^n N_i c_i, \quad (4.7)$$

onde  $N_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  são funções de forma que pertencem ao espaço  $H_0^1(\Omega)$  e  $c_i$  são coeficientes quaisquer.

O problema de se encontrar soluções para a forma fraca em  $H_0^1(\Omega)$  se reduz à aplicação do Método de Galerkin, que se baseia em determinar uma solução aproximada  $u^h \in H^h(\Omega)$  de modo que  $u^h$  possa ser escrito na forma:

$$u^h = \sum_{i=1}^n \Phi_i u_i, \quad (4.8)$$

onde  $\Phi_i$  são funções de forma e  $u_i$  são coeficientes a serem determinados. Se a forma fraca puder ser escrita, simplificada, como

$$B(u, \omega) - F(\psi, \omega) = 0, \quad (4.9)$$

substituir as equações (4.7) e (4.8) na Equação 4.9 resulta em:

$$B(u^h, \omega^h) - F(\psi^h, \omega^h) = 0, \quad \forall u^h, \psi^h, \omega^h \in H_0^h(\Omega). \quad (4.10)$$

Onde:

$$\begin{aligned} B(u, \omega) &= \int_{\Omega} [(\alpha_1 \nabla u) \cdot \nabla \omega - k_0^2 \alpha_2 u \omega] d\Omega, \\ F(\psi, \omega) &= \int_{\Gamma} \psi \omega d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

O método de Galerkin considera  $\Phi_i = N_i$  na Equação 4.8, de forma que, utilizando-se a propriedade da bilinearidade de  $B$  e  $F$ , a Equação 4.10 torna-se:

$$\sum_{j=1}^n c_j \left[ \sum_{i=1}^n u_i B(N_i, N_j) - F(N_j) \right] = 0. \quad (4.12)$$

A partir da expansão da Equação 4.12, e tendo em vista que  $c_j$  são valores constantes quaisquer, o seguinte sistema linear é obtido [36]:

$$\sum_{i=1}^n u_i K_{ij} - F_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4.13)$$

Onde:

$$K_{ij} = B(\Phi_i, \Phi_j) = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) \right] d\Omega, \quad (4.14)$$

$$F_j = \int_{\Omega} b\Phi_j d\Omega.$$

Escrita na forma matricial, a Equação 4.14 é rescrita como [39]:

$$\mathbf{K} * \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (4.15)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \nabla \Phi_1 \beta \nabla \Phi_1 & \cdots & \nabla \Phi_1 \beta \nabla \Phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla \Phi_n \beta \nabla \Phi_1 & \cdots & \nabla \Phi_n \beta \nabla \Phi_n \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} b\Phi_1 \\ \vdots \\ b\Phi_n \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_n \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

A principal vantagem do método de Galerkin é que a matriz  $\mathbf{K}$  do sistema linear obtido anteriormente é simétrica. É uma versão mais eficiente do método dos resíduos ponderados, já que emprega a mesma função usada na aproximação da função de campo como função de peso, sendo, portanto, largamente utilizado em métodos numéricos, com e sem malha [1].

Importa notar que, embora a formulação do método IIEFG aqui apresentada seja genérica e adequada à solução do problema de espalhamento por espalhadores de qualquer material, a implementação do caso específico tratado neste trabalho (em que o espalhador é um cilindro PEC) é ligeiramente simplificada. Visto que o campo na superfície do cilindro é conhecido, os nós localizados nessa fronteira estão submetidos a uma condição de Dirichlet que é, portanto, imposta diretamente no sistema linear.

## 4.8 O MLS e sua variante interpolante

O método EFG tradicionalmente emprega o método dos mínimos quadrados móveis (*Moving Least Squares* – MLS) como o método de aproximação que relaciona uma função de peso associada a cada nó a uma base polinomial e uma série de coeficientes [15].

Considerando uma função escalar de um campo  $u(\mathbf{x})$  em um domínio  $\Omega$ , a aproximação de  $u(\mathbf{x})$  pelo MLS é [1]:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (4.19)$$

onde:

$\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$  é uma base polinomial;

$m$  é o número de funções da base linear;

$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}) \ a_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ a_m(\mathbf{x})\}$  é um vetor de coeficientes.

Os coeficientes  $\mathbf{a}$  podem ser obtidos a partir da minimização do funcional definido a partir do somatório dos resíduos ponderados, conforme a Equação 4.20 [1]:

$$\mathbb{J} = \sum_{i=1}^n \hat{W}_i [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_i)]^2, \quad (4.20)$$

onde  $\hat{W}_i(\mathbf{x}) = \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$  é uma função de peso de suporte compacto centrada em  $\mathbf{x}_i$ , e  $n$  é o número de nós.

Minimizando  $\mathbb{J}$ , o seguinte conjunto de relações lineares é determinado e  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  pode ser encontrado [15]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (4.21)$$

onde  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{U}_s = \{u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n\}^T$ .

Para um problema bidimensional e utilizando a base linear  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y\}$  ( $m=3$ ),  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $3 \times 3$  que pode ser escrita como na Equação 4.22, enquanto a

matriz  $\mathbf{B}$  na Equação 4.21 é uma matriz  $3 \times n$  definida pela Equação 4.23 [1].

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{3 \times 3}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \hat{W}_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) = \hat{W}_i(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 y_1 \\ y_1 & x_1 y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n \\ x_n & x_n^2 & x_n y_n \\ y_n & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \hat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i \hat{W}_i & \sum_{i=1}^n y_i \hat{W}_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \hat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \hat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \hat{W}_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \hat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \hat{W}_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \hat{W}_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{3 \times n}(\mathbf{x}) &= [\hat{W}_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad \hat{W}_2(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \cdots \quad \hat{W}_n(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} & \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} & \cdots & \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{W}_1 & \hat{W}_2 & \cdots & \hat{W}_n \\ x_1 \hat{W}_1 & x_2 \hat{W}_2 & \cdots & x_n \hat{W}_n \\ y_1 \hat{W}_1 & y_2 \hat{W}_2 & \cdots & y_n \hat{W}_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Resolvendo a Equação 4.21 para  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , tem-se:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_S. \quad (4.24)$$

Substituindo-se a Equação 4.24 na Equação 4.19, tem-se:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\mathbf{x}) u_j = \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_S, \quad (4.25)$$

onde  $\Phi(\mathbf{x})$  é o vetor de funções de forma correspondente aos  $n$  nós dentro do domínio de suporte do ponto  $\mathbf{x}$  e pode ser escrito como [1]:

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \{\Phi_1(\mathbf{x}) \ \Phi_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ \Phi_n(\mathbf{x})\}_{(1 \times n)} = \underbrace{\mathbf{p}^T(\mathbf{x})}_{1 \times 3} \underbrace{\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})}_{3 \times 3} \underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{x})}_{3 \times n}. \quad (4.26)$$

A função de forma  $\Phi_i(\mathbf{x})$  para o  $i$ -ésimo nó é, portanto, definida por [1]:

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) \left[ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right]_{ji} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_i. \quad (4.27)$$

O método MLS atende bem aos requisitos especificados na seção 4.3, exceto que as funções de forma geradas com esse método não atendem à condição do delta de Kronecker, e o seu uso, além de dificultar a imposição das condições de contorno, também produz soluções aproximantes [1, 36]. Nestes casos, métodos adicionais como o dos multiplicadores de Lagrange são usados, apesar de que estes artifícios aumentam o número de variáveis envolvidas e geram um sistema linear não definido positivo [14].

Visando superar estas dificuldades, Marques *et. al* (2007) e Coppoli *et. al* (2012) utilizaram funções singulares como funções de peso na definição da norma  $J$  na Equação 4.20. Este método, chamado de método dos mínimos quadrados móveis interpolante (*Interpolant Moving Least Squares* – IMLS), permite obter funções de forma que satisfaçam a propriedade do delta de Kronecker e, portanto, obter soluções interpolantes. A imposição das condições de contorno absorventes pode também ser feita diretamente no sistema linear discreto. Neste trabalho, assim como em [18], será utilizada a seguinte função de peso:

$$\hat{W}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}^n + \beta^n}, \quad (4.28)$$

onde  $\beta$  é uma constante de valor tão pequeno quanto necessário, de forma que seja garantida a não ocorrência de singularidade;  $n$  também é uma constante e o seu valor deve ser escolhido para que se obtenha a maior precisão do método.

## 4.9 Considerações finais

Neste capítulo são apresentadas as bases do método EFG aplicado ao espalhamento em duas dimensões: inicialmente, o método de Garlekin na sua forma geral foi aplicado à forma fraca do problema definida no Capítulo 2.

Em seguida, os princípios que determinam a discretização do domínio sem o uso de malha são introduzidos, bem como os conceitos de função de forma e domínio de suporte compacto.

A função de forma é inicialmente determinada a partir do método dos mínimos quadrados móveis. Em seguida, é modificada com o uso de uma função de peso singular; o método dos mínimos quadrados móveis interpolante é apresentado.

---

## Resultados

### 5.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as análises dos parâmetros do método IIEFG-PML e os resultados da aplicação da técnica na solução do espalhamento bidimensional.

Define-se primeiramente de forma particular o problema – a geometria, as características do espalhador e o domínio. Define-se também a metodologia e as premissas que norteiam os experimentos. A solução do problema pelo método IIEFG-ABC é apresentada. Passa-se à determinação e análise dos parâmetros do método IIEFG e da UPML. Para tanto, resolve-se problema do espalhamento para um cilindro de raio reduzido.

Em seguida os parâmetros obtidos são utilizados na solução do espalhamento por cilindros de raios maiores. Os resultados obtidos pelo método IIEFG-UPML são comparados àqueles obtidos pela técnica IIEFG-ABC. Por fim, são analisados o comportamento do erro, o condicionamento da matriz do sistema linear e o custo computacional, novamente comparando os métodos IIEFG-UPML e IIEFG-ABC. Seguem as considerações finais.

### 5.2 Definição do problema do espalhamento

O espalhamento eletromagnético foi caracterizado e definido matematicamente de forma geral. Resta, contudo, definir de forma específica o problema a ser resolvido pelo método IIEFG e que é alvo de investigação deste trabalho.

A Figura 5.1 ilustra o problema a ser analisado neste capítulo. Conforme descrito na seção 2.2, trata-se da análise bidimensional do espalhamento eletromagnético por um cilindro perfeitamente condutor de comprimento infinito ao longo da direção  $z$ . O cilindro espalhador é iluminado por uma onda  $TM^z$  incidente  $E_z^i = E_0 e^{-jkx} \hat{\mathbf{a}}_z$ , com  $E_0 = 1V/m$ , e

cuja frequência é  $f = 3,0 \times 10^8 \text{ Hz}$ . O comprimento de onda no vácuo é, portanto,  $\lambda = 1 \text{ m}$ . Por conveniência, definem-se o raio da seção transversal do cilindro  $r_C$  e outras dimensões do problema em função de  $\lambda$ .

A fronteira  $\Gamma$  que limita externamente o domínio computacional do problema é um quadrado cujo lado é  $L_D$ . Conforme estabelecido na subseção 3.4.4,  $\Gamma$  é uma camada de PEC que envolve esse domínio na sua fronteira mais exterior. A fronteira  $\Gamma_{upml}$  tem a forma de um quadrado de lado  $L_{upml}$  e delimita a região de solução útil do problema, denominada  $\Omega$ . O conceito de região de solução útil é descrito detalhadamente na subseção 5.5.1. A largura da região de UPML, denominada  $\Omega_{upml}$ , é  $L$  e  $w_{upml}$  é a largura de cada uma das  $nc$  camadas que compõem essa região.

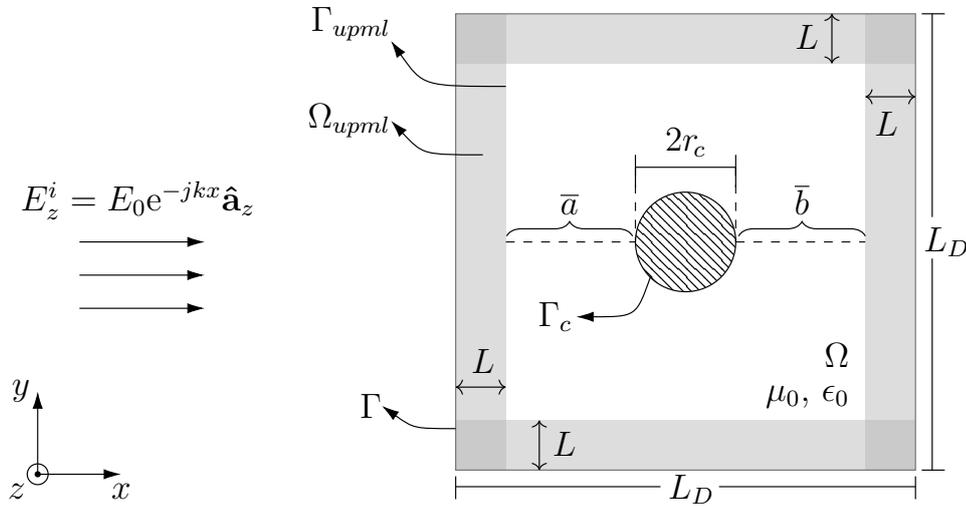


Figura 5.1 – Definição do problema investigado: o espalhamento por um cilindro PEC imerso no espaço livre iluminado por uma onda plana  $TM^z$  com o domínio computacional limitado por uma região de UPML.

Nas seções 5.4 e 5.5 em que são realizadas análises paramétricas do método, adotam-se valores iniciais para os parâmetros definindo o primeiro caso do problema descrito. A Tabela 5.1 contém o conjunto dos valores utilizados para os parâmetros quando estes não estão sob avaliação.

### 5.3 Metodologia de avaliação da precisão

Para a comparação de resultados e a consequente verificação da precisão das soluções numéricas obtidas, define-se como a metodologia de avaliação do erro das soluções numéricas em relação à solução analítica do problema, o erro percentual calculado na

Tabela 5.1 – Valores iniciais dos parâmetros utilizados nas análises paramétricas.

Parâmetro	Símbolo	Tipo	Valor
número de camadas	$nc$	UPML	1
posição da fronteira	$\Gamma_{upml}$	UPML	$0,4\lambda$
largura da região de UPML	$L$	UPML	$0,5\lambda$
largura de cada camada	$w_{upml}$	UPML	$0,1\lambda$
raio do cilindro espalhador	$r_C$	IEFG	$0,1\lambda$
lado do domínio global de solução	$L_D$	IEFG	$2,0\lambda$

norma  $L^2$ , cuja expressão é mostrada na (5.1) [18]:

$$EL^2 = \sqrt{\int_{\Omega} |E_z^N(I) - E_z^A(I)|^2 d\Omega} / \sqrt{\int_{\Omega} |E_z^A(I)|^2 d\Omega} \times 100\%. \quad (5.1)$$

em que  $E_z^N(I)$  e  $E_z^A(I)$  são as soluções numérica e analítica calculadas em cada um dos  $N$  nós  $I$  do domínio, respectivamente. As integrais na definição de  $EL^2$  na Equação 5.1 são calculadas numericamente utilizando-se o método da quadratura de Gauss com dois pontos. Note-se que ainda que são calculadas ao longo do domínio  $\Omega$ , de tal forma que  $EL^2$  é uma representação do erro global da solução em cada ponto do domínio.

### 5.3.1 A solução do espalhamento pelo método IEFG-ABC

Além da comparação das soluções numérica e analítica do problema do espalhamento, compara-se também as soluções obtidas numericamente pelos métodos IEFG-UPML e IEFG-ABC. A aplicação do método IEFG juntamente com condições absorventes na solução de problemas de eletromagnetismo ilimitados, especificamente o espalhamento, é discutida em [18].

Tendo em vista o uso da solução IEFG-ABC nas análises que seguem, convém reapresentar o problema em estudo sob a ótica da solução IEFG-ABC, os parâmetros utilizados pelo método e algumas diferenças importantes entre as duas soluções numéricas.

Na solução IEFG-ABC, o problema também é o espalhamento de uma onda plana  $TM^z$  por um cilindro PEC  $z$ -infinito já definido na seção 5.2, com a diferença que o domínio é agora limitado por uma fronteira circular de raio  $r_{abc}$  sobre a qual se impõe uma condição de contorno absorvente. Especificamente, utiliza-se a condição de Bayliss-Trukel de primeira ordem apresentada na subseção 2.4.2. A Figura 5.2 ilustra o problema nessa configuração.

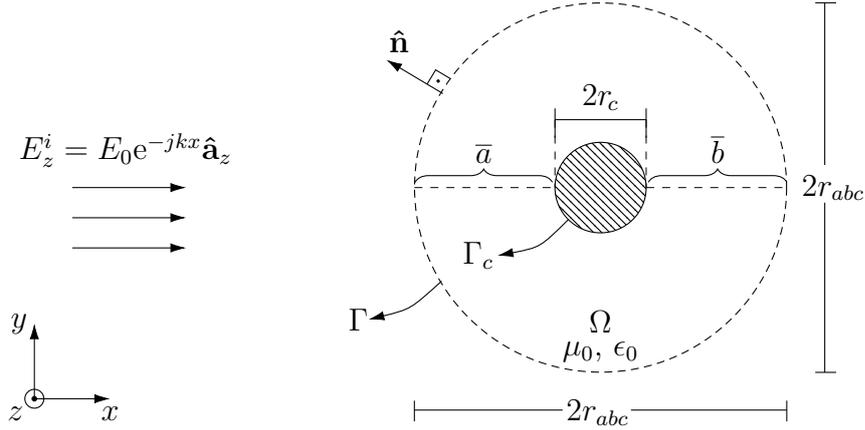


Figura 5.2 – Definição do problema solucionado pelo método IIEFG-ABC: o espalhamento por um cilindro PEC imerso no espaço livre iluminado por uma onda plana  $TM^z$  com o domínio computacional limitado por uma fronteira circular sobre a qual é imposta uma condição absorvente de primeira ordem.

Conforme apresentado no Capítulo 4, o método IIEFG permite que condições absorventes como a de Bayliss-Turkel sejam diretamente incorporadas à forma fraca, cuja formulação é, por conveniência, repetida na Equação 5.2.

$$\int_{\Omega} [(\mu^{-1} \nabla E_z) \cdot \nabla w - k_0^2 \epsilon E_z w] d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = 0. \quad (5.2)$$

É importante, no entanto, atentar-se para o fato de que esta condição está definida na Equação 2.27 em função da derivada do campo espalhado, enquanto na Equação 5.2 o campo elétrico que aparece na derivada normal é campo total. Naturalmente que os campos total, incidente e espalhados podem ser expressos de diversas formas de acordo com a relação da Equação 2.1a. A forma fraca final, após a incorporação da condição de Bayliss-Turkel de primeira ordem, é [18, 40]:

$$\int_{\Omega} [(\mu^{-1} \nabla E_z) \cdot \nabla w - k_0^2 \epsilon w E_z] d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma w E_z d\Gamma = \int_{\Gamma} q w d\Gamma, \quad (5.3)$$

$$\gamma = \mu^{-1} \left( jk_0 + \frac{1}{2\rho} \right) \quad \text{e} \quad q = \mu^{-1} \left( \frac{\partial E_z^i}{\partial \mathbf{n}} \right) + \gamma E_z^i, \quad (5.4)$$

em que  $\Omega$  é a região limitada pelas fronteiras global  $\Gamma$  e do espalhador  $\Gamma_c$ ,  $E_z^i$  e  $E_z$  são os campos elétricos incidente e total, respectivamente,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à  $\Gamma$  e  $\rho$  é a coordenada radial do sistema de coordenadas cilíndricas [18].

Uma vez realizada a incorporação da ABC à forma fraca, esta é submetida ao método IIEFG-ABC. No processo de cálculo da solução por este método, foram reproduzidas

as condições de discretização e a definição da grade de integração definidos em cada um dos casos analisados pelo método IEFG-UPML. Por outro lado, valor do raio da ABC foi definido como  $r_{abc} = 0,5L_{upml}$ , conforme estabelecido em [18]. Além disso, todos os domínios de suporte – que tem a forma circular – são construídos com a mesma dimensão, calculada pela Equação 4.2 com  $\alpha_S = 2,0$  e  $d_C$  é definido como a distância média entre os nós.

## 5.4 Análise paramétrica: método IEFG

Visando ao estabelecimento de premissas que suportem uma análise paramétrica robusta, são realizadas escolhas. Tais escolhas são feitas tomando-se como base metodologias e valores de parâmetros referenciais definidos na literatura e análises paramétricas comparativas localizadas (ou seja, de abrangência limitada, já que não são levadas em conta todas as variações possíveis dos parâmetros).

### 5.4.1 Distribuição de nós

Embora inicialmente não exista nenhuma restrição a respeito da forma como os nós são distribuídos ao longo do domínio [1], formas específicas de distribuição podem se mostrar mais adequadas que outras nos experimentos realizados, levando a soluções de com diferentes níveis de precisão.

Foram avaliadas distribuições retangulares uniforme e híbrida, e não uniforme. Aqui, entende-se por distribuição retangular a distribuição de nós ao longo de retas paralelas aos eixos coordenados, resultando em uma densidade de nós por unidade de área aproximadamente constante em toda a área de interesse. No caso uniforme, a distância entre quaisquer dois nós sobre uma reta paralela aos eixos coordenados cartesianos é constante.

Uma distribuição híbrida admite variações na distância entre os nós, de tal modo que se possa definir regiões de diferentes densidades, mas em cada uma dessas regiões a densidade de nós é constante e a distribuição, portanto, uniforme. Na presente avaliação, definem-se para a distribuição híbrida duas densidades, para a região de PML e para a região entre o espalhador, sendo que densidade na região de solução útil (domínio  $\Omega$ ) é o dobro da densidade na região da PML.

As distribuições acima descritas são geradas por um algoritmo desenvolvido pelo autor para esse fim. Com o objetivo de expandir a abrangência das análises realizadas no âmbito da distribuição de nós, avaliou-se ainda uma terceira abordagem em que o *software Gmsh* [41] é utilizado para gerar uma distribuição não-uniforme a partir da utilização dos nós de uma malha FEM. O *Gmsh* é especializado na geração de malhas para a solução

de problemas pelo método dos elementos finitos e com o seu uso objetiva-se avaliar como prova de conceito as soluções obtidas com distribuições totalmente não uniformes, ou ainda com variação constante da densidade ao longo do domínio. A implementação de um gerador de distribuições desse tipo é mais complexa e foge ao escopo do trabalho, mas podem ser geradas com relativa facilidade por programas como *Gmsh*.

As figuras 5.3a, 5.3b e 5.3c mostram o aspecto do domínio discretizado por cada uma dessas formas de distribuição de nós descritas. Passa-se, portanto, à análise dos casos.

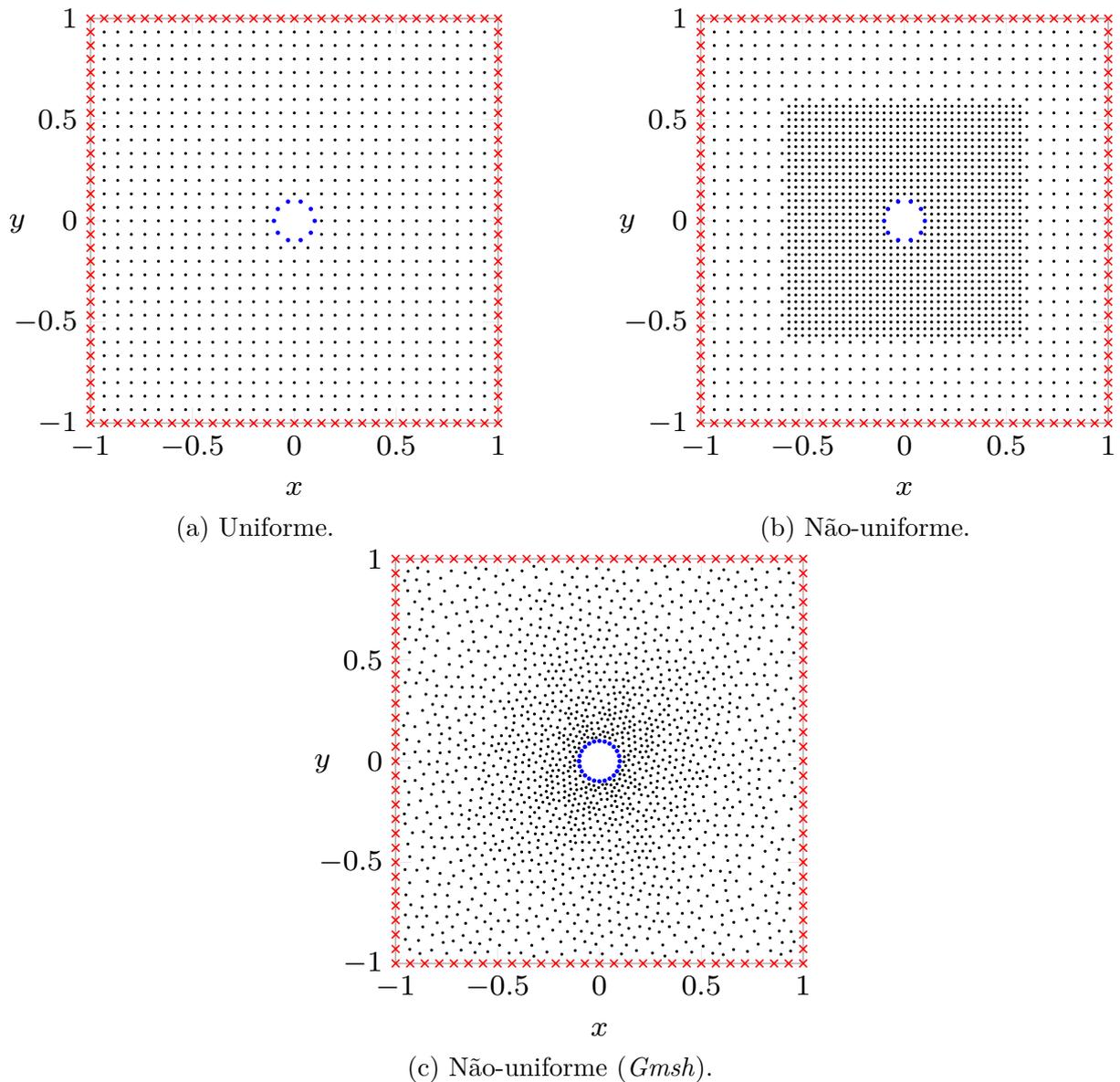


Figura 5.3 – Modos de distribuição de nós investigados. As distribuições (a) e (b) são geradas internamente, enquanto a distribuição (c) é gerada pelo *software Gmsh*.

A distribuição gerada pelo *Gmsh* apresenta como principal atrativo a possibilidade de se reduzir o número total de nós a partir da concentração de nós na região de interesse, deixando mais rarefeita as regiões mais externas. Embora o *Gmsh* seja reconhecido como

um programa extremamente capaz na geração de malhas, tal capacidade não foi explorada à exaustão, sendo utilizadas apenas as funcionalidades básicas do programa. Assim, no nível básico de conhecimento e utilização do *Gmsh*, provou-se ser difícil manter algum padrão entre as distribuições geradas. Não foi possível estabelecer, por exemplo, a relação entre a maior densidade (na região próxima ao espalhador) e a menor densidade (na região mais próxima a  $\Gamma$ ).

Mostrou-se também ser difícil realizar variações controladas, com pequenos incrementos ou decrementos no número total de nós. Utilizando-se os modos de distribuição uniforme e híbrido, por outro lado, é possível ter total controle sobre a rotina de geração de nós. Essa característica mostra-se especialmente importante quando se deseja demonstrar e validar o funcionamento da técnica numérica, caso em que a capacidade de reproduzir experimentos obtendo os mesmos resultados é imprescindível.

Visando à comparação dos três modos de distribuição e diante das dificuldades no controle da geração de distribuições pelo *Gmsh*, adota-se a seguinte metodologia: primeiramente, uma distribuição é gerada com *Gmsh*. Em seguida, busca-se gerar uma distribuição com a mesma densidade de nós, dessa vez utilizando o algoritmo próprio e a abordagem uniforme. Embora as densidades obtidas não sejam precisamente iguais, são suficientemente aproximadas, como pode-se observar na Tabela 5.2. O procedimento inverso, consistindo em se replicar a densidade de uma distribuição uniforme no *Gmsh* mostrou-se inviável.

Do ponto de vista da precisão das soluções obtidas com cada uma das distribuições, a distribuição híbrida é que apresenta o pior desempenho sendo o seu uso, portanto, descartado. Avalia-se então a sensibilidade da solução numérica às alterações da densidade de nós nas distribuições não uniforme gerada pelo *Gmsh* e uniforme gerada pelo algoritmo próprio. Avalia-se também a sensibilidade à variação do número de pontos de integração de Gauss (ou GIP, *Gauss Integration Points*) utilizados para o cálculo das integrais da forma fraca. Os dados da Tabela 5.2 mostram que é possível obter baixos valores de erro na norma  $L^2$  com qualquer um dos dois modos de distribuição. Entretanto, em virtude das dificuldades em se controlar a geração de nós pelo *Gmsh*, a distribuição uniforme passa a ser utilizada em todos os experimentos seguintes.

#### 5.4.2 Número de nós e grade de integração

Para determinar a densidade de nós por unidade de área (nós/ $\lambda^2$ ) e a relação entre o número de pontos de integração de Gauss e o número de nós (ou, resumidamente, relação Gauss-nós – RGN) mais adequadas, analisa-se o comportamento da precisão da solução numérica dada pelo erro na norma  $L^2$  diante da variação simultânea do número de nós e do número de pontos de Gauss. A definição das relações nós/ $\lambda^2$  e RGN é importante

Tabela 5.2 – Sensibilidade da solução numérica à alteração do número de pontos de integração de Gauss.

Pontos de Gauss	<i>Gmsh</i>			Uniforme		
	nós/ $\lambda^2$	RGN	Erro $L^2$ %	nós/ $\lambda^2$	RGN	Erro $L^2$ %
6348	744,85	2,1475	15,6989	760,22	2,1041	7,7610
9924		3,3572	4,1401		3,2894	6,2817
14288		4,8336	3,1795		4,7358	3,8463
19444		6,5778	2,8910		6,4448	3,2168
25392		8,5900	3,3081		8,4163	3,1937
32144		6,5778	2,4675		10,6543	2,7601
6348	446,00	3,5864	7,9599	423,57	3,7763	4,6789
9924		5,6068	3,6978		5,9036	2,6366
14288		8,0723	3,7201		8,4997	3,5716
19444		10,9853	2,8941		11,5669	2,5912
25392		14,3458	3,1758		15,1053	2,5053
32144		18,1605	2,5867		19,1220	2,3789
6348	273,64	5,8453	7,0552	274,91	5,8185	7,5168
9924		9,1381	3,8115		9,0962	5,3091
14288		13,1565	3,4644		13,0962	8,4604
19444		17,9042	3,2724		17,8222	5,6046
25392		23,3812	3,3071		23,2741	5,0769
32144		29,5985	3,1941		29,4629	5,0601

para se garantir condições aproximadamente constantes ao longo das análises dos demais parâmetros.

Avalia-se inicialmente a precisão da solução em um amplo espaço de valores possíveis para o número de nós e de pontos de Gauss. Uma segunda avaliação sobre esses resultados prévios permite reduzir este espaço a uma área consideravelmente menor. Conforme pode ser visto na Figura 5.4, o mapa de sombras evidencia nas áreas mais claras – especificamente a destacada por um retângulo – as regiões em que os valores de GIP e nós/ $\lambda^2$  produzem soluções mais precisas. As áreas mais escuras, no entanto, estão associadas a valores que geram soluções de maior erro.

Assim, é lógico utilizar, dentre as regiões de precisão aceitável, densidades de nós cujos valores estejam entre 420 e 550 nós/ $\lambda^2$ , e um número de pontos de Gauss entre que esteja 14000 e 32000. Tal escolha deve resultar em valores de RGN variando entre 6,5 e 23,5, aproximadamente. Para distribuições de nós e grades de integração definidas de acordo com os valores pertencentes a esses intervalos, é possível calcular soluções relativamente

precisas. A Figura 5.5 mostra que para as densidades de nós 507,48 e 508,49 pode-se obter erros percentuais na norma  $L^2$  limitados valores próximos de 2%, utilizando-se acima de  $1,75 \times 10^4$  pontos de Gauss na grade de integração.

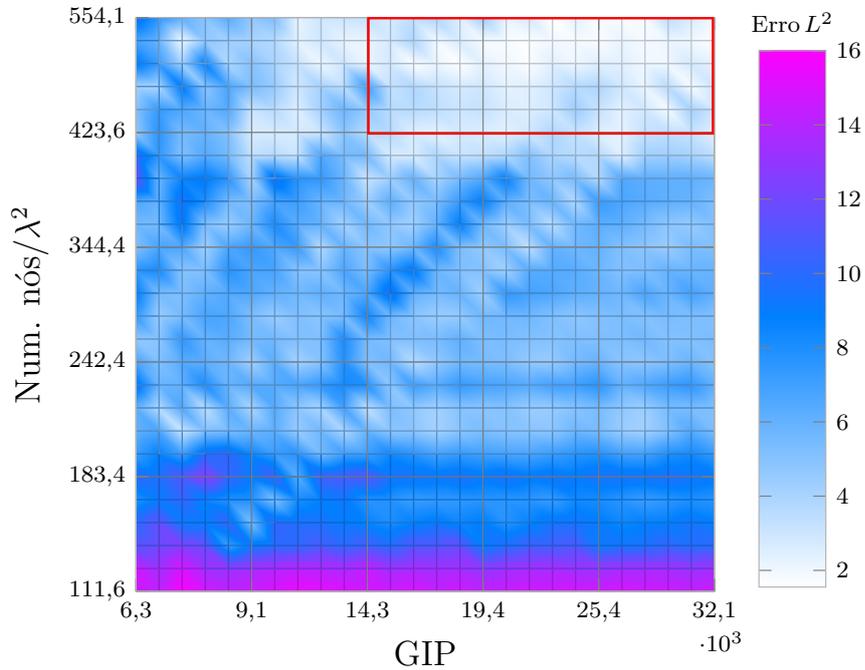


Figura 5.4 – Erro na norma  $L^2$  em relação ao número de nós e de pontos de Gauss.

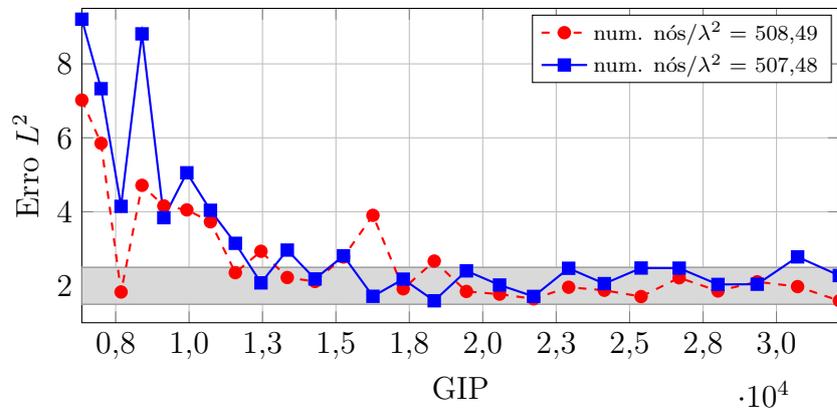


Figura 5.5 – Erro na norma  $L^2$  em relação ao número de pontos de Gauss para diferentes densidade de nós.

### 5.4.3 Domínio de suporte

A precisão das soluções obtidas por métodos sem malha dependem fortemente da determinação de domínios de suporte que estabeleçam uma área de cobertura adequada para a interpolação [1], principalmente quando a distribuição de nós utilizada é não uniforme. Nesse casos, cuidado especial deve ser tomado nessa etapa da solução.

Embora neste trabalho se utilize um algoritmo para a distribuição de nós uniformemente espaçados, não se pode considerar a distribuição resultante rigorosamente uniforme.

Isto se deve ao fato de que são adicionados nós nas fronteiras  $\Gamma_C$  do cilindro espalhador e  $\Gamma$  do domínio global de solução.

Conforme apresentado na seção 4.3, a dimensão  $d_I$  do domínio de suporte  $\Omega_I$  centrado no nó de interesse  $\mathbf{x}_I$  é calculada pela Equação 4.2. Como os nós não estão distribuídos de forma rigorosamente uniforme, o parâmetro  $d_C$  pode ser definido como uma distância média no domínio de suporte de  $\mathbf{x}_I$  e calculado pela Equação 4.3. Adota-se, portanto, a seguinte metodologia para o cálculo de  $d_C$  [1]:

1. estima-se um valor inicial para  $d_I$ , o que permite estimar a área  $A_I$  do domínio de suporte;
2. determina-se o número  $n_{A_I}$  de nós cobertos por  $A_I$ ;
3. calcula-se  $d_C$  utilizando-se a Equação 4.3, e
4. calcula-se o valor definitivo de  $d_I$  utilizando-se a Equação 4.2 para um dado valor de  $\alpha_S$ .

O valor inicialmente atribuído a  $d_I$  não precisa ser muito preciso, mas apenas uma estimativa razoável [1]. Na determinação do valor inicial de  $d_I$  utilizado neste trabalho uma série de execuções do método IEFM-UPML foi realizada. Partindo-se de  $d_I = 0,8\lambda$ , conforme sugerido em [17], chegou-se ao valor de  $d_I = 0,13\lambda$ , que mostrou ser adequado ao gerar soluções mais precisas que os outros valores testados, conforme mostra o gráfico da Figura 5.6. Quanto ao parâmetro  $\alpha_S$  na Equação 4.2, em geral, valores tais que  $2,0 \leq \alpha_S \leq 3,0$  conduzem a bons resultados em diversos problemas [1, 18]. Neste trabalho, no entanto, foi o valor  $\alpha_S = 1,5$  que permitiu gerar os melhores resultados, sendo portanto utilizado em todos os experimentos e análises.

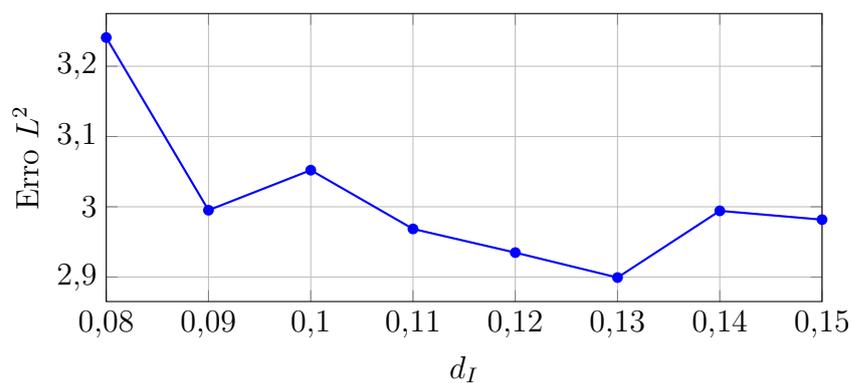


Figura 5.6 – Erro na norma  $L^2$  em função da variação da dimensão estimada do domínio de suporte  $d_I$ .

## 5.5 Análise paramétrica: UPML

Todas as análises realizadas até então utilizam a mesma configuração de UPML definida na seção 5.2. Uma vez definidos os parâmetros relacionados à distribuição de nós

e ao funcionamento do método IIEFG, passa-se a analisar os parâmetros da UPML.

### 5.5.1 Posição da fronteira $\Gamma_{upml}$

Visto que idealmente os campos devem ser rapidamente atenuados após penetrarem na região de PML, a posição da fronteira  $\Gamma_{upml}$  em relação à fronteira  $\Gamma_c$  na superfície do cilindro espalhador determina a área do domínio em que se tem uma solução considerada útil.

Há que se fazer tal distinção porque a solução calculada dentro do meio absorvedor fictício da UPML não representa o comportamento real dos campos no ar (ou, de forma mais geral, no meio arbitrário de que é formado  $\Omega$ ) e, conseqüentemente, não deve ser considerada nas análises comparativas que seguem. Define-se, portanto, o conceito de área de solução útil do problema,  $A_u$ , que é a área da região  $\Omega$  delimitada pelas fronteiras  $\Gamma_C$  e  $\Gamma_{upml}$ .  $\Gamma_C$  é definida a partir da determinação do valor do raio  $r_C$  do cilindro espalhador.

Passa-se a buscar a melhor posição para  $\Gamma_{upml}$ . Para tanto, avalia-se o erro da solução na norma  $L^2$  para os casos em que  $\Gamma_{upml}$  é colocada em diferentes posições. Como a posição de  $\Gamma$  e o número de camadas  $nc$  são mantidos constantes, a largura  $L$  da região de UPML também sofrerá variação durante esse processo.

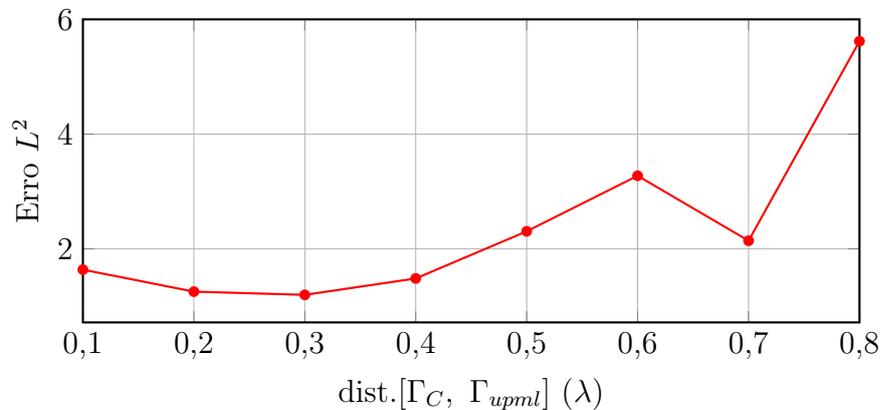


Figura 5.7 – Variação do erro na norma  $L^2$  em função da variação da posição da fronteira  $\Gamma_{upml}$ , dada pela sua distância em relação à  $\Gamma_C$ .

Observa-se da análise do gráfico da Figura 5.7, que pode-se obter soluções com erro  $L^2$  inferior a 2% ajustando-se a distância da fronteira  $\Gamma_{upml}$  em relação à  $\Gamma_c$  para algum valor entre  $0,2\lambda$  e  $0,5\lambda$ .

### 5.5.2 Número de camadas $nc$

Em geral, pode-se afirmar que não é necessário um grande número de camadas para que a PML efetivamente absorva toda a energia dos campos [23, 25, 33, 4]. Sendo assim, avaliou-se a sensibilidade da solução do problema a esse parâmetro variando-se

o número  $nc$  de camadas de 1 a 5. Durante essa avaliação, todos os outros parâmetros definidos na Tabela 5.1 foram mantidos fixos.

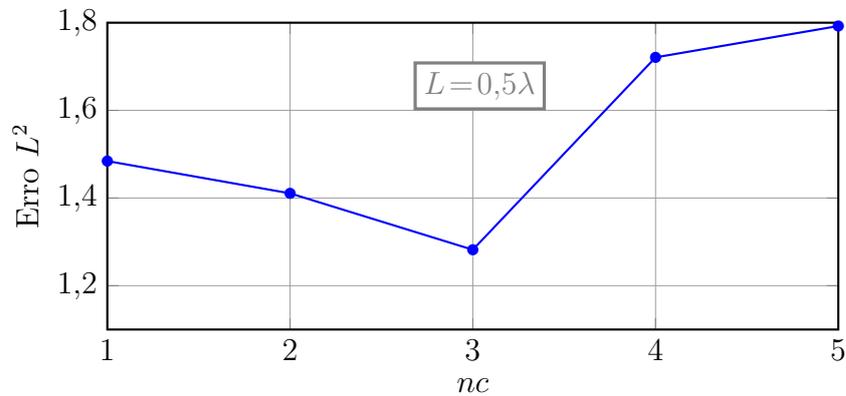
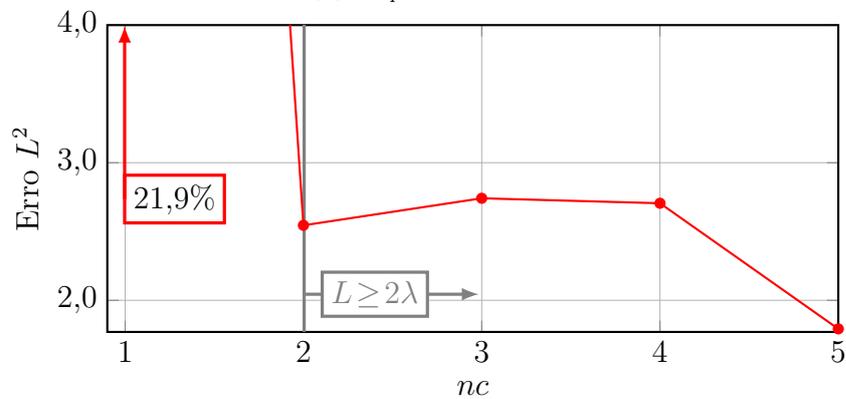
(a)  $w_{upml}$  variável.(b)  $w_{upml} = 0,1\lambda$ .

Figura 5.8 – Erro na norma  $L^2$  em função do número de camadas  $nc$ . Em (a), a largura das camadas  $w_{upml}$  é variável, enquanto em (b)  $w_{upml}$  é mantida fixa no valor  $0,1\lambda$ .

Inicialmente, varia-se o número de camadas de 1 a 5, mantendo fixas as posições de  $\Gamma_{upml}$  e  $\Gamma$ . Naturalmente, a largura da região de UPML também fica constante enquanto a largura de cada camada diminui conforme o número de camadas aumenta. Conclui-se da Figura 5.8a que utilizar 1, 2 ou 3 camadas conduz a soluções de boa precisão – com erro na norma  $L^2$  menor que 1,5%. Utilizando-se 4 ou 5 camadas, nota-se que os valores de erro aumentam sem, contudo, ultrapassar o limite superior de 1,8%.

No experimento seguinte, cujos resultados constam da Figura 5.8b, a posição da fronteira  $\Gamma_{upml}$  é mantida constante enquanto a posição da fronteira  $\Gamma$  é variada. O número de camadas  $nc$  também é variado de 1 a 5, cada camada possuindo uma espessura  $w_{upml} = 0,1\lambda$  fixa. Nota-se aqui que, as melhores precisões são obtidas para um número de camadas maior ou igual a 2, quando o erro na norma  $L^2$  fica sempre menor que 3%. Convém destacar também que, nessa configuração, o custo computacional aumenta com o número de camadas, já que a posição de  $\Gamma$  é ajustada para comportar um número crescente de camadas com largura fixa.

### 5.5.3 Largura da camada $w_{upml}$

No contexto do método FDTD, a largura  $w_{upml}$  das camadas na região de PML é determinada com sendo um múltiplo inteiro (geralmente pequeno) da dimensão de cada célula que, em geral, também possui pequenas dimensões [4]. Entretanto, devido ao uso da discretização sem malha e à maneira particular que o método IIEFG emprega no cálculo dos campos, não é possível adaptar tal metodologia diretamente, principalmente se a distribuição de nós for não uniforme.

Ainda que os nós estejam distribuídos de maneira uniforme, não parece razoável definir  $w_{upml}$  como a distância em que se localiza determinado número de nós, em procedimento análogo ao do FDTD, porque as características do meio UPML representadas pelo tensor  $\bar{\bar{\Lambda}}$  são aplicadas na solução da integral da forma fraca em (3.52) que, por sua vez, é calculada sobre cada um dos pontos de integração de Gauss e não diretamente sobre os nós. Mas como os GIP não estão distribuídos de maneira uniforme (ainda que periodicamente uniforme), haveria a possibilidade de que as camadas assumissem espessuras diferentes no contexto de uma mesma distribuição de nós e de pontos de Gauss.

Assim, a largura  $w_{upml}$  de cada camada é definida em múltiplos de  $\lambda$ . No processo de cálculo da solução, o algoritmo primeiramente verifica se o ponto de Gauss em questão está localizado dentro da região de UPML; em caso positivo, verifica a qual camada o ponto pertence e, só a partir de então, determina o valor dos termos de  $\bar{\bar{\Lambda}}$  naquele ponto e efetua o cálculo da integral.

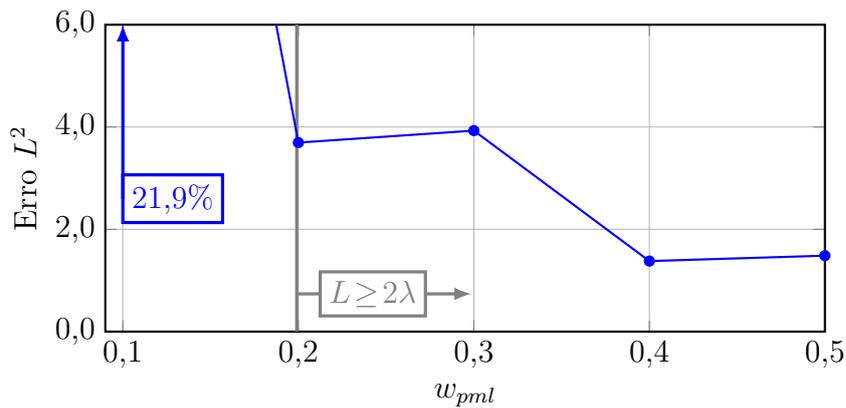


Figura 5.9 –  $w_{upml}$  variável.

Na análise conduzida visando à determinação do melhor valor de  $w_{upml}$ , mantém-se constantes a posição de  $\Gamma_{upml}$  e o número de camadas,  $nc = 1$ . A posição da fronteira  $\Gamma$  é variada causando, por conseguinte, a variação conjunta da largura da região de PML e da única camada utilizada nessa configuração. Verifica-se, portanto, a partir da análise do gráfico na Figura 5.9, que os melhores resultados de precisão são obtidos quando a largura da camada única é maior que  $0,4\lambda$ .

### 5.5.4 Condutividade máxima $\sigma_{max}$

A condutividade máxima  $\sigma_{max}$  é aplicada no cálculo dos termos complexos  $s_\xi$ ,  $\xi = x, y, z$  (definidos na Equação 3.13 da Equação 3.13) que formam o tensor UPML  $\overline{\Lambda}$ . Conforme discutido na subseção 3.4.4, esse parâmetro é de grande importância para o bom desempenho da PML, uma vez que determina o coeficiente de reflexão dos campos incidentes na fronteira  $\Gamma_{upml}$ .

Nesse trabalho, adota-se uma metodologia de cálculo de  $\sigma_{max}$  diferente da apresentada na Equação 3.51. Essa abordagem também leva em consideração o número  $nc$  de camadas além do expoente  $p$  na Equação 3.48 e da largura  $L$  da região de UPML, conforme seguinte equação:

$$\sigma_{max} = \frac{(p+1)nc}{\eta_0 L}. \quad (5.5)$$

### 5.5.5 O parâmetro $p$

O parâmetro  $p$ , definido na subseção 3.4.4, interfere na forma assumida pela curva do perfil de gradação dentro da UPML, ou seja, diferentes valores de  $p$  podem levar a alterações mais abruptas ou mais suaves de  $\sigma_\xi(\xi)$  nas proximidades da interface  $\Gamma_{upml}$ .

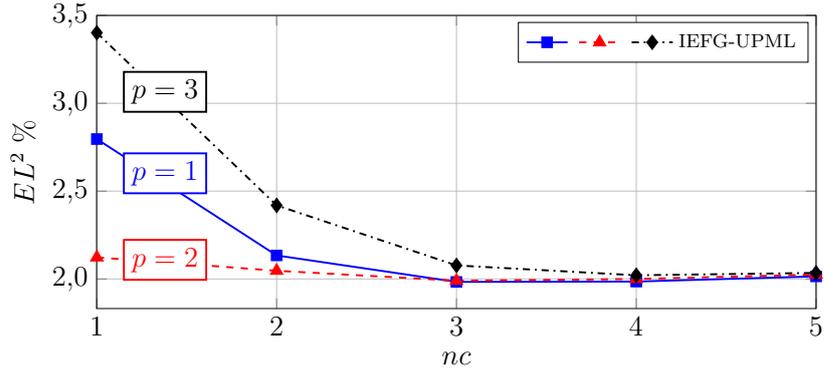
Buscando evidenciar a sensibilidade da solução IIEFG-UPML a esse parâmetro, variou-se o seu valor para diferentes números  $nc$  de camadas e para diferentes espessuras  $w_{upml}$  de camadas numa configuração camada única.

Das Figuras 5.10a e 5.10b percebe-se que valores pequenos de  $p$  provocam uma variação muito lenta da condutividade da UPML e, embora isso contribua para reduzir as reflexões na interface  $\Gamma_{upml}$ , também exige um número maior de camadas, ou ainda uma UPML de maior largura. Assim, nesses casos, os valores do erro tendem a ser muito grandes. A partir de determinado número de camadas ou determinada largura de UPML, o valor de  $p$  passa a ter pouca influência sobre a precisão da solução.

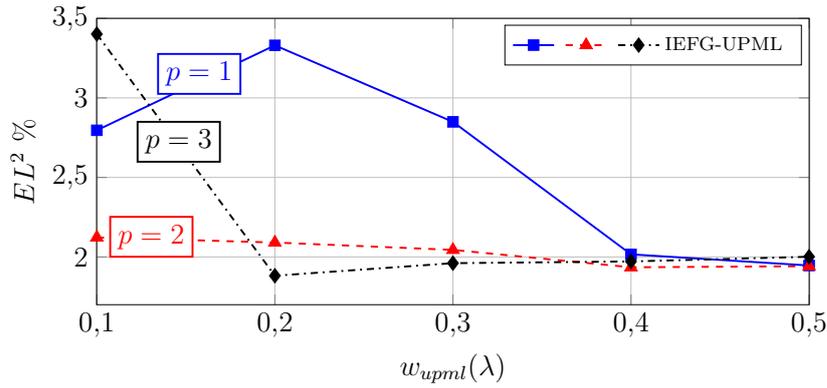
## 5.6 Estudo de caso: espalhadores cilíndricos de maior dimensão

Uma vez determinados os parâmetros para a solução do espalhamento pelo método IIEFG-UPML, passa-se à aplicação do método com esse conjunto de parâmetros na solução do problema em casos que raio do espalhador cilíndrico possui maiores dimensões.

No cálculo da solução pelo método IIEFG-ABC utilizada nas comparações busca-se estabelecer condições semelhantes para a discretização e para a grade de integração, mantendo as demais características particulares de método. Para cada um dos seguintes



(a) Variação dos parâmetros  $p$  e  $nc$ .



(b) Variação dos parâmetros  $p$  e  $w_{upml}$ .

Figura 5.10 – Variação do parâmetro  $p$ . Em (a) varia-se também o número  $nc$  de camadas, mantendo a espessura  $w_{upml}$  de cada uma fixa, e em (b) varia-se  $w_{upml}$  para um configuração de camada única.

casos, estes parâmetros são apresentados. Além disso, os domínios de suporte tem a mesma dimensão, calculada pela Equação 4.2 com  $\alpha_S = 2,0$  e  $d_C$  igual à distância média entre os nós, conforme definido na subseção 5.3.1.

### 5.6.1 Espalhador cilíndrico de raio $r_C = 0,5\lambda$

Aplica-se o método IEFG-UPML ao problema do espalhamento já descrito na seção 5.2, mas desta vez utiliza-se um espalhador cujo raio é  $r_C = 0,5\lambda$ . É utilizada uma única camada com espessura  $w_{upml} = 0,5\lambda$ . O domínio computacional é limitado por um quadrado de lado  $L_D = 3,0\lambda$ . Na discretização sem malha são utilizado 3910 nós resultando numa relação nós/ $\lambda$  de  $\approx 475,98$ . A grade de integração é composta por 36516 pontos de integração de Gauss, ou uma  $RGN \approx 9,34$ . A fronteira  $\Gamma_{upml}$  é posicionada a uma distância de  $0,5\lambda$  da superfície do espalhador  $\Gamma_C$ .

Para o cálculo da solução IEFG-ABC, utilizam-se 2976 nós, com relação nós/ $\lambda$  de aproximadamente 473,65, e 27952 pontos de integração com  $RGN \approx 9,39$ . O raio da fronteira ABC nesse caso é  $r_{abc} = 0,5L_{upml} = 1,5\lambda$ .

A Figura 5.11 compara os gráficos de magnitude do campo elétrico espalhado obtidos pelas soluções analítica, IIEFG-ABC e IIEFG-UPML.

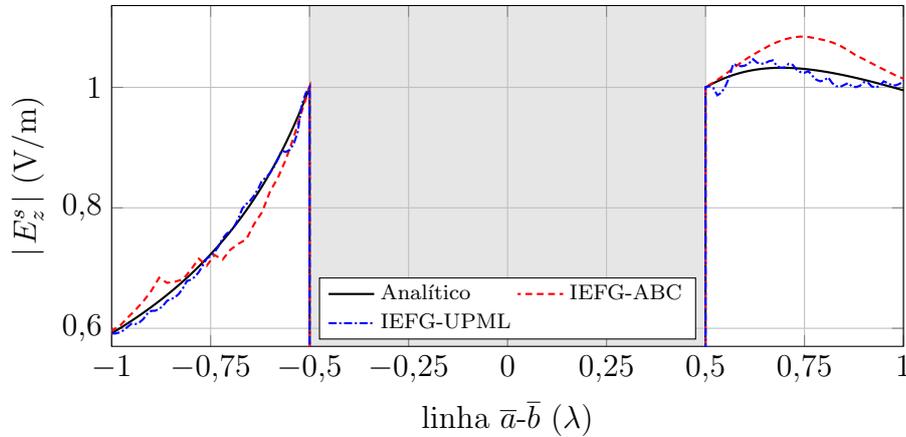


Figura 5.11 – Magnitude do campo elétrico,  $r_C = 0,5\lambda$ .

Observa-se que a curva de magnitude de  $E_z^s$  obtida pela solução IIEFG-UPML acompanha a curva da solução analítica ao longo de praticamente toda a região de solução útil, embora oscile visivelmente entre as posições  $0,5\lambda$  e  $1,0\lambda$ . A solução IIEFG-ABC, no entanto, apresenta desvios mais pronunciados em todos os pontos, errando significativamente no intervalo  $(0,5\lambda, 1,0\lambda]$ .

### 5.6.2 Espalhador cilíndrico de raio $r_C = 1,0\lambda$

Desta vez, analisa-se o desempenho do método IIEFG-UPML na solução do espalhamento por um cilindro com raio  $r_C = 1,0\lambda$ . Novamente, uma configuração de camada única é utilizada, com  $w_{upml} = 0,5\lambda$ . O domínio computacional é novamente quadrado, com lado igual  $L_D = 4,0\lambda$ . A discretização utiliza 5077 nós, com relação nós/ $\lambda$  de aproximadamente 394,84 e a grade de integração contém agora 46284 pontos de integração de Gauss, com  $RGN \approx 9,12$ . Também nesse caso, mantém-se a fronteira  $\Gamma_{upml}$  posicionada a  $0,5\lambda$  de  $\Gamma_C$ .

A solução IIEFG-ABC é calculada, utilizando-se 3727 nós, com relação nós/ $\lambda$  de aproximadamente 395,45, e 33920 pontos de integração com  $RGN \approx 9,10$ . O raio da fronteira ABC é calculado como  $r_{abc} = 0,5L_{upml} = 2,0\lambda$ .

A Figura 5.12 compara os gráficos de magnitude do campo elétrico espalhado obtidos pelas soluções analítica, IIEFG-ABC e IIEFG-UPML.

Novamente observa-se razoável correspondência entre a curva da solução IIEFG-UPML em relação à solução analítica ao longo da região avaliada. Os desvios no intervalo  $\bar{a}$  agora são ligeiramente maiores nas proximidades da posição  $-1,5\lambda$  se comparados ao caso anterior. A solução IIEFG-ABC também apresenta oscilações de maior amplitude, além de grandes desvios no intervalo  $(1,0\lambda, 1,5\lambda]$ .

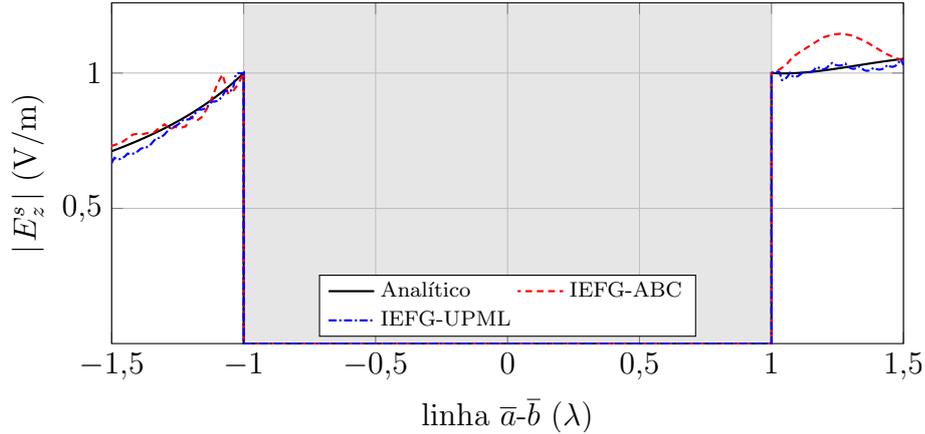


Figura 5.12 – Magnitude do campo elétrico,  $r_C = 1,0\lambda$ .

### 5.6.3 Espalhador cilíndrico de raio $r_C = 1,5\lambda$

Por fim, avalia-se o caso do espalhador de raio  $r_C = 1,5\lambda$ . Desta vez, são utilizadas duas camadas, com  $w_{upml} = 0,25\lambda$  cada. O domínio computacional é um quadrado de lado igual  $L_D = 5,0\lambda$ . O domínio é discretizado por 4522 nós, com relação nós/ $\lambda$  de aproximadamente 252,18 e uma grade de integração com 41308 pontos de integração de Gauss é utilizada, com  $RGN \approx 9.14$ .

No cálculo da solução IIEFG-ABC, utilizam-se 3188 nós, que resultam numa relação nós/ $\lambda$  de aproximadamente 253,69, e 28944 pontos de integração com  $RGN \approx 9,08$ . O raio da fronteira ABC é calculado como  $r_{abc} = 0,5L_D = 2,5\lambda$ . A posição de  $\Gamma_{upml}$  é mantida a  $0,5\lambda$  de  $\Gamma_C$ .

A Figura 5.13 compara os gráficos de magnitude do campo elétrico espalhado obtidos pelas soluções analítica, IIEFG-ABC e IIEFG-UPML.

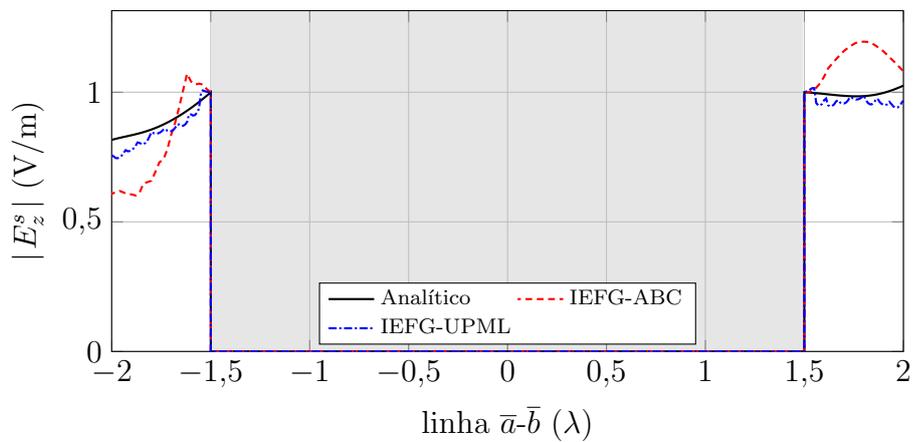


Figura 5.13 – Magnitude do campo elétrico,  $r_C = 1,0\lambda$ .

Nesse caso observam-se os maiores desvios das duas soluções numéricas em relação à solução analítica. No entanto, a solução IIEFG-UPML se desvia consideravelmente menos

que a solução IIEFG-ABC, e acompanhando a forma da curva analítica, ainda que com um erro visivelmente grande.

## 5.7 Análise do custo computacional

Visando à uma caracterização mais abrangente do método IIEFG-UPML realiza-se uma análise do seu custo computacional. Uma análise semelhante é conduzida para o método IIEFG-ABC, sendo os resultados em seguida comparados.

### 5.7.1 Metodologia

Todas as execuções dos métodos sob análise foram realizadas em computadores pessoais destinados a múltiplas tarefas, de tal forma que os recursos computacionais foram compartilhados entre todos os processos ativos no momento da execução dos métodos.

Por esse motivo, adota-se aqui uma metodologia simplificada para a análise do custo computacional temporal dos métodos. Tal metodologia consiste na obtenção do tempo médio de execução (TME) do método sob determinada configuração geométrica e de parâmetros calculado pela média aritmética dos tempos individuais de execução seguida e alternada do método.

A metodologia descrita é aplicada aos métodos IIEFG-UPML e IIEFG-ABC no cálculo da solução do problema do espalhamento em cada um dos casos analisados, já que o custo temporal de execução não varia linearmente com o número de nós ou de pontos de Gauss. Os resultados podem ser vistos na Figura 5.14. Verifica-se facilmente que o método IIEFG-UPML exige um custo computacional maior para o processamento das soluções. Isto se deve ao fato de que, apesar de utilizar a mesma técnica numérica sem malha que o método IIEFG-ABC, há pelo menos duas diferenças importantes: a forma do domínio se torna retangular com a introdução do meio UPML, o que também acarreta num maior número de operações necessárias para o cálculo dos parâmetros, e o método de cálculo da dimensão dos domínios de influência que, no método IIEFG-ABC tem sempre o mesmo tamanho.

Note-se que os tempos de execução obtidos são indicadores de custo relativos às condições específicas – particularmente o computador – em que as execuções dos métodos foram realizadas, devendo ser comparados apenas com indicadores temporais obtidos em condições semelhantes. Uma análise do custo de recursos – principalmente de memória e de armazenamento – é também cabível, mas entende-se ser a análise temporal de maior relevância para o presente trabalho.

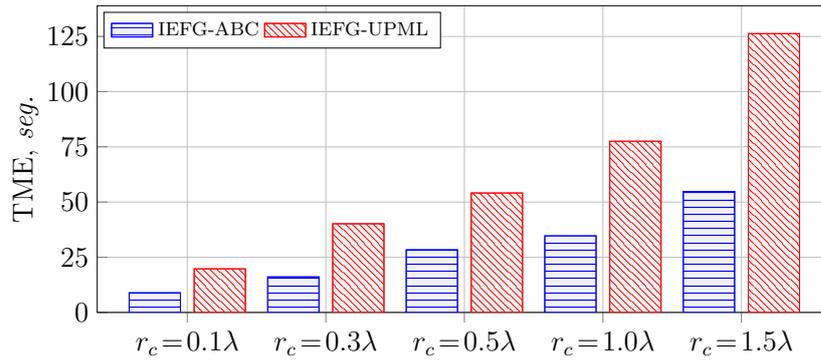


Figura 5.14 – Tempo médio de execução dos métodos IIEFG-UPML e IIEFG-ABC para cada um dos casos analisados.

## 5.8 Análise do condicionamento da matriz do sistema linear

Embora os métodos IIEFG-ABC e IIEFG-UPML utilizem a mesma formulação variacional, busca-se investigar o condicionamento da matriz do sistema linear final visto que esta pode sofrer com interferências da aplicação do método de truncamento de domínio.

Assim como no caso da avaliação do custo, o condicionamento das matrizes foram obtidos e armazenados na execução dos dois métodos em alguns casos determinados de discretização e de valores de parâmetros.

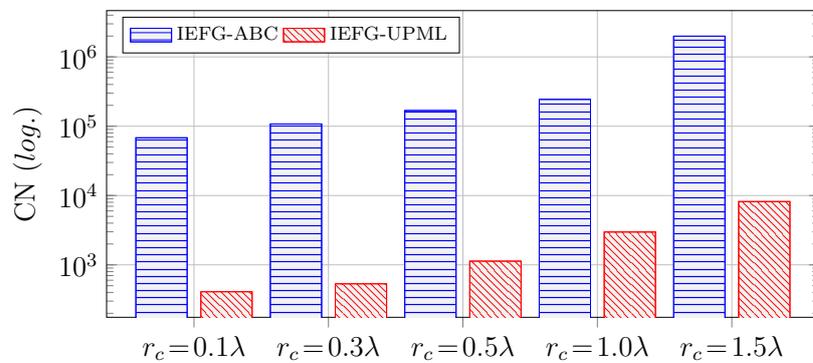


Figura 5.15 – Condicionamento da matriz do sistema linear.

## 5.9 Considerações finais

O presente capítulo apresenta a análise dos parâmetros do método IIEFG-UPML e o resultado comparativo das soluções analítica e numéricas IIEFG-ABC e IIEFG-UPML. Define-se primeiramente a geometria e as condições do problema do espalhamento sob investigação e, em seguida define se a metodologia de avaliação de avaliação da precisão. Apresentam-se a formulação do erro na norma  $L^2$  e solução IIEFG-ABC, utilizada nas análises comparativas.

Segue-se a análise dos parâmetros exclusivos do método IIEFG, quando são determinados os parâmetros de discretização, da grade de integração e a dimensão do domínio de suporte. Nas análises seguintes, são avaliados e definidos os parâmetros da UPML. Diante dos resultados obtidos podem-se formar as seguintes conclusões a respeito dos valores de cada um dos parâmetros a serem aplicados a UPML:

- posição de  $\Gamma_{upml}$ : deve variar entre  $0,2\lambda$  e  $0,5\lambda$ , conforme a Figura 5.7. Tais valores determinam que a largura  $L$  da região de PML varie entre  $0,5\lambda$  e  $0,8\lambda$ , já que  $\Gamma$  está fixo em  $1,0\lambda$ ;
- número  $nc$  de camadas: de 1 a 3 camadas, desde que a largura  $L$  da região de PML seja maior que  $0,2\lambda$ , conforme pode-se comprovar observando-se as figuras 5.9 e 5.7;
- largura  $w_{upml}$  da camada: considerando os valores limites de  $nc$  e da posição de  $\Gamma_{upml}$ , calcula-se que  $w_{upml}$  deve estar entre  $0,5\lambda$  (para  $nc = 1$  e  $L = 0,5\lambda$ ) e  $\approx 0,27\lambda$ , (para  $nc = 3$  e  $L = 0,8\lambda$ );
- condutividade máxima  $\sigma_{max}$ : calculada de acordo com Equação 5.5.
- grau do 'polinômio'  $p$ : valores de  $p$  tais que  $1 \leq p \leq 3$  são aceitáveis para um número de camadas  $nc \geq 2$  ou uma largura de UPML  $L_{upml} > 0,4\lambda$ .

Tais parâmetros são então aplicados ao método na solução do espalhamento por geometrias semelhantes mas de maiores dimensões. Os resultados são apresentados e comparados à solução analítica e à solução numérica pelo método IIEFG-ABC. A Tabela 5.3 mostra os valores do erro na norma  $L^2$  para cada um dos casos, tanto para o método IIEFG-UPML quanto para o método IIEFG-ABC. O erro na norma  $L^2$  evolui de forma crescente à medida que se aumenta o raio  $r_C$  do cilindro conforme pode ser visto na Figura 5.16.

Tabela 5.3 – Comparação do desempenho dos métodos quanto à precisão da solução.

Método	Erro $L^2$			
	$r_C = 0,1\lambda$	$r_C = 0,5\lambda$	$r_C = 1,0\lambda$	$r_C = 1,5\lambda$
IIEFG-ABC	1,90%	2,69%	7,08%	17,74%
IIEFG-UPML	1,45%	2,35%	3,90%	13,77%

Por fim, apresentam-se brevemente as análises do custo computacional e do condicionamento das matrizes do sistema linear comparando os métodos IIEFG-ABC e IIEFG-UPML, da qual conclui-se que o método IIEFG-UPML apresenta custo computacional mais elevado; porém as matrizes geradas para a solução do sistema linear apresentam-se muito mais bem condicionadas que as do método IIEFG-ABC. Justifica-se esta característica pelo fato de que a introdução do material fictício da UPML resulta numa maior diferença entre

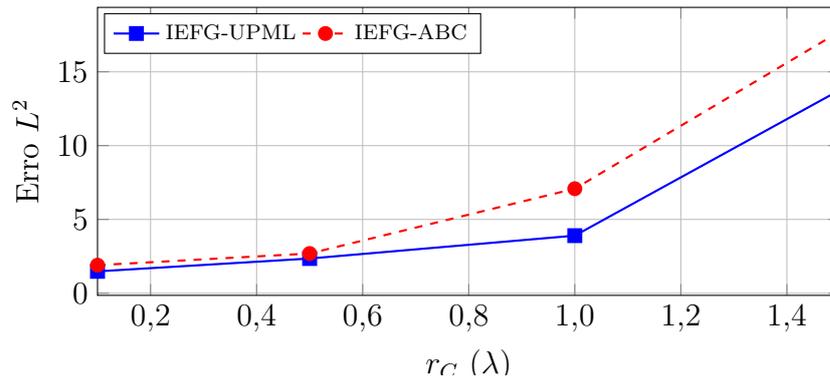


Figura 5.16 – Comportamento do erro  $L^2$  com o aumento de  $r_C$ .

os termos da matriz melhorando o seu condicionamento. No que diz respeito ao custo computacional elevado, este se deve ao custo adicional para o cálculo dos termos dos tensores em cada posição dentro da UPML e das dimensões dos domínios de suporte.

De forma geral, no que diz respeito à precisão, tanto o método IIEFG-UPML como o IIEFG-ABC apresentam um desempenho melhor nos casos em que o raio do cilindro é menor, mas o IIEFG-UPML obtém resultados melhores em todos os casos, mostrando ainda uma menor taxa de aumento do erro, conforme pode-se concluir da Tabela 5.3.

---

## Conclusões e trabalhos futuros

Este trabalho tem como objetivo analisar o método sem malha IIEFG para a solução do problema do espalhamento de uma onda eletromagnética por um cilindro condutor aplicando como método de limitação do domínio computacional a técnica PML uniaxial. Tal análise é conduzida sempre com vistas à melhoria da precisão das soluções numéricas obtidas para o problema.

Inicia-se com o estudo do problema do espalhamento eletromagnético, apresentando-se a sua definição geral, seguida da definição do caso particular em que o espalhamento é analisado em duas dimensões. Passa-se à desenvolver a modelagem matemática do problema: a partir da formulação forte – que é a própria equação de Helmholtz, obtida diretamente das Equações de Maxwell – a forma fraca é deduzida. Nesse processo, são definidas as características dos espaços de funções candidatas à solução, reduzindo-se as exigências para tanto. A forma fraca obtida constitui um modelo matemático contínuo adequado à discretização e à posterior implementação computacional.

Sendo o espalhamento em estudo um problema de propagação ilimitada de ondas, discutem-se os métodos de limitação do domínio de solução. Apresentam-se a condição teórica de Sommerfeld e a sua aplicação prática aproximada na forma das condições de contorno absorventes. As condições de Engquist-Majda e de Bayliss-Turkel de primeira e segunda ordem são deduzidas.

A limitação do domínio por camadas perfeitamente casadas (PML) é então analisada. Partindo do conceito inicial e analisando-se os casos de incidência oblíqua de ondas planas, chega-se à primeira formulação de PML, a PML *split-field*, com a sua incorporação às equações modificadas de Maxwell. O conceito da PML baseada em um material anisotrópico com perdas – a PML uniaxial – é introduzido. Prossegue-se na definição da UPML com a análise das incidências oblíqua em meios anisotrópicos, definindo em seguida o coeficiente

de reflexão e as características de perdas do meio para que se comporte como uma PML. A UPML já completamente estabelecida é incorporada à forma fraca do problema.

Segue-se o estudo dos métodos sem malha, suas características, particularidades e o seu modo geral de construção e funcionamento. Conceitos essenciais como a discretização sem malha, domínio de influência, domínio de suporte e funções de forma são introduzidos. Apresenta-se o método de Galerkin e o método dos mínimos quadrados móveis – MLS. O método de Galerkin, na sua forma tradicional, considera a existência de uma solução aproximada em cada nó e utiliza o método dos mínimos quadrados móveis para minimizar a diferença entre essa aproximação e a solução exata. Uma função de peso singular é utilizada nesse processo tornando o MLS interpolante.

Para a obtenção dos resultados comparativos, avaliam-se os principais parâmetros da técnica numérica combinada IIEFG-UPML. São definidas as características do caso base em que o cilindro espalhador tem um raio pequeno, de  $0,1\lambda$ . Esse caso é utilizado na análise paramétrica que se segue. Apresenta-se a solução do espalhamento pelo método IIEFG-ABC que utiliza condições de contorno absorventes na fronteira do domínio. As soluções IIEFG-UPML e IIEFG-ABC são comparadas à solução analítica utilizando-se a formulação do erro na norma  $L^2$ . Tal comparação constitui a metodologia de avaliação da precisão das soluções.

Na análise paramétrica avaliam-se inicialmente os parâmetros relacionados ao método IIEFG: as formas distribuição de nós e a densidade da discretização, assim como a construção da grade de integração e a dimensão dos domínios de suporte. Na análise da UPML são avaliadas a posição da fronteira da UPML, o número e a largura das camadas, o valor máximo e o perfil da condutividade do meio anisotrópico.

Determinados os parâmetros, casos de cilindros com raios maiores são analisados:  $0,5\lambda$ ,  $1,0\lambda$  e  $1,5\lambda$ . Nesta análise são apresentadas as condições de cálculo da solução nos métodos IIEFG-UPML e IIEFG-ABC e os gráficos da magnitude do campo elétrico em função da posição ao longo de uma linha. No gráfico a solução analítica é comparada às duas soluções numéricas e, de modo geral, a solução IIEFG-UPML se mostra mais precisa. Por fim, discute-se brevemente o custo computacional e o condicionamento das matrizes do sistema linear nas soluções numéricas.

## 6.1 Trabalhos futuros

Conforme visto anteriormente, os métodos sem malha encontram-se em fase ainda primária de desenvolvimento quando comparados à técnicas totalmente estabelecidas como o FEM. A adoção desses métodos em conjunto com alguma formulação de PML é ainda mais recente, especialmente na solução de problemas de eletromagnetismo. Diante desse

cenário, é razoável, portanto, considerar que este é um campo de pesquisa em que existe bastante espaço para desenvolvimento e evolução. Dentre as possibilidades de pesquisas e de trabalhos que apresentam como possíveis desdobramentos desse trabalho, citam-se as seguintes:

- aperfeiçoamento da implementação do método de solução IIEFG aplicado ao espalhamento, especificamente na etapa de representação discreta do domínio com o objetivo de gerar distribuições de nós não uniforme que permitam concentrar nós em regiões de interesse para a solução do problema. Isso elevaria potencialmente a eficiência computacional do método, podendo também ter impacto positivo na precisão das soluções;
- implementação da UPML em uma região de formato cilíndrico visando à redução do custo computacional devido à distribuição de nós adicionais nas quinas em decorrência da utilização do absorvedor fictício de forma retangular;
- pesquisa e implementação de outras abordagens de PML como a CPML, já que estudos anteriores evidenciam que essa abordagem é mais eficiente na absorção de modos evanescentes, o que aumentaria a abrangência do método em termos da quantidade de problemas que consegue solucionar satisfatoriamente;
- modificação da implementação do método para permitir a solução de problemas tridimensionais;
- implementação do método em uma linguagem independente de plataforma como C, visando aumentar a eficiência computacional e permitir a solução de problemas maiores. Tal implementação poderia considerar padrões modernos de desenvolvimento de aplicações científicas incluindo a capacidade de realizar processamento paralelo ou distribuído.

Naturalmente, essas sugestões não se excluem, podendo ser, cada uma delas, alvo de estudos específicos, ou ainda consideradas em conjunto numa abordagem mais ampla.

# Referências

- [1] LIU, G. R.; GU, Y. T. **An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming**. Ed. 1. Dordrecht, NY: Springer, 2005. ISBN 9781402034688.
- [2] HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Nova York: Prentice Hall, 1987. ISBN 013317025-X.
- [3] JIN, J. **The Finite Element Method in Electromagnetics**. Ed. 2. Nova York, NY: John Wiley & Sons, 2002.
- [4] TAFLOVE, A.; HAGNESS, S. C. **Computational Electrodynamics: The Finite-difference Time-domain Method**. Ed. 3. [S.l.]: Artech House, 2005. (Artech House antennas and propagation library). ISBN 9781580538329.
- [5] LIU, G. R. **Mesh free methods: moving beyond the finite element method**. Ed. 1. Boca Raton, Fl.: CRC Press LLC, 2003.
- [6] Lucy, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. **Astronomical Journal**, v. 82, p. 1013–1024, dez. 1977.
- [7] GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 181, p. 375–389, nov. 1977.
- [8] MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics. **Annual review of astronomy and astrophysics**, v. 30, p. 543–574, 1992.
- [9] NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. **Computational Mechanics**, Springer-Verlag, v. 10, n. 5, p. 307–318, set. 1992. ISSN 0178-7675.
- [10] LIU, W. K.; JUN, S.; ZHANG, Y. F. Reproducing kernel particle methods. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 20, n. 8-9, p. 1081–1106, jun. 1995. ISSN 1097-0363.
- [11] OÑATE, E. et al. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 39, n. 22, p. 3839–3866, nov. 1996. ISSN 1097-0207.
- [12] ATLURI, S. N.; ZHU, T. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. **Computational Mechanics**, Springer-Verlag, v. 22, n. 2, p. 117–127, 1998.
- [13] WANG, J. G.; LIU, G. R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 54, n. 11, p. 1623–1648, 2002. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.489>>.

- [14] BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free Galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 37, n. 2, p. 229–256, 1994. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620370205>>.
- [15] LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces generated by moving least squares methods. **Mathematics of Computation**, v. 37, n. 155, p. 141–158, jul. 1981. ISSN 1088-6842.
- [16] MARQUES, G. N. et al. Interpolating EFGM for computing continuous and discontinuous electromagnetic fields. **COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering**, v. 26, n. 5, p. 1411–1438, 2007.
- [17] COPPOLI, E. H. d. R. **Modelagem de Dispositivos Eletromagnéticos Através de Métodos sem Malha**. Tese (Doutorado), Petrópolis, 2010.
- [18] RESENDE, U. do C.; COPPOLI, E. H. da R.; AFONSO, M. M. A meshless approach using efg interpolating moving least-squares method in 2-d electromagnetic scattering analysis. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 51, n. 3, p. 1–4, mar. 2015. ISSN 0018-9464.
- [19] HARRINGTON, R. F. **Time-harmonic electromagnetic fields**. Nova York, NY: Wiley, 2001.
- [20] ENGQUIST, B.; MAJDA, A. Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves. **Mathematics of Computation**, v. 31, n. 139, p. 629–651, 1977.
- [21] BAYLISS, A.; TURKEL, E. Radiation boundary conditions for wave-like equations. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 33, n. 6, p. 707–725, 1980. ISSN 1097-0312.
- [22] PETERSON, A. F.; RAY, S. L.; MITTRA, R. **Computational methods for electromagnetics**. Ed. 1. Nova York, NY: Oxford University Press, 1998.
- [23] BERENGER, J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. **Journal of Computational Physics**, v. 114, n. 2, p. 185–200, 1994. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999184711594>>.
- [24] CHEW, W. C.; WEEDON, W. H. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. **Microwave and Optical Technology Letters**, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 7, n. 13, p. 599–604, set. 1994. ISSN 1098-2760. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/mop.4650071304>>.
- [25] SACKS, Z. S. et al. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 43, n. 12, p. 1460–1463, Dec 1995. ISSN 0018-926X.

- [26] RODEN, J. A.; GEDNEY, S. D. Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media. **Microwave and Optical Technology Letters**, John Wiley & Sons, Inc., v. 27, n. 5, p. 334–339, 2000. ISSN 1098-2760. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1002/1098-2760\(20001205\)27:5<334::AID-MOP14>3.0.CO;2-A](http://dx.doi.org/10.1002/1098-2760(20001205)27:5<334::AID-MOP14>3.0.CO;2-A)>.
- [27] MENDES, M. L. et al. Smoothed particle electromagnetics with boundary absorbing condition using perfectly matched layers. In: **2008 IET 7th International Conference on Computation in Electromagnetics**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 164–165. ISSN 0537-9989.
- [28] YU, Y.; CHEN, Z. Meshless RPIM modeling of open-structures using PMLs. In: **2010 IEEE MTT-S International Microwave Symposium**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 97–100. ISSN 0149-645X.
- [29] KAUFMANN, T.; FUMEAUX, C. Explicit time-stepping scheme for radial perfectly matched layers in staggered meshless methods. In: **2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1324–1328. ISSN 2164-3342.
- [30] KAUFMANN, T.; FUMEAUX, C. A scattered field formulation of the time-domain Radial Point Interpolation Method using radial perfectly matched layers. In: **2012 Asia-Pacific Symposium on Electromagnetic Compatibility**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 713–716. ISSN 2162-7673.
- [31] SHATERIAN, Z.; KAUFMANN, T.; FUMEAUX, C. Hybrid staggered perfectly matched layers in non-staggered meshless time-domain vector potential technique. In: **2014 International Workshop on Antenna Technology: Small Antennas, Novel EM Structures and Materials, and Applications (iWAT)**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 375–378.
- [32] NICOMEDES, W. L. et al. Meshfree analysis of electromagnetic wave scattering from conducting targets: Formulation and computations. **Computers & Structures**, v. 184, p. 36–52, 2017. ISSN 0045-7949. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794916312226>>.
- [33] GEDNEY, S. D. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 44, n. 12, p. 1630–1639, dez. 1996. ISSN 0018-926X.
- [34] WU, J.-Y. et al. A comparison of anisotropic PML to Berenger’s PML and its application to the finite-element method for EM scattering. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 45, n. 1, p. 40–50, jan. 1997. ISSN 0018-926X.
- [35] BALANIS, C. A. **Advanced engineering and electromagnetics**. Ed. 2. Hoboken, NJ: Wiley, 2012. ISBN 9780470589489.
- [36] AFONSO, M. M. **Métodos híbridos na solução de problemas de espalhamento eletromagnético**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

- [37] TREFETHEN, L. N.; HALPERN, L. Well-Posedness of One-way Wave Equations and Absorbing Boundary Conditions. **Mathematics of Computation**, American Mathematical Society, Boston, MA, USA, v. 47, n. 176, p. 421–435, out. 1986. ISSN 0025-5718.
- [38] RUMPF, R. **Lecture 9: Perfectly Matched Layer**. 2015. Online. Notas de aula. Disponível em: <<http://emlab.utep.edu/ee5390cem/Lecture%209%20--%20Perfectly%20Matched%20Layer.pdf>>.
- [39] VIANA, S. A. **Estudo dos Métodos sem malha na resolução de problemas eletromagnéticos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, jul. 1998. Acesso em: 4 mai. 2014.
- [40] PINTO, A. G. M. **Análise das Condições Absorventes de Engquist-Majda e Bayliss-Turkel Aplicadas ao Espalhamento Eletromagnético**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João Del Rei; Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2012.
- [41] CHRISTOPHE, G.; JEAN-FRANÇOIS, R. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, maio 2009. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2579>>.
- [42] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Ed. 8. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2006. ISBN 9788521614999.

# Apêndices

# APÊNDICE A – A equação da onda eletromagnética e sua solução em 2D

## A.I Equações de Maxwell

As relações e variações de campos elétricos e magnéticos, cargas e correntes associadas a ondas eletromagnéticas são regidas pelas leis físicas conhecidas por equações de Maxwell [35], assim nomeadas em homenagem ao físico e matemático escocês James Clerk Maxwell que publicou em meados do século XIX uma primeira forma dessas equações.

As equações de Maxwell são comumente apresentadas nas formas integral ou diferencial no domínio do tempo. Em sistemas práticos envolvendo ondas eletromagnéticas, as variações temporais são da forma cossenoidal sendo, portanto, denominadas harmônicas temporais. As equações (A.1a) a (A.1d) são as equações de Maxwell na forma diferencial harmônica para um meio sem fontes [35].

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}, \quad (\text{Lei de Faraday}) \quad (\text{A.1a})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}, \quad (\text{Lei de Ampère}) \quad (\text{A.1b})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (\text{A.1c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m. \quad (\text{Lei de Gauss do magnetismo}) \quad (\text{A.1d})$$

onde:

- $\omega$  é a frequência angular (rad/s);
- $\mathbf{E}$  é o vetor intensidade de campo elétrico (V/m);
- $\mathbf{H}$  é o vetor intensidade de campo magnético (A/m);
- $\mathbf{D}$  é o vetor densidade de fluxo elétrico (C/m<sup>2</sup>);
- $\mathbf{B}$  é o vetor densidade de fluxo magnético (Wb/m<sup>2</sup>);
- $\mathbf{J}$  é o vetor densidade de corrente de condução (A/m<sup>2</sup>);
- $\rho_e$  é a densidade de carga elétrica (C/m<sup>3</sup>);
- $\rho_m$  é a densidade de carga magnética (Wb/m<sup>3</sup>).

Note-se que a quantidade  $\rho_m$  não possui significado físico; sendo que sua inclusão visa tornar as equações simétricas [35].

Além das quatro equações de Maxwell, outra equação relevante ao estudo do espalhamento pode ser obtida a partir da Lei de Ampère: tomando-se o divergente da Equação A.1b obtém-se a equação da continuidade. Esta equação relaciona as variações na densidade de corrente  $\mathbf{J}$  e na densidade de carga  $\rho_e$ , estabelecendo a conservação da carga elétrica [35].

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}. \quad (\text{A.2})$$

### A.I.1 Relações constitutivas

Diferentemente do espaço livre, os meios materiais podem conter partículas carregadas de tal forma que, quando submetidos a um campo eletromagnético, estas partículas interagem com o campo, produzem correntes que tornam a propagação da onda naquele meio diferente da que seria no vácuo. São dadas, portanto, as relações constitutivas, que descrevem a presença e o comportamento destas cargas em escala macroscópica.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (\text{A.3a})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (\text{A.3b})$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (\text{A.3c})$$

Onde:

$\epsilon$  é a permissividade dielétrica do meio ( $F/m$ );

$\mu$  é a permeabilidade magnética do meio ( $H/m$ );

$\sigma$  é condutividade elétrica do meio ( $S/m$ ).

No caso mais geral,  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  são tensores cujos termos são funções do espaço e da intensidade dos campos. No caso de ser isotrópico o meio material em questão, os parâmetros constitutivos são escalares. Semelhantemente, se o meio for também homogêneo e linear, os parâmetros são constantes [36].

São também usualmente definidas a permissividade e a permeabilidade relativas,  $\epsilon_r$  e  $\mu_r$ , ambas em função de  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ , tais que:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (\text{A.4b})$$

Onde:

$\epsilon_0$  é a permissividade dielétrica do vácuo,  $8,85 \times 10^{-12}$  F/m,

$\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo,  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m.

## A.II Equação de Onda

As equações de Maxwell apresentadas na seção A.I são equações diferenciais acopladas de primeira ordem, o que significa que em cada equação existe mais de um campo desconhecido. Uma operação de desacoplamento é possível ao custo da elevação da ordem da equação: é obtida para cada campo uma equação diferencial parcial de segunda ordem normalmente conhecida como equação da onda. Assim, os campos para um dado problema de eletromagnetismo formulado como um problema de valor de contorno podem ser obtidos pela solução das equações de Maxwell ou das equações de onda [35].

Uma vez que o espalhamento é, essencialmente, um problema de propagação de ondas eletromagnéticas, apresenta-se a dedução e a solução da equação de onda [19].

Para meios com as características definidas na subseção 2.2.1,  $\mathbf{J}_i = \rho_e = 0$  e  $\mathbf{K}_i = \rho_m = 0$  nas Leis de Faraday e de Ampère – equações (A.1a) e (A.1b) – que podem ser rescritas da seguinte forma, aplicando-se as relações (A.3a), (A.3b) e (A.3c):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad (\text{A.5a})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + j\omega\epsilon\mathbf{E}. \quad (\text{A.5b})$$

Toma-se, então, o rotacional de ambos os membros da Equação A.5a para se obter:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}$$

Na equação resultante, substitui-se  $\nabla \times \mathbf{H}$  por  $\sigma\mathbf{E} + j\omega\epsilon\mathbf{E}$ , conforme a Equação A.5b.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu(\sigma\mathbf{E} + j\omega\epsilon\mathbf{E}) = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}$$

Em seguida, aplica-se ao resultado a seguinte identidade vetorial;

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A},$$

em que  $\mathbf{A}$  é um campo vetorial harmônico qualquer. A equação resultante é:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}.$$

Sabe-se da Lei Gauss (A.1c), no entanto, que  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  é igual a uma constante, de forma que o gradiente no primeiro termo da equação anterior se anula. A equação de onda para o campo elétrico  $\mathbf{E}$  pode ser então definida, conforme a Equação A.6.

$$\nabla^2\mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.6})$$

Define-se aqui o número de onda  $k = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$ , também chamado de constante de propagação do meio por metro. Escrito na forma  $k^2 = \alpha + j\beta$ , pode-se ainda

definir a constante de atenuação  $\alpha$ , dada em Np/m, e a constante de fase  $\beta$ , dada em rad/m.

Procedimento semelhante pode ser desenvolvido para se obter a equação de onda para o campo magnético  $\mathbf{H}$ , mostrada na Equação A.7.

$$\nabla^2 \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.7})$$

As equações (A.6) e (A.7) são equações diferenciais de segunda ordem desacopladas conhecidas como equações de onda vetoriais para  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , respectivamente [35].

Sendo estas equações semelhantes, em muitas vezes é conveniente escrevê-las utilizando uma forma única e mais geral:

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathbf{U}) + k^2 \alpha_2 \mathbf{U} = 0. \quad (\text{A.8})$$

onde  $\mathbf{U}$  representa o campo vetorial,  $\alpha_1 = 1/\mu_r$  e  $\alpha_2 = \epsilon_r$  quando  $\mathbf{U}$  representa o campo elétrico  $\mathbf{E}$ , e  $\alpha_1 = 1/\epsilon_r$  e  $\alpha_2 = \mu_r$  quando  $\mathbf{U}$  representa o campo magnético  $\mathbf{H}$ . Para o espaço livre  $k = k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  e  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , conforme as equações (A.4a) e (A.4b).

Para problemas bidimensionais como o que se estuda neste trabalho, uma simplificação da Equação A.8 pode ser utilizada: neste caso, o campo vetorial  $\mathbf{U}$  tem apenas uma componente, ou seja,  $\mathbf{U} = U_z \hat{\mathbf{a}}_z$ , e a Equação A.8 pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla U_z) + k^2 \alpha_2 U_z = 0. \quad (\text{A.9})$$

A Equação A.9 é chamada de formulação forte para o problema do espalhamento eletromagnético bidimensional.

### A.II.1 Solução da equação de onda

Analizadas no sistema retangular de coordenadas, as equações de onda vetoriais (A.6) e (A.7) podem ser reduzidas, cada uma, a um conjunto de três equações de onda complexas escalares. Ou seja, as componentes retangulares de  $\mathbf{E}$  e de  $\mathbf{H}$  satisfazem a equação de Helmholtz cuja solução pode ser encontrada utilizando-se o método de separação de variáveis [42].

Uma solução geral para  $\mathbf{E}$  pode ser escrita como:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \hat{\mathbf{a}}_x E_x(x, y, z) + \hat{\mathbf{a}}_y E_y(x, y, z) + \hat{\mathbf{a}}_z E_z(x, y, z). \quad (\text{A.10})$$

Substituindo a Equação A.10 na Equação A.6, pode-se escrever:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \nabla^2 (\hat{\mathbf{a}}_x E_x + \hat{\mathbf{a}}_y E_y + \hat{\mathbf{a}}_z E_z) - k^2 (\hat{\mathbf{a}}_x E_x + \hat{\mathbf{a}}_y E_y + \hat{\mathbf{a}}_z E_z) = 0, \quad (\text{A.11})$$

equação esta que pode ser reduzida a três equações escalares, conforme mostrado a seguir;

$$\nabla^2 E_x(x, y, z) - k^2 E_x(x, y, z) = 0, \quad (\text{A.12a})$$

$$\nabla^2 E_y(x, y, z) - k^2 E_y(x, y, z) = 0, \quad (\text{A.12b})$$

$$\nabla^2 E_z(x, y, z) - k^2 E_z(x, y, z) = 0. \quad (\text{A.12c})$$

Considerando a geometria do problema de espalhamento em estudo descrita na subseção 2.2.2 é conveniente utilizar uma solução  $TM^z$  para a equação de onda. Neste modo, a equação representa uma onda que se propaga na direção  $z$  e possui componentes de campo magnético em  $x$  e  $y$ .

O problema geral definido matematicamente na Equação A.6 e depois simplificado na Equação A.12c, se reduz a

$$\frac{d^2 E_z}{dz^2} + k^2 E_z = 0. \quad (\text{A.13})$$

As soluções para a Equação A.13 são combinações lineares de  $e^{jkz}$  e  $e^{-jkz}$ , de forma que pode-se considerar (A.14) como uma solução possível [19]:

$$E_z = E_0 e^{-jkz} \hat{\mathbf{a}}_z. \quad (\text{A.14})$$

Nota-se que esta solução também satisfaz a Lei de Gauss – Equação A.1c – para o espaço livre.

Considera-se, novamente, a definição da constante de propagação  $k$  apresentada na seção A.II. Admitindo-se valores positivos e negativos para  $\sigma$  e sendo  $\beta$  real positivo, pode-se escrever:

$$k = \pm \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \begin{cases} \pm(\alpha + j\beta), & \sigma > 0 \\ \pm(\alpha + j\beta), & \sigma < 0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Um exame da Equação A.15 deixa claro que quatro são as possíveis combinações para  $k$  na forma dada. No processo de solução por separação de variáveis, para cada função de uma variável encontrada, uma parcela de  $k$  é evidenciada, tal que

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2. \quad (\text{A.16})$$

Assim, pode-se concluir, ainda analisando o processo separação de variáveis, que a solução da equação de onda só pode representar uma onda viajando em determinada direção  $\hat{\mathbf{a}}$  num meio com perdas e ainda satisfazer as leis da conservação da energia se  $k$  for definido como  $k_a = \alpha_a + j\beta_a$ . De forma mais geral,

$$k = \alpha + j\beta. \quad (\text{A.17})$$

Uma vez determinada a solução para o campo elétrico  $\mathbf{E}$  na Equação A.14, o campo magnético associado é determinado utilizando-se a definição de  $k$  na Equação A.17:

$$H_y = \frac{1}{\eta} E_z, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (\text{A.18})$$

onde  $\eta$  é chamado de impedância intrínseca do meio. No espaço livre:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \approx 377 \, \Omega. \quad (\text{A.19})$$

# APÊNDICE B – Solução analítica do espalhamento por um cilindro circular

Cilindros estão entre as mais importantes superfícies geométricas. A superfície de diversos espalhadores práticos como mísseis ou a fuselagem de aviões podem ser frequentemente representados por estruturas cilíndricas. O cilindro circular, em razão da sua simplicidade e pelo fato de que sua solução é representada em termos de funções bem conhecidas e já tabuladas como as funções de Bessel e de Hankel, é provavelmente uma das geometrias mais amplamente utilizada para representar espalhadores. Apresenta-se a seguir a solução analítica, em coordenadas cilíndricas, do espalhamento por um cilindro circular  $z$ -infinito, conforme descrita em [35].

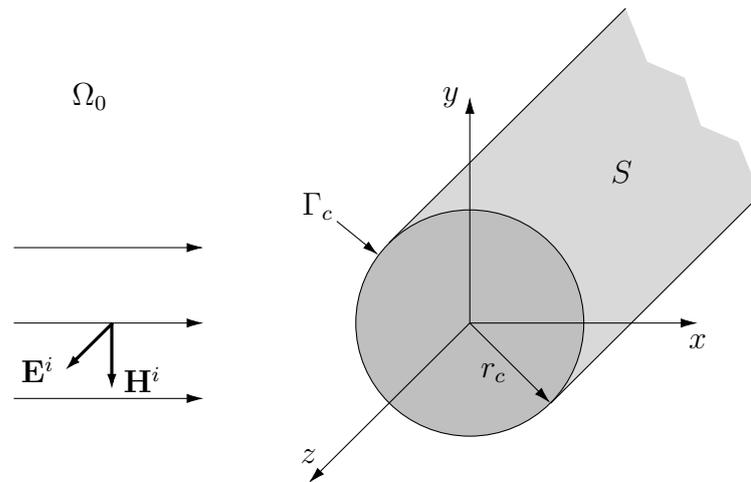


Figura B.1 – Onda plana uniforme  $TM^z$  incidente em um cilindro circular condutor infinito ao longo do eixo  $z$ .

Fonte: Adaptado de [35].

Assume-se uma onda  $TM^z$  plana uniforme incidindo perpendicularmente em um cilindro condutor de raio  $r_C$ , conforme mostrado na Figura B.1, cujo campo elétrico pode ser dado por:

$$\mathbf{E}^i = E_z^i \hat{\mathbf{a}}_z = E_0 e^{-jkx} \hat{\mathbf{a}}_z = E_0 e^{-jk\rho \cos\phi} \hat{\mathbf{a}}_z. \quad (\text{B.1})$$

em que  $k$  é o número de onda e  $\rho$  e  $\phi$  são as coordenadas radial e angular do sistema de

coordenadas cilíndrico, respectivamente. Além disso, pode-se demonstrar que:

$$e^{-jkx} = e^{-jk\rho \cos \phi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} J_n(k\rho) e^{jn\phi}. \quad (\text{B.2})$$

onde  $J_n$  é a função de Bessel. Aplicando-se a relação de (B.2) em (B.1) resulta em:

$$\mathbf{E}^i = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} J_n(k\rho) e^{jn\phi} \hat{\mathbf{a}}_z = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n \varepsilon_n J_n(k\rho) \cos(n\phi) \hat{\mathbf{a}}_z \quad (\text{B.3})$$

onde:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \neq 0 \end{cases}. \quad (\text{B.4})$$

O campo magnético correspondente pode ser obtido aplicando-se diretamente a equação da Lei de Faraday (A.1a):

$$\mathbf{H}^i = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}^i = -\frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z^i}{\partial \phi} \hat{\mathbf{a}}_\rho - \frac{\partial E_z^i}{\partial \rho} \hat{\mathbf{a}}_\phi \right) \quad (\text{B.5})$$

ou:

$$H_\rho^i = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z^i}{\partial \phi} = -\frac{E_0}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n j^{-n+1} J_n(k\rho) e^{jn\phi}, \quad (\text{B.6a})$$

$$H_\phi^i = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z^i}{\partial \rho} = -\frac{kE_0}{j\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} J_n'(k\rho) e^{jn\phi}, \quad (\text{B.6b})$$

$$' \equiv \frac{\partial}{\partial(k\rho)}, \quad (\text{B.6c})$$

onde o símbolo  $'$  sobrescrito indica derivada parcial em relação ao argumento das funções de Bessel ou de Hankel. Na presença do condutor cilíndrico o campo total  $E_z^t$  é dado pela relação  $\mathbf{E}^t = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$ , em que  $\mathbf{E}^s$  é o campo espalhado. Visto que os campos espalhados se propagam em direção tal que se afastem do cilindro, estes devem ser representados por funções de ondas cilíndricas viajantes. Escolhe-se representar  $\mathbf{E}^s$  por:

$$\mathbf{E}^s = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n H_n^{(2)}(k\rho) \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (\text{B.7})$$

onde  $H_n$  é a função de Hankel e  $c_n$  representa coeficientes de amplitude a serem determinados. A escolha da Equação B.7 se justifica pela sua similaridade com a Equação B.3, já que ambas serão utilizadas para representar o campo total. Isto é especialmente conveniente ao

se determinar os coeficientes de amplitude  $c_n$ , os quais podem ser calculados aplicando-se a condição de fronteira da Equação B.8:

$$\mathbf{E}^t = \hat{\mathbf{a}}_z E_z^t(\rho = r_C, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Utilizando as equações (B.2), (B.7) e (B.8), pode-se escrever:

$$\hat{\mathbf{a}}_z E_z^t(\rho = r_C, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ j^{-n} J_n(kr_C) e^{jn\phi} + c_n H_n^{(2)}(kr_C) \right] = 0, \quad (\text{B.9})$$

ou:

$$c_n = -j^{-n} \frac{J_n(kr_C)}{H_n^{(2)}(kr_C)} e^{jn\phi}. \quad (\text{B.10})$$

O campo espalhado  $E_z^s$ , portanto, se reduz a:

$$\begin{aligned} E_z^s &= -E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} \frac{J_n(kr_C)}{H_n^{(2)}(kr_C)} H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi} \\ &= -E_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-j)^n \varepsilon_n \frac{J_n(kr_C)}{H_n^{(2)}(kr_C)} H_n^{(2)}(k\rho) \cos(n\phi), \end{aligned}$$

onde  $\varepsilon_n$  é definido por (B.4). O campo magnético espalhado pode ser obtido utilizando-se a Equação B.5:

$$\begin{aligned} H_\rho^s &= -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z^s}{\partial \phi} = \frac{E_0}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n j^{-n+1} \frac{J_n(kr_C)}{H_n^{(2)}(kr_C)} H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi}, \\ H_\phi^s &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z^s}{\partial \rho} = \frac{kE_0}{j\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} \frac{J_n(kr_C)}{H_n^{(2)}(kr_C)} H_n^{(2)'}(k\rho) e^{jn\phi}. \end{aligned}$$

Assim, as componentes totais de campo elétrico e magnético são dadas por:

$$\begin{aligned} E_\rho^t &= E_\phi^t = H_z^t = 0 \\ E_z^t &= E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} \left[ J_n(k\rho) - \frac{J_n(kr_C)}{H_n^{(2)}(kr_C)} H_n^{(2)}(k\rho) \right] e^{jn\phi} \\ H_\rho^t &= -\frac{E_0}{j\omega\mu} \frac{1}{\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n j^{-n+1} \left[ J_n(k\rho) - \frac{J_n(kr_C)}{H_n^{(2)}(kr_C)} H_n^{(2)}(k\rho) \right] e^{jn\phi} \\ H_\phi^t &= \frac{kE_0}{j\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} \left[ J_n'(k\rho) - \frac{J_n(kr_C)}{H_n^{(2)}(kr_C)} H_n^{(2)'}(k\rho) \right] e^{jn\phi}. \end{aligned}$$