



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

EFEITO DA CONFIGURAÇÃO DE SUPORTES SOBRE A PRECISÃO DO MÉTODO DE QUADRATURA DIFERENCIAL LOCAL

JOÃO ROGÉRIO DA SILVA

Orientador: José Geraldo Peixoto de Faria*
Departamento de Matemática*

Coorientador: Giancarlo Queiroz Pellegrino*, Márcio Matias Afonso**
Departamento de Engenharia Elétrica**

BELO HORIZONTE
NOVEMBRO DE 2018

JOÃO ROGÉRIO DA SILVA

EFEITO DA CONFIGURAÇÃO DE SUPORTES SOBRE A PRECISÃO DO MÉTODO DE QUADRATURA DIFERENCIAL LOCAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: José Geraldo Peixoto de Faria*
Departamento de Matemática*

Coorientador: Giancarlo Queiroz Pellegrino*, Márcio Matias Afonso**
Departamento de Engenharia Elétrica**

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
NOVEMBRO DE 2018

Silva, João Rogério da
S586e Efeito da configuração de suportes sobre a precisão do método de
quadratura diferencial local / João Rogério da Silva. – 2018.
73 f.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: José Geraldo Peixoto de Faria.

Coorientador: Giancarlo Queiroz Pellegrino, Márcio Matias Afonso.

Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de
Minas Gerais.

1. Análise numérica – Teses. 2. Análise de sistemas – Teses. I. Faria,
José Geraldo Peixoto de. II. Pellegrino, Giancarlo Queiroz. III. Afonso,
Márcio Matias. IV. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas
Gerais. V. Título.

CDD 003.75

Esta folha deverá ser substituída pela cópia digitalizada da folha de aprovação fornecida.

Aos meus pais, Maria do Rosário Silva e Deodato Silva.

Agradecimentos

Não existem deuses a agradecer, muito menos a sorte, mas sim, além da força propulsora denominada vontade, a poucas pessoas.

Agradeço ao orientador José Geraldo Peixoto de Faria pelo profissionalismo e a confiança depositada em meu trabalho, bem como a conduta propositiva no encaminhamento de ideias deste trabalho. Agradeço ao coorientador Giancarlo Queiroz Pellegrino pelas aulas, a elucidação de dúvidas e a disponibilidade prestada a este trabalho. Gratulo também o coorientador Márcio Matias Afonso pela cooperação nas conferências e o auxílio para aplicações práticas deste trabalho.

Meu sentimento de gratidão vai também a meus filhos, por tornarem minha existência mais significativa.

À CAPES e a FAPAC, pelo apoio financeiro.

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê. (Arthur Schopenhauer)

Resumo

As pesquisas acerca dos métodos alternativos aos esquemas baseados em malha têm crescido nos últimos anos. Esses métodos, comumente conhecidos como sem malha, consistem de técnicas que constroem aproximações restritamente em termos de nós, facilitando, assim, as aplicações a geometrias consideradas complexas. Dentre os métodos sem malha, existe o método de quadratura diferencial local (MQDL), cujo alcance de suas recentes aplicações o tem tornado proeminente em algumas áreas da engenharia. Neste trabalho, é desenvolvido um estudo sobre o MQDL munido de funções de base radial (FBR), onde são realizadas duas contribuições para otimizar o seu desempenho numérico. A primeira destaca o efeito da distância mínima entre pontos no número de condição dos sistemas lineares locais (SLL), construídos no MQDL. Para mitigar isso, é proposto uma nova forma de suporte local para o método. Com esse esquema, são realizados estudos do erro e ordem de acurácia de soluções numéricas de problemas em eletrostática e dinâmica dos fluidos. A outra contribuição deste trabalho é referente ao tratamento de problemas com descontinuidade física no MQDL. Nesse sentido, é proposto a adequação de aproximações nas interfaces materiais por meio de aumento do grau de suavidade da FBR utilizada. Assim, foi realizada a simulação de um problema eletrostático bidimensional em meios heterogêneos. Para investigar o esquema proposto no tratamento de descontinuidade, realizou-se a análise do erro de aproximação através da solução semi-analítica do problema. Os resultados apresentados aqui, trazem duas inovações referentes à melhoria da acurácia do MQDL, evidenciando-o, assim, como uma ferramenta promissora em problemas envolvendo equações diferenciais parciais (EDPs).

Palavras-chave: Método de quadratura diferencial local. Função de base radial. Sistemas lineares locais. Suporte local. Número de condição. Descontinuidade física.

Abstract

Research on alternative methods to schemes based on mesh have grown in recent years. These methods, commonly known as meshless, are of techniques that construct approximations unrestrictedly in terms of nodes, thus facilitating applications to geometries considered complex. Among the methods meshless, there is the local differential quadrature method (LDQM), whose scope of recent applications has made it prominent in some areas of engineering. In this work, a study on LDQM with radial basis functions (RBF) is developed, where two techniques are presented to optimize its numerical performance. The first one emphasizes the effect of the minimum distance between points in the condition number of local linear systems (LLS), constructed in LDQM. To mitigate this, a new form of local support for the method is proposed. With this technique, studies of the approximation error and convergence rate of numerical solutions of problems in electrostatics and fluid dynamics are carried out. The other contribution of this work is related to the treatment of problems with heterogeneous means in LDQM. In this sense, it was proposed the repair of approximations in the material interfaces by means of increasing the degree of smoothness of the RBF used. Thus, the simulation of a two-dimensional electrostatic problem was carried out in heterogeneous environments. To validate the results, the approximation error analysis was performed through the semi-analytical solution of the problem. The results bring two innovations related to the improvement of LDQM accuracy, thus making it a promising tool for problems involving partial differential equations (PDEs).

Keywords: Local differential quadrature method. Radial base function. Local linear systems. Local support. Condition number. Physical discontinuity.

Lista de Figuras

Figura 1 – Exemplo da distribuição de nós empregada por Jalaal et al. (2011).	9
Figura 2 – Suporte local do ponto de referência $\mathbf{x}_i$ em negrito e os demais $(n_s - 1)$ pontos de suporte em vermelho.	13
Figura 3 – Suporte local composto de 5 pontos numa região bidimensional.	14
Figura 4 – Numeração para os nós de suporte a partir do ponto de referência $\mathbf{x}_1$	15
Figura 5 – Representação do SE para o nó $\mathbf{x}_{71}$ com 17 pontos em nuvem com 177 nós.	22
Figura 6 – Representação de um SPA com 13 pontos em malha de $N = 30 \times 30$ pontos.	23
Figura 7 – Representação de um SE-I com 13 pontos em malha de $N = 30 \times 30$ pontos.	23
Figura 8 – Representação de um SE-II com 13 pontos em malha de $N = 30 \times 30$ pontos.	24
Figura 9 – Gráfico do logaritmo do número de condição das matrizes de SLL como função da distância característica entre nós vizinhos em SPA, SE-I e SE-II usando a MQ ($n_s = 13$).	27
Figura 10 – Gráfico do logaritmo do número de condição das matrizes de SLL como função da distância característica entre nós vizinhos em SPA, SE-I e SE-II usando a MQI ($n_s = 13$).	27
Figura 11 – Gráfico do logaritmo do número de condição das matrizes de SLL como função da distância característica entre nós vizinhos em SPA, SE-I e SE-II usando a GA ($n_s = 13$).	28
Figura 12 – Gráfico do logaritmo da distância média entre os pontos de suporte como função da distância característica entre nós vizinhos em SPA, SE-I e SE-II ($n_s = 13$).	28
Figura 13 – Representação bidimensional do SE-II em (a) e SPA em (b) com 13 nós.	29
Figura 14 – Nuvem com 1224 pontos em (d) obtida a partir da triangulação de Delaunay em (c) de um domínio quadrado sobre o plano.	31
Figura 15 – Logaritmo do desvio quadrático médio com refinamento de nuvem para SE-II e SPA em função da distância característica entre os nós.	34
Figura 16 – Histogramas das distribuições dos 1241 números de condição das matrizes locais obtidas com SE-II e SPA.	34
Figura 17 – Domínio computacional Ω para o problema de valor de contorno dado pelas equações (40) e (47)–(52).	36
Figura 18 – Nuvem com 1587 pontos obtida através da triangulação de Delaunay.	36

Figura 19 – Identificação das partes da fronteira de Ω para o problema de valor de contorno apresentado pelas equações (40) e (47)–(52).	37
Figura 20 – Estudo do DQM com MEF e MQDSE como função da distância característica entre os nós.	39
Figura 21 – Linhas equipotenciais obtidas usando o MEF com $N = 1598$ para o PVC descrito pelas equações 40 e (55)–(60).	41
Figura 22 – Linhas equipotenciais obtidas usando o MQDSE com $N = 1588$ para o PVC descrito pelas equações 40 e (55)–(60).	41
Figura 23 – Representação do domínio Ω , constituído pela região interior à elipse. .	44
Figura 24 – Região de estabilidade quando autovalores são complexos.	47
Figura 25 – Representação de uma Nuvem de pontos com 1026 pontos.	47
Figura 26 – Estudo do DQM com o MQDL e o MQDSE como função da distância característica entre os nós com $\nu = 0,01$	49
Figura 27 – Estudo do ER com o MQDL e o MQDSE como função da distância característica entre os nós $\nu = 0,01$	49
Figura 28 – Número de condição médio (κ_m) obtido das distribuições dos números de condição das matrizes $[A]$ nos SLL com refinamento de nuvem. . . .	50
Figura 29 – Estudo do DQM nas aproximações dos campos de velocidade u e v com MQDSE como função do número de pontos n_s	51
Figura 30 – Perfis de velocidades v e u com $\nu = 0,02$	53
Figura 31 – Perfis de velocidades v e u com $\nu = 0,01$	53
Figura 32 – Gráficos dos campos de velocidades u e v obtidos com o MQDSE em nuvem com $\nu = 0,01$	54
Figura 33 – Nós perto de uma interface localizada no centro da superfície quadrada. As regiões dos suportes mostram um atravessando a interface e alguns que não.	56
Figura 34 – Esboço das curvas de $\varphi(r)$, $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$ em a, b e c, respectivamente, para distintos valores de c	57
Figura 35 – Condições de contorno na placa quadrada $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$	59
Figura 36 – Equipotenciais obtidas com MQDL no meio homogêneo.	61
Figura 37 – Erro relativo associado ao aumento se suavidade da FBR.	61
Figura 38 – Equipotenciais obtidas com MQDL utilizando c fixo e $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,01$	62
Figura 39 – Equipotenciais obtidas com MQDL utilizando c variável e $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,01$	62
Figura 40 – Equipotenciais obtidas com MQDL utilizando c fixo e $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,1$	63
Figura 41 – Equipotenciais obtidas com MQDL utilizando c variável e $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,1$	63

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Número de condição com $n_s = 13$ e $N = 20 \times 20$	25
Tabela 2 – Nmero de condi com $n_s = 13$ e $N = 30 \times 30$	25
Tabela 3 – Número de condição com $n_s = 13$ e $N = 40 \times 40$	25
Tabela 4 – Nmero de condi com $n_s = 13$ e $N = 50 \times 50$	25
Tabela 5 – Número de condição com $n_s = 13$ e $N = 60 \times 60$	25
Tabela 6 – Nmero de condi com $n_s = 13$ e $N = 70 \times 70$	26
Tabela 7 – Nmero de condi com $n_s = 13$ e $N = 80 \times 80$	26
Tabela 8 – Avaliação do DQM para as soluções numéricas obtidas para o PVC apresentado pelas equações (40) e (47)–(52) utilizando MEF e MQDSE.	39
Tabela 9 – Ordem de acurácia (ξ) para as soluções numéricas obtidas para o PVC apresentado pelas equações (40) e (47)–(52) utilizando MEF e MQDLSE.	39
Tabela 10 – Tempo de processamento (em segundos) nos algoritmos do MQDL e MQDSE para tamanhos distintos de nuvens com $n_s = 21$ e $c = 1,0536$, $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$, $t = 0,5$ e $\nu = 0,01$	50
Tabela 11 – Comparação do DQM e ER nas aproximações de u e v obtidos via MQDL e MQDSE com $N = 5593$, $\nu = 0,01$ e $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	51
Tabela 12 – Taxa de convergência numérica do MQDL e MQDSE com $N = 5593$ utilizando o DQM e ER obtidos nas aproximações de u e v com $\nu = 0,01$.	52
Tabela 13 – Avaliação local do DQM e ER para as aproximações de u e v com o MQDSE utilizando coeficiente de viscosidade igual a 0,02 e 0,01.	52
Tabela 14 – Avaliação do DQM e o ER local e global para as soluções numéricas obtidas para o MQDL com parametro de forma fixo e variável com $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,01$.	63
Tabela 15 – Avaliação do DQM e o ER local e global para as soluções numéricas obtidas para o MQDL com parametro de forma fixo e variável com $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,1$.	64

Lista de Quadros

Quadro 1 – Funções de base radiais amplamente utilizadas.	10
Quadro 2 – Fluxograma dos algoritmos do MQDL e o MQDSE com descrição dos passos para obter as soluções numéricas de uma EDP.	30

Lista de Abreviaturas e Siglas

CCM	Condição de Contorno Mista
CFL	<i>Courant-Friedrichs-Lewy</i>
<i>DQM</i>	Desvio Quadrático Médio
EDPs	Equações Diferenciais Parciais
<i>ER</i>	Erro Relativo
FBR	Funções de Base Radial
GA	Gaussiana
MEF	Método de Elementos Finitos
MDF	Método de Diferenças Finitas
MQ	Multiquádrica
MQI	Multiquádrica Inversa
MQD	Método de Quadratura Diferencial
MQDL	Método de Quadratura Diferencial Local
MQDSE	Método de Quadratura Diferencial com Suporte Expandido
PVC	Problema de Valor de Contorno
PVI	Problema de Valor Inicial
RK4	Método Runge-Kutta de Quarta Ordem
SE-I	Suportes Expandidos-I
SE-II	Suportes Expandidos-II
SLL	Sistemas Lineares Locais
SPA	Suportes com Pontos Adjacentes
SRS	Sobrerrelaxação Sucessiva

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

A	Matriz gerada pelas funções de base radial de ordem $n_s \times n_s$
B	Matriz quadrada de ordem $N_{int} \times N_{int}$
b	Índice das n_s^2 distâncias de um suporte local com n_s pontos
c	Parâmetro de forma
$\bar{c}$	Parâmetro de forma variável
C	Constante real positiva
C_d	Constante positiva dependente de d
d	Dimensão do espaço real $\mathbb{R}$
D	Menor distância de um ponto a reta
D_g	Domínio da função g contido no $\mathbb{R}^d$
f	Função suave
g	Função de d variáveis reais
g_1, g_2	Funções das condições iniciais em $t = 0$ e condições de contorno para $t \neq 0$ no PVI
f_r	Fator de relaxação do método de Sobre-relaxação sucessiva
h	Distância nodal sendo $h \in (0,1) \subset \mathbb{R}$
i	Indexação global
$iter$	Iterada do SOR
$itermax$	Número máximo de iterações
j,k	Indexação local
L	Comprimento característico da cavidade quadrada
l	Índice da nuvem de pontos empregada na ordem de acurácia

m	Ordem da derivada
N	Número de pontos global
N_{int}	Número de pontos interiores do conjunto Ω
n	Ordem da série de Taylor
n_s	Número de pontos do suporte local
n_d	Número de pontos próximos à extremidade da descontinuidade
p	Função teste
q	Índice dos pontos próximos à região da descontinuidade
Re	Número de <i>Reynolds</i>
$\mathbb{R}^d$	Conjunto de todas d -uplas ordenadas de números reais
r	Distância entre pontos do suporte local
r_m	Distância média entre pontos do suporte local
s	Retas concorrentes para composição do suporte expandido
t	Tempo dimensional
T	-Função seno cardinal
u, v	-Soluções numéricas obtidas através do MQDL
$\mathbf{u}, \mathbf{v}$	-Soluções analíticas
w	Pesos
W	Vetor pesos
x, y	Coordenadas cartesianas
$\bar{\mathbf{x}}_q$	Pontos adjacentes à região de descontinuidade
$\ \mathbf{x}\ _2$	Norma Euclidiana de $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^d$
$\ \cdot\ $	Norma matricial
$\frac{L}{\sqrt{N}}$	Menor distância entre dois pontos de uma nuvem com tamanho N , contida numa região de lado L .

Símbolos Gregos

α	Raio da circunferência do suporte expandido
Γ	Seções da Fronteira de Ω
$\Delta\tau$	Passo de tempo do método Runge-Kutta
ε	Permissividade elétrica
Θ	Domínio unidimensional em $\mathbb{R}$
κ	Número de Condição
κ_m	Número de Condição médio
$\{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{n_s}$	Conjuntos de autovalores reais da matriz A
$\{\lambda_i\}_{i=1}^N$	Conjuntos de autovalores reais ou complexos da matriz $[B]_{N_{int} \times N_{int}}$
ν	Viscosidade cinemática do fluido
ξ	Ordem de acurácia
ρ	Densidade de carga ou termo fonte
σ	Tolerância do SRS
Φ	Função de base radial
φ	Função de base radial teste
Ψ	Subconjunto das d -uplas em $\mathbb{R}^d$
Ω	Domínio bidimensional
$\partial\Omega$	Fronterira de Ω

Sumário

1 – Introdução	1
1.1 Justificativa	2
1.2 Objetivos	4
1.3 Organização do trabalho	5
2 – Fundamentação teórica	7
2.1 Função de base radial	10
2.2 Método de quadratura diferencial clássico	11
2.3 Método de quadratura diferencial local	12
2.4 Sensibilidade da função de base radial à distância mínima entre os pontos	14
2.5 Estimativa de erro nas soluções do MQDL	16
3 – Verificação do condicionamento de sistemas lineares locais para diferentes tipos de suporte	21
3.1 Técnica de suporte expandido	21
3.2 Experimentos numéricos	23
3.3 Solução da equação de Poisson com o MQDL e o MQDSE	29
3.3.1 Resultados	33
3.4 Simulação do potencial eletrostático com método de quadratura diferencial com suporte expandido	35
3.4.1 Testes numéricos com a equação de Poisson	35
3.4.2 Resultados	38
3.4.3 Aplicação do MQDSE ao problema de eletrostática	40
3.4.4 Resultados	40
4 – Solução numérica da equação de Burgers	43
4.1 Formulação e discretização das equações de Burgers através do MQDSE	44
4.2 Avaliação do esquema numérico	45
4.3 Resultados	48
5 – Tratamento de problemas com descontinuidade física utilizando o MQDL	55
5.1 Descontinuidade material	55
5.2 Funções contínuas	56
5.2.1 Suavidade da função de base radial multiquádrica	57
5.3 Tratamento de meios não homogêneos através da variação do parâmetro de forma c da multiquádrica.	57

5.4	Simulação do potencial elétrico em uma placa quadrada	58
5.5	Resultados	60
5.5.1	Meio homogêneo	60
5.5.2	Meio heterogêneo	62
6 – Conclusão		65
6.1	Trabalhos Futuros	68
Referências		70

1 Introdução

Muitos problemas físicos e da engenharia de natureza complexa, descritos através de EDPs, são tratados numericamente. Em geral, esses problemas são solucionados com uso de métodos numéricos tradicionais, como o método diferenças finitas (MDF) ou método de elementos finitos (MEF). E, apesar da eficiência em muitas aplicações, esses métodos, por dependerem da estrutura de malha, possuem certas limitações quando aplicados em geometrias irregulares. Em razão disso, não são flexíveis, sobretudo para tratar casos em que as arestas da malha não coincidem com a geometria pesquisada. Segundo [Zhu, Shu e Ding \(2010\)](#), ainda que malha e geometria coincidam, não é incomum o trabalho da construção de malha ser superior à dificuldade associada a resolução das equações envolvidas, pois a forma dos elementos da malha interfere na precisão desses métodos.

Para [Belytschko et al. \(1996\)](#), os problemas de mecânica computacional se tornam cada vez mais desafiadores, sobretudo quando as simulações envolvem a modelagem da propagação de rachaduras com caminhos arbitrários e complexos. Esses problemas não são adequados ao MEF e ao MDF, pois a estrutura subjacente desses métodos, que tem origem na sua dependência de malha, não é adequada para o tratamento de descontinuidades.

A fim de superar os custos envolvidos na geração de malha, bem como remover a dependência das soluções de EDPs à estrutura de grade, alguns métodos numéricos alternativos têm sido propostos. Esses esquemas pertencem a uma classe denominada livre de malha, cuja história pode ser observada, conforme [Fasshauer \(2007\)](#), a partir de 1980.

Nas últimas décadas, o desenvolvimento das abordagens numéricas livres de malha tem apresentado uma evolução. Uma técnica bastante popular no campo dos métodos livres de malha para solução de EDPs é o uso de funções da base radial. Essa técnica foi proposta inicialmente por [Kansa \(1990\)](#) nas soluções numéricas de algumas EDPs elípticas, hiperbólicas e parabólicas.

Dentre os métodos livres de malha, o método de quadratura diferencial local tem se tornado bastante proeminente nos últimos anos. Esse método, apesar de remover as limitações da estrutura de malha, foi desenvolvido a partir do método de quadratura diferencial (MQD), cuja formulação está associada ao uso de malha. O MQD foi proposto por [Bellman, Kashef e Casti \(1972\)](#), e consiste de uma técnica simples para solução numérica de EDPs. Esse método foi desenvolvido com intuito de contornar os problemas decorrentes da programação de algoritmos complexos, bem como uso demasiado de armazenamento e tempo de processamento.

Entretanto, além da dependência a uma estrutura de nós, o MQD apresenta proble-

mas relacionados ao mal condicionamento dos sistemas lineares envolvidos. Somente a partir do uso de FBR no MQD foi possível obter sistemas lineares com números de condição reduzidos, bem como retirar a dependência da estrutura de grade do método. De acordo com [Bayona, Moscoso e Kindelan \(2011\)](#), essa versão ficou conhecida na comunidade científica como MQDL. Diferentemente da abordagem global do MQD, a versão MQDL possibilita a solução de equações em um conjunto de pontos dispersos reduzido, gerando, assim, SLL de pequeno porte. Entretanto, o MQDL foi desenvolvido em 2003, e a pesquisa dedicada a ele, sobretudo quanto ao condicionamento matricial e descontinuidades físicas, ainda é incipiente. Nesse sentido, o presente trabalho tem por objetivo principal analisar os efeitos do mal condicionamento e da presença de descontinuidades no MQDL, bem como propor abordagens para mitigar esses efeitos, melhorando assim a precisão numérica do MQDL.

1.1 Justificativa

Diversos problemas importantes presentes nas engenharias e nas ciências físicas são modelados matematicamente através do uso de equações diferenciais. Conforme [Ricardo \(2009\)](#), uma equação diferencial é expressa concisamente através do modelo matemático

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{d^1 \mathbf{y}}{d\mathbf{x}^1}, \frac{d^2 \mathbf{y}}{d\mathbf{x}^2}, \dots, \frac{d^m \mathbf{y}}{d\mathbf{x}^m}) = 0. \quad (1)$$

Na [Equação \(1\)](#), f indica uma expressão matemática envolvendo a variável real independente $\mathbf{x}$, a função incógnita $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, e as derivadas da função $\mathbf{y}$ com relação a $\mathbf{x}$ até a ordem m . De outro modo, se $\mathbf{y}$ for uma função de várias variáveis e as derivadas envolvidas são parciais, então a [Equação \(1\)](#) é chamada equação diferencial parcial, do contrário, é dita equação diferencial ordinária.

Muitos aspectos teóricos e práticos das EDPs são de fundamental importância para elucidar problemas habitualmente encontrados em dinâmica dos fluidos, recursos hídricos e aerodinâmica. Apesar do longo tempo de uso em ciências aplicadas, as EDPs continuam a ser uma área de intensa pesquisa teórica e prática. De acordo com [Griffiths e Schiesser \(2010\)](#), tal pesquisa tem sido impulsionada pelos avanços relativamente recentes em métodos computacionais de solução de EDPs.

Os métodos numéricos clássicos como MEF e MDF são amplamente empregados na obtenção de soluções numéricas de EDPs, entretanto, por dependerem das conexões de malha, têm o desempenho comprometido. De acordo com [Zhu, Shu e Ding \(2010\)](#), geralmente, esses inconvenientes ocorrem no uso do MDF quando as extremidades da malha não se ajustam aos detalhes do contorno da geometria estudada, bem como na situação em que o refinamento de malha leva a deformações dos elementos no MEF.

A fim de superar isso, [Kumar, Tripathi e Kadalbajoo \(2015\)](#), apontam que existem várias pesquisas recentes acerca dos métodos livres de malha com evidente objetivo em eliminar a estrutura de grade. De acordo com [Fasshauer \(2007\)](#), essas investigações buscam aproximar a solução de uma equação diferencial utilizando pontos dispersos em vez de pontos discretizados em malha. Com isso, esses métodos vêm ganhando uma forte adesão da comunidade científica, tornando-se uma opção aos métodos baseados em grade. Segundo [Shu, Ding e Yeo \(2003\)](#), a grande vantagem dos métodos livres de malha consiste em estabelecer sistemas algébricos para todo o domínio do problema sem, no entanto, fazer uso de uma malha pré-definida para a discretização das equações.

Além disso, os métodos livres de malha foram desenvolvidos para contornar alguns problemas inapropriados aos métodos tradicionais com malha. Como por exemplo, em um problema de escoamento com dois fluidos, onde a descontinuidade física pode surgir em diferentes posições do domínio ou contorno. Nesse caso, a modelagem numérica pode produzir resultados insatisfatórios, se os devidos cuidados numéricos inerentes aos métodos com malha não forem tomados na região de descontinuidade. Técnicas como o *remeshing*, podem ser empregadas para contornar tal desvantagem comum nos MEF e MDF, no entanto, isso pode introduzir diversas dificuldades, como a necessidade de remalhagem em etapas sucessivas do problema, o que pode levar à degradação da precisão. Já nas modelagens numéricas com métodos livres de malha, onde o domínio do problema é representado por conjuntos de pontos dispersos e desconexos, esse custo computacional é reduzido. Outros aspectos relacionados aos métodos livres de malha como facilidade de implementação, flexibilidade e o refinamento de nuvem, são mais simples de incorporar do que em métodos baseados em malha.

Considerando a versatilidade dos métodos livres malha, este trabalho aborda um estudo a cerca do MQDL, que por sua vez é uma abordagem nova do MQD. Sucintamente, o MQD foi concebido conforme as ideias do método clássico da quadratura de Gauss, entretanto o MQD foi criado com o objetivo de calcular derivadas de funções. Nessa abordagem antiga ou global, o método é restrito à estrutura de malha. Apesar disso, conforme [Bayona et al. \(2010\)](#), a inserção de FBR, assim como da técnica de subdomínios ou suportes, o método possibilita aproximações numéricas obtidas via interpolação local de pontos dispersos, sem uso de malha. Esse processo proporciona a existência de sistemas lineares de pequeno porte e com melhor condicionamento em relação à abordagem global. No entanto, o esforço de pesquisa dedicado ao MQDL até recentemente ainda é pequeno, sobretudo quando compara-se com as publicações acadêmicas dos métodos convencionais. Em vista disso, alguns aspectos no MQDL como o mal condicionamento dos sistemas lineares e a aplicação em problemas com meios heterogêneos, ainda precisam ser mais explorados.

Nesse sentido, este trabalho destaca o número de condição desses SLL como um

valor influenciado pelas distâncias entre os pontos de suporte. A partir disso, é proposto a mudança de suporte com pontos adjacentes (SPA) para suporte expandido (SE). Nessa versão os SLL obtidos passam a ter números de condição reduzidos, possibilitando, assim, melhorias na precisão numérica do MQDL sem, no entanto, requerer aumento do tempo de processamento. Portanto, considerando o tipo suporte local como um passo fundamental na eficiência do MQDL, este trabalho contribui fazendo a diferenciação entre as abordagens locais, denominando a abordagem proposta como método de quadratura diferencial com suporte expandido (MQDSE). A fim de verificar a eficiência do MQDSE na solução de EDPs lineares e não lineares, são obtidas neste trabalho soluções numéricas de problemas em eletrostática e dinâmica dos fluidos.

Outro propósito deste trabalho refere-se ao tratamento de descontinuidade material com o MQDL. Segundo [Marinho \(2012\)](#), os métodos livres de malha surgiram como uma nova abordagem matemática permitindo novas alternativas para o tratamento dos problemas de maior complexidade, como descontinuidades físicas. Além disso, conforme [Bernal, Gutierrez e Kindelan \(2009\)](#), a versão local do MQD facilita a aplicação do método em problemas cujas condições de contorno são descontínuas. Dessa forma, este trabalho trata do estudo de uma nova técnica baseada na suavidade da função multiquádrica, que possibilita um cálculo mais apurado das soluções em problemas com meios heterogêneos. Com o propósito de analisar a vantagem dessa técnica, é realizada também neste trabalho a solução de um problema em eletrostática com meios materiais distintos.

Assim, além de propor uma pesquisa de avanço em técnicas ao MQDL, este trabalho objetiva desenvolver um estudo interdisciplinar no intuito de popularizar o MQDL em outras áreas, como em eletrostática, haja vista que tal método tem ficado muito restrito a certas aplicações, principalmente na área dinâmica dos fluidos.

1.2 Objetivos

A presente tese tem como objetivo principal o estudo e desenvolvimento de duas técnicas inovadoras para o MQDL. A primeira é o esquema de suporte expandido, cujo objetivo é mitigar o mal condicionamento nos SLL presentes no MQDL; a segunda consiste no parâmetro de forma variável da função multiquádrica, que objetiva o ganho de precisão através do aumento de suavidade da função multiquádrica. Tais técnicas são usadas no MQDL com aplicações em problemas bidimensionais de eletrostática e dinâmica dos fluidos. Assim, podem ser destacados 7 objetivos específicos:

- Estudar o condicionamento de sistemas lineares locais gerados pelo MQDL;
- Propor definição alternativa de suporte local com vistas a melhorar o condicionamento de sistemas lineares locais;
- Estudar o MQDL com FBR e aplicar o método com suporte expandido para obter a

solução numérica da equação de Poisson;

- Estudar o MQDL com FBR e aplicar o método com suporte expandido a fim de obter a solução numérica da equação de Burgers;
- Investigar a descontinuidade física utilizando o MQDL;
- Apresentar uma técnica para tratamento de problemas com descontinuidade física fraca utilizando o MQDL;
- Aplicar a técnica do parâmetro de forma variável no MQDL com a finalidade de obter a solução numérica de um problema com meios heterogêneos.

1.3 Organização do trabalho

O [Capítulo 2](#) tem a finalidade de apresentar uma revisão bibliográfica sobre o MQDL, com destaque aos trabalhos mais relevantes ao desenvolvimento do método, bem como apresentar o método de quadratura clássico. Esse capítulo tem também o objetivo de abordar aspectos teóricos sobre as FBR e discutí-las no âmbito das soluções do MQDL, assim como destacar alguns elementos relevantes das FBR na precisão do método. No final, é realizado um estudo analítico de estimativa do erro local no MQDL, principalmente com derivadas de primeira ordem.

No [Capítulo 3](#) é apresentada uma contribuição ao desenvolvimento do MQDL. Esse aporte refere-se a técnica inédita de suporte expandido, cujo objetivo é melhorar o condicionamento dos SLL envolvidos no MQDL. Além disso, é realizado o estudo numérico relativo aos números de condição associados as matrizes geradas pelas FBR conhecidas como, multiquádrica (MQ), multiquádrica inversa (MQI) e gaussiana (GA). São feitos, também, testes numéricos com a equação de Poisson bidimensional utilizando o MQDL com SPA e o MQDSE. No final do capítulo, é abordada a aplicação do MQDSE na solução de um problema de valor de contorno (PVC), que descreve a modelagem matemática do potencial eletrostático em uma região bidimensional com condição de contorno mista (CCM). Os resultados numéricos são comparados aos obtidos com MEF, através do desvio quadrático médio (DQM) e da ordem de acurácia.

Quanto ao [Capítulo 4](#), é apresentado um estudo sobre a estabilidade do MQDL acoplado ao método de Runge-Kutta bidimensional, sobretudo para solução numérica de um problema de valor inicial (PVI), descrito pelas equações de Burgers. Além disso, são discutidos nessas aproximações numéricas com o MQDL e o MQDSE o erro de aproximação, a ordem de acurácia, o número de condição médio, o tempo de processamento e é investigado o comportamento das soluções ao longo do tempo. No final do capítulo, são apresentados estudos em relação a influência da redução de viscosidade e o aumento do suporte local na precisão numérica do MQDSE.

O [Capítulo 5](#) versa a respeito sobre a segunda contribuição deste trabalho, parti-

cularmente no tratamento de soluções numéricas via MQDL em um problema com descontinuidade física. Para isso, obteve-se a solução numérica de um problema eletrostático bidimensional em meios com permissividades elétricas distintas. A fim de tratar a descontinuidade, é proposta uma técnica inovadora para obter soluções com mais acurácia, que consiste no aumento de suavidade da função multiquádrica através do parâmetro de forma. Para avaliar essa técnica, verificou-se, além do DQM , o erro relativo (ER). Além disso, comparou-se os erros globais com os obtidos na região de descontinuidade.

Por fim, o [Capítulo 6](#) apresenta algumas considerações acerca dos resultados obtidos nos estudos e nas experimentações numéricas realizadas nos capítulos anteriores, realçando as contribuições deste trabalho, potenciais dificuldades encontradas e trabalhos futuros com o MQDL.

2 Fundamentação teórica

O MQD foi proposto inicialmente por [Bellman, Kashef e Casti \(1972\)](#) com intuito de apresentar à comunidade científica um método numérico simples para solução numérica de EDPs. Conforme já destacado anteriormente, a ideia de aproximações das derivadas no MQD partiu inicialmente da definição de quadratura integral. O objetivo principal era eliminar o uso de conceitos matemáticos sofisticados, bem como obter soluções numéricas extremamente precisas com esforço computacional mínimo. A ideia básica do MQD consiste em aproximar a derivada em um ponto através de uma soma ponderada de todos os valores funcionais ao longo de uma linha de grade, cujo procedimento chave é a determinação dos coeficientes de ponderação ou pesos.

A aproximação polinomial ao longo de uma linha da malha no MQD não pode ser diretamente aplicada em problemas de domínio irregular. No caso do MQD com uso de FBR, essa restrição foi eliminada, uma vez que os pesos são obtidos via interpolação de FBR num conjunto de nós dispersos. Por outro lado, segundo [Shu \(2012\)](#), os métodos baseados em FBR produzem sistemas lineares com matrizes de coeficientes extremamente mal condicionadas, sobretudo quando ocorre o aumento progressivo do conjunto de pontos da interpolação. Para remover essa dificuldade, [Kansa e Hon \(2000\)](#) recomendaram a substituição de solucionadores globais por particionamento em bloco, e esquemas de decomposição LU para problemas de grande porte. Com isso, a abordagem local do método de quadratura diferencial foi consolidada e, assim, proposta isoladamente por alguns autores como [Shu, Ding e Yeo \(2003\)](#), [Tolstykh e Shirobokov \(2003\)](#) e [Wright \(2003\)](#). Dessa forma, implementa-se uma nova técnica denominada de método de quadratura diferencial local. Nessa abordagem, a aproximação das derivadas, em um certo ponto de referência, é feita através de uma soma ponderada de valores funcionais em um conjunto de pontos vizinhos (suporte local).

O MQDL foi aplicado em alguns problemas de dinâmica dos fluidos com bastante êxito. Dentre esses trabalhos, pode-se citar o de [Shu, Ding e Yeo \(2003\)](#), no qual foi examinado os efeitos do parâmetro de forma da função de base radial sobre a precisão numérica das soluções de EDPs lineares e não lineares. Nesse trabalho, o valor do parâmetro de forma da FBR foi considerado variável e equivalente ao diâmetro de cada suporte local. Essa técnica foi empregada a fim de eliminar a influência do número de pontos, bem como o tamanho da região do suporte local. Para a validação do método, foi realizada uma aplicação na simulação de transferência de calor, por convecção natural, em uma cavidade quadrada. Entretanto, para o cálculo das derivadas na fronteira foi empregada uma malha estruturada e, fora dessa região, os cálculos se deram em pontos dispersos através do MQDL.

Por outro lado, [Silva, Santos e Filho \(2018\)](#), destacam que a técnica do parâmetro de forma variável utilizada na referência [Shu, Ding e Yeo \(2003\)](#) apresenta uma inconsistência, uma vez que leva a perda de precisão ao efetuar o refinamento de nuvem pois, ao invés de se aumentar os valores do parâmetro de forma para melhorar a precisão, estes são reduzidos na mesma proporção em que os diâmetros dos suportes são reduzidos. Nesse trabalho, o MQDL é aplicado também a dois problemas clássicos em dinâmica dos fluidos, um sobre a transferência de calor por convecção natural, e outro referente ao problema hidrodinâmico da cavidade quadrada com tampa móvel. Ambas as aplicações são tratadas em regime não permanente para números de Reynolds baixos e, estritamente, com nuvens de pontos em todo domínio bidimensional.

Outro trabalho relevante na aplicação do MQDL em problemas de dinâmica dos fluidos é realizado por [Shu, Shan e Qin \(2007\)](#), onde testes numéricos bidimensionais com a equação de Poisson são obtidos aplicando o MQDL, bem como a solução de um problema de escoamento com fluido incompressível em regime permanente. Nessa última simulação, empregou-se números de Reynolds iguais a 1000 e 5000 e, para ambas experimentações numéricas, considerou-se um domínio de fronteira curva discretizado por malhas. Para resolver as equações lineares resultantes, o método de sobre-relaxação sucessiva (SRS) foi empregado. Nesse trabalho, verificou-se que, se o parâmetro de forma da função de base radial não for adequadamente escolhido, o MQDL pode apresentar soluções ruins.

Além da área de dinâmica dos fluidos, outras aplicações com esquemas baseados em FBR foram desenvolvidas em alguns trabalhos com simulação de campos eletromagnéticos. E, apesar de incipientes ainda, pode-se destacar o trabalho de [Guimarães et al. \(2007\)](#), em que se aplica uma técnica global baseada na função multiquádrica para aproximação das soluções de EDPs. Nesse trabalho, é apresentada a solução numérica para um problema eletrostático bidimensional num meio heterogêneo. Os resultados apresentam concordância com os obtidos via MEF e, mesmo com permissividades elétricas distintas, o método proposto mostrou-se capaz de produzir soluções acuradas.

Diferentemente da abordagem global com FBR citada anteriormente, [Jalaal et al. \(2011\)](#) em simulações numéricas bidimensionais, aplicam efetivamente o MQDL para obter a distribuição do potencial elétrico para diferentes geometrias irregulares. Nesse artigo, as três geometrias empregadas possuíam uma malha estruturada junto às fronteiras e, nas demais regiões, pontos dispersos conforme o exemplo ilustrado na [Figura 1](#). De acordo com os autores, a malha na fronteira é devido à necessidade da solução precisar de diferentes resoluções para regiões distintas. É importante destacar esse domínio computacional, pois a aplicação atribuída ao MQDL nesse trabalho não é verdadeiramente sem malha.

Apesar desses trabalhos citados anteriormente, a pesquisa acerca dos métodos baseados em FBR ainda é incipiente pois, conforme [Mongillo \(2011\)](#), as pesquisas em métodos com manuseio de FBR constituem uma área de pesquisa ativa em matemática.

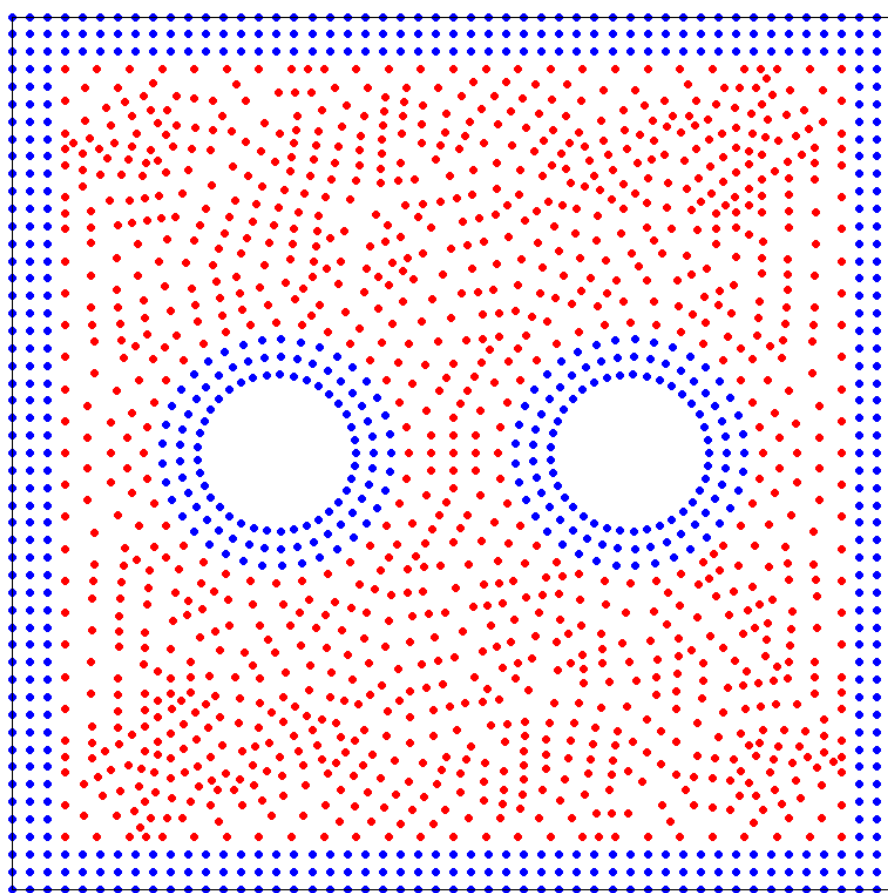


Figura 1 – Exemplo da distribuição de nós empregada por [Jalaal et al. \(2011\)](#).

Segundo [Fasshauer \(2007\)](#), essas pesquisas foram impulsionadas originalmente pelas áreas da geodésia, geofísica, mapeamento ou meteorologia, principalmente com interpolação de pontos. Algumas contribuições históricas no desenvolvimentos dos métodos livres de malha com FBR proveem de algumas pesquisas como o trabalho do geodesta [Hardy \(1971\)](#). Ele, ao fazer uma investigação acerca da interpolação de pontos desigualmente distribuídos, após várias tentativas insatisfatórias com interpolação polinomial, desenvolveu um método que podia interpolar pontos com maior precisão que a interpolação polinomial. Esse método baseava-se na interpolação construída através de combinações lineares de uma única função de base que, por sua vez, era radialmente simétrica em relação ao seu centro. A essa função foi atribuída o nome de função de base radial multiquádrica. Outra colaboração importante foi a do matemático [Franke \(1982\)](#), cuja comparação entre diversos métodos de interpolação de pontos dispersos o levou a concluir que as FBR multiquádrica e *thin plate spline* (TPS) eram os melhores. Além disso, ele inferiu que a matriz de interpolação para MQ é invertível. No entanto, vale destacar o trabalho de [Driscoll e Fornberg \(2002\)](#), no qual alertam para o número de condição da matriz coeficientes obtida com a multiquádrica. Segundo eles, na aproximação funcional de dados dispersos, muitas

FBR, como a multiquádrica, geram sistemas lineares altamente mal-condicionados, ao se elevar o parâmetro de forma da função.

Historicamente, o pioneiro em fazer uso de FBR na solução de EDPs foi o físico Edward Kansa. De acordo com Kansa (1990), a função MQ é infinitamente suave e capaz de representar funções de declive acentuado com acurácia. Além disso, apresentou um esquema de MQ para aproximação das soluções de algumas EDPs do tipo elípticas, hiperbólicas e parabólicas. Justificou, ainda, que o esquema de MQ, mesmo em distribuições moderadas de pontos, possui precisão maior que o MDF com malha refinada. Ainda em aproximações de soluções de EDPs, Kansa e Hon (2000), exploraram técnicas para a melhora do número de condição existente na matriz de coeficientes obtida no esquema global de MQ, dentre as quais, o uso do parâmetro de forma variável na MQ bem como, a troca de solucionadores globais por particionamento de blocos.

Após a apresentação dos principais trabalhos responsáveis pelo desenvolvimento do MQDL, será destacado a seguir num contexto mais detalhado, as FBR, o MQD clássico, o MQDL e a sensibilidade da MQ à distância mínima dos pontos. Cada um desses assuntos foi destacado em seções, pois não só dão continuidade ao que foi apresentado até aqui mas também, por serem indelévels a constituição de todo o presente trabalho.

2.1 Função de base radial

De acordo com Kumar, Tripathi e Kadalbajoo (2015), a função $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada radial se existe uma função univariada $\varphi : [0, \infty) \Rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(r)$, onde $r = \|\mathbf{x}\|_2$ e $\|\cdot\|_2$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^d$. Além disso, se essas funções admitem derivadas contínuas até alguma ordem desejada, então recebem a classificação conforme a descrita no Quadro 1.

Quadro 1 – Funções de base radiais amplamente utilizadas.

Nome	Abreviação	$\varphi(r), r \geq 0, c > 0$	Classificação
Multiquádrica	MQ	$\sqrt{r^2 + c^2}$	Infinitamente suaves
Multiquádrica inversa	MQI	$\frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$	
Gaussiana	GA	$e^{-\frac{r^2}{c^2}}$	
Quádrica inversa	QI	$\frac{1}{r^2 + c^2}$	
<i>Thin plate spline</i>	TPS	$r^2 \log(r)$	Parcialmente suaves
Linear	LN	r	
Cúbica	CB	r^3	
Monomial	MN	$r^{2k-1}, (k \in \mathbb{Z}_+)$	

Segundo [Fornberg e Wright \(2004\)](#), diferente das FBR parcialmente suaves, as infinitamente suaves possuem um parâmetro c , denominado parâmetro de forma, cuja variação faz o perfil da função mudar de uma superfície quase plana (c elevado), para uma superfície que apresenta um pico ou vale acentuado (c reduzido). Essa característica destacada pode ser particularmente precisa quando se está interpolando uma função suave em dados dispersos.

2.2 Método de quadratura diferencial clássico

De acordo com [Shu \(2012\)](#), se uma função $f(x)$ é suficientemente suave ao longo de um conjunto de pontos estruturados $\Theta = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ em $\mathbb{R}$, então sua derivada de primeira ordem em qualquer ponto do conjunto Θ pode ser aproximada pela seguinte formulação

$$f_x(x_i) \cong \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{1x} f(x_j), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

onde $f(x_j)$ indica o valor que f assume em um ponto x_j do intervalo Θ , $f_x(x_i)$ representa a derivada de primeira ordem da função $f(x)$ em x_i , e $w_{i,j}^{1x}$ são os pesos da derivada de primeira ordem em relação a variável x . Os valores dos pesos devem ser determinados *a priori* para implementar o procedimento de aproximação do MQD. Isso pode ser feito por aproximações funcionais nas respectivas coordenadas. As funções de aproximação são conhecidas como funções teste, e o requisito principal para sua escolha é possuir diferenciação até a mais alta ordem da derivada na equação diferencial a ser resolvida.

No procedimento de cálculo dos pesos, [Bellman, Kashef e Casti \(1972\)](#) procederam por analogia com o caso de quadratura clássica, exigindo que a [Equação \(2\)](#) seja exata para todos os polinômios de grau inferior ou igual a N . Dessa forma, admitiram a seguinte função teste:

$$p_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3)$$

Evidentemente, a [Equação \(3\)](#) oferece N funções teste. Segundo [Shu \(2012\)](#), para os pesos $w_{i,j}^{1x}$ na [Equação \(2\)](#), os índices i e j são tomados de 1 para N . Assim, o número total de pesos é N^2 . Para obter esses pesos, as funções teste descritas na [Equação \(3\)](#) devem ser aplicadas nos N pontos de Θ . Em razão disso, o seguinte sistema de N equações algébricas para $w_{i,j}^{1x}$ é, obtido com $i = 1, 2, \dots, N$,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{1x} = 0 \\ \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{1x} x_j = 1 \\ \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{1x} x_j^k = k x_i^{k-1}, \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, N-1, \end{cases} \quad (4)$$

onde o sistema na [Equação \(4\)](#) admite solução única, uma vez que a matriz de coeficientes é uma matriz Vandermonde.

Em vez de resolver um conjunto de equações algébricas lineares, pode-se determinar prontamente os pesos $w_{i,j}^{1x}$ explicitamente de uma vez por todas se x_i , com $i = 1, 2, \dots, N$, estiverem selecionados adequadamente. Uma vez que os pesos são determinados, as aproximações das derivadas em Θ podem ser obtidas. Entretanto, quando N é grande, a matriz de Vandermonde é mal condicionada e a solução do sistema na [Equação \(4\)](#) é improvável, tornando, assim, as aproximações do MQD imprecisas.

Para contornar esse problema de mal condicionamento, a abordagem local do MQD foi proposta. Assim, com a substituição de funções teste polinomiais por FBR, o método ficou independente da estrutura de grade usual, bem como admitindo sistemas lineares de pequeno porte e, conseqüentemente, com números de condição reduzidos. Esses aspectos da abordagem local do MQD serão tratados com maior profundidade na [Seção 2.4](#).

2.3 Método de quadratura diferencial local

De acordo com [Shu, Ding e Yeo \(2003\)](#), o método de quadratura diferencial local aproxima qualquer derivada em um nó através de uma soma ponderada dos valores da função em nós vizinhos. Assim, a título de exemplo, dado um conjunto com N pontos dispersos $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ em $\mathbb{R}^d$, a derivada parcial de ordem m da função suave f , em relação à coordenada x_1 em um ponto $\mathbf{x}$, pode ser aproximada através de combinações lineares de valores que a função f assume em n_s pontos adjacentes ao ponto de referência $\mathbf{x}$, incluindo ele próprio. Dessa forma, a m -ésima derivada parcial de f em relação a coordenada x_1 para qualquer nó $\mathbf{x}_i$, sendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ e d a dimensão do problema, é obtida por:

$$\frac{\partial^m f(\mathbf{x}_i)}{\partial x_1^m} = \sum_{j=1}^{n_s} w_{i,j}^{mx_1} f(\mathbf{x}_j), \quad (5)$$

em que n_s é o número de pontos do suporte local, $i = 1, 2, \dots, N$ consiste de uma indexação global para os pontos $\mathbf{x}_i$, enquanto $j = 1, 2, \dots, n_s$, uma indexação local dos pontos de suporte $\mathbf{x}_j$ destacados na [Figura 2](#). Os pesos da m -ésima derivada de f em relação à coordenada x_1 são representados por $w_{i,j}^{mx_1}$ e o passo crucial do MQDL é determiná-los. Para isso, recorre-se a um conjunto de funções teste. Usualmente, emprega-se a função MQ destacada na [Equação \(6\)](#)

$$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}. \quad (6)$$

Fixando um ponto central $\mathbf{x}_k$, $1 \leq k \leq N$, e $r = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|_2$, tem-se

$$\varphi_k(r) = \varphi_k(\mathbf{x}_j) = \sqrt{(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|_2)^2 + c^2}, \quad \text{para quaisquer } \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d. \quad (7)$$

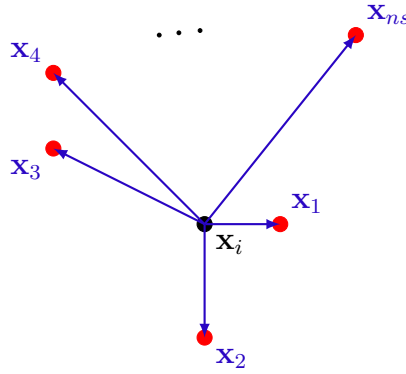


Figura 2 – Suporte local do ponto de referência $\mathbf{x}_i$ em negrito e os demais $(n_s - 1)$ pontos de suporte em vermelho.

Vale destacar que a [Equação \(7\)](#) tem os centros nos n_s nós de suporte local. A substituição da função f na [Equação \(5\)](#) pela [Equação \(7\)](#), obtém-se:

$$\frac{\partial^m \varphi_k(\mathbf{x}_i)}{\partial x_1^m} = \sum_{j=1}^{n_s} w_{i,j}^{mx_1} \varphi_k(\mathbf{x}_j), \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, n_s. \quad (8)$$

Observa-se que, para cada $i = 1, 2, \dots, N$, tem-se a indexação $j, k = 1, 2, \dots, n_s$ na [Equação \(8\)](#). Dessa forma, para obter as m -ésimas derivadas com relação à coordenada x_1 nos pontos do conjunto $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$, deve-se resolver primeiro N sistemas lineares locais com n_s equações e n_s incógnitas representados na [Equação \(8\)](#), que possuem o seguinte aspecto em notação matricial:

$$\left[\frac{\partial^m \Phi}{\partial x^m} \right] = [A][W], \quad (9)$$

na qual

$$\left[\frac{\partial^m \Phi}{\partial x^m} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^m \varphi_1(\mathbf{x}_i)}{\partial x_1^m} \\ \frac{\partial^m \varphi_2(\mathbf{x}_i)}{\partial x_1^m} \\ \vdots \\ \frac{\partial^m \varphi_{n_s}(\mathbf{x}_i)}{\partial x_1^m} \end{bmatrix}_{n_s \times 1}, \quad (10)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}_1) & \varphi_1(\mathbf{x}_2) & \cdots & \varphi_1(\mathbf{x}_{n_s}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}_1) & \varphi_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \varphi_2(\mathbf{x}_{n_s}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n_s}(\mathbf{x}_1) & \varphi_{n_s}(\mathbf{x}_2) & \cdots & \varphi_{n_s}(\mathbf{x}_{n_s}) \end{bmatrix}_{n_s \times n_s}, \quad (11)$$

$$[W] = \begin{bmatrix} w_{i,1}^{mx_1} \\ w_{i,2}^{mx_1} \\ \vdots \\ w_{i,n_s}^{mx_1} \end{bmatrix}_{n_s \times 1}. \quad (12)$$

Após a obtenção das incógnitas, ou melhor, dos pesos, é possível aproximar a derivada de ordem m da função f em $\mathbf{x}_i$ com relação a coordenada x_1 . É importante destacar que o mesmo procedimento é adotado para qualquer coordenada em $\mathbb{R}^d$.

2.4 Sensibilidade da função de base radial à distância mínima entre os pontos

Para um estudo detalhado do condicionamento da matriz $[A]$ associada a MQ, basta considerar um conjunto de pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n_s} \in \mathbb{R}^d$, cuja distância a um ponto central é $h \in (0,1)$. A partir deste conjunto, a matriz $[A]$ pode ser construída com a função multiquádrica $\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$, em que $c > 0$. Tendo, como exemplo, um subconjunto do plano com 5 pontos, 4 deles equidistantes de um ponto central, como mostrado na [Figura 3](#), pode-se com esses pontos no plano, representar um suporte local bidimensional constituído

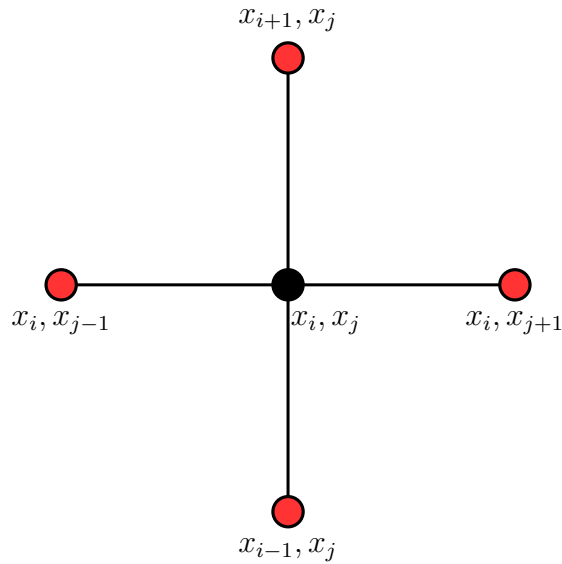


Figura 3 – Suporte local composto de 5 pontos numa região bidimensional.

de cinco pontos ($n_s = 5$), cujo o ponto em negrito representa o ponto de referência, que também faz parte do suporte local, e os demais pontos em vermelho são os nós de suporte.

Para a composição do suporte local no MQDL é importante destacar a ordem entre esses nós. Geralmente, nesse método a organização ocorre através da distância mínima dos pontos de suporte ao nó de referência, no entanto, neste exemplo, os 4 pontos distam a mesma medida h do ponto de referência. Com isso, será admitido aqui a numeração dos pontos a partir do nó de referência em sentido anti horário, como mostrado na ilustração da [Figura 4](#). Assim, considerando-se esse ordenamento para suporte local, será aplicada a FBR multiquádrica nos pontos locais $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5$. Observando ainda que na função MQ para cada centro com $i = 1, 2, \dots, 5$, toma-se $j = 1, 2, \dots, 5$. Dessa forma, a matriz $[A]$ é

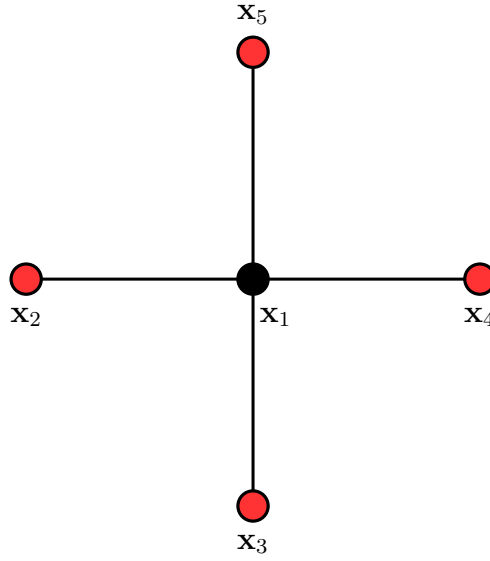


Figura 4 – Numeração para os nós de suporte a partir do ponto de referência x_1 .

escrita como

$$[A] = \begin{bmatrix} \sqrt{\|\vec{x_1x_1}\|_2^2 + c^2} & \sqrt{\|\vec{x_1x_2}\|_2^2 + c^2} & \cdots & \sqrt{\|\vec{x_1x_5}\|_2^2 + c^2} \\ \sqrt{\|\vec{x_2x_1}\|_2^2 + c^2} & \sqrt{\|\vec{x_2x_2}\|_2^2 + c^2} & \cdots & \sqrt{\|\vec{x_2x_5}\|_2^2 + c^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\|\vec{x_5x_1}\|_2^2 + c^2} & \sqrt{\|\vec{x_5x_2}\|_2^2 + c^2} & \cdots & \sqrt{\|\vec{x_5x_5}\|_2^2 + c^2} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

E substituindo os pontos $x_1, x_2, \dots, x_5$, pelas suas coordenadas, obtém-se

$$[A] = \begin{bmatrix} c & \sqrt{h^2 + c^2} & \sqrt{h^2 + c^2} & \sqrt{h^2 + c^2} & \sqrt{h^2 + c^2} \\ \sqrt{h^2 + c^2} & c & \sqrt{2h^2 + c^2} & \sqrt{4h^2 + c^2} & \sqrt{2h^2 + c^2} \\ \sqrt{h^2 + c^2} & \sqrt{2h^2 + c^2} & c & \sqrt{2h^2 + c^2} & \sqrt{4h^2 + c^2} \\ \sqrt{h^2 + c^2} & \sqrt{4h^2 + c^2} & \sqrt{2h^2 + c^2} & c & \sqrt{2h^2 + c^2} \\ \sqrt{h^2 + c^2} & \sqrt{2h^2 + c^2} & \sqrt{4h^2 + c^2} & \sqrt{2h^2 + c^2} & c \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Agora, a fim de investigar apenas a influência do valor mínimo de h sobre o condicionamento da matriz na [Equação \(14\)](#) será admitido, $0 < c < 1$, pois é sabido, através de autores como [Bayona et al. \(2010\)](#), [Fornberg e Wright \(2004\)](#), do agravamento no número de condição da matriz $[A]$ ($\kappa(A)$), quando o parâmetro c assume valores arbitrariamente altos. Além disso, a aproximação do elemento $\sqrt{h^2 + c^2}$ de $[A]$, através de uma expansão de Maclaurin em torno de $h = 0$ é

$$\sqrt{h^2 + c^2} = c + \frac{1}{2c}h^2 - \frac{c^4}{8c^7}h^4 + \frac{c^6}{16c^{11}}h^6 - \frac{5c^8}{128c^{15}}h^8 + \frac{7c^{10}}{256c^{19}}h^{10} - \frac{21h^{12}}{1024c^{21}}h^{12} + \dots \quad (15)$$

Pode-se verificar através da aproximação na [Equação \(15\)](#) que, quando a medida h é reduzida, ou seja, $h \rightarrow 0$, o elemento $\sqrt{h^2 + c^2} \cong c$. E, considerando que os demais

elementos da matriz $[A]$ na [Equação \(14\)](#) têm a mesma aproximação, essa matriz torna-se singular para um h suficientemente pequeno.

Embora a sensibilidade à distância mínima da MQ descrita nos passos (13) à (15) tenha sido, por razões de simplicidade, abordada apenas bidimensionalmente, o trabalho de [Ball, Sivakumar e Ward \(1992\)](#) demonstra analiticamente para outras FBR em dimensões superiores. Particularmente, para a função multiquádrica, é estabelecido o seguinte teorema:

Teorema 2.4.1 *Dada a função $\varphi(\mathbf{x}) = \sqrt{\|\mathbf{x}\|_2^2 + 1}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, existe uma constante C_d , tal que, para cada $h \in (0,1)$ e $N > 0$, a matriz interpolação $[A]$ associada ao conjunto $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ em $\mathbb{R}^d$ e a função multiquádrica φ_h , satisfaz*

$$\|A^{-1}\| \geq C_d \frac{e^{\sqrt{d}/2h}}{h}.$$

No teorema 2.4.1, C_d é uma constante positiva dependente apenas de d , e $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ representa um conjunto de pontos em estrutura de malha. Como pode ser observado nesse teorema, o termo $\frac{e^{\sqrt{d}/2h}}{h}$ cresce exponencialmente quando a distância h tende a 0. Ou seja, através do teorema 2.4.1 é razoável concluir que o número de condição da matriz $[A]$ associada a função MQ é

$$\kappa([A]) = \|A\| \|A^{-1}\| \approx +\infty, \text{ quando } h \rightarrow 0. \quad (16)$$

Por fim, outros autores, através de experimentos numéricos, examinaram os números de condição da matriz $[A]$ para outros tipos de FBR, principalmente em malhas estruturadas. [Sarra \(2005\)](#) destaca o número de condição como um valor influenciado pelo número de centros, a distância mínima dos centros e os valores do parâmetro de forma das FBR. Já [Boyd e Gildersleeve \(2011\)](#), ao realizarem um estudo do condicionamento de algumas FBR, afirmam que excepcionalmente a MQ apresenta um mau condicionamento quando N (número de nós) torna-se grande.

2.5 Estimativa de erro nas soluções do MQDL

É notório que, quando os erros de aproximação assumem certa magnitude, eles invalidam a solução numérica do modelo matemático. E, quando não há conhecimento da solução analítica, fica extremamente difícil avaliar o erro e, por consequência, identificá-lo. No entanto, tem sido desenvolvidas muitas teorias matemáticas e técnicas computacionais para estimar o erro de aproximação em soluções numéricas nesses casos. Dessa forma, da impossibilidade de determinar exatamente o erro de truncamento cometido, [Huerta, Ramos e Ferran \(1998\)](#) destacam que é sempre muito mais interessante encontrar um limite de

seu valor. No MQD, esse estudo já foi discutido analiticamente por [Shu \(2012\)](#) utilizando um polinômio de Lagrange de grau N , cujo limite superior do erro para derivada de ordem m , expresso por E_D^m , resultante da aproximação de uma função infinitamente suave, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de

$$|E_D^m(f)| \leq \frac{Ch^{N-m}}{(N-m)!}, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, N-1. \quad (17)$$

A inequação (17) é o limite superior para o erro de aproximação da derivada de ordem m da função f através do MQD.

Já em [Bayona et al. \(2010\)](#), realizou-se o estudo para obter fórmulas do erro de truncamento no MQDL em derivadas de primeira e segunda ordens. Assim, citando caso análogo, considere um conjunto unidimensional $\{\mathbf{x}_1 - h, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + h\}$, cujos pontos são equidistantes, e f uma função que admita derivadas até a mais alta ordem em $\mathbf{x}_1$. A aproximação da derivada de primeira ordem da função f no ponto $\mathbf{x}_1$, representada por $u'(\mathbf{x}_1)$, através do MQDL com $n_s = 3$ é,

$$u'(\mathbf{x}_1) = w_1 f(\mathbf{x}_1 - h) + w_2 f(\mathbf{x}_1) + w_3 f(\mathbf{x}_1 + h). \quad (18)$$

Substituindo na [Equação \(18\)](#), a função f e u' , pela função multiquádrica centrada nos pontos $\mathbf{x}_1 - h$, $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_1 + h$, resulta o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{h}{\sqrt{h^2+c^2}} = cw_1 + \sqrt{h^2+c^2}w_2 + \sqrt{4h^2+c^2}w_3 \\ 0 = \sqrt{h^2+c^2}w_1 + cw_2 + \sqrt{h^2+c^2}w_3 \\ \frac{-h}{\sqrt{h^2+c^2}} = \sqrt{4h^2+c^2}w_1 + \sqrt{h^2+c^2}w_2 + cw_3 \end{cases} \quad (19)$$

cujas solução é

$$w_1 = -w_3 = -\frac{1}{2h}\left(1 + \frac{h^2}{2c^2}\right), \quad w_2 = 0. \quad (20)$$

Introduzindo os valores dos pesos obtidos em (20) na [Equação \(18\)](#), obtém-se,

$$u'(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{2h} \left(1 + \frac{h^2}{2c^2}\right) [f(\mathbf{x}_1 + h) - f(\mathbf{x}_1 - h)]. \quad (21)$$

Agora, expandindo $f(\mathbf{x}_1 - h)$ e $f(\mathbf{x}_1 + h)$ em [Equação \(21\)](#), através da série de Taylor em torno de $\mathbf{x}_1$, resulta que

$$\begin{aligned} u'(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{2h} \left(1 + \frac{h^2}{2c^2}\right) \{ & [f(\mathbf{x}_1) + f'(\mathbf{x}_1)h + \frac{f''(\mathbf{x}_1)h^2}{2!} + \frac{f'''(\mathbf{x}_1)h^3}{3!} + \dots] \\ & - [f(\mathbf{x}_1) - f'(\mathbf{x}_1)h + \frac{f''(\mathbf{x}_1)h^2}{2!} - \frac{f'''(\mathbf{x}_1)h^3}{3!} + \dots] \}, \end{aligned} \quad (22)$$

ou, ainda,

$$u'(\mathbf{x}_1) = [f'(\mathbf{x}_1) + \frac{h^2}{2c^2}f'(\mathbf{x}_1) + \frac{h^2}{6}f'''(\mathbf{x}_1) + \frac{h^4}{12c^2}f^{(iv)}(\mathbf{x}_1) + \dots]. \quad (23)$$

Após truncar a série na [Equação \(23\)](#), pode-se estimar o erro local cometido ao fazer a derivada numérica u' no ponto $\mathbf{x}_1$ com o MQDL, atribuindo uma função f no ponto $\mathbf{x}_1$, dessa forma,

$$\text{erro local} = u'(\mathbf{x}_1) - f'(\mathbf{x}_1) \cong \frac{h^2}{2c^2} f'(\mathbf{x}_1) + \frac{h^2}{6} f'''(\mathbf{x}_1). \quad (24)$$

Na [Equação \(24\)](#), existe um valor ótimo do parâmetro de forma c para o qual o erro é mínimo. Este valor é independente de h e só depende do valor da função e suas derivadas em $\mathbf{x}_1$. A respeito disso, é importante destacar o estudo analítico de [Bayona, Moscoso e Kindelan \(2011\)](#), no qual é usado o MQDL com malhas e nuvens de pontos de máximo $N = 6561$ ou melhor, $h = \frac{1}{\sqrt{6561}}$, e é verificado a existência de um valor ótimo para c no intervalo real $0 < c < 2$.

Muitos trabalhos acerca da estimativa de erro do MQDL já foram realizados, particularmente com enfoque numérico. Além disso, por se tratar de um método novo, os estudos analíticos sobre erro ainda são incipientes no MQDL, principalmente para dimensão superior a 2 e em derivadas de ordem mais alta.

A estimativa numérica do erro em métodos de solução de EDPs constitui um passo importante na avaliação desses métodos. Geralmente, esse estudo dá-se através de uma solução numérica u de problemas simplificados, cuja solução analítica u existe. De acordo com [LeVeque \(2007\)](#), se a função a ser aproximada pelo método numérico é suficientemente suave em todos os pontos, então normalmente não importa tanto qual a fórmula de erro a ser empregada. Geralmente, a fórmula do erro escolhida para análise é, muitas vezes, determinada pela natureza do problema e pela disponibilidade de técnicas matemáticas para estimar diferentes padrões de erro. Por exemplo, para problemas lineares, a fórmula da equação (25) do desvio quadrático médio é, frequentemente, uma escolha natural. Por outro lado, em problemas com presença de descontinuidades, [Baker, Paul e Tian \(2002\)](#), afirmam que uma estratégia para tratar as descontinuidades é simplesmente ignorá-las e confiar nos estimadores de erro local, bem como investigar qual estimador de erro é aceitável e pequeno na vizinhança da região de descontinuidade. Nessa perspectiva, no presente trabalho, realizou-se estimativas de erro utilizando o desvio quadrático médio, descrito na [Equação \(25\)](#), para os problemas com EDPs lineares; para os problemas com EDPs que têm coeficientes descontínuos, foi empregado, além do DQM , o erro relativo descrito na fórmula da [Equação \(26\)](#).

$$DQM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - u_i)^2} \quad (25)$$

$$ER = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(u_i - u_i)^2}{u_i^2}} \quad (26)$$

Dentre as pesquisas de caráter numérico realizadas com o MQDL sobre estimativa de erro *a priori*, encontra-se o trabalho de [Ding, Shu e Tang \(2005\)](#), no qual é verificado, através de experimentações numéricas bidimensionais com a equação de Poisson, sobretudo em malhas estruturadas, uma taxa de convergência numérica de $O(h^\xi)$ para o MQDL, em que ξ é a ordem de acurácia obtida nos testes numéricos. Portanto, com devidos ajustes nos parâmetros h e n_s , pode-se obter uma ordem de acurácia,

$$\xi \approx \begin{cases} 1,9 & \text{para } 6 \leq n_s \leq 9 \\ 3,6 & \text{para } 9 < n_s \leq 27 \\ 4,9 & \text{para } 27 < n_s \leq 34 \end{cases} . \quad (27)$$

É indispensável observar que essas estimativas foram realizadas com 5 malhas de tamanhos distintos, e a solução numérica da equação de Poisson foi obtida em cada malha avaliando o erro de aproximação através da equação (26). Esse procedimento é bastante usual na comunidade científica para avaliar métodos numéricos quando se possui a solução analítica do problema.

Com objetivo de explicar melhor esse procedimento numérico, supõe-se que um dado problema tenha solução exata u e que E_1 e E_2 denotem os erros nos cálculos com duas malhas que têm os respectivos espaçamentos h_1 e h_2 , com $h_1 < h_2$. De acordo [LeVeque \(2007\)](#), se um método possui ordem de acurácia ξ , é esperado então para uma constante positiva C que

$$E_1 = Ch_1^\xi + O(h_1)^\xi, \quad (28)$$

$$E_2 = Ch_2^\xi + O(h_2)^\xi. \quad (29)$$

Para um h_1 e h_2 suficientemente pequeno,

$$E_1 \approx Ch_1^\xi, \quad (30)$$

$$E_2 \approx Ch_2^\xi. \quad (31)$$

A fim de cancelar a constante C , pode-se fazer, então,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Ch_1^\xi}{Ch_2^\xi} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^\xi. \quad (32)$$

Aplicando o logaritmo em ambos os membros da equação (32) se obtém

$$\xi = \frac{\log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2} \right)}{\log_{10} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)}, \quad (33)$$

onde ξ é a ordem de acurácia obtida através das duas discretizações de espaçamento h_1 e h_2 cujos erros são E_1 e E_2 , respectivamente. Portanto, a título de exemplo, a ordem de acurácia das soluções numéricas obtidas através de um método com os erros relativos ER_1, ER_2 e ER_3 associados a uma região quadrada unitária de discretizações N_1, N_2 e N_3 , é equivalente a

$$\xi_l = \frac{\log_{10} \frac{ER(N_l)}{ER(N_{l+1})}}{\log_{10} \frac{\sqrt{N_{l+1}}}{\sqrt{N_l}}}, \quad l = 1, \dots, 3, \quad (34)$$

em que $ER(N_l)$ é o erro relativo ao usar a malha ou nuvem de pontos com N_l pontos, $N_l < N_{l+1}$ e $h_l \cong \frac{1}{\sqrt{N_l}}$ para, $l = 1, 2, 3$.

No presente capítulo, foram destacados os principais trabalhos científicos acerca do desenvolvimento do MQDL. Além disso, enfatizou-se as diferentes abordagens atribuídas ao método, como a desenvolvida por [Bellman, Kashef e Casti \(1972\)](#) no MQD, descrita neste trabalho através da [Seção 2.2](#); e a versão local denominada MQDL proposta pelos autores [Shu, Ding e Yeo \(2003\)](#), [Tolstykh e Shirobokov \(2003\)](#) e [Wright \(2003\)](#) definida na [Seção 2.3](#). Através dessas seções, é possível compreender não só a evolução do método, mas também a formulação matemática de ambos e as colaborações atribuídas ao MQD para torna-lo livre de malha. Já na [Seção 2.4](#), investigou-se analiticamente o número de condição da matriz $[A]$ associada a MQ e, através disso, comprovar a influência da redução da distância nodal no aumento do número de condição. Na [Seção 2.5](#), apresentou-se o estudo analítico destacado por [Bayona et al. \(2010\)](#) sobre a estimativa de erro local no MQDL e, embora tenha sido para derivadas de primeira ordem e unidimensionalmente, foi evidenciada a influência do parâmetro c na redução do erro local no MQDL. Por último, vale destacar que os estudos desenvolvidos no presente capítulo foram cruciais no estabelecimento da técnica proposta de SE, cuja formulação será destacada no [Capítulo 3](#) em pormenores.

3 Verificação do condicionamento de sistemas lineares locais para diferentes tipos de suporte

Neste capítulo, é apresentada uma nova técnica para composição do suporte local dos SLL envolvidos no MQDL. Também são apresentados testes numéricos com diferentes tipos de FBR a fim de verificar o condicionamento matricial dos SLL. Para isso, foram desenvolvidos três tipos de suportes locais e realizadas experimentações numéricas com esses suportes. Esses testes buscam pesquisar a influência desses suportes locais no MQDL quando empregado para obter a solução numérica de EDPs do tipo elípticas. No final capítulo, é aplicado o MQDSE na solução de um PVC em eletrostática, cuja geometria é irregular e com condições de contorno mista.

3.1 Técnica de suporte expandido

A técnica de suporte local aplicada no MQDL para aproximação de soluções de EDPs em um conjunto de pontos $\Psi = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{R}^d$ pressupõe a construção de subdomínios $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$, que se sobrepõem entre si. Após a determinação desses subdomínios, o processo do MQDL resulta na solução de SLL conforme descrição na equação [Equação \(9\)](#) da [Seção 2.3](#), para assim obter os pesos e, após a discretização da equação diferencial com esses pesos, aproximar as soluções através de um método iterativo qualquer. Ressalta-se, ainda, que a flexibilidade do MQDL com FBR permite a determinação desses subdomínios ou suportes de diferentes formas. Porém, o modo como as matrizes são geradas a partir desses suportes constitui um elemento importante na precisão das soluções dos SLL.

Conforme observado na [Seção 2.4](#) do [Capítulo 2](#), a densidade de pontos ou redução da distância entre os pontos locais leva à divergência dos números de condição dos SLL. Assim, para superar este problema, o método de quadratura diferencial com suporte expandido é proposto aqui.

Nesta perspectiva, a técnica de SE consiste numa forma alternativa de aumentar a distância média entre os n_s pontos de suporte. Uma maneira simples de fazer isso na composição dos suportes pode ser pela construção de pontos ao longo de retas. Portanto, dado um determinado conjunto de pontos dispersos $\Psi = \{\mathbf{x}_i\} \subset \mathbb{R}^d$, com $i = 1, 2, \dots, N$, para um nó qualquer $\mathbf{x}_i$, a técnica de suporte expandido toma os n_s pontos mais próximos para as d retas $\{s_1, s_2, \dots, s_d\}$ concorrentes que se cruzam em $\mathbf{x}_i$. Esses pontos e $\mathbf{x}_i$ em si

comporão o suporte expandido $\Psi_i = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^{n_s}$ correspondente. Por uma questão de exemplo, considere a região bidimensional Ω mostrada na Figura 5, onde 177 pontos foram dispersos, assim, $\Psi = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{177}$. O suporte correspondente do i -ésimo nó com $n_s = 17$ é denotado como $\Psi_i = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^{17}$, $i = 1, 2, \dots, 177$. A Figura 5 destaca os 16 nós de suportes (em vermelho), o ponto de referência (em preto) e duas retas concorrentes, s_1 e s_2 , cruzando nesse ponto.

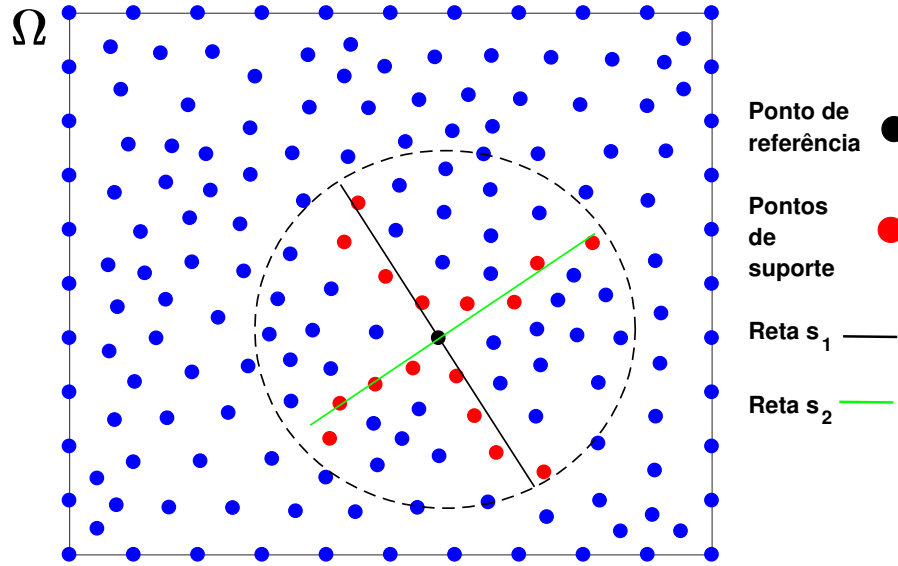


Figura 5 – Representação do SE para o nó $\mathbf{x}_{71}$ com 17 pontos em nuvem com 177 nós.

De modo geral, o critério para compor o SE é dado pela distância D dos N pontos às d retas concorrentes em $\mathbf{x}_i \{s_1, s_2, \dots, s_d\}$, cujo valor é

$$D = \min\{D_i[\mathbf{x}_i, (s_1, s_2, \dots, s_d)]\}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (35)$$

Tomando as n_s menores distâncias, $D_1, D_2, \dots, D_{n_s}$, selecionam-se os pontos, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n_s}$ para cada nó $\mathbf{x}_i$. Vale destacar que esses nós de suportes ficam circunscritos a uma circunferência. Essa circunferência de raio α por sua vez controla o tamanho da expansão dos suportes, e o seu raio é um valor $0 < \alpha < \max_{1 \leq i \leq N} \{\frac{D_i}{2}\}$. O valor de α neste intervalo é único para todos os suportes expandidos. Vale destacar ainda que, e em todas aplicações deste trabalho com uso do SE, admitiu-se $\alpha = 0,3$.

O suporte expandido permite o aumento da distância média entre os centros $\mathbf{x}_i$ e os nós de suporte $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^{n_s}$, mitigando, assim, o efeito degenerativo da distância mínima sobre as matrizes de coeficientes da Equação (14). Com o propósito de demonstrar numericamente esse efeito presente nessas matrizes, na Seção 3.2 será investigado o número de condição das matrizes associadas a algumas FBR com o suporte expandido e o suporte com pontos adjacentes no $\mathbb{R}^2$.

3.2 Experimentos numéricos

Nesta seção, são realizados testes numéricos empregando SPA descrito por [Shu, Ding e Yeo \(2003\)](#), cuja representação é determinada pelo subconjunto de pontos mais próximos ao ponto de referência (ver [Figura 6](#)). Já o suporte expandido-I (SE-I) é o subconjunto de pontos adjacentes às retas perpendiculares que se interceptam no ponto de referência (ver [Figura 7](#)). O suporte expandido-II (SE-II) é constituído pelo subconjunto de pontos adjacentes às retas do SE-I com rotação de 45° em relação ao centro (ver [Figura 8](#)). Vale destacar que nas figuras a seguir, os pontos preto e em azul representam os pontos de referência e os pontos de suporte, respectivamente.

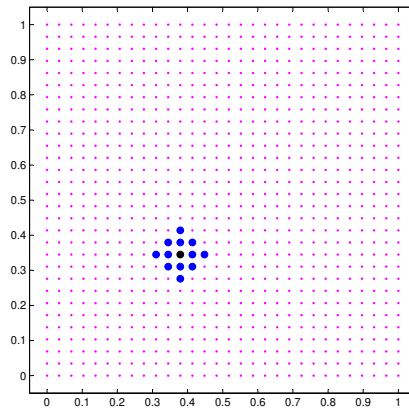


Figura 6 – Representação de um SPA com 13 pontos em malha de $N = 30 \times 30$ pontos.

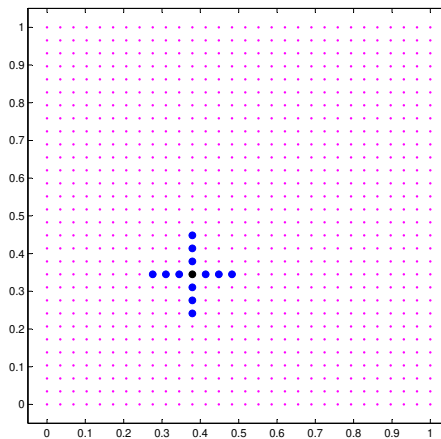


Figura 7 – Representação de um SE-I com 13 pontos em malha de $N = 30 \times 30$ pontos.

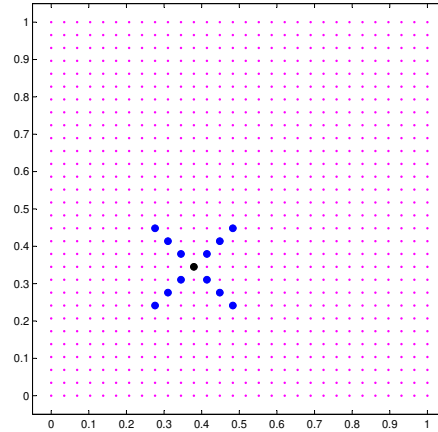


Figura 8 – Representação de um SE-II com 13 pontos em malha de $N = 30 \times 30$ pontos.

Utilizou-se nos testes realizados uma região quadrada de comprimento característico L fixo ($L = 1$), com variação dos valores de n_s e N . Baseando-se no trabalho de [Ding, Shu e Tang \(2005\)](#), os três tipos de suportes citados possuíam um total de 9 e 13 pontos em malhas estruturadas de $N = 20 \times 20, 30 \times 30, 40 \times 40, 50 \times 50, 60 \times 60, 70 \times 70, 80 \times 80$ pontos, bem como com as FBR infinitamente suaves:

$$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2} \quad \text{Multiquádrica (MQ)} \quad (36)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}} \quad \text{Multiquádrica Inversa (MQI)} \quad (37)$$

$$\varphi(r) = e^{-\frac{r^2}{c^2}} \quad \text{Gaussiana (GA)} \quad (38)$$

Após obter os nós $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n_s}$ através dos SPA, SE-I e SE-II, foi construída a matriz $A = \{\varphi_j(\mathbf{x}_i)\}_{i,j=1}^{n_s}$ usando as FBR descritas nas equações (36), (37) e (38). Em razão da influência do alto valor do parâmetro de forma no condicionamento dessas FBR, foi admitido $c = 0,02$. Além disso, foi coletado o número de condição $\kappa([A])$ de uma única matriz pois, com exceção dos suportes contendo pontos de fronteira, as matrizes $[A]$ correspondentes a suportes contendo apenas pontos interiores são iguais, independentemente dos nós de referência.

Os resultados dos testes numéricos realizados com as matrizes locais $[A]$ de ordem 13×13 ($n_s = 13$) nas malhas utilizadas estão apresentados nas [Tabela 1](#), [Tabela 2](#), [Tabela 3](#), [Tabela 4](#), [Tabela 5](#), [Tabela 6](#) e [Tabela 7](#) nas quais, além do número de condição $\kappa([A])$, é destacada também a média simples r_m das distâncias de cada centro $\mathbf{x}_i$, com $i = 1, 2, \dots, n_s$, aos nós $\mathbf{x}_k$, $k = 1, 2, \dots, n_s$, através da relação

$$r_m = \frac{1}{n_s^2} \sum_{b=1}^{n_s^2} r_b, \quad (39)$$

sendo r_b o elemento do conjunto $\{r_b\}_{b=1}^{n_s^2}$, que é composto por todas as n_s^2 distâncias entre os pontos de suporte.

Tabela 1 – Número de condição κ para suportes com $n_s = 13$ pontos e malha com $N = 20 \times 20$ pontos.

Suportes	MQ	MQI	GA	r_m
SE-I	3,8352	59,1262	13,2611	0,0239
SE-II	2,8444	53,8923	8,0427	0,0477
SPA	7,2543	98,7004	27,9443	0,0119

Tabela 2 – Número de condição κ para suportes com $n_s = 13$ pontos e malha com $N = 30 \times 30$ pontos.

Suportes	MQ	MQI	GA	r_m
SE-I	8,2875	74,3350	26,2615	0,0102
SE-II	4,2440	66,5760	15,0756	0,0205
SPA	25,1542	126,9436	52,3654	0,0051

Tabela 3 – Número de condição κ para suportes com $n_s = 13$ pontos e malha com $N = 40 \times 40$ pontos.

Suportes	MQ	MQI	GA	r_m
SE-I	19,1770	88,2640	33,6840	0,0057
SE-II	7,3567	77,8906	27,3274	0,0113
SPA	73,3318	237,7847	107,3783	0,0002

Tabela 4 – Número de condição κ para suportes com $n_s = 13$ pontos e malha com $N = 50 \times 50$ pontos.

Suportes	MQ	MQI	GA	r_m
SE-I	41,6018	126,1835	54,5498	0,0036
SE-II	13,3625	76,0014	27,8343	0,0072
SPA	176,3334	499,0544	238,0521	0,0018

Tabela 5 – Número de condição κ para suportes com $n_s = 13$ pontos e malha com $N = 60 \times 60$ pontos.

Suportes	MQ	MQI	GA	r_m
SE-I	82,3862	207,6544	95,0651	0,0025
SE-II	23,8760	95,4475	39,1962	0,0049
SPA	365,7634	983,9494	480,5219	0,0012

Tabela 6 – Número de condição κ para suportes com $n_s = 13$ pontos e malha com $N = 70 \times 70$ pontos.

Suportes	MQ	MQI	GA	r_m
SE-I	149,8982	346,5155	164,4155	0,0018
SE-II	40,9698	124,9809	53,9568	0,0036
SPA	680,3006	1790,3272	883,7213	0,0009

Tabela 7 – Número de condição κ para suportes com $n_s = 13$ pontos e malha com $N = 80 \times 80$ pontos.

Suportes	MQ	MQI	GA	r_m
SE-I	254,0018	562,0142	272,1278	0,0014
SE-II	67,1321	176,6781	79,6214	0,0028
SPA	1165,7516	3035,3192	1506,2226	0,0007

Os últimos resultados realizados nas cavidades quadradas exibem a elevação do número de condição conforme o refinamento de malha, para todos suportes empregados. Entretanto, se a matriz $[A]$ é obtida através da função MQ usando SE-II, $\kappa([A])$ apresenta a menor variação. Com o propósito de ilustrar melhor esse aspecto, as [Figura 9](#), [Figura 10](#) e [Figura 11](#) exibem a dependência do número de condição $\kappa([A])$ e da distância média entre os N pontos de cada malha, enquanto a [Figura 12](#) o destaca a distância média dos nós de suporte r_m consoante ao refinamento de malha. Verifica-se nessa última figura, que a média das distâncias entre os pontos do SPA é a menor dentre os suportes pesquisados ao longo do refinamento de malha, evidenciando, assim, a razão do SPA apresentar o pior condicionamento.

Assim, dados os resultados numéricos obtidos aqui, pode ser constatado na configuração do suporte local, sobretudo na forma do SE-II, uma técnica eficiente para redução do número de condição das matrizes correspondentes aos SLL gerados pelo MQDL. Com o intuito de verificar os benefícios dessa técnica no MQDL, a [Seção 3.3](#) compara as abordagens do MQDL com SPA e do MQDSE na solução numérica da equação de Poisson, especialmente com o uso de nuvem de pontos.

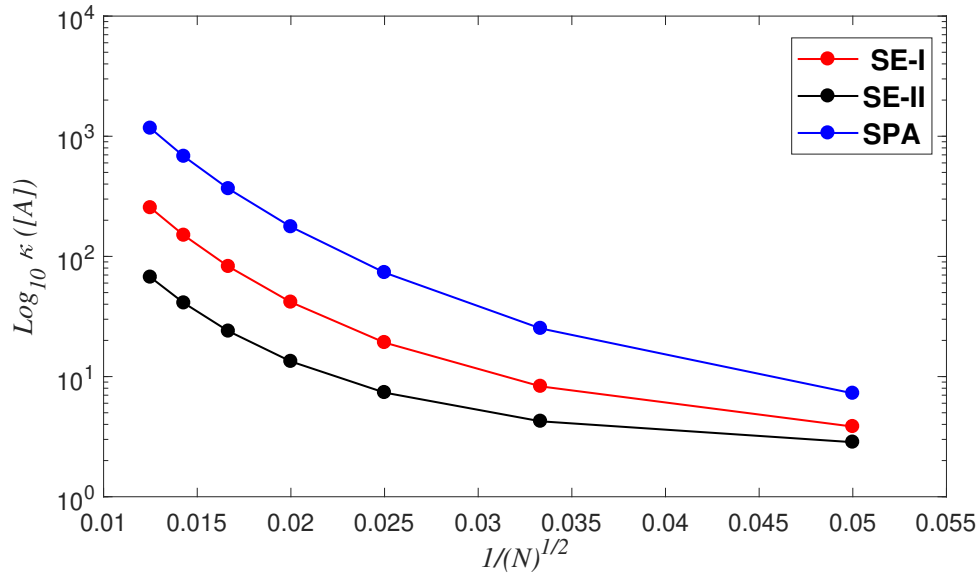


Figura 9 – Gráfico do logaritmo do número de condição das matrizes de SLL como função da distância característica entre nós vizinhos em SPA, SE-I e SE-II usando a MQ ($n_s = 13$).

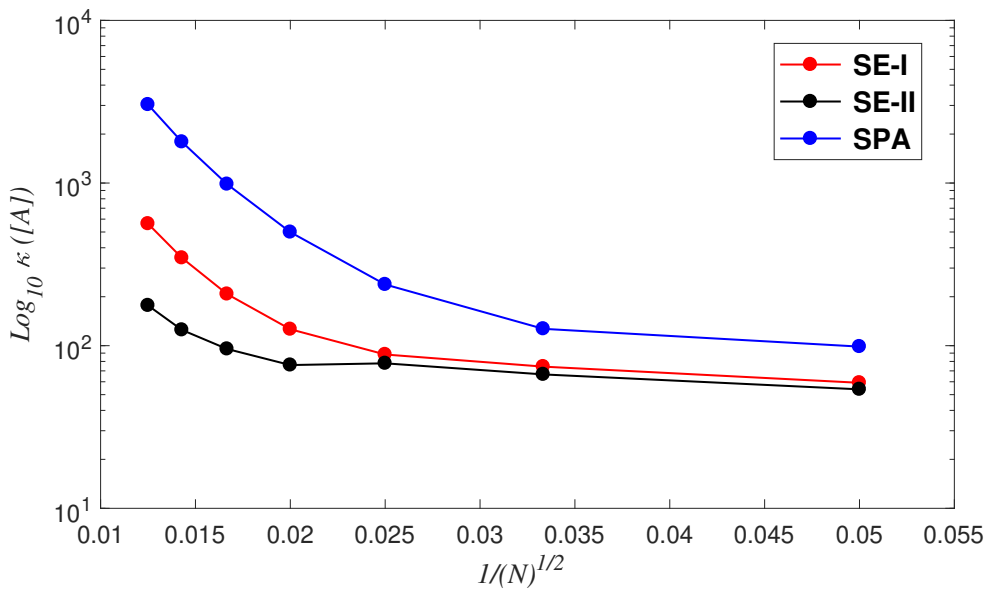


Figura 10 – Gráfico do logaritmo do número de condição das matrizes de SLL como função da distância característica entre nós vizinhos em SPA, SE-I e SE-II usando a MQI ($n_s = 13$).

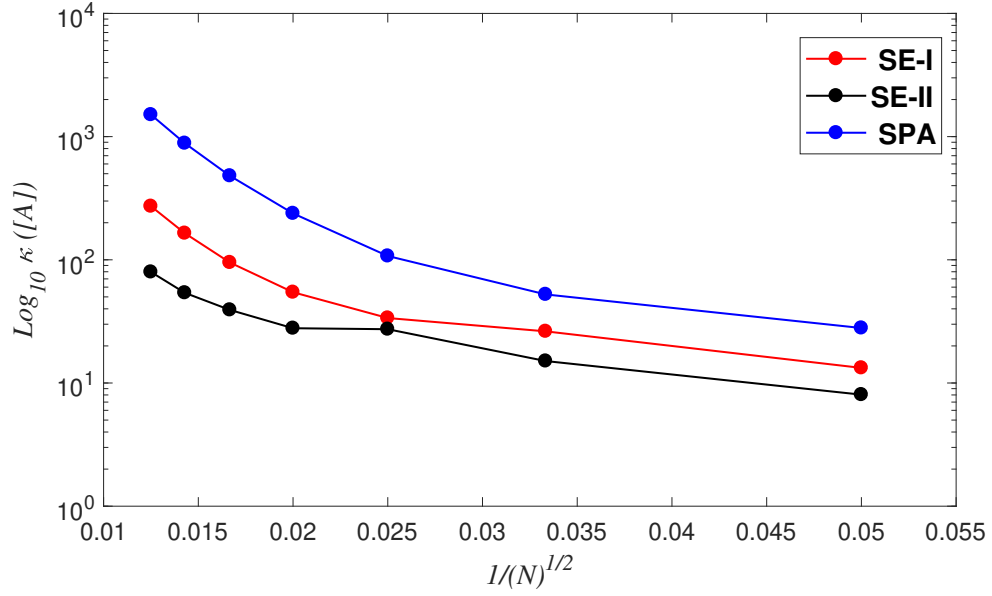


Figura 11 – Gráfico do logaritmo do número de condição das matrizes de SLL como função da distância característica entre nós vizinhos em SPA, SE-I e SE-II usando a GA ($n_s = 13$).

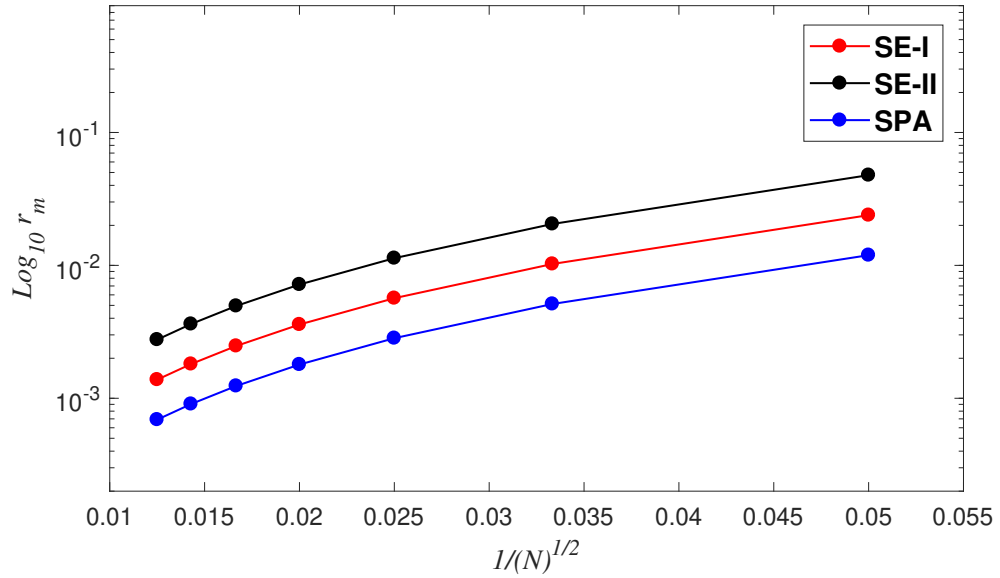


Figura 12 – Gráfico do logaritmo da distância média entre os pontos de suporte como função da distância característica entre nós vizinhos em SPA, SE-I e SE-II ($n_s = 13$).

3.3 Solução da equação de Poisson com o MQDL e o MQDSE

Em geral, conforme [Ding, Shu e Tang \(2005\)](#), o procedimento para solução de EDPs através do MQDL segue os seguintes passos:

- distribuição de nós no domínio;
- determinação dos suportes locais para todos os pontos de referência do domínio;
- cálculo dos pesos para os operadores das derivadas descritas na equação diferencial parcial;
- discretização das equações diferenciais parciais com os pesos calculados;
- resolução das equações algébricas resultantes.

O fluxograma no [Quadro 2](#) descreve, em detalhes, todos passos assumidos no algoritmo do MQDL e do MQDSE desenvolvido para solução da equação de Poisson.

Nesta seção, é empregado o MQDL usando duas formas distintas de suportes locais, um constituído de SE-II e outro com SPA conforme ilustração da [Figura 13 \(a\) e \(b\)](#), respectivamente. Ambos fazem busca local para qualquer distribuição de pontos dispersos numa região bidimensional. Essa busca determina para todos os pontos de referência os respectivos pontos de suporte. Enquanto o algoritmo usual do SPA busca pontos mais próximos ao nó de referência, o algoritmo do SE-II faz a busca local em cada circunferência de raio $\alpha = 0,3$ e centrada nos pontos de referência. Após isso, são extraídos os nós adjacentes ao lugar geométrico determinado pelas retas concorrentes em cada ponto de referência.

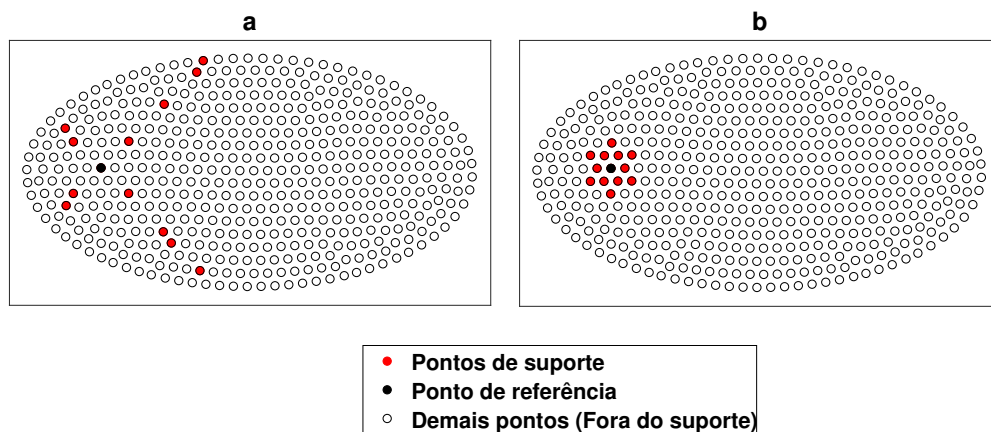


Figura 13 – Representação bidimensional do SE-II em (a) e SPA em (b) com 13 nós.

Diferentemente das simulações anteriores, todos os testes realizados nesta seção são com nuvens de pontos e, mesmo assim, as matrizes associadas a MQ continuam sendo simétricas. Para essa representação do domínio computacional, foi construído um algoritmo para geração de nuvens de pontos baseado no processo de triangulação de

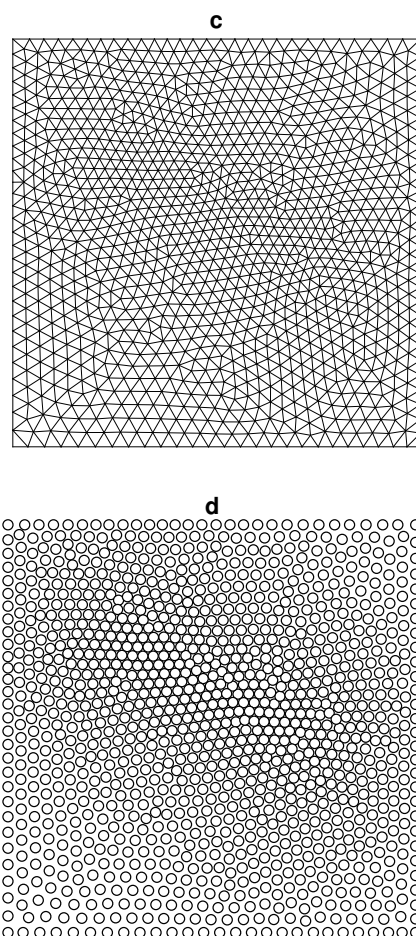


Figura 14 – Nuvem com 1224 pontos em (d) obtida a partir da triangulação de Delaunay em (c) de um domínio quadrado sobre o plano.

Os experimentos desta seção são implementados para obter a solução numérica da equação de Poisson no domínio

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq (x,y) \leq 1\},$$

cujas representação no espaço $\mathbb{R}^2$ com coordenadas cartesianas toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon}. \quad (40)$$

De acordo com [Sadiku \(2009\)](#), a [Equação \(40\)](#) é a forma mais geral de expressar a variação do potencial eletrostático u em relação a posição (x,y) . A equação de Poisson permite solucionar problemas em eletrostática onde o potencial $u(x,y)$ é desconhecido em algumas partes de Ω . Aqui, o potencial é conhecido apenas na fronteira (condição de Dirichlet) através da solução analítica

$$u(x,y) = \frac{\frac{5}{4} + \cos(5,4y)}{6 + 6(3x - 1)^2}, \quad (41)$$

quando aplicados os pares $(x,y) \in \partial\Omega$. Na equação (40), ε é a permissividade elétrica e ρ representa o termo fonte. Nesta seção, $\varepsilon = 1$ para todo domínio Ω , enquanto ρ é obtido através das derivadas parciais de segunda ordem em relação a x e y da solução analítica $u(x,y)$ dada pela [Equação \(41\)](#).

Nos N_{int} pontos interiores de Ω foi aplicado o MQDL com SE-II e SPA e, conforme já destacado na [Seção 2.3](#) do [Capítulo 2](#), o passo crucial do método é a obtenção dos pesos. Para obter os pesos $w_{i,k}^{2x}$ e $w_{i,k}^{2y}$ para [Equação \(40\)](#), foram resolvidos um total de $2N$ sistemas lineares locais análogos aos da [Equação \(9\)](#) na [Seção 2.3](#). Na solução dos mesmos, foi empregado o método de eliminação de Gauss e, de posse das soluções para os pesos, a [Equação \(40\)](#), foi discretizada através do MQDL e do MQDSE nos pontos $\{x_i\}_{i=1}^{N_{int}}$ em Ω , assumindo o seguinte aspecto:

$$\sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2x} u(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2y} u(x_k, y_k) = -\rho(x_i, y_i), \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, N_{int}. \quad (42)$$

A [Equação \(42\)](#) representa um sistema linear de dimensão $N_{int} \times N_{int}$. Conforme [SANTOS \(2016\)](#), esse sistema linear é do tipo esparsa e revela uma estrutura de matriz banda, cujo número de diagonais não nulas está relacionada à numeração global de pontos. Para solução do sistema dado pela [Equação \(42\)](#), é empregado o método iterativo de sobre-relaxação sucessiva, uma vez que este possui eficiência reconhecida na solução de sistemas lineares esparsos e de grande porte. O método SRS é descrito através da seguinte equação iterada

$$u_i^{it+1} = (1 - f_r)u_i^{it} + f_r u_i^{it+1}. \quad (43)$$

A equação (43), fornece a solução numérica u_i^{it} em cada ponto (x_i, y_i) da iteração it , enquanto u_i^{it+1} é a iterada de Gauss para i -ésima componente do vetor $u^{it+1} = (u_1^{it+1}, u_2^{it+1}, \dots, u_{N_{int}}^{it+1})$, além disso, f_r é o parâmetro de relaxação do método SRS. É importante destacar ainda que a equação (43) foi executada no procedimento iterativo até satisfazer o seguinte critério de convergência:

$$|u_i^{it+1} - u_i^{it}| < \sigma \quad \text{e} \quad it < it_{\max}, \quad (44)$$

em que $it_{\max}$ o número máximo de iterações e σ a tolerância para o processo iterativo.

Além disso, adotou-se os seguintes parâmetros:

- $c = 0,4$;
- $n_s = 13$;
- $it_{\max} = 2000$;
- $f_r = 0,5$;
- $\sigma = 1 \times 10^{-7}$.

Os valores adotados para c , $it_{\max}$, f_r e σ são oriundos da referência [Silva, Santos e Filho \(2018\)](#), cuja aplicação realizada do MQDL combinada ao método iterativo SRS possibilitaram resultados satisfatórios na solução da equação de Poisson. Uma vez obtida a solução numérica u através do MQDL e o MQDSE, estudou-se o erro de aproximação para a solução analítica u , adotando a fórmula do desvio quadrático médio da [Equação \(25\)](#) contida no [Capítulo 2](#).

3.3.1 Resultados

As aproximações para a [Equação \(40\)](#) revelam, através da [Figura 15](#), a redução do DQM à medida que a nuvem sofre refinamento. Além disso, observa-se que o DQM das aproximações obtidas utilizando-se SE-II é uma ordem de grandeza menor que o obtido com SPA. O motivo de tal precisão, como pode ser observado na [Figura 16](#), está diretamente relacionado a distribuição dos números de condição reduzidos nos SLL envolvidos para o cálculos dos pesos.

O esquema MQDSE mostrou-se uma ferramenta vantajosa nos testes numéricos submetidos nesta seção. Entretanto, o uso dessa técnica motiva sua aplicação em problemas com grau de dificuldade maior. Assim, a [Seção 3.4](#) trata a aplicação do MQDSE na simulação de um problema eletrostático bidimensional, com condição de contorno mista e numa geometria cuja fronteira é heterogênea.

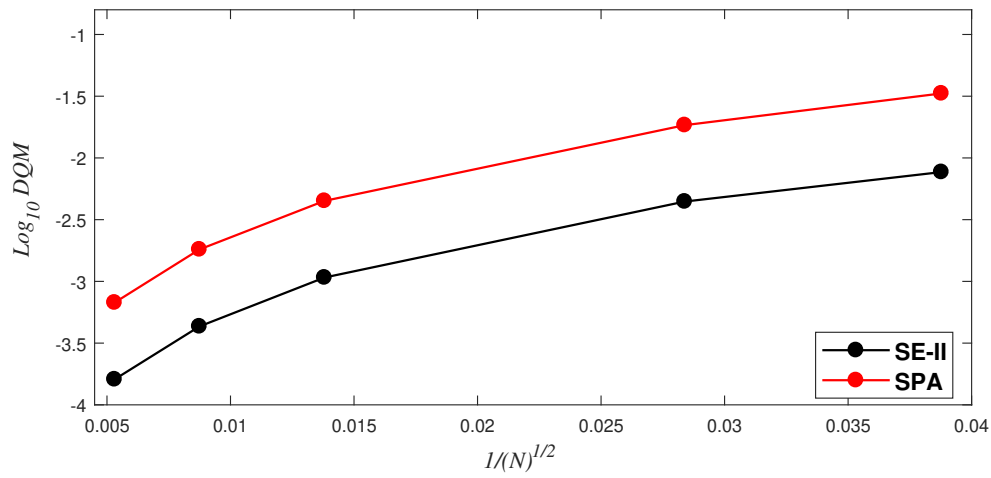


Figura 15 – Logaritmo do desvio quadrático médio com refinamento de nuvem para SE-II e SPA em função da distância característica entre os nós.

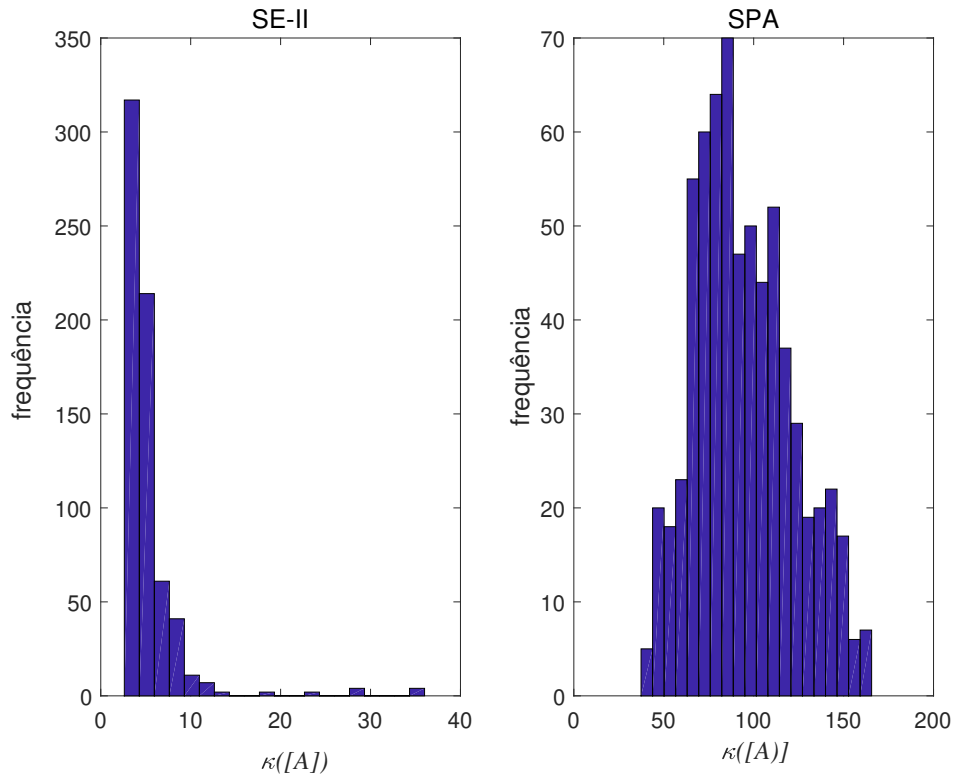


Figura 16 – Histogramas das distribuições dos 1241 números de condição das matrizes locais obtidas com SE-II e SPA.

3.4 Simulação do potencial eletrostático com método de quadratura diferencial com suporte expandido

Nesta seção, a solução numérica da equação de Poisson (40) é obtida, conforme os experimentos realizados na Seção 3.3. Entretanto, modificou-se a solução analítica, a condição de contorno e a geometria do problema.

A análise da solução numérica do MQDSE a partir de comparações com as soluções produzidas pelo MEF, assim como ordem de acurácia e o desvio quadrático médio, fornecem meios para validar o algoritmo desenvolvido para o MQDSE. Com isso, é possível realizar a modelagem da simulação do potencial eletrostático bidimensional.

3.4.1 Testes numéricos com a equação de Poisson

Inicialmente, realizou-se o experimento numérico com a equação de Poisson (40) no domínio bidimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, conforme descrição geométrica apresentada na Figura 17. Para os testes desenvolvidos aqui, na Equação (40) são admitidos $\varepsilon = 1$ e $\rho(x,y)$ dado por

$$\rho(x,y) = 2y^2 + 2x^2, \quad (45)$$

determinado através das derivadas parciais de segunda ordem da solução analítica

$$u(x,y) = x^2y^2 \quad (46)$$

expressas na Equação (40).

Para a geração da nuvem de pontos no domínio Ω (ver Figura 17) admitiu-se o uso da triangulação de Delaunay (ver Figura 18).

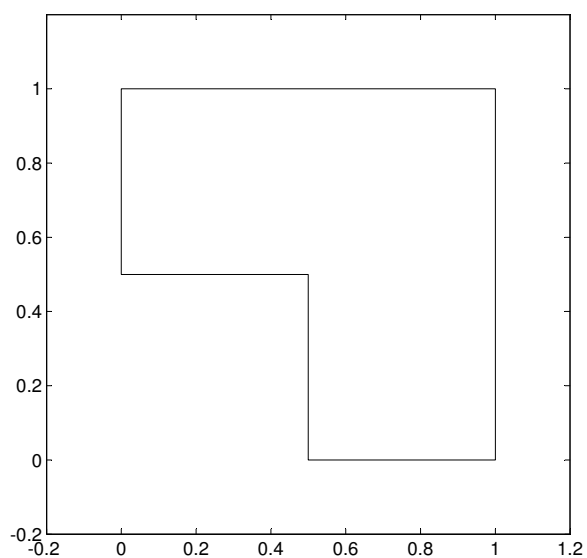


Figura 17 – Domínio computacional Ω para o problema de valor de contorno dado pelas equações (40) e (47)–(52).

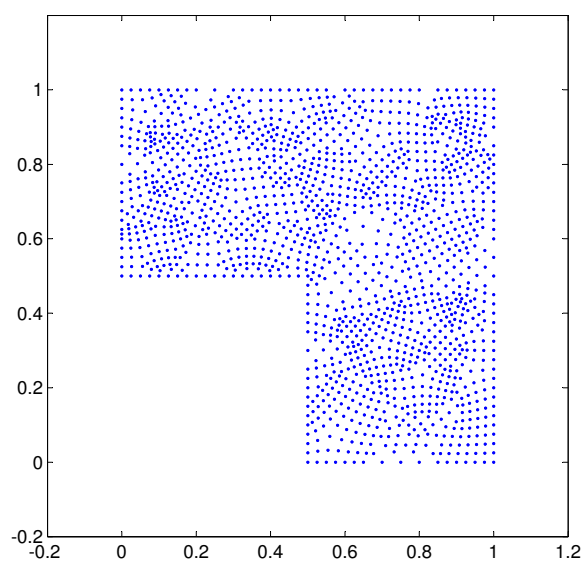


Figura 18 – Nuvem com 1587 pontos obtida através da triangulação de Delaunay.

Além disso, considerou-se as condições de contorno mistas da [Equação \(47\)](#) a [Equação \(52\)](#), conforme representação geométrica da [Figura 19](#). Ou seja, condições de *Neumann* nas seções Γ_1 e Γ_4 e de *Dirichlet* em $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5$ e Γ_6 .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ em } \Gamma_1 = \left\{ (x,y) \in \partial\Omega : x = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} < y < 1 \right\}; \quad (47)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ em } \Gamma_4 = \left\{ (x,y) \in \partial\Omega : y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} < x < 1 \right\}; \quad (48)$$

$$u = x^2, \text{ em } \Gamma_2 = \{(x,y) \in \partial\Omega : y = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 1\}; \quad (49)$$

$$u = y^2, \text{ em } \Gamma_3 = \{(x,y) \in \partial\Omega : x = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y < 1\}; \quad (50)$$

$$u = \frac{1}{4}y^2, \text{ em } \Gamma_5 = \left\{ (x,y) \in \partial\Omega : x = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq y < \frac{1}{2} \right\}; \quad (51)$$

$$u = \frac{1}{4}x^2, \text{ em } \Gamma_6 = \left\{ (x,y) \in \partial\Omega : y = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \right\}. \quad (52)$$

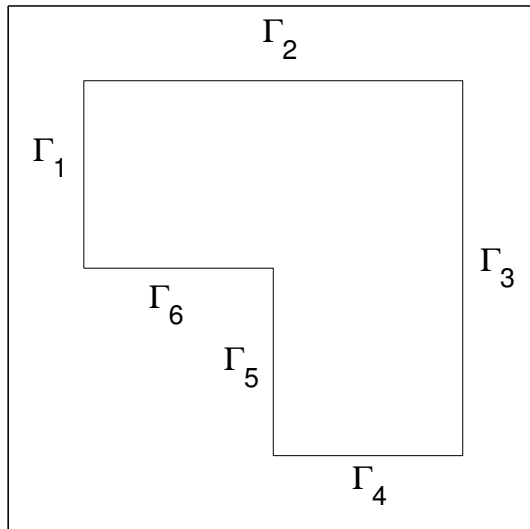


Figura 19 – Identificação das partes da fronteira de Ω para o problema de valor de contorno apresentado pelas equações (40) e (47)–(52).

As derivadas normais em Γ_1 e Γ_4 , descritas nas equações (47) e (48), são obtidas através do MQDSE, isto é:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1x} u_k = 0, \quad (53)$$

daí,

$$w_{i,1}^{1x} u_1 = - \sum_{k=2}^{n_s} w_{i,k}^{1x} u_k \iff u_1 = - \frac{\sum_{k=2}^{n_s} w_{i,k}^{1x} u_k}{w_{i,1}^{1x}}. \quad (54)$$

Para o segmento Γ_4 , a aproximação para $\frac{\partial u}{\partial y}$ é obtida de maneira similar.

Para aferir a acurácia das soluções numéricas $u(x,y)$ adquiridas através do MEF e o MQDSE, extraiu-se o DQM por meio da Equação (25), usando a solução analítica $u(x,y)$ destacada na Equação (46). Além disso, também verificou-se a ordem de acurácia ξ , recorrendo-se à Equação (33) da Seção 2.5.

Nesta subseção, admitiu-se os mesmos parâmetros da Seção 3.3, tanto para o SRS quanto para o MQDSE. Feito esse ajuste, variou-se o tamanho das nuvens, adotando-se $N_1 = 541$, $N_2 = 1088$ e $N_3 = 1588$ como valores para o número de pontos global, ao passo que com MEF, adotou-se malhas com tamanhos similares de $N_1 = 551$, $N_2 = 1094$ e $N_3 = 1598$ pontos.

3.4.2 Resultados

Como já destacado na Seção 3.3, o MQDSE pode apresentar uma precisão satisfatória e, uma vez tomado um n_s adequado, a estimativa do erro no método pode melhorar com o aumento do numero de nós da nuvem. Diferentemente dos resultados com MEF, esse aspecto pode ser facilmente observado na Figura 20, na qual pode-se verificar a redução do DQM à medida em que foi refinada a nuvem no MQDSE. E, uma vez que o desvio quadrático médio afeta o comportamento ordem de acurácia, os resultados desta última para o MQDSE foram superiores que aqueles encontrados utilizando-se o MEF, como pode-se verificar na Tabela 9.

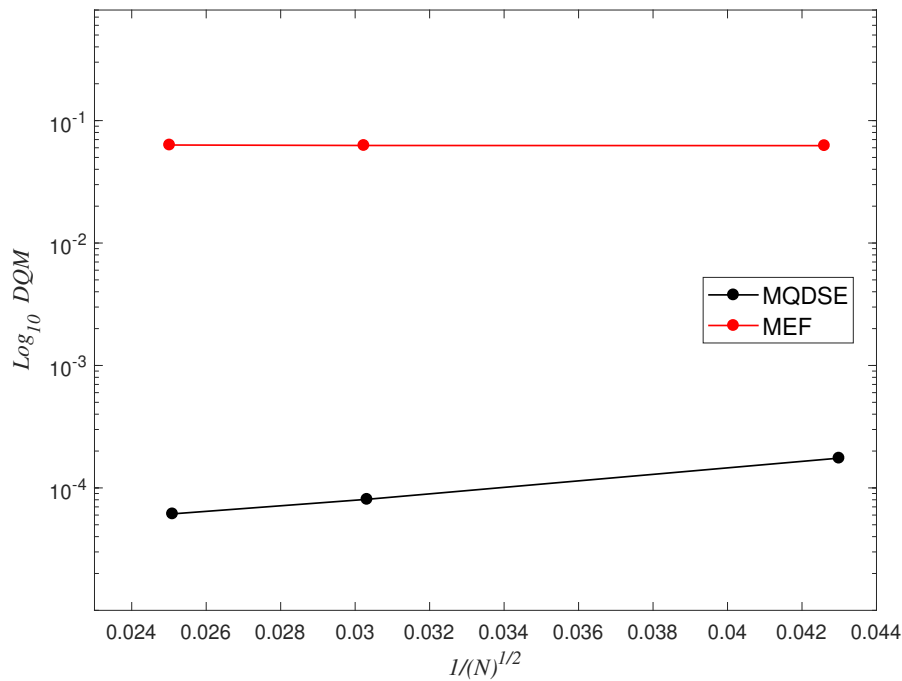


Figura 20 – Estudo do DQM com MEF e MQDSE como função da distância característica entre os nós.

Tabela 8 – Avaliação do DQM para as soluções numéricas obtidas para o PVC apresentado pelas equações (40) e (47)–(52) utilizando MEF e MQDSE.

Método	Nós	DQM
MEF	551	$6,2442 \times 10^{-2}$
	1094	$6,2626 \times 10^{-2}$
	1598	$6,3180 \times 10^{-2}$
MQDL	541	$1,7504 \times 10^{-4}$
	1088	$8,0663 \times 10^{-5}$
	1588	$6,1357 \times 10^{-5}$

Tabela 9 – Ordem de acurácia (ξ) para as soluções numéricas obtidas para o PVC apresentado pelas equações (40) e (47)–(52) utilizando MEF e MQDLSE.

Método	l	ξ
MEF	2	-0,00857
	3	-0,04652
MQDSE	2	2,2177
	3	1,4470

A estimativa de DQM e ξ obtidos nos testes numéricos aqui, não só validam o esquema numérico desenvolvido para o PVC com CCM numa geometria irregular, mas também destacam que o MQDSE possibilita o aumento de acurácia com refinamento de nuvem. A partir do procedimento numérico desenvolvido nesta seção, será proposto na [Subseção 3.4.3](#) a simulação do potencial eletrostático com o MQDSE, cuja modelagem seguiu os mesmos parâmetros do MQDSE e o MEF adotados aqui.

3.4.3 Aplicação do MQDSE ao problema de eletrostática

Com o propósito de aplicar o MQDSE em um PVC com CCM, obteve-se aqui a distribuição do potencial eletrostático através da [Equação \(40\)](#) no domínio bidimensional Ω . Na resolução do problema eletrostático desta subseção foram admitidas $\varepsilon = 1$ e $\rho(x,y) = 0$.

Com exceção das condições de contorno de Dirichlet, as condições de *Neumann* aqui empregadas são as mesmas aplicadas no PVC apresentado na [Figura 19](#) da [Subseção 3.4.1](#). Assim, as CCM empregadas em Γ_1 a Γ_6 foram:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ em } \Gamma_1 = \left\{ (x,y) \in \partial\Omega : x = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} < y < 1 \right\}; \quad (55)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ em } \Gamma_4 = \left\{ (x,y) \in \partial\Omega : y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} < x < 1 \right\}; \quad (56)$$

$$u = 1, \text{ em } \Gamma_2 = \{(x,y) \in \partial\Omega : y = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq x < 1\}; \quad (57)$$

$$u = 1, \text{ em } \Gamma_3 = \{(x,y) \in \partial\Omega : x = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y < 1\}; \quad (58)$$

$$u = -1, \text{ em } \Gamma_5 = \left\{ (x,y) \in \partial\Omega : x = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq y < \frac{1}{2} \right\}; \quad (59)$$

$$u = -1, \text{ em } \Gamma_6 = \left\{ (x,y) \in \partial\Omega : y = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \right\}. \quad (60)$$

As derivadas normais $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ foram obtidas por intermédio do MQDSE considerando os mesmos passos adotados da [Subseção 3.4.1](#) nas equações (53) e (54).

Assim como as nuvens de pontos e as malhas usadas em elementos finitos, os resultados desta subseção são obtidos utilizando também os mesmos parâmetros aplicados no MQDSE e no SOR da [Subseção 3.4.1](#).

3.4.4 Resultados

Como pode ser observado na [Figura 21](#) e [Figura 22](#), as soluções são qualitativamente semelhantes e, mesmo com condições de contorno mistas e geometria não-trivial,

percebeu-se que ambos métodos atingiram convergência. Entretanto, ao observar os detalhes das equipotenciais obtidas pelos métodos, percebe-se que as equipotenciais produzidas com o MQDSE são mais suaves, sobretudo na região próxima ao ponto $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Usualmente, são regiões como essas que agravam as aproximações do MEF.

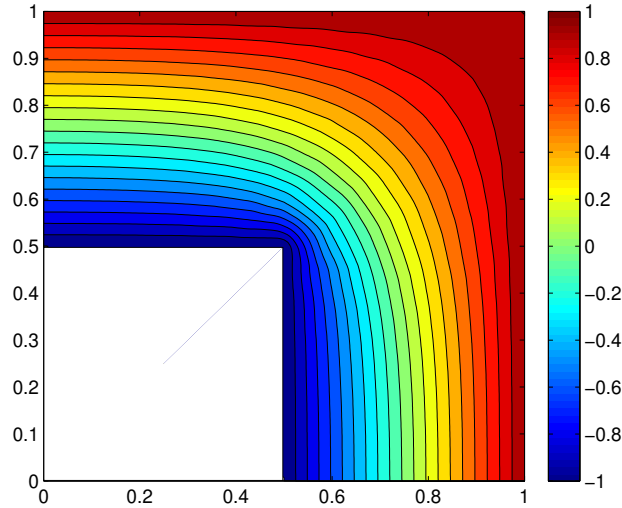


Figura 21 – Linhas equipotenciais obtidas usando o MEF com $N = 1598$ para o PVC descrito pelas equações 40 e (55)–(60).

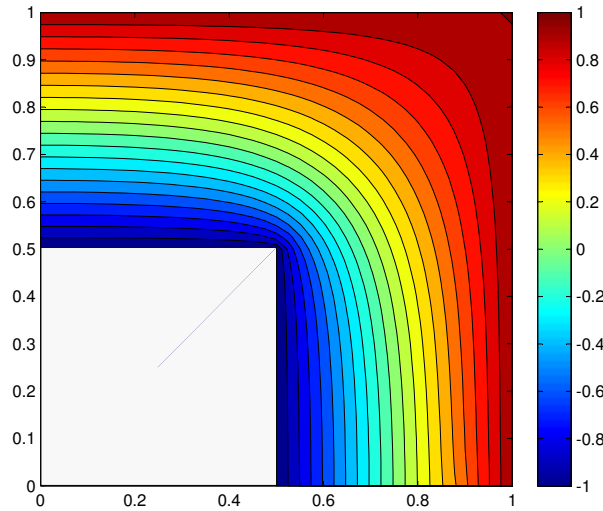


Figura 22 – Linhas equipotenciais obtidas usando o MQDSE com $N = 1588$ para o PVC descrito pelas equações 40 e (55)–(60).

Segundo as referências [Belytschko et al. \(1996\)](#) e [Zhu, Shu e Ding \(2010\)](#), a perda de precisão no MEF geralmente ocorre devido às deformações dos elementos causadas pela distorções locais da malha. Por outro lado, pelo fato do MQDSE eliminar pelo menos parte dessa estrutura, construindo a aproximação inteiramente em termos de nós, não fica suscetível a esses efeitos de fronteira e, conseqüentemente, produz uma aproximação com maior acurácia.

A fim de investigar o erro nas aproximações, foi analisado o *DQM* utilizando a solução do MEF com 8161 nós como solução de referência e, com isso, verificou-se o erro de $3,31 \times 10^{-2}$ nas aproximações via MEF, e $6,89 \times 10^{-4}$ com MQDSE.

Baseado no estudo desenvolvido na [Seção 2.4](#) do [Capítulo 2](#), foi apresentada aqui a técnica de SE na [Seção 3.1](#). A fim de investigar as vantagens dessa técnica, realizou-se testes numéricos de condicionamento matricial com SE-I, SE-II e SPA e as funções MQ, MQI e GA na [Seção 3.2](#). Percebeu-se nas matrizes $[A]$ associadas a MQ geradas a partir do SE-II, uma melhoria significativa no $\kappa([A])$. Com o propósito de averiguar os benefícios dessa técnica no método, na [Seção 3.3](#) foi desenvolvido um esquema numérico com o MQDL e o MQDSE para obter a solução numérica da equação de Poisson. Percebeu-se que os algoritmos desenvolvidos apresentaram consistência ao efetuar o refinamento de nuvem no entanto, os resultados com o MQDSE foram mais satisfatórios. Para investigar o desempenho do MQDSE em problemas mais complexos, na [Subseção 3.4.1](#) desenvolveu-se um esquema numérico para o MQDSE, que consistiu em obter a solução numérica de um PVC com geometria irregular e CCM. As simulações foram também realizadas com o MEF da interface gráfica *Pdetool* disponível no *Matlab*. É importante destacar aqui que, diferentemente do trabalho [Jalaal et al. \(2011\)](#), todo o procedimento numérico elaborado para o MQDSE foi realizado para ser executado sem nenhum uso de malha, bem como sem necessidade de uso do MDF no cálculo das derivadas na fronteira (condição de *Neumann*). As soluções obtidas via MQDSE e MEF foram comparadas através de *DQM* e de ξ , e serviram para avaliar todo procedimento numérico desenvolvido. Na [Subseção 3.4.3](#), foi apresentada a simulação do problema eletrostático com procedimento numérico descrito na subseção anterior, no entanto, a condição de contorno de *Dirichlet* foi constante em $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5$ e Γ_6 e o termo fonte nulo para todo o domínio. Através desses últimos resultados, é válido presumir que o MQDSE possibilita resultados razoáveis quando aplicado em um PVC de na natureza eletrostática. No entanto, como os testes desenvolvidos neste capítulo foram com EDPs lineares, surge a motivação de aplicá-lo em problemas mais complexos. Assim, o [Capítulo 4](#) é proposto uma avaliação do MQDSE na solução de um PVI com as equações de Burgers.

4 Solução numérica da equação de Burgers

As equações de Burgers representam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares. Particularmente, segundo [Burgers \(1948\)](#), essas equações são empregadas como um modelo matemático básico para descrever fenômenos de turbulência. As equações de Burgers consistem de uma estrutura relativamente similar às equações de Navier-Stokes, sendo um modelo simplificado bastante empregado onde os fenômenos convectivos não-lineares e difusivos lineares desempenham um efeito considerável.

Essas equações, conforme [Neta \(2003\)](#), formam um sistema de EDPs não lineares e podem ser classificadas como hiperbólicas, caso a viscosidade for nula ou parabólicas, se a viscosidade for diferente de zero. Conforme [Basto, Semiao e Calheiros \(2007\)](#), é importante ter atenção com manuseio numérico dessas equações pois, para valores baixos do coeficiente de viscosidade, a equação de Burgers pode desenvolver descontinuidades acentuadas, que são difíceis de simular em um computador. As equações de Burgers desempenham uma parte importante na compreensão de técnicas analíticas e pode-se, segundo [Fortuna \(2000\)](#), servir para avaliar técnicas numéricas na área de dinâmica dos fluidos computacional, pois possuem soluções e características comuns às equações de Navier-Stokes, que também são não-lineares.

O presente capítulo apresenta a aplicação do MQDL na solução de um problema de valor inicial envolvendo as equações de Burgers. Essa aplicação é motivada pelo aspecto experimental numérico do MQDSE na precisão de soluções de sistemas EDPs não lineares. Para tanto, as equações são resolvidas numa região bidimensional elíptica, estudando o erro de aproximação, o tempo de processamento e a ordem de acurácia.

Diferentemente das seções anteriores, aqui é investigado o número de condição médio, κ_m , obtido das distribuições dos números de condições das matrizes locais, assim como a estabilidade numérica do MQDSE. Para essa última, é desenvolvido um estudo análogo ao realizado por [Korkmaz e Dağ \(2011\)](#), entretanto, a análise de estabilidade é tratada bidimensionalmente usando a abordagem local no método de quadratura. Outro aspecto apresentado neste capítulo, é o estudo do erro de aproximação nas equações de Burgers com aumento do número de pontos no suporte local. Além disso, a fim de verificar a sugestão de [Baker, Paul e Tian \(2002\)](#), a maioria das análises de erro são realizadas comparando DQM e o ER , haja vista que existe na solução das equações de Burgers um salto abrupto à medida em que o coeficiente de viscosidade é reduzido.

4.1 Formulação e discretização das equações de Burgers através do MQDSE

De acordo com [Biazar e Aminikhah \(2009\)](#), as equações bidimensionais de Burgers em sua forma geral, são dadas conforme o sistema representado pelas equações (61) e (62):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \end{array} \right. \quad (61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \end{array} \right. \quad (62)$$

em que, de acordo com [Fan e Li \(2014\)](#), $u(x,y,t)$ e $v(x,y,t)$ são as componentes de velocidades na direção dos eixos x e y , definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$ e Re o número de Reynolds relacionado com a viscosidade cinemática ν do fluido como $\nu = \frac{1}{Re}$.

Diferentemente da descrição matemática de escoamentos turbulentos, no qual a aleatoriedade do movimento da partícula fluido requer um tratamento estatístico, as equações de Burgers, que são tratadas aqui no modelo determinístico, só permitem descrever escoamentos do tipo laminares, cuja previsibilidade dos movimentos das partículas fluido podem ser relativamente precisas ([BRUNETTI, 2007](#), p.312).

Nas simulações numéricas considerou-se, particularmente, o domínio de fronteira curva $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{(y-\frac{1}{4})^2}{(\frac{1}{4})^2} \leq 1\}$, representado na área descrita na [Figura 23](#) como uma região positiva no plano cartesiano. Além disso, foram admitidas as seguintes

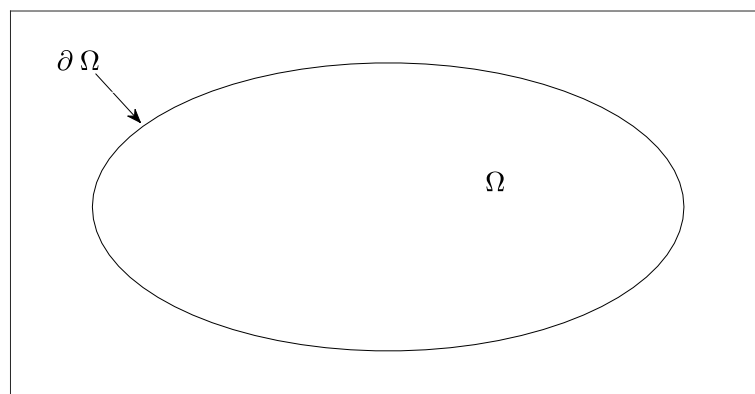


Figura 23 – Representação do domínio Ω , constituído pela região interior à elipse.

condições iniciais:

$$u = u(x,y,0) = g_1(x,y,0), \quad (x,y) \in \Omega, \quad (63)$$

$$v = v(x,y,0) = g_2(x,y,0), \quad (x,y) \in \Omega, \quad (64)$$

e condições de contorno ($t > 0$)

$$u = u(x, y, t) = g_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (65)$$

$$v = v(x, y, t) = g_2(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (66)$$

em que as funções g_1 e g_2 são fornecidas.

As aproximações para derivadas parciais no espaço na [Equação \(61\)](#) e na [Equação \(62\)](#) são obtidas através do MQDL com as técnicas de SPA e SE-II. Essas equações, quando discretizadas através de ambos os métodos para cada ponto interior (x_i, y_i) com $i = 1, 2, \dots, N_{int}$, tomaram o aspecto do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1x} u_k - v_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1y} u_k + \nu \left(\sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2x} u_k + \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2y} u_k \right), \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} = -u_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1x} v_k - v_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1y} v_k + \nu \left(\sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2x} v_k + \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2y} v_k \right). \end{cases} \quad (67)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} = -u_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1x} v_k - v_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1y} v_k + \nu \left(\sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2x} v_k + \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2y} v_k \right). \end{cases} \quad (68)$$

As componentes u_k e v_k designam as aproximações para os campos de velocidades u e v no k -ésimo ponto do suporte local para cada ponto i . A indexação k é local e as notações $w_{i,k}^{1x}$, $w_{i,k}^{1y}$, $w_{i,k}^{2x}$ e $w_{i,k}^{2y}$ designam os respectivos pesos das derivadas em relação a x e y de primeira e segunda ordem, respectivamente.

O sistema de equações diferenciais composto da [Equação \(63\)](#) a [Equação \(68\)](#) é resolvido através do MQDL e o MQDSE nas coordenadas espaciais, entretanto, para as aproximações das derivadas $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial v}{\partial t}$, utilizou-se o método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem com passo de tempo Δt constante. A fim de evitar soluções espúrias para o sistema de equações (63) a (68), a seção 4.2 destaca os principais estudos realizados acerca da estabilidade numérica do método de quadratura diferencial.

4.2 Avaliação do esquema numérico

De acordo com [Ahmad, Khaliq et al. \(2017\)](#), ao contrário de outros métodos convencionais, a estabilidade do MQDL depende do valor do parâmetro de forma c , bem como do número de nós N . Por outro lado, [Tomasiello \(2003\)](#), ao aplicar o método Runge-Kutta à equação de Burgers discretizada via MQD, verificou que o método de quadratura clássico acoplado ao método Runge-Kutta possui estabilidade condicionada ao passo de tempo Δt .

Um outro aspecto relevante da estabilidade numérica do método de quadratura diferencial numa abordagem global e com a função teste

$$T(x, h) = \frac{\sin(z_j)}{z_j}, \quad z_j = \frac{\pi}{h}(x - jh) \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, N, \quad (69)$$

é apresentado por [Kumar, Tripathi e Kadalbajoo \(2015\)](#). Nesse trabalho é analisado o sistema de equações resultantes da discretização da equação de Burgers através do método de quadratura diferencial, cuja característica é semelhante às equações (67) e (68). Para ilustrar melhor essa análise, toma-se as equações (65) à (68) e usando algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), a estabilidade do PVI é reduzido para um conjunto de equações diferenciais ordinárias homogêneas no tempo,

$$\frac{\partial \{u\}}{\partial t} = [B]\{u\}, \quad (70)$$

$$\frac{\partial \{v\}}{\partial t} = [B]\{v\}, \quad (71)$$

onde $\{u\}$ e $\{v\}$ são n_s -uplas desconhecidas dos valores funcionais nos pontos interiores de Ω . Além disso, assume-se que a matriz de coeficientes $[B]_{N_{int} \times N_{int}}$, para $i = 1, 2, \dots, N_{int}$, é determinada por

$$b_{i,q} = -u_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1x} + \nu \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2x} - v_i \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{1y} + \nu \sum_{k=1}^{n_s} w_{i,k}^{2y} \quad \text{com } q = 1, 2, \dots, N_{int}, \quad (72)$$

em que u_i e v_i são os valores aproximados para as soluções exatas u e v , respectivamente, através do MQDL e do MQDSE acoplado ao RK4 ao longo do tempo.

De acordo com esse estudo, se o sistema composto pela [Equação \(70\)](#) e a [Equação \(71\)](#) for instável, então o esquema numérico RK4, estável para discretização temporal, pode produzir uma solução não convergente. Assim, a estabilidade do sistema de equações (67) e (68) está relacionada aos autovalores da matriz $[B]$, uma vez que sua solução exata é diretamente determinada pelos autovalores da mesma. Dessa forma, seja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_{int}}$, o conjunto de autovalores complexos (ou reais) da matriz de coeficientes $[B]$, conforme expressa na equação (72), a solução estável de $\{u\}$ e $\{v\}$, com $t \rightarrow \infty$, exige de $\{\lambda_i\}_{i=1}^{N_{int}}$ que, para o Δt do esquema numérico de Runge-Kutta,

- se os autovalores possuem apenas componentes reais, $-2,78 < \Delta t \lambda_i < 0$;
- se os autovalores são imaginários puros, $-2\sqrt{2} < \Delta t \lambda_i < 2\sqrt{2}$;
- se os autovalores são complexos, $\Delta t \lambda_i$ deve estar na região, [Figura 24](#).

Posto isso, os valores de Δt são obtidos tal qual o enfatizado por [Korkmaz e Dağ \(2011\)](#), ou seja, uma vez obtida matriz $[B]$ em cada iteração, extrai-se $\lambda_{max} = \max_{1 \leq i \leq N_{int}} \{\lambda_i\}$ e $\lambda_{min} = \min_{1 \leq i \leq N_{int}} \{\lambda_i\}$, e depois é verificado se o valor $\Delta t \lambda_{max}$ e $\Delta t \lambda_{min}$ está contido na região de estabilidade do RK4 definida anteriormente.

A respeito da estabilidade das equações de *Burgers* em métodos numéricos explícitos para avanço no tempo, [Moura e Kubrusly \(2013\)](#) destacam o tamanho do passo de tempo Δt independe do tamanho da grade espacial. Além disso, os resultados numéricos por eles obtidos usando uma discretização de malha ilustram que, para a estabilidade das equações de Burgers, a condição Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) não é suficiente para análise de convergência das soluções com $\nu \neq 0$.

Embora a pesquisa sobre convergência numérica do MQDL ainda seja incipiente, sobretudo em espaços de dimensão superior a 1 e, mesmo que a maioria dessas pesquisas refiram-se a métodos baseados em malha espacial, esses estudos sobre estabilidade numérica foram cruciais para as implementações numéricas da presente seção.

Já em relação à discretização do domínio Ω , foram utilizadas nuvens de pontos, que por sua vez foram geradas a partir de um algoritmo da triangulação de Delaunay. Para fins ilustrativos, a nuvem com 1026 pontos está destacada na [Figura 25](#).

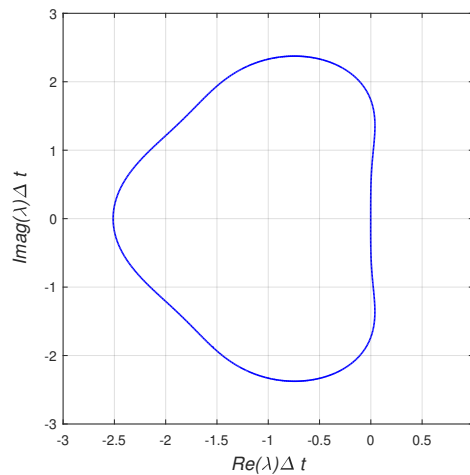


Figura 24 – Região de estabilidade quando autovalores são complexos.

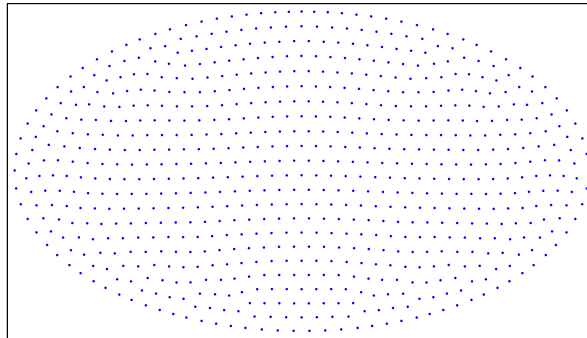


Figura 25 – Representação de uma Nuvem de pontos com 1026 pontos.

Nos algoritmos do MQDL com MQDSE, empregou-se as seguintes funções:

$$g_1(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + e^{\frac{Re(4y-4x-t)}{32}})}, \quad (73)$$

$$g_2(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + e^{\frac{Re(4y-4x-t)}{32}})}. \quad (74)$$

A Equação (73) e a Equação (74) forneceram as soluções exatas u e v , respectivamente, assim como, as condições iniciais, para $t = 0$, e as condições de contorno, para $t > 0$.

Para avaliar a performance do MQDL e do MQDSE nas simulações numéricas, extraiu-se o ER e o DQM utilizando as respectivas Equação (25) e Equação (26) nas aproximações u e v e as soluções exatas u e v . Verificou-se, também, o tempo de processamento, o efeito da densidade local de nós, o comportamento das soluções em diferentes momentos, a ordem de acurácia e o efeito da redução de ν nas aproximações.

4.3 Resultados

O primeiro teste com o MQDL e o MQDSE é executado com os parâmetros $n_s = 21$ e $c = 1,0536$ obtidos de Shan, Shu e Lu (2008) e Bayona, Moscoso e Kindelan (2011), nessa ordem. Uma vez fixados esses parâmetros, realizou-se cada simulação via MQDL e o MQDSE acoplado ao RK4 para um determinado o passo de tempo Δt , o número de pontos global N e uma viscosidade fixa $\nu = 0,01$. Dessa forma, utilizou-se, nas simulações, os seguintes conjuntos de valores para Δt e N : $(1 \times 10^{-3}, 1125)$; $(1 \times 10^{-3}, 1026)$; $(1 \times 10^{-4}, 2011)$; $(1 \times 10^{-4}, 4184)$ e $(1 \times 10^{-4}, 5593)$. Nessas simulações numéricas executadas com o MQDL, utilizando as técnicas de SPA e SE-II, é verificada a redução do DQM e ER na aproximação para as componentes de velocidades $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ em $t = 0,5$ (tempo final), com o aumento do número global de pontos N em Ω . Conforme a ilustração na Figura 27 e a Figura 26, os resultados com o MQDSE foram melhores.

Além disso, produziu-se um teste numérico via MQDL e MQDSE cujos parâmetros foram $n_s = 21$, $c = 1,0536$, $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$, $t = 0,5$ e $\nu = 0,01$. Após fixar esses valores, variou-se o tamanho da nuvem de pontos. Nesse segundo teste numérico observou-se o tempo de processamento da máquina com processador de capacidade 2,71 GHz e memória interna de 4GB. Os resultados das simulações usando o MQDL e o MQDSE, cujos valores estão destacados na Tabela 10, indicam que o ganho de precisão com a técnica de SE-II não requiriu custo adicional de tempo no processamento. Essa precisão está relacionada, como já destacado na seção Seção 3.3, aos números de condição dos SLL da Equação (9). Para confirmar isso, foram analisados os números de condição médios, κ_m , com refinamento da nuvem de pontos. Como pode ser observado nos resultados ilustrados na Figura 28, os valores de κ_m são mais reduzidos com SE-II que os obtidos através da técnica de SPA.

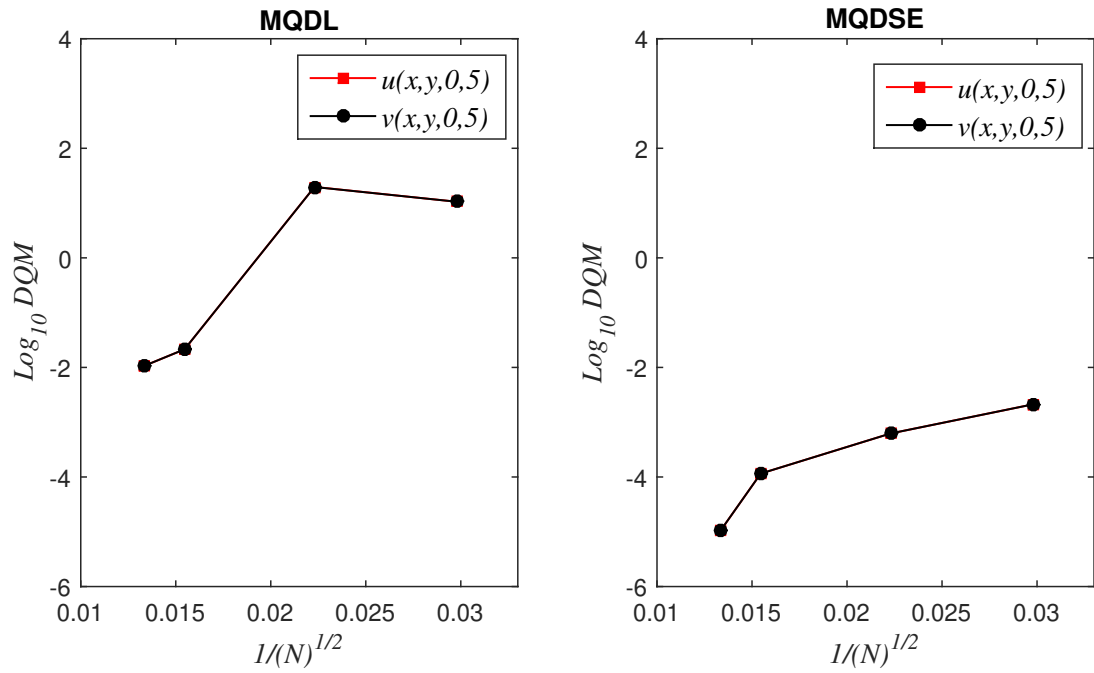


Figura 26 – Estudo do DQM com o MQDL e o MQDSE como função da distância característica entre os nós com $\nu = 0,01$.

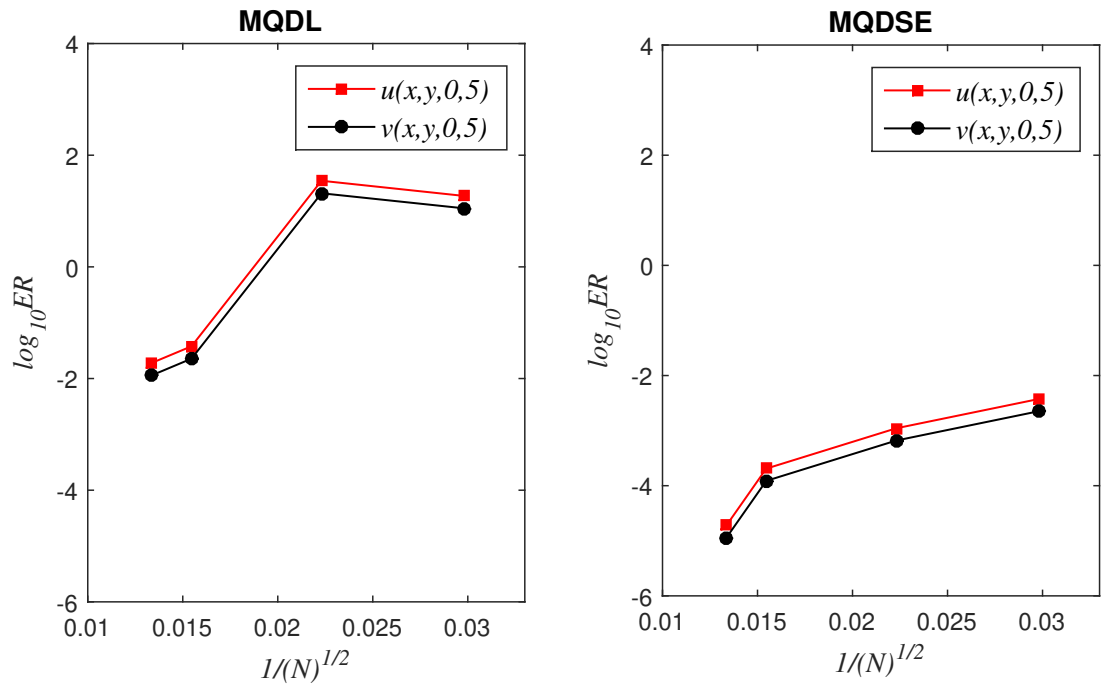


Figura 27 – Estudo do ER com o MQDL e o MQDSE como função da distância característica entre os nós $\nu = 0,01$.

Tabela 10 – Tempo de processamento (em segundos) nos algoritmos do MQDL e MQDSE para tamanhos distintos de nuvens com $n_s = 21$ e $c = 1,0536$, $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$, $t = 0,5$ e $\nu = 0,01$.

Método	Tamanho da nuvem	SPA	SE-II
MQDL	1125	2,627	2,202
	2011	3,724	3,904
	4184	9,357	9,292
	5593	12,739	13,144

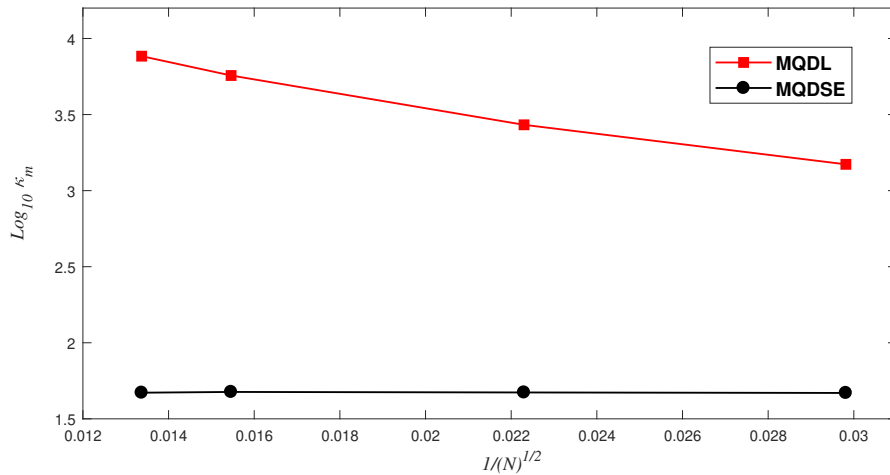


Figura 28 – Número de condição médio (κ_m) obtido das distribuições dos números de condição das matrizes $[A]$ nos SLL com refinamento de nuvem.

A fim de verificar o efeito da densidade local de pontos, realizou-se uma terceira simulação numérica apenas com MQDSE fixando $N = 4184$, $c = 1,0536$, $t = 0,25$, $\nu = 0,01$ e $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$, uma vez fixado esses parâmetros, variou-se o número de pontos do suporte n_s de modo a assumir os valores $n_s = 6, 9, 15, 21$ e 27 . Observa-se, nos resultados obtidos, ilustrados na [Figura 29](#), um ganho expressivo de acurácia do método consoante o aumento do número de pontos do SE-II. *A priori*, essa observação já foi destacada em outros trabalhos, como [Shu, Ding e Yeo \(2003\)](#), [Shan, Shu e Lu \(2008\)](#) e [Silva, Santos e Filho \(2018\)](#), principalmente com uso do MQDL convencional em aproximações de soluções para EDP do tipo lineares.

Para investigar o comportamento das soluções u e v em diferentes momentos, elaborou-se o quarto teste numérico e construiu-se a [Tabela 11](#) com os resultados das simulações no MQDL e MQDSE, cujos parâmetros foram $N = 5593$, $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$, $\nu = 0,01$, $n_s = 21$ e $c = 1,0536$. Posto isto, variou-se apenas t , cujos valores foram, $0,25, 0,5, 0,75$ e 1 . Como pode ser verificado na [Tabela 11](#), as soluções em ambos os métodos perderam precisão com a variação do tempo, principalmente o MQDL. No entanto, enquanto o MQDSE apresentou apenas a perda de uma ordem de precisão em $t = 1$, no

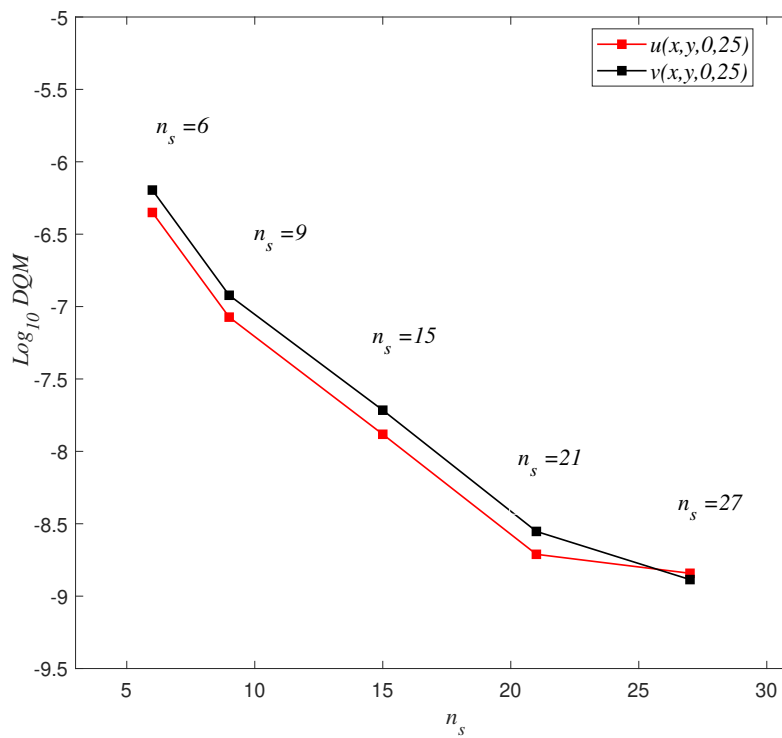


Figura 29 – Estudo do DQM nas aproximações dos campos de velocidade u e v com MQDSE como função do número de pontos n_s .

MQDL com SPA a solução divergiu.

Tabela 11 – Comparação do DQM e ER nas aproximações de u e v obtidos via MQDL e MQDSE com $N = 5593$, $\nu = 0,01$ e $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$.

Método	t	DQM para $u(x,y,t)$	DQM para $v(x,y,t)$	ER para $u(x,y,t)$	ER para $v(x,y,t)$
MQDL	0,25	$5,2935 \times 10^{-5}$	$5,2913 \times 10^{-5}$	$9,3608 \times 10^{-5}$	$5,6060 \times 10^{-5}$
	0,5	$5,2935 \times 10^{-5}$	$5,2913 \times 10^{-5}$	$9,3608 \times 10^{-5}$	$5,6060 \times 10^{-5}$
	0,75	$1,0776 \times 10^{-2}$	$1,0775 \times 10^{-2}$	$1,9056 \times 10^{-2}$	$1,1416 \times 10^{-2}$
	1	$1,0416 \times 10^{+6}$	$1,0415 \times 10^{+6}$	$1,8419 \times 10^{+6}$	$1,1035 \times 10^{+6}$
MQDSE	0,25	$3,5365 \times 10^{-6}$	$3,5365 \times 10^{-6}$	$6,2539 \times 10^{-6}$	$3,7468 \times 10^{-6}$
	0,5	$1,0831 \times 10^{-5}$	$1,0831 \times 10^{-5}$	$1,9153 \times 10^{-5}$	$1,1475 \times 10^{-5}$
	0,75	$1,9959 \times 10^{-5}$	$1,9960 \times 10^{-5}$	$3,5295 \times 10^{-5}$	$2,1147 \times 10^{-5}$
	1	$2,9407 \times 10^{-5}$	$2,9406 \times 10^{-5}$	$5,2002 \times 10^{-5}$	$3,1155 \times 10^{-5}$

No quinto teste numérico, a ordem de acurácia para as componentes de velocidades u e v com $l = 3$, na Equação (34) da Seção 2.5, foi extraída nas simulações obtidas a partir do MQDL e o MQDSE. Exceptuando-se t , nas simulações numéricas os valores de N , Δt , ν , n_s e c , foram os mesmos praticados no teste anterior. Como pode ser visto na Tabela 12, o MQDSE apresenta ordem de acurácia ξ superior em $t = 0,5$.

O último teste desta seção objetivou analisar a influência da redução do coeficiente

Tabela 12 – Taxa de convergência numérica do MQDL e MQDSE com $N = 5593$ utilizando o DQM e ER obtidos nas aproximações de u e v com $\nu = 0,01$.

Tipo de erro	Componente	ξ para o MQDL	ξ para o MQDSE
DQM	$u(x,y,0,5)$	3,92781	13,57592
	$v(x,y,0,5)$	3,94075	13,57613
ER	$u(x,y,0,5)$	3,92716	13,57528
	$v(x,y,0,5)$	3,94102	13,57640

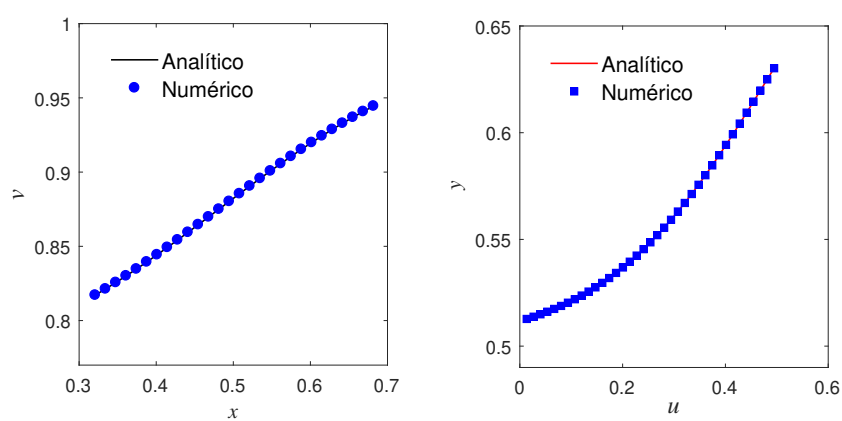
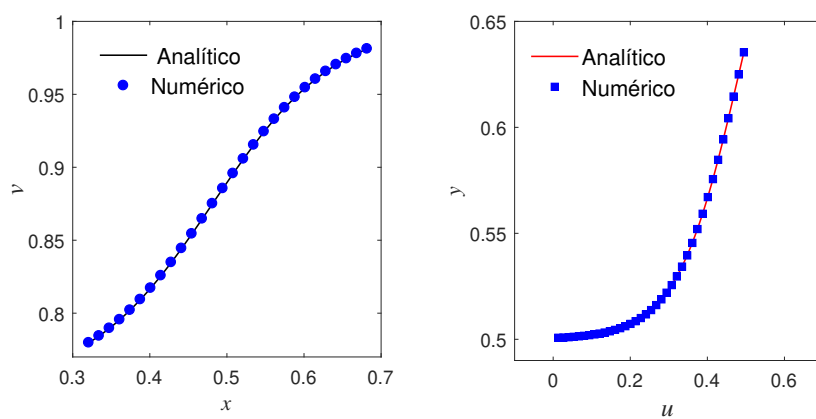
de viscosidade na aproximação das soluções. Foram realizadas simulações numéricas usando o MQDSE, cujos parâmetros admitidos foram $N = 4527$, $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$, $n_s = 21$, $t = 0,5$ e $c = 1,0536$, já os valores de ν foram 0,02 e 0,01. Nos resultados são analisados os perfis dos campos de velocidades u e v nas linhas imaginárias centrais nas direções vertical e horizontal, ao longo das variáveis y e x , respectivamente. Esses resultados numéricos podem ser visualizados na [Figura 30](#) e [Figura 31](#). Nelas, pode-se observar a variação da curva à medida que ν é reduzido, particularmente na componente u , a partir de $u > 0,2$. Esse comportamento da curva agrava-se quando $\nu \rightarrow 0$, gerando, assim, uma descontinuidade de salto e, em razão disso, há perda de precisão. Nesta seção, isso pode ser observado através dos resultados do DQM e ER locais contidos na [tabela 13](#). Para visualizar melhor esse comportamento da curva, os planos das componentes de velocidades u e v também foram destacados na [Figura 32](#).

Tabela 13 – Avaliação local do DQM e ER para as aproximações de u e v com o MQDSE utilizando coeficiente de viscosidade igual a 0,02 e 0,01.

ν	Componente	DQM	ER
0,02	$u(x,y,0,5)$	$5,4444 \times 10^{-7}$	$7,9061 \times 10^{-6}$
	$v(x,y,0,5)$	$6,2440 \times 10^{-7}$	$6,0889 \times 10^{-6}$
0,01	$u(x,y,0,5)$	$9,2826 \times 10^{-7}$	$1,3662 \times 10^{-5}$
	$v(x,y,0,5)$	$1,2323 \times 10^{-6}$	$1,2016 \times 10^{-5}$

Tendo em vista os aspectos observados no presente capítulo, verificou-se, na [Seção 4.2](#), através da análise de estabilidade, para o MQDL e o MQDSE, que ambos os métodos propostos mostraram-se estáveis. Além disso, através dos resultados conseguidos na [Seção 4.3](#), é válido indicar o MQDSE como uma ferramenta capaz de obter soluções de EDPs do tipo não lineares. Nesses testes numéricos, ficou evidente a necessidade da observância do valor de ν , pois esse valor pode gerar descontinuidades de salto nas equações de *Burgers* e, assim, degenerar as soluções. Por outro lado, essas descontinuidades não podem ser desprezadas e devem ser tratadas adequadamente.

Nesse sentido, o capítulo a seguir aborda a descontinuidade em um problema de eletrostática e, apesar de consistir em uma descontinuidade física do tipo fraca, foi possível estabelecer alguns resultados importantes para o manuseio do MQDL nesses problemas.

Figura 30 – Perfis de velocidades v e u com $\nu = 0,02$.Figura 31 – Perfis de velocidades v e u com $\nu = 0,01$.

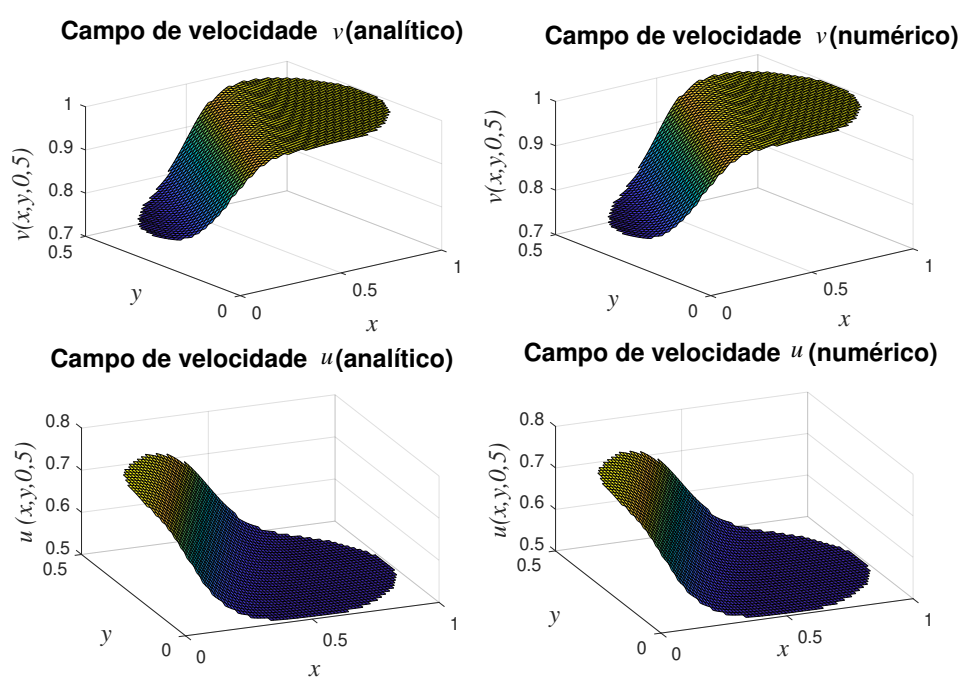


Figura 32 – Gráficos dos campos de velocidades u e v obtidos com o MQDSE em nuvem com $\nu = 0,01$.

5 Tratamento de problemas com descontinuidade física utilizando o MQDL

Os métodos livres de malha surgiram como uma alternativa às técnicas dependentes de malha, sobretudo como uma nova abordagem matemática para tratar de problemas de maior complexidade, como problemas com geometria irregular ou com meios heterogêneos. Esses últimos, podem ocorrer nas interfaces materiais, condições de contorno e gradientes de campos. O tratamento dessas descontinuidades físicas é indispensável, uma vez que possibilita uma melhor aproximação nas soluções numéricas.

De acordo com [Belytschko et al. \(1996\)](#), a descontinuidade é recorrentemente verificada em fenômenos físicos reais, como em campos ou nos seus gradientes ao longo de certas interfaces materiais. A presença de diferentes meios materiais gera uma descontinuidade física ao longo de suas interfaces por possuírem propriedades físicas distintas. Em escoamentos de fluídos, isso é verificado nas interfaces entre dois ou mais diferentes fluidos, bem como em campos eletromagnéticos com dois ou mais meios materiais distintos. Conforme [Marques et al. \(2007\)](#), no caso de problemas em eletrostática envolvendo interfaces de material, devido à descontinuidade material, o campo elétrico apresenta uma descontinuidade física ao cruzar a interface, embora o potencial elétrico seja uma função contínua em todo o domínio. [Viana e Mesquita \(1998\)](#) afirmam que a maioria dos problemas eletromagnéticos, que envolvem interfaces entre meios diferentes possuem uma descontinuidade na componente normal ao campo elétrico na passagem de um meio para outro.

5.1 Descontinuidade material

Segundo [Marinho \(2012\)](#), as descontinuidades são classificadas como fortes, quando envolvem a variável dependente do modelo; e fracas, quando descrevem a descontinuidade na derivada da função. Segundo [Marques et al. \(2007\)](#), a negligência dessas interfaces materiais, quando há a presença de descontinuidades, faz com que a solução apresente oscilações ruins próximas à interface dos materiais. Algumas técnicas para o tratamento dessas descontinuidades são brevemente apresentadas aqui. Dentre elas, tem-se:

- (i) Truncamento de domínios: As contribuições dos pontos de avaliação de um material só podem ser realizadas por pontos nodais pertencentes ao mesmo material.
- (ii) Refinamento de malha: Refina-se a malha junto as extremidades das interfaces

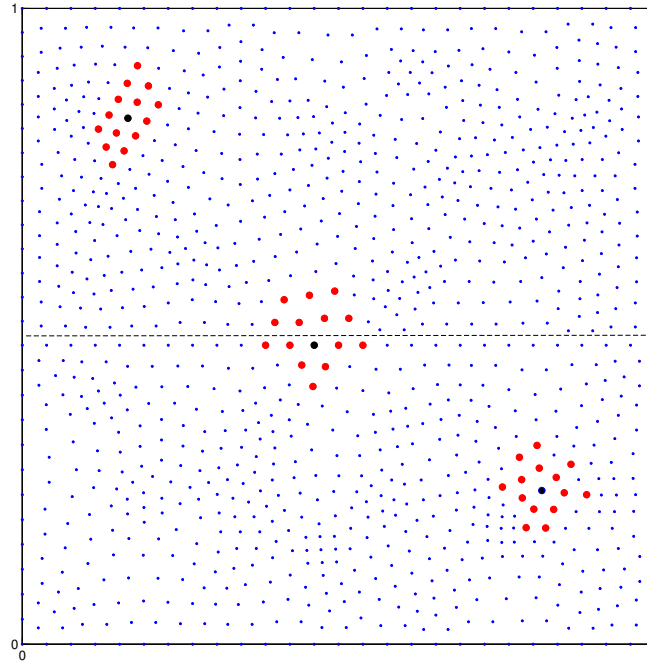


Figura 33 – Nós perto de uma interface localizada no centro da superfície quadrada. As regiões dos suportes mostram um atravessando a interface e alguns que não.

materiais a fim de melhorar a aproximação do método.

- (iii) Técnica de [Lenarduzzi e Schaback \(2016\)](#): Essa técnica é empregada quando a região entre as interfaces materiais é muito menor que a distância entre os nós do domínio. E, diferentemente do método de truncamento de domínios, os suportes incluem informações dos nós localizados em ambos os lados de uma interface, caso o nó de referência esteja muito próximo à interface (Ver [Figura 33](#)). Outra característica é a não inclusão de nenhuma informação das interfaces após cálculo dos pesos no MQDL.

5.2 Funções contínuas

A continuidade de funções é fundamental em várias situações presentes na matemática aplicada como, por exemplo, a classe de funções escolhidas para interpolação de um conjunto de pontos conhecidos são *a priori* também contínuas, pois se a interpolação apresentar descontinuidade, de um nó a outro, a precisão da aproximação será comprometida. Portanto, para evitar imprecisões do tipo da que foi citada anteriormente, empregam-se funções continuamente diferenciáveis ou de classe C^∞ . Essas funções podem ser definidas conforme definição 1

Definição 1 Diz-se que g é uma função de classe C^∞ ou $g \in C^\infty$ se existe $g^0(\mathbf{x})$, $g^1(\mathbf{x})$, $g^2(\mathbf{x})$, $\dots$, $g^m(\mathbf{x})$ em D_g , $\forall \mathbf{x} \in D_g$ e $\forall m \in \mathbb{N}$.

5.2.1 Suavidade da função de base radial multiquádrica

A função multiquádrica $\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$ satisfaz a definição 1 $\forall c > 0$. A variação do parâmetro c de φ faz o valor da mesma variar de um vale acentuado, com c reduzido, para uma região quase plana, com c alto, como pode ser observado, unidimensionalmente para φ , na Figura 34 (a). De acordo com Fornberg e Wright (2004), o aumento do valor de c pode ser bastante preciso quando se está interpolando uma função suave em pontos não estruturados.

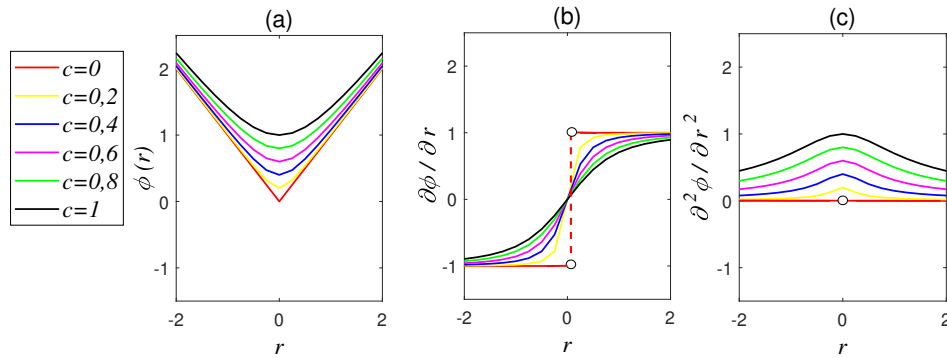


Figura 34 – Esboço das curvas de $\varphi(r)$, $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$ em a, b e c, respectivamente, para distintos valores de c .

Verifica-se que as funções $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$, por exemplo, são descontínuas quando $r = c = 0$, conforme ilustrado na Figura 34 (b) e (c). Apesar disso, o perfil de φ e suas derivadas apresentam diferentes níveis de suavidade para $c > 0$, como é ilustrado na Figura 34. Nessa perspectiva, a aproximação de uma função f em pontos dispersos de $\Psi = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$, através da função de base radial φ , pode, a princípio, evitar saltos bruscos entre pontos de Ψ ao tornar o parâmetro c alto. Assim, baseado nessa proposição, a Seção 5.3 apresenta essa estratégia como uma forma de tratamento dos problemas físicos, cuja função do modelo apresenta descontinuidade do tipo fraca.

5.3 Tratamento de meios não homogêneos através da variação do parâmetro de forma c da multiquádrica.

De acordo com Lenarduzzi e Schaback (2016), um dos princípios básicos da teoria da aproximação é o fato bem conhecido de que os erros e as taxas de convergência sempre melhoram com o aumento de suavidade da função empregada.

Assim, para elevar o grau de suavidade da função φ nos pontos próximos a interface material, este trabalho propõe a técnica de aumento do parâmetro de forma c à medida que os centros da MQ aproximam-se da interface material. Em outras palavras, a função multiquádrica torna-se suave evitando saltos bruscos entre os pontos adjacentes à interface material. Vale destacar que nos pontos próximos à região de descontinuidade material empregou-se a técnica descrita na seção 5.1 Item (iii).

Dessa forma, dado o conjunto de pontos dispersos $\Psi = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^d$ e $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \sqrt{r^2 + \bar{c}_i^2}$, com $r = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2$, tem-se:

$$\bar{c}_i = \begin{cases} \frac{c}{\min_{q=1, \dots, n_d} \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_q\|}, & \text{se } \mathbf{x}_i \neq \bar{\mathbf{x}}_q \\ 1,0536, & \text{se } \mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_q, \end{cases} \quad (75)$$

onde $\mathbf{x}_i$ representa os centros e $\{\bar{\mathbf{x}}_q\}_{q=1}^{n_d}$ os n_d pontos próximos à extremidade da descontinuidade nos quais se pretende aumentar o grau de suavidade da função φ . A grandeza $c = 0,06$ é o valor do parâmetro de forma da MQ sugerido por [Ding, Shu e Tang \(2005\)](#) que, por sua vez, aqui é inversamente proporcional à distância do ponto de referência $\mathbf{x}$ ao ponto de avaliação $\bar{\mathbf{x}}$ mais próximo. Já o valor de $c = 1,0536$ foi extraído do estudo acerca dos valores ótimos para esse parâmetro realizado por [Bayona, Moscoso e Kindelan \(2011\)](#).

5.4 Simulação do potencial elétrico em uma placa quadrada

Segundo [Belytschko et al. \(1996\)](#), quando os coeficientes das EDPs são funções descontínuas nas variáveis espaciais, as soluções usualmente têm derivadas descontínuas ao longo das mesmas linhas e superfícies em duas e três dimensões, respectivamente. Nesta seção, é apresentada uma simulação na qual ocorre esse tipo de descontinuidade. Esse problema físico é representado através de um problema eletrostático em uma placa de tamanho unitário, conforme a ilustração apresentada na [Figura 35](#), cuja superfície possui propriedades físicas distintas, gerando, assim, uma região de descontinuidade.

Embora a descontinuidade destacada nesta seção constitua a forma fraca, ou seja, ocorra apenas na derivada da função, faz-se necessário o tratamento da região de interface material a fim de evitar sua interferência na qualidade das soluções obtidas com o MQDL.

Assim, o problema apresentado aqui consiste em obter a solução de um problema eletrostático, abordado por [MacKinnon e Carey \(1987\)](#), em um domínio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq (x, y) \leq 1\}$, cujo intuito é determinar o potencial eletrostático na ausência de cargas. Fisicamente, esse problema é modelado pela equação de Poisson (40) da seção 3.3 do capítulo 3 com $\rho(x, y) = 0$. Além disso, foram admitidas as seguintes condições de contorno

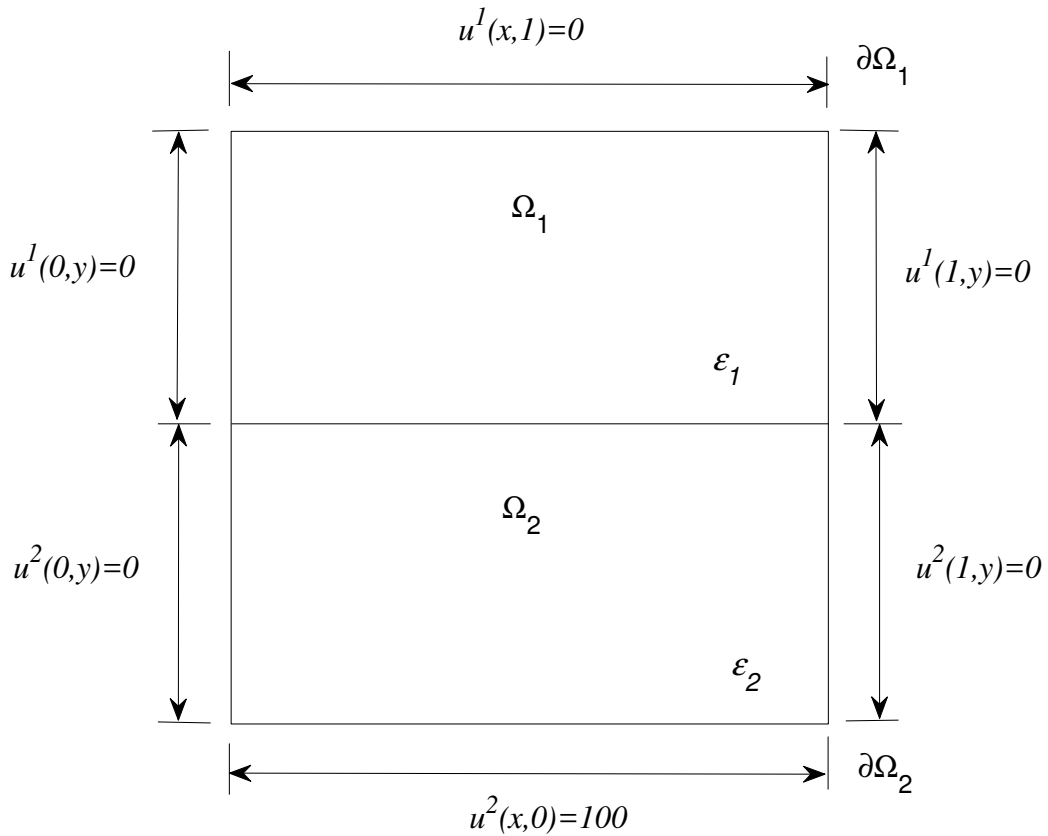


Figura 35 – Condições de contorno na placa quadrada $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

destacadas na [Figura 35](#)

$$u^1(x,y) = 0, \quad \forall x,y \in \partial\Omega_1, \quad (76)$$

$$u^2(x,y) = \begin{cases} 100, & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } y = 0 \text{ em } \partial\Omega_2 \\ 0, & \forall x,y \in \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (77)$$

A representação do domínio computacional foi realizada conforme a técnica já apresentada na seção [Seção 3.3](#). Nas seções Ω_1 e Ω_2 , ilustradas na [Figura 35](#), foram empregadas as permissividades elétricas ε_1 e ε_2 , respectivamente. As soluções semi-analíticas empregadas foram

$$u^1(x,y) = \frac{400\varepsilon_2}{\pi(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sinh[(2n+1)\pi(1-y)] \times \sin[(2n+1)\pi x] \times \text{sech}[(2n+1)\pi/2] \text{csch}[(2n+1)\pi/2] \quad (78)$$

$$u^2(x,y) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \sinh[(2n+1)] \operatorname{sech}(2n+1)\pi/2 \quad (79)$$

$$+ \sinh[(2n+1)\pi(1/2 - y)] \sin[(2n+1)] \operatorname{csch}[(2n+1)\pi/2]$$

De posse das soluções semi-analíticas u^1 e u^2 , com $n \leq 40$ nos somatórios na [Equação \(78\)](#) e [Equação \(79\)](#), foi obtido o *ER* e o *DQM* através das fórmulas (26) e (25), respectivamente, conforme a descrição contida na [Seção 2.5](#) do [Capítulo 2](#).

Como já descrito na [Seção 5.3](#), o valor do parâmetro de forma nas funções multiquádricas é variável, aumentando à medida que a norma $\|x_i - \bar{x}_q\|$ da [Equação \(75\)](#) é reduzida, em que para cada $i = 1, 2, \dots, N$ tem-se $q = 1, 2, \dots, n_d$. É importante frisar aqui o uso dos valores das permissividade elétricas, ε_1 e ε_2 de Ω_1 e Ω_2 , respectivamente, apenas no processo de cálculo dos pesos. Após o cálculo dos $2N$ pesos de segunda ordem em relação a x e y , a [Equação \(40\)](#) foi discretizada através do MQDL para cada ponto de interior (x_i, y_i) no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, assumindo o aspecto da [Equação \(42\)](#) com $\rho(x, y) = 0$.

Vale destacar que a equação resultante da discretização com o MQDL é resolvida utilizando o método de sobre-relaxação sucessiva, conforme o procedimento adotado na [Seção 3.3](#) para equação (42).

5.5 Resultados

5.5.1 Meio homogêneo

Nesta seção, é verificada a simulação do potencial elétrico na placa quadrada descrita na [Figura 35](#), na qual admitiu-se permissividades ε_1 e ε_2 iguais, ou seja, $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1$. Além disso, no MQDL foram tomados os seguintes parâmetros: $c = 0,06$, $n_s = 9$ e $N = 4003$, enquanto para o método de sobre-relaxação sucessiva foi admitido parâmetro de relaxação, f_r , igual a 0,5, número de iterações máximo, *itermax*, igual a 2000 e tolerância, σ , igual a 10^{-7} . Exceptuando-se os valores de c e n_s , que por sua vez foram extraídos de [Ding, Shu e Tang \(2005\)](#), os demais valores dos parâmetros citados para o MQDL e o SOR são obtidos do trabalho de [Silva et al. \(2017\)](#). Vale destacar ainda que nesta seção o parâmetro de forma c foi mantido constante na FBR multiquádrica.

Para uma melhor avaliação do potencial elétrico através da placa, o seu valor nas linhas centrais de sentido vertical foi destacado, ou seja, são utilizadas as soluções numéricas $u(\frac{1}{2}, y)$ e semi-analítica $u(\frac{1}{2}, y)$ nas fórmulas do *ER* e do *DQM*. Os resultados numéricos dessa simulação podem ser observados através da [Figura 36](#). Nela, é possível verificar que o MQDL convergiu, e as equipotenciais obtidas via MQDL apresentam similaridade às obtidas através da solução semi-analítica. Observa-se, também no centro da placa, ou seja,

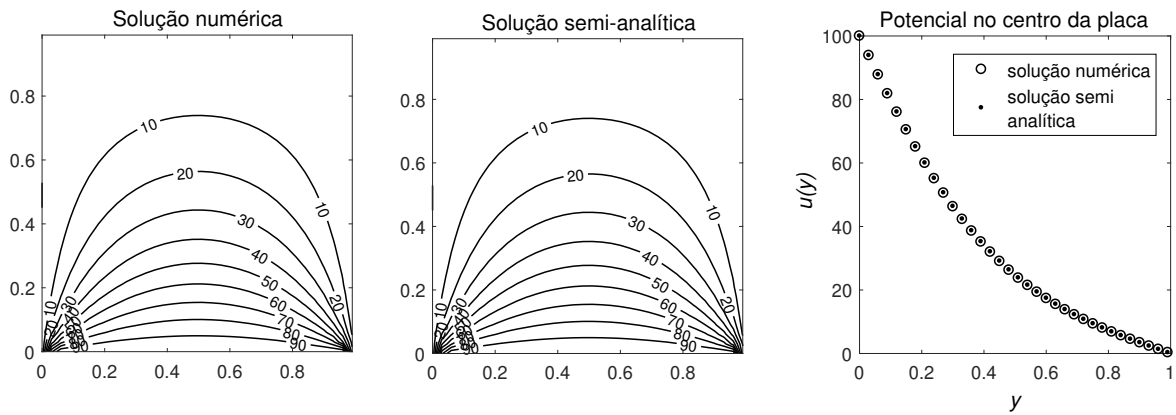


Figura 36 – Equipotenciais obtidas com MQDL no meio homogêneo.

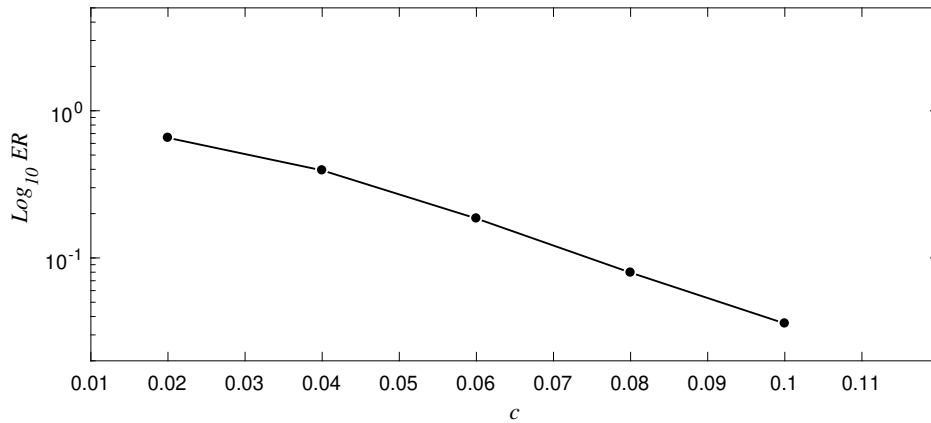


Figura 37 – Erro relativo associado ao aumento se suavidade da FBR.

ao longo do eixo y , que a aproximação do potencial elétrico atingiu um nível aceitável e, apesar disso, foram obtidos $ER = 1,6807 \times 10^{-2}$ e $DQM = 2,1903 \times 10^{-2}$.

Já o aumento da suavidade na FBR multiquádrica, uma vez influenciada pelo aumento do parâmetro c , pode ser uma boa estratégia para melhorar a precisão numérica do MQDL. Para destacar esse efeito, elaborou-se também a simulação com os mesmos parâmetros já destacados para o MQDL e o SOR anteriormente, entretanto, foi admitida para cada simulação um parâmetro c distinto. Esses valores, colhidos da referência [Ding, Shu e Tang \(2005\)](#), foram 0,02, 0,04, 0,06, 0,08, e 0,1. Os resultados dessas simulações estão representados na [Figura 37](#) e, como pode ser visualizado nessa figura, ER cai com aumento do parâmetro c .

5.5.2 Meio heterogêneo

A simulação produzida nesta seção é realizada do mesmo modo da simulação realizada na seção [Subseção 5.5.1](#), entretanto, admitiu-se meios materiais com propriedades físicas distintas, ou seja, as seções Ω_1 e Ω_2 na [Figura 35](#), foram dotadas de permissividades elétricas distintas, $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,1$ e $0,01$. Como pode ser observado na [Figura 38](#) e na [Figura 39](#),

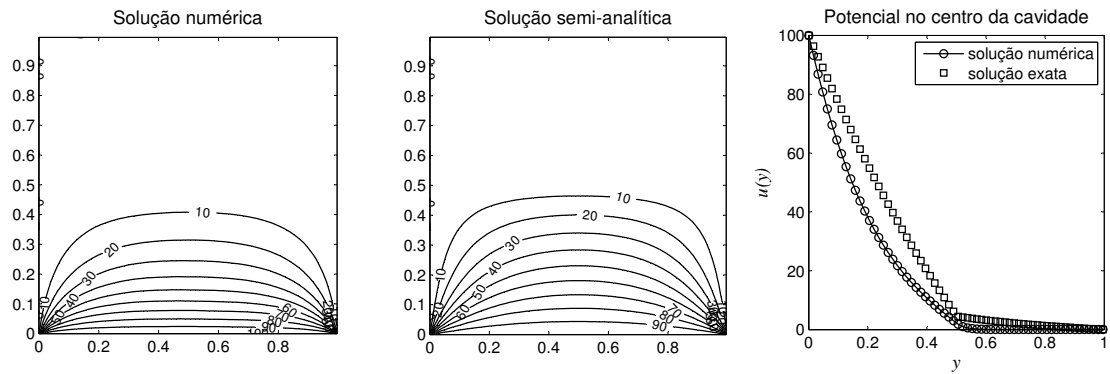


Figura 38 – Equipotenciais obtidas com MQDL utilizando c fixo e $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,01$.

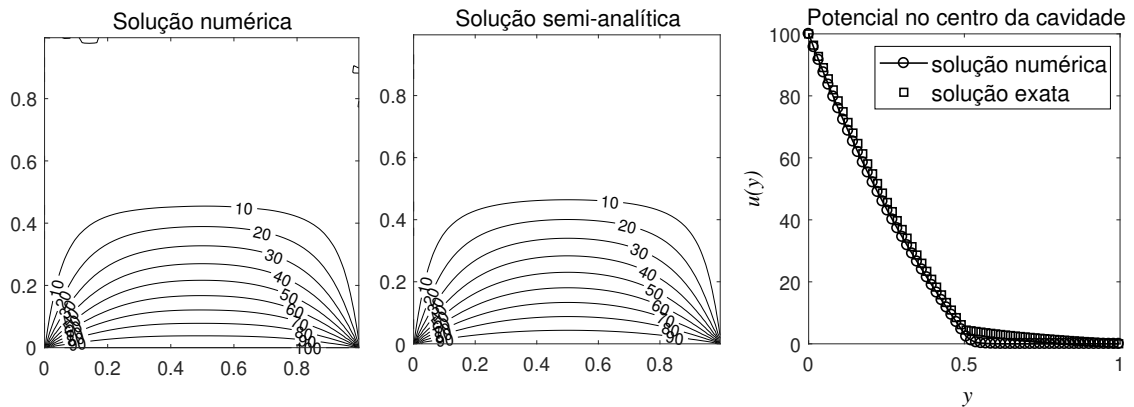


Figura 39 – Equipotenciais obtidas com MQDL utilizando c variável e $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,01$.

as linhas equipotenciais obtidas nas simulações com $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,01$ são similares, no entanto, a solução numérica obtida com aumento da suavidade em destaque na ultima figura, gerou um resultado mais preciso. Percebe-se, ainda na [Figura 38](#), particularmente ao longo do eixo y , que o valor do potencial elétrico próximo à região de interface sofreu uma perda de precisão significativa, no entanto, os resultados obtidos com o MQDL usando $\bar{c}$ variável, a convergência na região próxima à interface material é mantida, garantindo assim um valor do erro mais reduzido. Esses valores de erro, tanto o local, próximo a descontinuidade, bem como o global, podem ser visualizados na [Tabela 14](#).

Já nas simulações com $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,1$ percebeu-se também uma melhora no calculo do

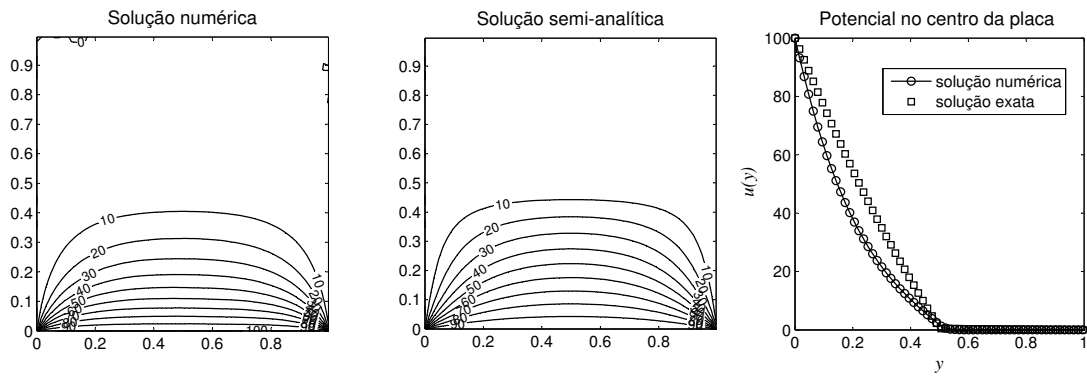


Figura 40 – Equipotenciais obtidas com MQDL utilizando c fixo e $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,1$.

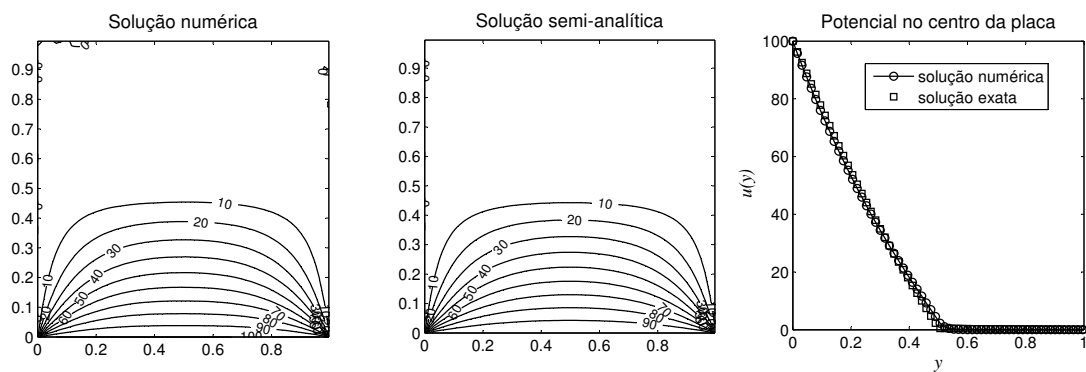


Figura 41 – Equipotenciais obtidas com MQDL utilizando c variável e $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,1$.

potencial elétrico ao usar o MQDL com $\bar{c}$ variável. No intuito de ilustrar essa vantagem do MQDL com uso da técnica de parâmetro de forma variável, a [Figura 40](#) e a [Figura 41](#) são apresentadas bem como, a avaliação do DQM e o ER globais e locais na [Tabela 15](#).

Tabela 14 – Avaliação do DQM e o ER local e global para as soluções numéricas obtidas para o MQDL com parametro de forma fixo e variável com $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,01$.

Método	DQM local	DQM global	ER local	ER global
MQDL com c fixo	8,5174	1,9379	3,9641	1,2589
MQDL com $\bar{c}$ variável	1,3802	1,0249	$6,1782 \times 10^{-1}$	$3,0211 \times 10^{-2}$

Ao longo deste capítulo, foi destacado a descontinuidade física em eletrostática com uso do MQDL. Esse método, por ser relativamente novo, encontra-se num estágio embrionário em relação às técnicas de abordagem dos problemas com interface material, principalmente quando comparado aos métodos convencionais. Nesse sentido, na [Seção 5.2](#) é apresenta a segunda contribuição deste trabalho para problemas com descontinuidades do tipo fraca. Essa proposta oferece uma nova formulação do MQDL com descontinuidade.

Tabela 15 – Avaliação do DQM e o ER local e global para as soluções numéricas obtidas para o MQDL com parametro de forma fixo e variável com $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0,1$.

Método	DQM local	DQM global	ER local	ER global
MQDL com c fixo	5,4796	$9,1109 \times 10^{-1}$	2,1109	$1,3879 \times 10^{-1}$
MQDL com $\bar{c}$ variável	1,0775	$1,9771 \times 10^{-1}$	$5,7263 \times 10^{-1}$	$2,8772 \times 10^{-2}$

Nessa abordagem, o tratamento das soluções são enriquecidas a partir da função MQ, cujo aumento de suavidade dá-se através do parâmetro de forma alto. Portanto, os valores desses parâmetros foram admitidos variáveis a fim de melhorar as soluções junto à descontinuidade. Na [Subseção 5.5.2](#), foram apresentados os resultados das implementações do esquema numérico proposto. Percebeu-se, nas soluções obtidas via MQDL com parâmetro $\bar{c}$ variável, uma potencial ferramenta, sobretudo para subsidiar as poucas técnicas existentes de tratamento da descontinuidade no MQDL.

6 Conclusão

A dependência a uma estrutura de pontos em malha de métodos tradicionais como MDF oferece um custo computacional considerável, particularmente quando esse método é usado em problemas cuja a geometria é irregular e não coincide com as arestas da malha computacional. Além da dificuldade associada com a geração de malha em geometria irregular, os métodos MEF e MDF também podem apresentar soluções inconsistentes em problemas com descontinuidades físicas, pois as aproximações desses métodos fica garantida pelo pré-estabelecimento de uma conexão entre as arestas. Com objetivo de contornar essas dificuldades, os métodos livre de malha foram propostos. Nesses métodos, a solução de um problema em um espaço de dimensão finita é construída independente da conectividade entre os pontos nodais, dependendo, assim, apenas do nó na nuvem de pontos. Nesse sentido, este trabalho abordou um método sem malha conhecido como método de quadratura diferencial local, bem como, aspectos relevantes ao seu desenvolvimento. Esses estudos foram descritos ao longo dos capítulos deste trabalho, cujas observações serão realizadas aqui a seguir.

No [Capítulo 2](#) foi apresentado o método de quadratura diferencial na abordagem global, assim como, na versão local com uso da função multiquádrica $\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$, em que c é o parâmetro de forma e r expressa uma norma euclidiana entre os centros e um ponto qualquer no domínio. Na versão local, foi destacado o efeito da distância mínima h entre os nós de suporte. Para isso, foi estudado nos SLL descritos na equação (8) a matriz de coeficientes $[A]$, obtida via interpolação de pontos. Nessa matriz foi tomado um elemento $\sqrt{h^2 + c^2}$, aproximando-o através de uma expansão de MacLaurin em torno de $h = 0$. Através disso, foi possível verificar que a matriz $[A]$ dos SLL associada a função MQ torna-se singular quando $h \rightarrow 0$. Com o propósito de evidenciar o mal condicionamento de $[A]$ para $d > 2$, utilizou-se o teorema 2.4.1, no qual estabelece o crescimento exponencial de $\|A^{-1}\|$ quando $h \rightarrow 0$. Além disso, nesse mesmo capítulo foi verificado o erro local de truncamento no MQDL na derivada de primeira ordem e, conforme destacado na equação na [Equação \(24\)](#), o erro é mínimo quando o parâmetro c assume valores ótimos.

No [Capítulo 3](#), foi apresentada uma técnica inovadora para o MQDL na construção dos suportes locais, designada de suporte expandido. Diferentemente da abordagem clássica na constituição de conjunto de nós a partir da menor distancia no SPA, o SE constrói o suporte local por meio de um certo número de pontos mais próximos para as d linhas concorrentes que se cruzam no ponto de referência. Essa técnica consiste em mitigar os efeitos do mal condicionamento nos SLL gerado por sua vez quando $h \rightarrow 0$, aumentando a distância média entre os nós de suporte.

Com intuito de verificar os benefícios da técnica de SE-I e SE-II sobre o suporte clássico (SPA), foram realizados experimentos numéricos com as principais FBR infinitamente suaves. Os resultados obtidos nas simulações numéricas com as FBR em SE-I, SE-II e SPA revelam que o mau condicionamento ainda é frequente, e a configuração dos suportes locais pode influenciar bastante o condicionamento dos SLL. Além disso, o mau condicionamento tende a se agravar ainda mais com o uso do convencional SPA. Para destacar esse efeito na precisão numérica do MQDL, foi realizada a solução numérica de um problema com a equação de Poisson (40) considerando a condição de contorno Dirichlet. Nesse problema foi utilizado nuvens de diferentes tamanhos. A solução desse problema foi realizada através do método de quadratura diferencial local utilizando os suportes SE-II e SPA. Nas aproximações desse problema foi percebido, através do *DQM*, que o MQDSE contém pelo menos 4 dígitos verdadeiros em suas aproximações, enquanto a solução via MQDL convencional, 3 dígitos.

A fim de investigar o desempenho do MQDSE em problemas com condição de contorno mista e geometria irregular, testes numéricos com a Equação (40) foram propostos na Seção 3.4. Como foi observado nos testes numéricos realizados, evidenciou-se que os problemas são bem-postos, apresentando soluções com estabilidade através do MEF e o MQDSE. O MEF, por depender da forma regular dos elementos constituintes da malha, sofreu uma relativa perda de precisão consoante o refinamento da mesma. Já o MQDSE, por depender apenas do ponto, não sofreu esse tipo de prejuízo. Em razão disso, o MQDSE possibilitou boa precisão e uma alta ordem de acurácia com o refinamento de nuvem. Percebe-se, ainda, que o MQDSE representa uma ferramenta eficiente para solução de problemas em eletrostática bidimensionais com geometria irregular.

Além dos testes numéricos realizados no Capítulo 3 com o MQDSE, o Capítulo 4 investigou a performance do MQDSE na solução de EDPs do tipo não lineares e parabólicas, particularmente, com as equações de Burgers representadas pelas equações (61) e (62). Em conformidade com Fortuna (2000), tais equações são bastantes usuais em problemas de dinâmica dos fluidos, bem como utilizadas para avaliar métodos numéricos. Neste trabalho, essas equações foram usadas para descrever um PVI numa geometria de fronteira curva com condição de Dirichlet. No esquema numérico para resolução das equações de Burgers, foi empregado o método de Runge-Kutta de quarta ordem para aproximar as derivadas temporais, já as derivadas nas coordenadas espaciais foram obtidas através do MQDL e do MQDSE.

Nesse capítulo, também foi realizado um estudo da convergência do método baseado no trabalho de Kumar, Tripathi e Kadalbajoo (2015), que consistiu em avaliar a convergência do esquema numérico através dos autovalores da matriz expressa na Equação (72), tomando como referência a região de instabilidade do método RK4. E, embora a pesquisa sobre convergência no MQDL seja ainda incipiente, esse estudo de estabilidade

foi determinante na escolha dos parâmetros Δt e ν para verificar se a sequência de soluções aproximadas convergiam quando a nuvem de pontos era refinada. No tocante a isso, observou-se no PVI proposto que o MQDSE é consistente, uma vez que nas aproximações o erro tende a zero quando Δt é reduzido. Além dessa análise, foi realizado um estudo sobre κ_m das distribuições dos números de condições matriciais dos SLL e, apesar de se tratar de EDPs não lineares, κ_m é mais reduzido com o uso do SE-II que os obtidos via SPA. Outro aspecto observado nesse capítulo foi o comportamento das soluções em diferentes momentos. Esses testes mostraram que enquanto o MQDSE perde uma ordem de precisão em $t = 1$, o MQDL diverge.

Após esses estudos com as equações de Burgers, constatou-se que o MQDSE possibilitou uma aproximação numérica com DQM e ER mais reduzidos e melhores ξ , sem, no entanto, requerer custo adicional de tempo no processamento. Entretanto, verificou-se que tanto o MQDL quanto o MQDSE podem ter suas aproximações comprometidas com o valor inadequado do coeficiente de viscosidade ν , haja vista que a redução da mesma gera a descontinuidade de salto. Apesar disso, observou-se que o MQDSE tem um grande potencial na solução de problemas em dinâmica dos fluidos.

Com isso, fica evidenciado que os testes numéricos com as EDPs do tipo lineares, não lineares, com CCM e geometria irregular foram corroborados com estudo de sensibilidade à distância mínima da MQ. Este último sugere que o MQDL pode apresentar uma melhora considerável na aproximação de derivadas em qualquer nó, quando se recorre à forma alternativa de se definir o suporte associado a um dado nó de referência, como os apresentados neste trabalho (as técnicas de suporte expandido SE-I e SE-II). Nestas propostas, os pontos do suporte são escolhidos como os mais próximos a retas concorrentes no ponto de referência e, uma vez que a distância média do nó de referência ao nó de suporte aumenta, mitiga-se o efeito da distância reduzida nos SLL.

Por último, o [Capítulo 5](#) tratou da descontinuidade física em eletrostática com aplicação do MQDL. E, como já destacado *a priori*, essa descontinuidade, mesmo sendo fraca, pode prejudicar a aproximação numérica. Entretanto, técnicas adequadas podem intervir para obter um melhor desempenho numérico nessas regiões. Nesse sentido, foi apresentado a segunda contribuição deste trabalho através da suavidade de funções, particularmente com a função multiquádrica. Nela foi destacada a descontinuidade na derivada de primeira ordem (ou de ordem qualquer) quando $r = 0$ e $c = 0$. Entretanto, esta têm derivadas contínuas (ou apresenta maior suavidade) para $c > 0$ (Ver [Figura 34](#)). Dessa forma, partindo da premissa de que os resultados da aproximação melhoram com aumento de suavidade da função empregada, este trabalho propôs uma técnica para tratar a descontinuidade física com aumento de suavidade da MQ e, assim, possibilitar soluções mais razoáveis com o MQDL. É importante frisar a estratégia do parâmetro c variável como uma técnica vantajosa, pois não requer aumento sustancial no tempo de processamento,

uma vez que os valores de $\bar{c}$ provêm da norma euclidiana r presente na função MQ.

Outro aspecto a ser considerado nessa técnica é que, como já descrito no trabalho de [Silva et al. \(2017\)](#), o valor do parâmetro de forma alto possibilita que os SLL representados na equação matricial (9) tenham números de condição ruins. Entretanto, foi proposto aqui o aumento desse parâmetro apenas em regiões onde há efeitos significativos, como a presença de interface material.

Nas simulações realizadas da aplicação do MQDL, para obter a solução do problema eletrostático descrito pela equação de Laplace, cujas permissividades elétricas são descontínuas nas variáveis espaciais x e y , foi observado, através da [Tabela 14](#) e da [Tabela 15](#), a redução do erro local e global quando usado na MQ o $\bar{c}$. Além disso, foi visto que a técnica de [Lenarduzzi e Schaback \(2016\)](#) para o MQDL é viável, no entanto, conforme os resultados obtidos na [Subseção 5.5.2](#), pode-se obter soluções com maior acurácia, contando que seja incluída a técnica apresentada neste trabalho do parâmetro de forma variável.

Por fim, os estudos realizados ao longo deste trabalho sobre o MQDL destacam, em suma, o estabelecimento de duas técnicas; uma, aplicada a melhoria do $\kappa([A])$ das matrizes associadas aos SLL; e outra, no tratamento de problemas com descontinuidade física fraca. Considerando que a pesquisa dedicada aos métodos livre de malha ainda é pequena, sobretudo quando comparada aos métodos convencionais, os estudos aqui enfatizados representam um avanço para o desenvolvimento do MQDL.

Além disso, as aplicações com o MQDL desenvolvidas aqui preconizaram o aspecto interdisciplinar, envolvendo áreas distintas como eletrostática e dinâmica dos fluidos. Isso foi proposto não só para romper as estruturas de cada uma para alcançar uma visão comum de conhecimento, mas também, com o propósito de favorecer o uso do MQDL em outras áreas.

6.1 Trabalhos Futuros

Embora as pesquisas acerca dos métodos sem malha tenham crescido nos últimos anos, muitos aspectos no MQDL ainda necessitam de uma investigação mais ampla.

Este trabalho apresentou um estudo relevante sobre o condicionamento de algumas FBR, bem como o tratamento de problemas com descontinuidades físicas utilizando o MQDL. Apesar disso, ao longo deste trabalho foram elencados alguns aspectos que, parcialmente ou em sua totalidade, devem ser investigados em trabalhos futuros. Esses tópicos são:

1. estudar outras estratégias a fim de melhorar o condicionamento dos SLL;
2. realizar testes numéricos com SE-I e SE-II tridimensionais;
3. investigar o condicionamento das matrizes locais geradas com as FBR, com a variação do tamanho (L) da cavidade quadrada;

4. investigar o MQDL utilizando a técnica do parâmetro de forma variável em problemas com descontinuidade física do tipo forte em dinâmica dos fluidos;
5. estudo do erro em derivadas de ordem superior com o MQDL;
6. novas aplicações.

A não execução desses tópicos não impedem a aplicação do MQDL no presente, no entanto, podem melhorar bastante as futuras aplicações no campo da engenharia, bem como tornar exequível alguns problemas tidos como complexos na computação numérica.

Referências

AHMAD, I.; KHALIQ, A. Q. et al. Local rbf method for multi-dimensional partial differential equations. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 74, n. 2, p. 292–324, 2017. Citado na página 45.

BAKER, C.; PAUL, C.; TIAN, H. Differential algebraic equations with after-effect. **Journal of computational and applied mathematics**, Elsevier, v. 140, n. 1-2, p. 63–80, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 43.

BALL, K.; SIVAKUMAR, N.; WARD, J. D. On the sensitivity of radial basis interpolation to minimal data separation distance. **Constructive Approximation**, Springer, v. 8, n. 4, p. 401–426, 1992. Citado na página 16.

BASTO, M.; SEMIAO, V.; CALHEIROS, F. Dynamics in spectral solutions of burgers equation. **Journal of computational and applied mathematics**, Elsevier, v. 205, n. 1, p. 296–304, 2007. Citado na página 43.

BAYONA, V. et al. RBF-FD formulas and convergence properties. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 229, n. 22, p. 8281–8295, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 3, 15, 17 e 20.

BAYONA, V.; MOSCOSO, M.; KINDELAN, M. Optimal constant shape parameter for multi-quadric based rbf-fd method. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 230, n. 19, p. 7384–7399, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 2, 18, 48 e 58.

BELLMAN, R.; KASHEF, B. G.; CASTI, J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 10, n. 1, p. 40–52, 1972. Citado 4 vezes nas páginas 1, 7, 11 e 20.

BELYTSCHKO, T. et al. Meshless methods: an overview and recent developments. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 139, n. 1-4, p. 3–47, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 1, 42, 55 e 58.

BERNAL, F.; GUTIERREZ, G.; KINDELAN, M. Use of singularity capturing functions in the solution of problems with discontinuous boundary conditions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 33, n. 2, p. 200–208, 2009. Citado na página 4.

BIAZAR, J.; AMINIKHAH, H. Exact and numerical solutions for non-linear burger's equation by vim. **Mathematical and Computer Modelling**, Elsevier, v. 49, n. 7, p. 1394–1400, 2009. Citado na página 44.

BOYD, J. P.; GILDERSLEEVE, K. W. Numerical experiments on the condition number of the interpolation matrices for radial basis functions. **Applied Numerical Mathematics**, Elsevier, v. 61, n. 4, p. 443–459, 2011. Citado na página 16.

BRUNETTI, F. **Mecânica dos fluidos**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2007. Citado na página 44.

BURGERS, J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. **Advances in applied mechanics**, Elsevier, v. 1, p. 171–199, 1948. Citado na página 43.

DING, H.; SHU, C.; TANG, D. Error estimates of local multiquadric-based differential quadrature (lmq dq) method through numerical experiments. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 63, n. 11, p. 1513–1529, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 19, 24, 29, 58, 60 e 61.

DRISCOLL, T. A.; FORNBERG, B. Interpolation in the limit of increasingly flat radial basis functions. **Computers and Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 43, n. 3-5, p. 413–422, 2002. Citado na página 9.

FAN, C.-M.; LI, P.-W. Generalized finite difference method for solving two-dimensional burgers' equations. **Procedia Engineering**, Elsevier, v. 79, p. 55–60, 2014. Citado na página 44.

FASSHAUER, G. E. **Meshfree approximation methods with MATLAB**. [S.l.]: World Scientific, 2007. v. 6. Citado 3 vezes nas páginas 1, 3 e 9.

FORNBERG, B.; WRIGHT, G. Stable computation of multiquadric interpolants for all values of the shape parameter. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 48, n. 5-6, p. 853–867, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 11, 15 e 57.

FORTUNA, A. de O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. [S.l.]: Edusp, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 66.

FRANKE, R. Scattered data interpolation: tests of some methods. **Mathematics of Computation**, v. 38, n. 157, p. 181–181, 1982. Citado na página 9.

GRIFFITHS, G.; SCHIESSER, W. E. **Traveling wave analysis of partial differential equations: numerical and analytical methods with MATLAB and Maple**. [S.l.]: Academic Press, 2010. Citado na página 2.

GUIMARÃES, F. G. et al. A meshless method for electromagnetic field computation based on the multiquadric technique. **IEEE Transactions on Magnetics**, IEEE, v. 43, n. 4, p. 1281–1284, 2007. Citado na página 8.

HARDY, R. L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. **Journal of geophysical research**, Wiley Online Library, v. 76, n. 8, p. 1905–1915, 1971. Citado na página 9.

HUERTA, A.; RAMOS, J. S.; FERRAN, A. R. **Métodos numéricos: introducción, aplicaciones y programación**. [S.l.]: Edicions UPC, 1998. Citado na página 16.

JALAAL, M. et al. Numerical simulation of electric field in complex geometries for different electrode arrangements using meshless local mq-dq method. **Journal of Electrostatics**, Elsevier, v. 69, n. 3, p. 168–175, 2011. Citado 4 vezes nas páginas ix, 8, 9 e 42.

KANSA, E.; HON, Y. Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions: applications to elliptic partial differential equations. **Computers and Mathematics with applications**, Citeseer, v. 39, n. 7-8, p. 123–138, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 10.

KANSA, E. J. Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—ii solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. **Computers & mathematics with applications**, Elsevier, v. 19, n. 8-9, p. 147–161, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 10.

- KORKMAZ, A.; DAĞ, İ. Shock wave simulations using sinc differential quadrature method. **Engineering Computations**, Emerald Group Publishing Limited, v. 28, n. 6, p. 654–674, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 46.
- KUMAR, A.; TRIPATHI, L. P.; KADALBAJOO, M. K. A numerical study of asian option with radial basis functions based finite differences method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 50, p. 1–7, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 3, 10, 46 e 66.
- LENARDUZZI, L.; SCHABACK, R. Adaptive approximation of functions with discontinuities. **arXiv preprint arXiv:1612.07553**, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 56, 57 e 68.
- LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems**. [S.l.]: Siam, 2007. v. 98. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- MACKINNON, R. J.; CAREY, G. F. Treatment of material discontinuities in finite element computations. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 24, n. 2, p. 393–417, 1987. Citado na página 58.
- MARINHO, M. R. Uma contribuição ao estudo do ajuste ótimo de parâmetros para cálculo de campos eletromagnéticos descontínuos com o método efg. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2012. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 55.
- MARQUES, G. N. et al. Interpolating efgm for computing continuous and discontinuous electromagnetic fields. **COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering**, Emerald Group Publishing Limited, v. 26, n. 5, p. 1411–1438, 2007. Citado na página 55.
- MONGILLO, M. Choosing basis functions and shape parameters for radial basis function methods. v. 4, 01 2011. Citado na página 8.
- MOURA, C. A. D.; KUBRUSLY, C. S. The courant-friedrichs-lewy (cfl) condition. **Commun. Pure Appl. Math**, Springer, v. 10, n. 2, p. 363–371, 2013. Citado na página 47.
- NETA, B. Numerical solution of partial differential equations (ma 3243 lecture notes). Monterey, California. Naval Postgraduate School, 2003. Citado na página 43.
- RICARDO, H. J. **A modern introduction to differential equations**. [S.l.]: Academic Press, 2009. Citado na página 2.
- SADIKU, M. N. **Numerical Techniques in Electromagnetics with MATLAB**. [S.l.]: CRC Press, Inc., 2009. Citado na página 32.
- SANTOS, L. G. C. Esquemas sem malha baseados no método de quadratura diferencial local com funções de base radial para solução numérica das equações de navier-stokes. 2016. Citado na página 32.
- SARRA, S. A. Adaptive radial basis function methods for time dependent partial differential equations. **Applied Numerical Mathematics**, Citeseer, v. 54, n. 1, p. 79–94, 2005. Citado na página 16.

SHAN, Y.; SHU, C.; LU, Z. Application of local MQ-DQ method to solve 3D incompressible viscous flows with curved boundary. **Computer modeling in engineering and**, p. 99, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 50.

SHU, C. **Differential quadrature and its application in engineering**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 7, 11 e 17.

SHU, C.; DING, H.; YEO, K. Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 192, n. 7-8, p. 941–954, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 3, 7, 8, 12, 20, 23 e 50.

SHU, C.; SHAN, Y.; QIN, N. Development of a local mq-dq-based stencil adaptive method and its application to solve incompressible navier–stokes equations. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 55, n. 4, p. 367–386, 2007. Citado na página 8.

SILVA, J. da; SANTOS, L.; FILHO, N. M. A local differential quadrature method with variable shape multiquadrics: Tests on poisson equation and fluid dynamics using consistent cloud refinements. **RETERM-Thermal Engineering**, v. 16, n. 2, p. 62–66, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 8, 33 e 50.

SILVA, J. R. da et al. Effect of local support configuration on the precision of numerical solutions of poisson equation obtained with differential quadrature method. **IEEE Transactions on Magnetics**, IEEE, v. 53, n. 6, p. 1–4, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 68.

TOLSTYKH, A.; SHIROBOKOV, D. On using radial basis functions in a “finite difference mode” with applications to elasticity problems. **Computational Mechanics**, Springer, v. 33, n. 1, p. 68–79, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 20.

TOMASIELLO, S. Stability and accuracy of the iterative differential quadrature method. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 58, n. 9, p. 1277–1296, 2003. Citado na página 45.

VIANA, S. A.; MESQUITA, R. C. Método de galerkin sem malha aplicado ao cálculo de campos eletromagnéticos. In: **Anais do Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo**. [S.l.: s.n.], 1998. p. 214–217. Citado na página 55.

WRIGHT, G. **Radial basis function interpolation: numerical and analytical developments**. 147 p. Tese (Doutorado) — University of Colorado, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 20.

ZHU, H.; SHU, H.; DING, M. Numerical solutions of two-dimensional burgers’ equations by discrete adomian decomposition method. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 60, n. 3, p. 840–848, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 42.