



PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI



Universidade Federal  
de São João del-Rei

**DANIELLE SILVA GONTIJO**

**SÍNTESE DE CONTROLE ROBUSTO  $\mathcal{H}_\infty$  DE SISTEMAS EM  
TEMPO DISCRETO LINEARES INVARIANTES NO TEMPO  
COM DEPENDÊNCIA POLINOMIAL DE PARÂMETROS  
BASEADA NO ALGORITMO EVOLUÇÃO DIFERENCIAL**

BELO HORIZONTE  
2019



PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI



Universidade Federal  
de São João del-Rei

**DANIELLE SILVA GONTIJO**

**SÍNTESE DE CONTROLE ROBUSTO  $\mathcal{H}_\infty$  DE SISTEMAS EM  
TEMPO DISCRETO LINEARES INVARIANTES NO TEMPO  
COM DEPENDÊNCIA POLINOMIAL DE PARÂMETROS  
BASEADA NO ALGORITMO EVOLUÇÃO DIFERENCIAL**

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais e Universidade Federal de São João Del-Rei, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas

Linha de pesquisa: Análise e Modelagem de Sistemas

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves

BELO HORIZONTE  
2019

Gontijo, Danielle Silva

G641s      Síntese de controle robusto  $H_\infty$  de sistemas em tempo discreto lineares invariantes no tempo com dependência polinomial de parâmetros baseada no algoritmo evolução diferencial / Danielle Silva Gontijo. – 2019.

xiii, 65 f.: il., gráfs.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica em associação ampla entre a UFSJ e o CEFET-MG.

Orientador: Eduardo Nunes Gonçalves.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Controle robusto – Teses. 2. Controle H [símbolo infinito] – Teses. 3. Sistemas de controle por realimentação – Teses. 4. Sistemas de tempo discreto – Teses. 5. Programação (matemática) – Teses. 6. Programação linear – Teses. 7. Algoritmos genéticos – Teses. I. Gonçalves, Eduardo Nunes. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Universidade Federal de São João del-Rei. IV. Título.

CDD 621.3191

*Se eu não desisti, se eu não fraquejei, se estou aqui, é por vocês, queridos pais. Obrigada por acreditarem em mim e nos meus sonhos.*

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por iluminar o meu caminho e me dar força e coragem para concretizar essa etapa da minha vida.

Agradeço aos meus queridos pais Djalma e Maria, meus alicerces, que nunca mediram esforços para me ajudar a realizar meus sonhos, que sempre me apoiaram, me ensinaram que eu posso e devo correr atrás dos meus objetivos, que apesar da distância sempre se mantiveram presentes. A toda minha família, meus padrinhos, meus avós, meu irmão Disley que sempre me apoiaram nessa caminhada. Além disso, souberam compreender quando tive que abdicar de muitos momentos familiares para a realização deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Eduardo Nunes Gonçalves, o qual admiro muito, pela oportunidade, por aceitar me orientar, pelo exemplo de profissionalismo e competência, por ensinar e compartilhar seus conhecimentos, sem ele este trabalho não seria possível.

Sou grata também a todos os professores do CEFET-MG, por estarem sempre dispostos a ajudar, agindo com muita responsabilidade em seu ofício de formar pessoas.

Agradeço aos amigos e colegas que fiz ao longo do mestrado, pelos momentos de tensão e de alegria compartilhados, pela parceria, pelo apoio e por tornarem a jornada mais leve.

Ao CEFET-MG, FAPEMIG e a CAPES pelos apoios financeiros, que deram suporte para a realização desta dissertação.

Deixo também meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que de forma direta ou indiretamente me auxiliaram ao longo dessa trajetória.

*“A coragem é a primeira das qualidades humanas, pois é ela que garante as demais.” (Winston Churchill)*

## Resumo

Esta dissertação trata da síntese de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída estática ou dinâmica para sistemas lineares invariantes no tempo em tempo discreto, dependentes de parâmetros. A síntese de controle robusto é um problema de difícil solução, pois requer resolver um problema de otimização semi-infinita, ou seja, encontrar um controlador ótimo que minimiza o pior caso do desempenho e garante a estabilidade do sistema para o domínio infinito de incertezas. A combinação de modelos politópicos e formulações baseadas em desigualdades matriciais lineares para análise e síntese de sistemas de controle robusto é muito popular, uma vez que é possível transformar o problema de difícil solução em um problema mais simples, verificando apenas os vértices do politopo. Entretanto, existem restrições sobre os problemas que podem solucionar, o custo computacional pode aumentar rapidamente com o número de vértices do politopo, tornando o procedimento computacionalmente inviável, e em alguns casos não é possível encontrar a melhor solução ou até mesmo um controlador robustamente estável. Nesta dissertação é aplicada uma estratégia diferente da usual para resolver o problema de otimização semi-infinita considerando um procedimento iterativo de duas etapas, síntese e análise, em que cada etapa possui problemas de otimização mais fáceis de serem resolvidos. Em ambas as etapas, síntese e análise, é utilizado o método evolução diferencial, um algoritmo de otimização evolutivo de simples implementação, com poucos parâmetros de ajuste, possibilitando encontrar soluções eficientes para vários problemas de otimização, abrangendo problemas multimodais. O procedimento apresentado pode ser aplicado a qualquer tipo de problema de controle considerando controladores com qualquer estrutura e ordem. São apresentados exemplos ilustrativos aplicando o procedimento proposto e outros utilizados na literatura a fim de comparação, em que o método apresentado resulta em melhores soluções em alguns dos exemplos, sendo o único método que pode fornecer um controlador robustamente estável para o último exemplo, considerando os métodos disponíveis na literatura até o presente momento, comprovando a eficiência do procedimento de síntese de controle robusto.

**Palavras-chave:** Controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$ , controle por realimentação de saída, sistemas em tempo discreto, modelo dependente de parâmetro, programação semi-infinita, algoritmo evolução diferencial.

## Abstract

This dissertation deals with the robust  $\mathcal{H}_\infty$  control synthesis by static or dynamic output feedback for time-invariant linear systems, discrete time, with dependency on parameters. The robust control synthesis is a problem of difficult solution, since it requires solving a semi-infinite optimization problem, that is, finding an optimal controller that minimizes the worst case performance and guarantees the stability of the system for the infinite domain of uncertainty. The combination of polytopic models and formulations based on linear matrix inequalities for analysis and synthesis of robust control systems is very popular, since it is possible to transform the problem of difficult solution into a simpler problem, verifying only the vertices of the polytope. However, there are restrictions on the type of problems that can be solved, the computational cost can increase quickly with the number of vertices of the polytope, making the procedure computationally infeasible, and, in some cases, it is not possible to find the best solution or even a controller robustly stable. In this dissertation, it is proposed to apply a strategy different from usual to solve the problem of semi-infinite optimization considering an iterative two-step procedure, synthesis and analysis, in which each stage has problems of optimization easier to be solved. In both steps, synthesis and analysis, the differential evolution method is used, an evolutionary optimization algorithm of simple implementation, with few adjustment parameters, making it possible to find efficient solutions for various optimization problems, covering multimodal problems. The presented procedure can be applied to any type of control problem considering controllers with any structure and order. Illustrative examples will be presented applying the proposed procedure and others used in the literature for comparison, where in the presented method results in better solutions in some of the examples, the only method being able to provide a robustly stable controller for the latter example considering the methods available in the literature up to the present moment, proving the efficiency of the robust control synthesis procedure.

**Keywords:** Robust  $\mathcal{H}_\infty$  output-feedback control, discrete-time systems, parameter-dependent model, semi-infinite programming, differential evolution algorithm.

## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Diagrama de blocos generalizado de um sistema de controle . . . . .	13
Figura 3.1 – Simulação do procedimento de otimização pela inclusão progressiva de pontos de fixação em que o '•' marca os valores considerados no passo de síntese e 'o' o valor máximo obtido na etapa de análise. . . . .	21
Figura 3.2 – Fluxograma do método DE . . . . .	25
Figura 3.3 – Operadores de mutação e recombinação no espaço de parâmetros bidimensional . . . . .	26
Figura 5.1 – Diagrama esquemático do sistema de 4 tanques. . . . .	37
Figura 5.2 – Respostas transitórias de $h_1$ , sistema de quatro tanques. . . . .	44
Figura 5.3 – Respostas transitórias de $h_2$ , sistema de quatro tanques. . . . .	45
Figura 5.4 – Respostas transitórias das entradas de controle, sistema de quatro tanques. . . . .	45
Figura 5.5 – Respostas transitórias da velocidade vertical, $z$ , VTOL. . . . .	49
Figura 5.6 – Respostas transitórias das entradas do sistema, $u$ , VTOL. . . . .	49
Figura 5.7 – Modelo da suspensão ativa . . . . .	50
Figura 5.8 – Resposta transitória de $\ddot{z}_2$ , controlador de primeira ordem para diferentes valores de $w_u$ , suspensão ativa. . . . .	55
Figura 5.9 – Resposta transitória de $F_c$ , controlador de primeira ordem para diferentes valores de $w_u$ , suspensão ativa. . . . .	55
Figura 5.10 – Respostas transitórias de $\ddot{z}_2$ do sistema de suspensão passiva e ativa, $K_{DE}(z)$ com $w_u = 0,1$ . . . . .	56

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Interpretação dos sinais das normas de sistemas . . . . .	12
Tabela 5.1 – Parâmetros para $P_-$ e $P_+$ . . . . .	38
Tabela 5.2 – Índices de desempenho - Sistema de quatro tanques . . . . .	44
Tabela 5.3 – Índices de desempenho - Exemplo Suspensão ativa . . . . .	54

# Lista de Abreviaturas e Siglas

BMI	do inglês, <i>Bilinear Matrix Inequality</i>
DE	do inglês, <i>Differential Evolution</i>
LMI	do inglês, <i>Linear Matrix Inequalities</i>
ILMI	do inglês, <i>Iterative LMI</i>
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
SLIT	Sistema Linear Invariante no Tempo
ROLMIP	do inglês, <i>Robust LMI Parser</i>
SIP	do inglês, <i>semi-infinite programming</i>
SDP	do inglês, <i>semidefinite programming</i>
SISO	do inglês, <i>single input single output</i>
MIMO	do inglês, <i>multiple input multiple output</i>
YALMIP	do inglês, <i>Yet Another LMI Parser</i>
SeDuMi	do inglês, <i>Self-Dual Minimization</i>

# Lista de Símbolos

$*$	Bloco simétrico na LMI
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$T$	Período de amostragem
$p$	Vetor de parâmetros incertos
$\mathcal{P}$	Hiper-retângulo
$\bar{\mathcal{P}}$	Conjunto finito
$\Omega$	Face de um simplex unitário
$S_i$	Vértices do politopo
$\ \cdot\ _\infty$	Norma $H_\infty$
$\ \cdot\ _2$	Norma $H_2$
$\in$	Pertence a
$T_{zw}$	Matriz de transferência em malha fechada relacionando o vetor de saídas $z$ com o vetor de entradas $w$
$x(t)$	Vetor de variáveis de estado no domínio do tempo
$y(t)$	Vetor de variáveis de saídas medidas (entradas do controlador) no domínio do tempo
$z(t)$	Vetor de variáveis de saídas controladas relacionadas ao desempenho no domínio do tempo
$u(t)$	Vetor das variáveis manipuladas

$w(t)$	Vetor das entradas exogêneas
$\eta$	Número de parâmetros incertos
$\mathcal{U}_{(a,b)}$	Número pseudoaleatório uniformemente distribuído no intervalo (a,b)
$\mathcal{I}_{(m)}$	Número inteiro pseudoaleatório uniformemente distribuído no intervalo $[1, m]$
$T_r(\cdot)$	Traço do argumento
$C_r$	Taxa de cruzamento
$\bar{\sigma}(\cdot)$	Valor singular máximo do argumento

# Sumário

<b>1 – Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão Bibliográfica	1
1.2 Motivação	5
1.3 Objetivos	5
1.4 Contribuição	6
1.5 Organização da Dissertação	6
<b>2 – Formulação do problema</b>	<b>8</b>
2.1 Introdução	8
2.2 Normas de sinais e sistemas	9
2.3 Modelos Incertos no Espaço de Estados	12
2.4 Discretização dos sistemas	14
2.5 Controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de saída	16
2.6 Conclusão	18
<b>3 – Síntese de Controladores Robustos pelo método Evolução Diferencial</b>	<b>19</b>
3.1 Introdução	19
3.2 Síntese de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ baseada em otimização não convexa	22
3.2.1 Passo 1 - Síntese	22
3.2.2 Passo 2 - Análise	23
3.3 Método Evolução Diferencial aplicado nos passos do procedimento de síntese	24
3.3.1 População Inicial	24
3.3.2 Mutação Diferencial	25
3.3.3 Cruzamento	27
3.3.4 Tratamento de Restrições	27
3.3.5 Seleção	28
3.3.6 Critério de parada	28
3.3.7 Algoritmo básico	29
3.4 Conclusão	29
<b>4 – Controle Robusto <math>\mathcal{H}_\infty</math> baseado em LMI</b>	<b>30</b>
4.1 Introdução	30
4.2 Síntese robusta por realimentação estática de saída baseada na realimentação de estado	32

4.2.1	Procedimento robusto por ILMI por realimentação estática de saída . . . . .	33
4.2.2	Procedimento robusto por LMI para a síntese de controle por realimentação de estados . . . . .	34
4.3	Conclusão . . . . .	35
<b>5</b>	<b>– Exemplos ilustrativos . . . . .</b>	<b>36</b>
5.1	Introdução . . . . .	36
5.1.1	Exemplo 5.1: Sistema de quatro tanques . . . . .	37
5.1.1.1	Formulação do problema . . . . .	37
5.1.1.2	Resultados . . . . .	42
5.1.2	Exemplo 5.2: Helicóptero VTOL . . . . .	45
5.1.2.1	Formulação do problema . . . . .	45
5.1.2.2	Resultados . . . . .	47
5.1.3	Exemplo 5.3: Suspensão ativa . . . . .	50
5.1.3.1	Formulação do Problema . . . . .	50
5.1.3.2	Resultados . . . . .	53
5.1.4	Considerações finais . . . . .	56
<b>6</b>	<b>– Conclusão . . . . .</b>	<b>58</b>
6.1	Conclusões . . . . .	58
6.2	Trabalhos futuros . . . . .	60
6.3	Trabalho apresentado em evento científico relativo à dissertação . . . . .	60
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>61</b>

# Introdução

## 1.1 Revisão Bibliográfica

A área de controle robusto  $H_\infty$  apresentou grande desenvolvimento nos últimos anos (ZHOU; DOYLE, 1998; BOYD S.; EL GHAOUI, 1994; GONÇALVES et al., 2005; BACHUR et al., 2017). Os modelos matemáticos são uma aproximação dos modelos reais, apresentando assim diferentes tipos de incertezas, a aplicabilidade dos modelos de sistemas lineares invariantes no tempo são ainda maiores quando incluem essas incertezas. A busca por solução de um problema de controle envolvendo modelos com incertezas paramétricas é denominado controle robusto (TROFINO, 2000). As análises de estabilidade e de desempenho robusto e a síntese de controladores robusto para sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) tiveram um grande desenvolvimento com o uso de desigualdade matriciais lineares (LMI) (BOYD S.; EL GHAOUI, 1994).

No projeto de sistemas de controle é importante levar em conta essas incertezas do modelo do sistema. Segundo Gahinet et al. (1995), existem duas grandes classes de incertezas: incerteza dinâmica, devido à aproximação do comportamento complexo da dinâmica dos sistemas por modelos simplificados de menor complexidade, consiste em componentes dinâmicos negligenciados no modelo linear, bem como as variações no comportamento dinâmico durante a operação, como por exemplo, entradas não lineares, variações de tempo lentas; e incerteza de parâmetros que é relacionada ao conhecimento impreciso dos valores dos parâmetros físicos, ou variações desses parâmetros durante a operação, exemplos de parâmetros físicos são rigidez, coeficiente de amortecimento, capacitores, indutores, entre outros.

Outras características importantes da incerteza incluem se é linear ou não-linear e se é invariante no tempo ou variante no tempo. A incerteza do modelo é geralmente uma combinação de incertezas dinâmica e paramétrica, e pode surgir em vários pontos diferentes no sistema de controle. Por exemplo, pode haver incerteza dinâmica nos

atuadores do sistema e incerteza paramétrica nos sensores.

Esta dissertação trata da síntese de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  em tempo discreto de sistemas lineares invariantes no tempo com incerteza paramétrica. Considerando modelos de espaço de estados, sistemas incertos podem ser representados por modelos politópicos ou dependentes de parâmetros. Modelos politópicos podem representar exemplos de sistemas com parâmetros variáveis em faixas ou que possuem modelos para diferentes pontos de operação, já os modelos com dependência de parâmetros são aplicados a sistemas em que os valores ou comportamentos de certos parâmetros não são precisamente conhecidos.

Um problema de síntese de controle robusto requer o cálculo do controlador ótimo para o pior caso de desempenho, e garantir a estabilidade para um domínio de incerteza infinito. A otimização de um número finito de variáveis para um conjunto infinito de restrições é denominada programação semi-infinita (SIP, do inglês *semi-infinite programming*), que é um problema de difícil solução para funções objetivo e restrições em geral (BLANKENSHIP; FALK, 1976; ŽAKOVIĆ; RUSTEM, 2003). Certos problemas minmax podem ser formulados como programação semi-infinita, algumas dessas programações semi-infinitas podem ser convertidas em problemas de programação semi-definida (SDP, do inglês *semidefinite programming*) transformando as restrições em desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *linear matrix inequalities*) (BOYD S.; EL GHAOU, 1994; GAHINET et al., 1995).

A principal vantagem das formulações LMI de análise e síntese, que são problemas de otimização com função objetiva linear e restrições LMI, é que quando são aplicadas a modelos politópicos, é necessário considerar apenas o conjunto finito dos vértices do politopo em vez do conjunto infinito de incertezas. Ao considerar as matrizes de malha fechada em uma formulação de análise LMI, a formulação de síntese resultante não é um problema LMI, porque apresenta o produto do ganho ou matrizes do controlador por outras variáveis matriciais, como, por exemplo, a matriz simétrica definida positiva, que assegura a função de estabilidade de Lyapunov. No caso do controle por realimentação de estado, uma simples mudança de variável linearizante é suficiente para transformar a desigualdade matricial bilinear (BMI, do inglês, *Bilinear Matrix Inequality*) em uma LMI (BERNUSSOU et al., 1989). No caso de sistemas em tempo discreto, formulações LMI robustas de síntese por realimentação de estado para controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , incluindo variáveis adicionais, foram apresentadas em Oliveira et al. (2002). Considerando que nem sempre é possível medir todas as variáveis de estado para implementar o controle por realimentação de estado, é importante desenvolver formulações robustas de síntese de controle por realimentação de saída. Em Oliveira et al. (2002), também é descrito como projetar controladores robustos por realimentação de saída estática a partir de formulações LMI de síntese de controle robusto por realimen-

tação de estado, se a matriz de saída for precisamente conhecida. Uma vez que você tenha uma formulação para calcular controladores robustos estáticos por realimentação de saída, as formulações LMI também podem ser aplicadas no cálculo de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída de ordem fixa considerando um modelo de sistema aumentado (GAHINET; APKARIAN, 1994).

Outra abordagem para lidar com a formulação BMI é fixar uma das variáveis nos produtos das variáveis para transformar a BMI em LMI, como o procedimento em Agulhari et al. (2010). Em Agulhari et al. (2010), o procedimento de síntese é realizado em duas etapas: primeiramente é projetado um controlador estabilizante por realimentação de estado dependente de parâmetro ou sub-ótimo, e as variáveis instrumentais e linearizantes dependentes de parâmetro resultantes são aplicadas para transformar a BMI em LMI. O segundo estágio, sintetiza o controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída desejado. Os procedimentos LMI iterativos, (ILMI, do inglês, *Iterative LMI*) consideram duas etapas para resolver o problema BMI, em que cada etapa é um problema LMI, alternando entre qual variável é fixa e qual variável é otimizada. Em Sadabadi e Karimi (2015), para iniciar o procedimento ILMI, o ganho dependente de parâmetro é determinado a priori por meio de um ganho por realimentação de estado dependente de parâmetro, semelhante a Agulhari et al. (2010). Em Sadabadi e Karimi (2015), são consideradas matrizes homogêneas de Lyapunov dependentes de parâmetros polinomiais e o problema LMI pode ser programado usando o ROLMIP (do inglês, *Robust LMI Parser*) (AGULHARI et al., 2018). Para calcular o ganho sub-ótimo por realimentação de estado dependente de parâmetro, é necessário encontrar o valor do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  que resultará no controlador  $\mathcal{H}_\infty$  otimizado por realimentação de saída.

Em Chang et al. (2015), os autores propõem um problema LMI para calcular um controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída impondo que a matriz de saída é precisamente conhecida, e um problema LMI que permite que a matriz de saída seja incerta, mas exige a busca de dois parâmetros que são necessários para transformar a BMI em LMI. As formulações LMI de síntese que requerem a pesquisa de parâmetros como em Agulhari et al. (2010), Sadabadi e Karimi (2015), Chang et al. (2015), usando por exemplo uma técnica de grade, podem resultar em tempos de processamento mais altos, uma vez que é necessário resolver o problema LMI várias vezes. No Capítulo 5 são apresentados os exemplos ilustrativos, infelizmente, há problemas que os solucionadores do SDP não conseguem encontrar uma solução viável e há sistemas em que não existe uma formulação de síntese LMI que possa resolvê-los. Este fato motiva a pesquisa de outras abordagens para síntese de controle robusto.

Uma abordagem diferente para lidar com o problema de otimização semi-infinita é considerar um procedimento iterativo de duas etapas, em que cada etapa é um pro-

blema de otimização mais simples (BLANKENSHIP; FALK, 1976; ŽAKOVIĆ; RUSTEM, 2003). Um procedimento semelhante para calcular controladores robustos é apresentado em Gonçalves et al. (2005), sendo duas etapas de síntese e análise. Na etapa de síntese, o controlador é calculado para minimizar a função objetivo (desempenho) e garantir a estabilidade para um conjunto finito pertencente ao domínio de incerteza infinita. Na etapa de análise, o controlador é verificado para o domínio infinito de incertezas que resolve o problema de otimização global. Se uma restrição for violada ou a função objetivo apresentar um valor maior que o valor calculado para o conjunto finito, os valores do pior caso serão incluídos no conjunto finito e outra iteração do procedimento será necessária. O conjunto finito de pontos aumenta até que o controlador alcançado na etapa de síntese resulte em um sistema robustamente estável e o desempenho calculado para o conjunto finito seja aproximadamente igual ao valor do domínio infinito de incertezas.

Em trabalhos anteriores, a etapa de síntese foi baseada no algoritmo cone-elipsoidal (TAKAHASHI et al., 2003) e a etapa de análise foi resolvida pelo algoritmo *branch-and-bound* com a função limite superior baseada nas formulações LMI de análise (GONÇALVES et al., 2007). Esse procedimento iterativo foi aplicado com sucesso em diferentes problemas de controle robusto (GONÇALVES et al., 2005; GONÇALVES et al., 2012; GONÇALVES et al., 2006; GONÇALVES et al., 2008; GONÇALVES et al., 2011; GONÇALVES et al., 2006). Nesta dissertação, consideramos o mesmo procedimento iterativo, de síntese e análise, mas com ambas as etapas baseadas no algoritmo de evolução diferencial (DE, do inglês, *Differential Evolution*) (STORN; PRICE, 1997; DAS et al., 2016). O algoritmo cone-elipsoidal é mais apropriado para problemas de otimização convexa, que não é necessariamente o caso do problema de otimização na etapa de síntese. O algoritmo *branch-and-bound* pode calcular o pior caso da norma  $\mathcal{H}_\infty$  com qualquer precisão requerida, no caso de um sistema robustamente estável, ou provar que o sistema não é robusto, mas o custo de processamento aumenta com o número de vértices do polítopo devido ao uso de formulações LMI.

O algoritmo DE é um dos melhores algoritmos evolutivos, é simples de implementar e possui poucos parâmetros para ajustar. Sendo capaz de alcançar soluções eficientes para qualquer tipo de problema de otimização, incluindo problemas de otimização multimodal (soluções ótimas em diferentes regiões do espaço de busca). Para o mesmo número de gerações, o algoritmo DE pode alcançar soluções melhores do que o algoritmo genético, com uma população menor. Desta forma, nesta dissertação aplicou-se o algoritmo DE para resolver os dois passos do procedimento iterativo de síntese. Na etapa de análise, ao aplicar o algoritmo DE para reduzir o custo de processamento, assume-se um pequeno risco de obter um controlador que não resulte em um sistema robustamente estável ou com um desempenho inferior ao calculado.

## 1.2 Motivação

A implementação do procedimento de síntese iterativo fundamentada em formulações LMI podem apresentar problemas em determinadas situações. Muitas das vezes, o problema LMI requer uma pesquisa de parâmetros, que pode resultar em tempo de processamento alto, uma vez que é necessário resolver o problema várias vezes. Existem problemas que as LMI não conseguem resolver ou são computacionalmente inviáveis, uma vez que o custo de processamento aumenta com o número de vértices do politopo. Outro impedimento é que nem todos os problemas de controle robusto podem ser colocados na forma de problemas LMI, em especial, o projeto de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída de qualquer ordem para sistemas com incertezas na matriz, relacionando as variáveis medidas e as entradas. Dessa forma é necessário estudar outras metodologias de síntese de controle robusto. Essa dissertação propõem a implementação e avaliação do procedimento de síntese de dois passos, baseado no método evolução diferencial (STORN; PRICE, 1995) considerando modelos incertos com dependência de parâmetros, onde o espaço de busca é de dimensão  $\eta$ , ao invés de modelos politópicos, que possuem um espaço de busca de dimensão  $2^\eta$ , sendo  $\eta$  o número de parâmetros incertos, com o objetivo de reduzir o custo computacional no passo de análise. Tal mudança requer várias modificações no procedimento iterativo já implementado para sistemas politópicos (SOUSA, 2017).

O método DE é considerado um algoritmo evolucionário baseado em populações, é aplicado em problemas não convexos, multimodais e não diferenciáveis. Baseado em trabalhos anteriores como em Marcos et al. (2016), Sousa (2017), Marcos e Gonçalves (2016a) e Marcos e Gonçalves (2016b), apesar de não ter garantia de convergência para o ótimo global, o método evolução diferencial tem um custo computacional menor. Assim, a motivação dessa dissertação foi a de implementar e analisar o método evolução diferencial nos passos do procedimento iterativo, considerando modelos com dependência polinomial de parâmetros ao invés de modelos politópicos, comparando os resultados com as formulações LMI.

## 1.3 Objetivos

O objetivo desta dissertação é estudar, implementar, aplicar e avaliar a síntese de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas em tempo discreto lineares e invariantes no tempo, utilizando o método de evolução diferencial na implementação de ambos os passos do procedimento iterativo de síntese, modificando os passos de análise e síntese antes implementados para sistemas politópicos, para tratar sistemas com dependência polinomial de parâmetros. Esta dissertação tem como principais objetivos:

- Formular uma metodologia de análise de estabilidade robusta de SLIT em tempo discreto, com modelos com dependência de parâmetros, baseado no método evolução diferencial, aplicando no passo de análise do procedimento iterativo;
- Formular uma metodologia para calcular o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de SLIT em tempo discreto, com modelos com dependência de parâmetros, baseado no método evolução diferencial, aplicando no passo de análise do procedimento iterativo;
- Avaliar a aplicação do método evolução diferencial para análise da estabilidade robusta por meio de testes exaustivos, validando sua confiabilidade;
- Verificar o comportamento de diferentes configurações dos parâmetros do método DE para análise de estabilidade e para o cálculo do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ ;
- Modificar e implementar a etapa de síntese do procedimento iterativo baseado no método evolução diferencial, considerando todas as restrições e minimizar o máximo da função objetivo;
- Estudar e implementar algumas das formulações LMI disponíveis na literatura para síntese de controle robusto por realimentação de saída;
- Avaliar o procedimento de síntese iterativo, comparando o método DE com as formulações LMI. Para esta avaliação, o procedimento foi aplicado em três exemplos ilustrativos.

## 1.4 Contribuição

As principais contribuições deste trabalho são:

- Propor, implementar e avaliar a modificação do procedimento de síntese de dois passos, baseado no método DE, para considerar modelos com dependência polinomial de parâmetros incertos ao invés de modelos politópicos;
- Propor uma forma de discretização de sistemas incertos, discretizando os coeficientes da matriz do sistema do modelo com dependência de parâmetros;
- Apresentar uma melhoria na criação da população inicial no método DE quando aplicado na análise de estabilidade robusta e cálculo do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ , no caso de sistemas com dependência polinomial de parâmetros.

## 1.5 Organização da Dissertação

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 1: Introdução.** Contextualização do tema em questão, os objetivos a serem alcançados, e a motivação para o desenvolvimento desta dissertação e sua contribuição.
- **Capítulo 2: Formulação do problema.** Apresenta a formulação do problema a ser considerado, o modelo no espaço de estados, a forma como é realizada a discretização dos sistemas. Considera-se ainda neste capítulo o controle  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída, e uma abordagem de normas de sinais e sistemas, finalizando com a estrutura do problema de otimização semi-infinita abordado.
- **Capítulo 3: Procedimento Proposto.** Neste capítulo é proposto uma metodologia para solucionar o procedimento de síntese robusta de controle  $\mathcal{H}_\infty$  baseada em otimização não convexa. Analisando a implementação do método evolução diferencial, para o cálculo de valor máximo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares invariantes no tempo em tempo discreto com dependência polinomial de parâmetros. O método DE é aplicado na etapa de síntese e análise do procedimento.
- **Capítulo 4: Controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  baseado em LMI.** Apresentação de algumas formulações LMI de síntese de controle por realimentação de saída, e uma abordagem do procedimento robusto ILMI por realimentação estática de saída.
- **Capítulo 5: Exemplos Ilustrativos.** Nesse capítulo são apresentados os resultados da aplicação da implementação do procedimento de síntese para três exemplos ilustrativos de sistemas incertos com dependência de parâmetros. Os resultados obtidos são comparados com resultados obtidos por formulações LMI para comprovar a eficiência do procedimento implementado.
- **Capítulo 6: Conclusão.** Apresentação das conclusões, sugestões para trabalhos futuros e a produção acadêmica produzida em relação a dissertação.

# Capítulo 2

## Formulação do problema

### 2.1 Introdução

Modelos matemáticos podem representar diferentes tipos de incertezas, conseqüentes de incertezas paramétricas, dinâmicas de alta frequência desprezadas, linearização, entre outros. Nos projetos de controladores essas incertezas devem ser levadas em conta e é necessário garantir a estabilidade robusta desses sistemas incertos.

As desigualdades matriciais lineares (LMI) são uma excelente ferramenta para resolução de problemas de controle, permitindo a busca de soluções para problemas mais complexos, como por exemplo quando há presença de elementos incertos, podendo ser simplificado devido as propriedades de linearidade e convexidade. Contudo, mesmo resolvendo problemas complexos, muitas das vezes quando o número de vértices do politopo e/ou a ordem do sistema é elevada, aumenta o custo computacional e dependendo do problemas os programas "LMI-solvers" não conseguem obter uma solução ou a solução pode até mesmo não existir.

Nos últimos anos houve um grande crescimento no uso de sistemas de controle digital que oferecem uma capacidade de tomada de decisão e flexibilidade no programa de controle. Embora na teoria de controle a maioria dos sinais de interesse como saídas do atuador, leituras do sensor e entradas de comando são geralmente em tempo contínuo, os controladores digitais tem várias vantagens se comparados com os analógicos, como baixo custo de implementação e replicação, expansibilidade e simplicidade na programação (BRAGA et al., 2013).

A discretização de sistemas incertos ainda é um problema devido a dificuldade de lidar com a exponencial de uma matriz incerta. Normalmente, a síntese de controladores digitais é realizada de três maneiras diferentes (BRAGA et al., 2013): primeiro o controlador é projetado diretamente no domínio do tempo contínuo, sendo convertido para o tempo discreto; segundo, um modelo discretizado aproximado da planta é

usado para síntese de controle em tempo discreto, ignorando o comportamento entre as amostras; terceiro, o controlador é projetado no domínio de tempo discreto, levando em conta o comportamento entre as amostras.

Nesta dissertação o controlador é projetado considerando o sistema discreto, a vantagem dessa abordagem é que quando se projeta o controlador em tempo contínuo, após a discretização é necessário um período de amostragem mínimo para obter o mesmo resultado do controlador contínuo. No caso de projetos diretamente em tempo discreto, o período de amostragem pode ser maior, requerendo uma implementação em *hardware* de menor custo.

As normas matriciais de matrizes de transferência em malha fechada são uma forma de descrever o desempenho de sistemas de controle, as normas  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$  proporcionam uma medida da influência das entradas exógenas (distúrbios de carga, ruídos) sobre as saídas controladas do sistema (erros de rastreamento, sinais de controle)(ZHOU; DOYLE, 1998).

Esse capítulo está dividido na forma descrita a seguir. Na seção 2.2 é referente ao cálculo das normas que é utilizado para caracterizar o desempenho do sistema em malha fechada. A seção 2.3 aborda os modelos incertos no espaço de estados. Na seção 2.4, apresenta uma discussão a respeito da discretização de modelos politópicos ou dependentes de parâmetro para modelos discretos. A seção 2.5 trata da síntese de controle  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação dinâmica de saída para o cálculo de controladores dinâmicos.

## 2.2 Normas de sinais e sistemas

A norma  $l_2$  é uma das formas de quantificar ou mensurar um sinal discreto, podendo ser definida como:

$$\|w(k)\|_2 \triangleq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} w(k)^2}. \quad (2.1)$$

Se a somatória for finita, o sinal é dito quadraticamente somável, ou seja,  $w(k) \in l_2$ , para sistemas discretos, sendo interpretado fisicamente como um sinal de energia limitada (ZHOU et al., 1996; TROFINO et al., 2005). A norma  $l_2$  do sinal vetorial em tempo discreto, relacionado a sua energia, é:

$$\|\mathbf{w}(k)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{w}(k)^T \mathbf{w}(k) \quad (2.2)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser definida como:

$$\|w(k)\|_\infty \triangleq \sup_{k \in \mathbb{Z}} |w(k)|. \quad (2.3)$$

Seja  $T_{zw}(\lambda) = D + C(\lambda I - A)^{-1}B$ , em que  $\lambda$  representa  $s$  ou  $z$ , uma matriz de transferência relacionando o vetor de entradas exógenas,  $w$ , o vetor de saídas controladas,  $z$ . As normas  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$  de matrizes de transferência  $T_{zw}$ , são de interesse.

A norma  $\mathcal{H}_2$  pode ter uma interpretação determinística ou estocástica: é a norma-2 da saída quando aplicados impulsos unitários em cada entrada de forma sequencial, ou é o valor RMS (do inglês, *root mean square*) da resposta de saída a uma excitação tipo ruído branco.

A norma  $\mathcal{H}_2$  de uma matriz de transferência, de um sistema linear invariante no tempo em tempo discreto, é definida como:

$$\|T_{zw}(z)\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}(T_{zw}^*(e^{j\omega})T_{zw}(e^{j\omega}))d\omega} \quad (2.4)$$

sendo  $(\cdot)^*$  a transposta conjugada e  $\text{Tr}(\cdot)$  o traço do argumento.

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de uma matriz de transferência de um sistema estável corresponde ao pico do ganho da resposta em frequência, no caso de sistemas SISO (do inglês, *single input single output*), ou corresponde ao máximo do valor singular máximo no caso de sistemas MIMO (do inglês, *multiple input multiple output*), sendo definida para sistemas discretos como:

$$\|T_{zw}(z)\|_\infty = \max_{\omega \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma}(T_{zw}(e^{j\omega})) \quad (2.5)$$

sendo  $\bar{\sigma}(\cdot)$  o valor singular máximo do argumento.

Nesta dissertação consideramos como objetivo de controle minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $T_{zw}$ .

Minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  significa minimizar o pior caso de  $\|z(k)\|_2$ , para  $w(k)$  com energia limitada,  $w(k) \in l_2$ ,  $l_2 = \{w(k) \mid \|w(k)\|_2 < \infty\}$ :

$$\|T_{zw}(z)\|_\infty = \max_{w(k) \in l_2} \frac{\|z(k)\|_2}{\|w(k)\|_2} \quad (2.6)$$

As normas também podem ser determinadas a partir do modelo no espaço de estados:

$$\|T_{zw}(z)\|_2^2 = \text{Tr}(B^*QB) = \text{Tr}(CPC^*) \quad (2.7)$$

sendo  $Q$  e  $P$  os gramianos de observabilidade e controlabilidade, respectivamente, que podem ser obtidos das equações algébricas de Lyapunov:

$$AP + PA^* + BB^* = 0 \quad A^*Q + QA + C^*C = 0 \quad (2.8)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser calculada com base no modelo no espaço de estados:  $\|T_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$  se e somente se,  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$  e a matriz Hamiltoniana  $H$  não possuir valores no eixo imaginário, sendo (ZHOU; DOYLE, 1998):

$$H \triangleq \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}B^* \\ -C^*(I + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C)^* \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde  $R = \gamma^2 I - D^*D$ . O valor de  $\gamma$  pode ser determinado a partir do algoritmo de bisseção, através dos passos:

**Passo 1** Seleccione limitantes superior  $\gamma_u$  e inferior  $\gamma_l$  tal que  $\gamma_l \leq \|T_{zw}(z)\|_\infty \leq \gamma_u$ ;

**Passo 2** Se  $(\gamma_u - \gamma_l)/\gamma_l < \epsilon$ , sendo  $\epsilon$  uma precisão especificada, então pare e considere  $\|G\|_\infty = (\gamma_l + \gamma_u)/2$ , senão continue;

**Passo 3** Faça  $\gamma = (\gamma_l + \gamma_u)/2$ ;

**Passo 4** Teste se  $\|G\|_\infty < \gamma$ , calculando os autovalores de  $H$  para o dado  $\gamma$ .

**Passo 5** Se  $H$  possui autovalor em  $j\mathbb{R}$ , faça  $\gamma_l = \gamma$ , senão faça  $\gamma_u = \gamma$ , retorne ao passo 2.

No caso de sistemas discretos, o cálculo de  $\|T_{zw}(z)\|_2$ , estável e próprio, pode ser caracterizado pelo problema LMI:

$$\begin{aligned} \|T_{zw}(z)\|_2^2 &= \min_{P,J} T_r(J) \\ \text{sujeito a: } &APA^T - P + BB^T \prec 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} J & CP & D \\ PC^T & P & 0 \\ D^T & 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.11)$$

Aplicando o complemento de Schur em:

$$APA^T - P + BB^T \prec 0 \quad (2.12)$$

resulta em:

$$\begin{bmatrix} P & AP & B \\ PA^T & P & 0 \\ B^T & 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.13)$$

Tabela 2.1 – Interpretação dos sinais das normas de sistemas

	$\ w\ _2$	$\ w\ _\infty$
$\ z\ _2$	$\ T_{zw}(z)\ _\infty$	$\infty$
$\ z\ _\infty$	$\ T_{zw}(z)\ _2$	$\ T_{zw}(t)\ _1$

No caso de sistemas discretos, o cálculo de  $\|T_{zw}\|_\infty$ , com  $T_{zw}$  própria e estável, pode ser caracterizado pelo problema LMI:

$$\|T_{zw}\|_\infty^2 = \min_{P \succ 0} \mu \quad (2.14)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{bmatrix} P & AP & B & 0 \\ PA^T & P & 0 & PC^T \\ B^T & 0 & I & D^T \\ 0 & CP & D & \mu I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.15)$$

A norma de sistema apropriada para medir o desempenho depende do tipo de sinal de entrada e da norma de saída. A Tabela 2.1 mostra os resultados para sistemas SISO (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007), sendo:

$$\|T_{zw}(z)\|_\infty = \max_{w(t)} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \quad (2.16)$$

$$\|T_{zw}(z)\|_2 = \max_{w(t)} \frac{\|z(t)\|_\infty}{\|w(t)\|_2} \quad (2.17)$$

As formulações LMI podem ser aplicadas em sistemas incertos lineares invariantes no tempo (SLIT) com modelos politópicos, para calcular o valor máximo da norma  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ , ou seja, os custos garantidos.

## 2.3 Modelos Incertos no Espaço de Estados

Considere o diagrama de blocos de controle apresentado na Fig. 2.1, onde  $S$  é o sistema a ser controlado, e  $K$  é o controlador mostrado. Considerando  $S$  um sistema linear invariante no tempo, em tempo contínuo, pode ser representado pelo modelo no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(p)\mathbf{x}(t) + B_w(p)\mathbf{w}(t) + B_u(p)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{z}(t) &= C_z(p)\mathbf{x}(t) + D_{zw}(p)\mathbf{w}(t) + D_{zu}(p)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= C_y(p)\mathbf{x}(t) + D_{yw}(p)\mathbf{w}(t) + D_{yu}(p)\mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (2.18)$$

sendo  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  o vetor das saídas do controlador, ou seja, as variáveis manipuladas,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  o vetor das entradas exogênicas (distúrbios,

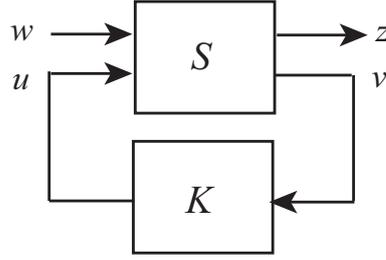


Figura 2.1 – Diagrama de blocos generalizado de um sistema de controle

sinais de referência, ruídos de medição),  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  o vetor de variáveis de desempenho (saídas controladas, erros de rastreamento e variáveis manipuladas), e  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  o vetor das variáveis medidas. É considerada a notação compacta para matrizes de transferência:

$$G(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad (2.19)$$

para representar a função de transferência  $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$  e  $x(k) \triangleq x(kT)$ , sendo  $k \in \mathbb{N}$  e  $T$  o período de amostragem. Considere as matrizes na Equação (2.18), certos parâmetros variam entre dois valores extremos determinados:  $p_i \in [\underline{p}_i, \bar{p}_i]$ ,  $i = 1, \dots, \eta$ . Defina  $p = [p_1 \dots p_\eta]^T \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^\eta$  o vetor de parâmetros incertos, sendo  $\mathcal{P} = [\underline{p}_1, \bar{p}_1] \times \dots \times [\underline{p}_\eta, \bar{p}_\eta]$  um  $\eta$ -ortotopo, ou hiper-retângulo. Utilizando a notação compacta reuniu-se as matrizes do modelo de espaço de estado, Equação (2.18), em uma única matriz:

$$\mathcal{S}(p) \triangleq \left[ \begin{array}{c|cc} A(p) & B_u(p) & B_w(p) \\ \hline C_z(p) & D_{zu}(p) & D_{zw}(p) \\ C_y(p) & D_{yu}(p) & D_{yw}(p) \end{array} \right]. \quad (2.20)$$

Devido às formulações de síntese e análise baseadas em LMIs, modelos politópicos são uma forma comum de representar sistemas incertos com modelos no espaço de estados:

$$\mathcal{S}(\alpha) \triangleq \left\{ \mathcal{S} : \mathcal{S} = \sum_{i=1}^{2^\eta} \alpha_i \mathcal{S}_i; \alpha \in \Omega \right\}, \quad (2.21)$$

em que  $\Omega$  é a face de um simplex unitário no espaço de dimensão  $2^\eta$ , que também é um simplex unitário no espaço de dimensão  $(2^\eta - 1)$ :

$$\Omega \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^{2^\eta} : \alpha_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^{2^\eta} \alpha_i = 1 \right\}. \quad (2.22)$$

As matrizes do sistema  $\mathcal{S}_i$  são os vértices do politopo que correspondem aos  $2^\eta$  vértices do hiper-retângulo  $\mathcal{P}$ . O vetor  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{2^\eta}]^T$  parametriza o politopo. O modelo politópico é adequado para formulações LMI, no entanto, o número de vértices cresce rapidamente com o número de parâmetros. Por exemplo, se  $\eta = 6$ , então

$p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^6$ , enquanto  $\alpha \in \Omega \subset \mathbb{R}^{64}$ . Para trabalhar no espaço de dimensão  $\eta$  ao invés de  $2^\eta$ , essa dissertação considera o modelo com dependência polinomial de parâmetros:

$$S(p) = S_0 + \sum_{i=1}^{n_t} S_i \prod_{j=1}^{\eta} p_j^{\sigma_{i,j}}, \quad (2.23)$$

sendo  $S_i$  os coeficientes matriciais do polinômio que representa o sistema,  $\sigma_{i,j} \in \mathbb{N}$  a potência inteira não negativa do  $j$ -ésimo parâmetro do  $i$ -ésimo termo do polinômio, com  $n_t + 1$  termos. Os modelos com dependência afim de parâmetros são um caso especial dos modelos com dependência polinomial de parâmetros:

$$S(p) = S_0 + \sum_{i=1}^{\eta} S_i p_i, \quad (2.24)$$

sendo  $S_0$  composto pelos termos constantes de  $S(p)$  e  $S_i$ , incluindo as constantes que multiplicam o parâmetro incerto  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, \eta$ .

## 2.4 Discretização dos sistemas

Converter um modelo politópico ou dependente de parâmetro para um modelo discreto não é uma tarefa fácil. Para demonstrar a dificuldade desta operação, considere, por exemplo, sistema politópico com dois vértices:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t), \quad A(\alpha) \triangleq \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, \quad (2.25)$$

com:

$$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T \in \Omega, \quad \Omega \triangleq \{\alpha | \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0\}. \quad (2.26)$$

O objetivo é obter a representação do sistema em tempo discreto com incerteza politópica:

$$x[(k+1)T] = \Phi(\alpha)x(kT), \quad (2.27)$$

sendo  $T$  o tempo de amostragem. Considerando o método de discretização por segurador de ordem zero, as matrizes do sistema discreto correspondentes aos dois vértices são:  $\Phi_i = e^{A_i T}$ . Pode-se demonstrar pela expansão em série de Taylor que:

$$\Phi(\alpha) = e^{A(\alpha)T} = e^{(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)T}, \quad (2.28)$$

é diferente da combinação convexa dos vértices discretizados:

$$\Phi(\alpha) \neq \Phi_{p,1}(\alpha) \triangleq \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 = \alpha_1 e^{A_1 T} + \alpha_2 e^{A_2 T}. \quad (2.29)$$

A matriz discreta  $\Phi(\alpha)$  pode ser escrita como uma função polinomial homogênea de  $\alpha$  com ordem infinita. Como visto em Braga et al. (2013), se for considerado uma

representação de  $\Phi_{p,n_p}$  com ordem finita,  $n_p$ , é necessário considerar um termo de erro limitado em norma:

$$\Phi(\alpha) = \Phi_{p,n_p} + \Delta\Phi(\alpha), \quad (2.30)$$

sendo que a norma de  $\Delta\Phi(\alpha) \triangleq \Phi(\alpha) - \Phi_{p,n_p}$  não é fácil de determinar. Note que,  $\Phi_{p,1}(\alpha)$ , corresponde a um polinômio de grau  $n_p = 1$ . De acordo com Braga et al. (2013), ignorar o termo  $\Delta\Phi(\alpha)$  na síntese de controladores robustos pode resultar em um sistema de malha-fechada que não é robustamente estável. Para evitar esse erro, considerando a combinação convexa dos vértices discretizados, pode-se usar o método de discretização de Euler:

$$\Phi(\alpha) = I + A(\alpha)T. \quad (2.31)$$

Neste caso a combinação convexa dos vértices discretizados é:

$$\begin{aligned} \alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2 &= \alpha_1(I + A_1T) + \alpha_2(I + A_2T) = (\alpha_1 + \alpha_2)I + \alpha_1A_1T + \alpha_2A_2T \\ &= I + (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2)T, \end{aligned} \quad (2.32)$$

que é igual ao modelo politópico discreto:

$$\Phi(\alpha) = I + A(\alpha)T = I + (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2)T = \alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2. \quad (2.33)$$

Obviamente existe um erro associado ao método de discretização de Euler, que é baseado na aproximação da integral por integração numérica retangular. Considerando que a relação entre o plano- $z$  e o plano- $s$  é  $z = 1 + sT$ , um pólo  $s = -\sigma$ , estável, pode ser mapeado como  $|z| \geq 1$ , instável, se  $T \geq 2/\sigma$ .

O mesmo problema de discretização ocorre para modelos com dependência de parâmetros. Por uma questão de simplicidade, considere o modelo com dependência afim de dois parâmetros:

$$\dot{x}(t) = A(p)x(t), \quad A(\alpha) \triangleq A_0 + p_1A_1 + p_2A_2. \quad (2.34)$$

Considerando o método de segurador de ordem zero, o modelo discreto dependente de parâmetros:

$$\Phi(p) = e^{A(p)T} = e^{(A_0 + p_1A_1 + p_2A_2)T} \quad (2.35)$$

não é igual a:

$$\Phi(p) \neq \Phi_p(p) \triangleq \Phi_0 + p_1\Phi_1 + p_2\Phi_2 = e^{A_0T} + p_1e^{A_1T} + p_2e^{A_2T} \quad (2.36)$$

Para evitar este erro, no procedimento de síntese de controle em tempo discreto, apresentado nesta dissertação, a conversão de tempo contínuo para tempo discreto é feita após o cálculo de  $S(p)$  para um vetor específico,  $p \in \mathcal{P}$ , isto é, não é realizada a discretização do modelo incerto e sim a discretização de um sistema pertencente ao espaço de incerteza.

## 2.5 Controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de saída

Nessa dissertação, é tratado o problema de síntese de controle por realimentação de saída, sendo o controlador  $K$  mostrado na Fig. 2.1 descrito por:

$$\begin{aligned} x_c[(k+1)T] &= A_c x_c(kT) + B_c y(kT) \\ u(kT) &= C_c x_c(kT) + D_c y(kT) \end{aligned} \quad (2.37)$$

De agora em diante, considere que as matrizes do modelo de espaço de estados  $A$ ,  $B_u$  e  $B_w$  são as matrizes em tempo discreto calculadas com o método segurador de ordem zero. No caso do controle por realimentação estática de saída,  $u(kT) = Ky(kT)$ , a matriz de transferência em malha fechada é:

$$\begin{aligned} T_{zw}(z) &= \left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A & B_w \\ \hline C_z & D_{zw} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} B_u \\ \hline D_{zu} \end{array} \right] \Upsilon K \left[ \begin{array}{c|c} C_y & D_{yw} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} A + B_u \Upsilon K C_y & B_w + B_u \Upsilon K D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} \Upsilon K C_y & D_{zw} + D_{zu} \Upsilon K D_{yw} \end{array} \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

com  $\Upsilon \triangleq (\mathbf{I} - K D_{yu})^{-1}$ . Se  $D_{yu} = \mathbf{0}$ , então  $\Upsilon = \mathbf{I}$ . No caso do controle por realimentação dinâmica de saída:

$$K(z) = \left[ \begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right], \quad (2.39)$$

sendo  $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ ,  $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_y}$ ,  $C_c \in \mathbb{R}^{n_u \times n_c}$  e  $D_c \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ ,  $n_c$  a ordem do controlador. As matrizes do sistema em malha fechada são:

$$A_f = \left[ \begin{array}{cc} A + B_u \Gamma D_c C_y & B_u \Gamma C_c \\ B_c C_y + B_c D_{yu} \Gamma D_c C_y & A_c + B_c D_{yu} \Gamma C_c \end{array} \right], \quad (2.40)$$

$$B_f = \left[ \begin{array}{c} B_w + B_u \Gamma D_c D_{yw} \\ B_c D_{yw} + B_c D_{yu} \Gamma D_c D_{yw} \end{array} \right], \quad (2.41)$$

$$C_f = \left[ \begin{array}{cc} C_z + D_{zu} \Gamma D_c C_y & D_{zu} \Gamma C_c \end{array} \right], \quad (2.42)$$

$$D_f = \left[ \begin{array}{c} D_{zw} + D_{zu} \Gamma D_c D_{yw} \end{array} \right], \quad (2.43)$$

com  $\Gamma \triangleq (\mathbf{I} - D_c D_{yu})^{-1}$ .

Para  $D_{yu} = 0$ , o controlador por realimentação dinâmica de saída, com qualquer ordem especificada,  $n_c$ , pode ser representado por um controlador por realimentação estática de saída, considerando o sistema aumentado com as seguintes matrizes (GAHINET; APKARIAN, 1994):

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cc} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_c} \end{array} \right], \quad \bar{B}_u = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0} & B_u \\ \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0} \end{array} \right], \quad \bar{B}_w = \left[ \begin{array}{c} B_w \\ \mathbf{0} \end{array} \right], \quad (2.44)$$

$$\bar{C}_z = \begin{bmatrix} C_z & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \bar{D}_{zu} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & D_{zu} \end{bmatrix}, \bar{D}_{zw} = D_{zw}, \quad (2.45)$$

$$\bar{C}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_c} \\ C_y & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \bar{D}_{yw} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ D_{yw} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

O controlador por realimentação de saída resultante,  $\bar{K} \in \mathbb{R}^{(n_c+n_u) \times (n_c+n_y)}$ , contém as matrizes do controlador dinâmico por realimentação de saída:

$$K(z) = \bar{K} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Pode ser verificado pela Equação (2.48) a seguir que o controle por realimentação estática de saída do sistema aumentado resulta nas mesmas matrizes de malha-fechada do sistema original com controle por realimentação de saída dinâmico, Equação (2.38).

$$T_{zw} = \left[ \begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B_w \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline C_z & \mathbf{0} & D_{zw} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0} & B_u \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & D_{zu} \end{array} \right] \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline C_y & \mathbf{0} & D_{yw} \end{array} \right]. \quad (2.48)$$

Este resultado é bastante importante porque, desta forma, é possível aplicar os métodos de síntese de controle por realimentação estática de saída para calcular controladores por realimentação dinâmica de saída, com qualquer ordem desejada, não necessariamente a ordem do sistema.

O problema de síntese do controlador robusto por realimentação de saída multi-objetivo pode ser estabelecido como sendo: dado um sistema incerto linear invariante no tempo com o modelo de dependência polinomial de parâmetros, encontrar um controlador  $K^*(z)$  ótimo em tempo discreto, que garanta que o sistema é robustamente estável e minimiza o pior caso da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema  $T_{zw}$ , em malha fechada:

$$\begin{aligned} K^*(z) &= \arg \min_{K(z)} \max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p, K)\|_\infty \\ \text{sujeito a: } & \max_{p \in \mathcal{P}} \left\{ \max_i |\lambda_i(A_f(p))| - 1 \right\} < 0 \\ & K(z) \in \mathcal{F}_K, \end{aligned} \quad (2.49)$$

em que  $\lambda_i$  é o  $i$ -ésimo autovalor do argumento,  $\mathcal{F}_K$  é um conjunto de controladores com uma estrutura especificada, estático ou dinâmico, ou, por exemplo, o controlador PID (do inglês, *proportional integral derivative*), e no caso de controladores dinâmicos, com possibilidade de restrições adicionais sobre a alocação dos polos e zeros. Esse problema é de difícil solução, uma vez que é necessário otimizar o pior caso de um conjunto  $\mathcal{P}$  infinito, sendo conhecido como otimização semi-infinita.

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas as normas  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$  das matrizes de transferência para caracterizar o desempenho do sistema em malha fechada. Foi apresentada a representação de sistemas incertos por modelos com dependência polinomial de parâmetros, sendo feita uma comparação com a formulação de modelos politópicos e modelos com dependência afim de parâmetros.

Foram tratadas as dificuldades para a discretização de modelos politópicos ou dependente de parâmetros para um modelo discreto. Foi formulado o problema multiobjetivo de síntese do controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída a ser resolvido nessa dissertação.

No Capítulo 3 é apresentado um procedimento de síntese iterativa de duas etapas, em que cada etapa é uma otimização de um problema mais fácil, transformando o problema multiobjetivo em mono-objetivo.

# Síntese de Controladores Robustos pelo método Evolução Diferencial

## 3.1 Introdução

Em um projeto de sistema de controle robusto, baseados em modelos com incertezas, a análise da estabilidade é imprescindível e é o ponto de partida para um projeto de controlador, sendo também imprescindível a análise de desempenho robusto para todos os infinitos valores possíveis dos parâmetros. Nas últimas décadas o estudo de sistemas lineares com parâmetros incertos cresceu muito, graças as técnicas derivadas das funções de Lyapunov (LEITE et al., 2004).

Como abordado no Capítulo 2, esta dissertação propõe uma metodologia para a solução de um problema de minimizar o pior caso para um domínio infinito, um problema de otimização semi- infinita, onde o número de parâmetros de otimização é finito (número de parâmetros ajustáveis do controlador), porém o número de restrições é infinito, resolvendo por meio do procedimento iterativo de dois passos (síntese e análise), semelhante ao método proposto por Žaković e Rustem (2003). Através desse procedimento iterativo é possível substituir o problema de otimização semi-infinita por um problema de otimização finita, onde, no passo de síntese o domínio de incerteza infinito é substituído por um conjunto finito. A solução obtida no passo de síntese é validada para todo conjunto infinito no passo de análise como em Sousa (2017) e Sousa e Gonçalves (2017).

A fim de ilustrar essa estratégia de síntese e análise, a Figura 3.1 retrata uma simulação deste método aplicado a uma função não convexa,  $f(p) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ , sendo  $p$  uma variável escalar limitada, que caracteriza o domínio de incerteza. As curvas contínuas representam os valores de  $f(p)$  após a otimização, considerando os valores finitos de  $p$  indicados (máximo e mínimo). A Figura 3.1, primeiro gráfico, mostra a

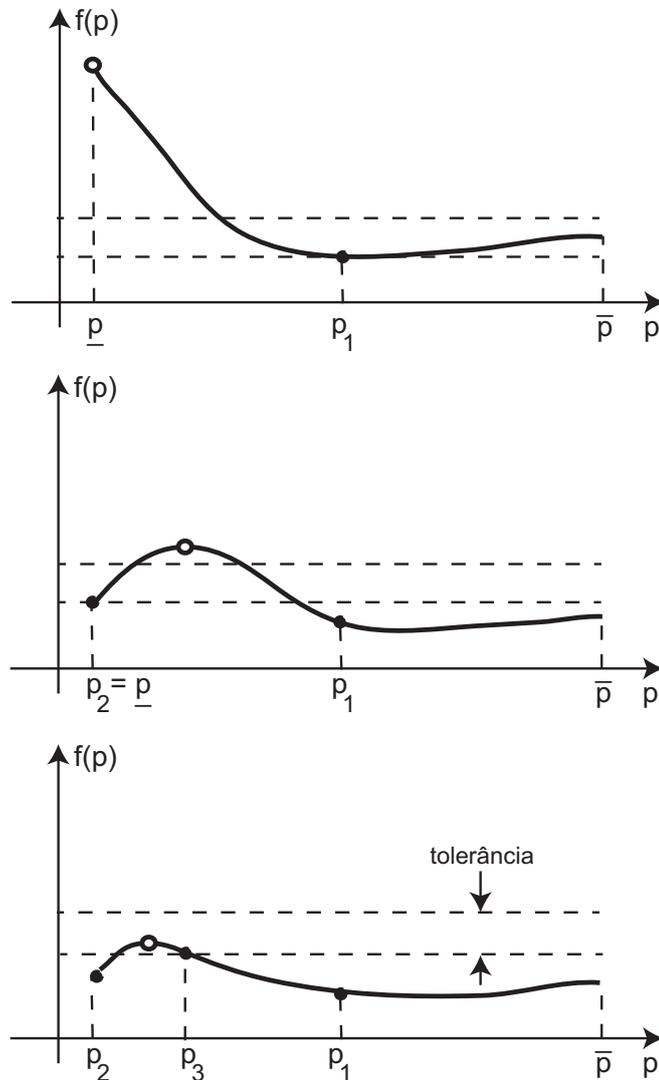
primeira iteração do procedimento do projeto, onde é calculada uma solução  $x \in R^d$  para minimizar o máximo de  $f(p)$ , considerando apenas o ponto médio de  $p$ , demarcado por ' $\bullet$ ', na etapa de síntese. Na etapa de análise, verifica-se que o máximo global ocorre para um valor  $p$  no extremo inferior do intervalo, demarcado por ' $\bullet$ ', esse ponto  $p$  é incluído no conjunto finito e os passos de síntese e análise são realizados novamente.

Na Figura 3.1, segundo gráfico, a solução ótima é calculada na etapa de síntese considerando o ponto médio inicial,  $p_1$ , mais o ponto adicional,  $p_2$ , determinado na etapa de análise da iteração anterior. É possível analisar que com o acréscimo desse ponto a curva é minimizada, forçando-a para o nível desses dois pontos. O máximo de  $f(p)$  ocorre novamente fora do conjunto finito com diferença ainda superior a tolerância, e desse modo, uma nova iteração do procedimento é feita incluindo esse terceiro ponto. O terceiro gráfico mostra a terceira iteração, a solução ótima agora resulta em uma curva suave de  $f(p)$ , em que o valor máximo verificado na etapa de análise, apesar de ocorrer em um valor não considerado na etapa de síntese, resulta em uma diferença dentro da faixa de tolerância, desse modo, finalizando o procedimento de projeto. Na Figura 3.1, observe que as linhas tracejadas horizontais mostram o intervalo de tolerância em relação ao máximo de  $f(p)$  obtido na etapa de síntese. O máximo da a função  $f(p)$  decai gradativamente a cada iteração. Este efeito de suavização na função objetivo se dá pela inclusão progressiva de pontos de fixação, podendo ser estendido para superfícies em qualquer dimensão.

Os métodos de otimização nos permitem encontrar o conjunto de valores dos parâmetros do sistema para os quais o desempenho global será melhor. Takahashi (2007) afirma que as técnicas de otimização baseiam-se na busca do "ótimo global"/ "melhor solução" dos problemas de projeto, os quais é possível quantificar o grau de adequação de cada solução. Um dos grandes desafios para os projetistas é encontrar a solução mais adequada de um problema, respeitando as restrições impostas. Os três requisitos que usualmente devem ser atendidos pelos projetistas através de uma técnica de otimização, segundo Storn e Price (1995) são: o método de otimização deve ser capaz de localizar uma solução ótima, proporcionando um desempenho adequado do sistema; a velocidade de convergência do algoritmo deve ser satisfatória, gerando o menor custo computacional possível; e por fim, o número de parâmetros de ajuste deve ser o menor possível, a fim de facilitar a execução.

Para solucionar os passos de síntese e análise do procedimento iterativo de síntese de sistemas de controle robusto, os métodos de otimização determinísticos, como o quasi-Newton ou método elipsoidal podem ter dificuldade para encontrar o mínimo global, uma vez que esses problemas de otimização podem ser não diferenciáveis, não convexos e multimodais, baseado em estudos feitos por Sousa (2017), Marcos e Gonçalves (2016a), Marcos e Gonçalves (2016b), Marcos et al. (2016), Gonçalves et al.

Figura 3.1 – Simulação do procedimento de otimização pela inclusão progressiva de pontos de fixação em que o '●' marca os valores considerados no passo de síntese e '○' o valor máximo obtido na etapa de análise.



(2005), Gonçalves et al. (2008), Palhares et al. (1997), Gonçalves et al. (2012).

Os métodos evolutivos são os mais aplicados para solução desses problemas, tendo uma maior probabilidade de obtenção do mínimo global. Os mais conhecidos são: algoritmo genético, o qual é baseado no mecanismo natural de seleção, a genética (GOLDBERG; HOLLAND, 1988). Storn e Price (1995) propuseram o método evolução diferencial, que é o adotado nesta dissertação, onde é analisada a viabilidade de uso do mesmo para implementação das duas etapas do procedimento de síntese do projeto de controle robusto.

O método Evolução Diferencial (DE, do inglês *Differential Evolution*), é um algoritmo de otimização evolucionário para soluções de problemas no domínio real, com capacidade de lidar com funções não diferenciáveis, não lineares e multimodais. Entre as características interessantes do método DE, podemos citar sua robustez, eficiência,

fácil adaptação, versatilidade e simplicidade de implementação. O algoritmo DE possui operadores semelhantes aos algoritmos evolucionários padrões: mutação, cruzamento e seleção. O que diferencia o algoritmo de DE dos demais é o passo de mutação em que um novo vetor é gerado, adicionando a diferença ponderada entre dois vetores da população a um terceiro vetor. A mutação diferencial não é baseada em nenhum processo natural, porém é classificado como um algoritmo evolutivo (STORN; PRICE, 1995).

Neste capítulo é descrita a implementação do procedimento iterativo de síntese de controle  $\mathcal{H}_\infty$  robusto para sistemas incertos dependentes de parâmetros. A sessão 3.2 aborda a síntese robusta de controle  $\mathcal{H}_\infty$  baseada em otimização não convexa explicitando os problemas tratados nos passos de síntese e análise. A sessão 3.3 descreve a maneira como o método de Evolução Diferencial é aplicado nos passos do procedimento de síntese.

## 3.2 Síntese de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ baseada em otimização não convexa

Para facilitar a solução do problema (2.49), foi proposto um procedimento de síntese iterativa de duas etapas descritas nas subseções seguintes em que cada etapa é uma otimização mais fácil do que o problema de otimização semi-infinita. Chamamos as etapas de síntese e análise.

### 3.2.1 Passo 1 - Síntese

O domínio de incerteza  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ , no espaço de parâmetros incertos, é substituído por um conjunto finito de vetores  $\bar{\mathcal{P}}$ , com  $\bar{p} \in \bar{\mathcal{P}}$ . O conjunto finito  $\bar{\mathcal{P}}$  pode ser definido como um único vetor com os valores médios dos parâmetros incertos ou  $2^n$  vetores iguais aos vértices do hiper-retângulo. Desse modo reescreve-se o problema (2.49) substituindo o conjunto infinito  $\mathcal{P}$  pelo conjunto finito  $\bar{\mathcal{P}}$ , tornando o problema viável de ser solucionado numericamente:

$$\begin{aligned} K^*(z) &= \arg \min_{K(z)} \max_{p \in \bar{\mathcal{P}}} \|T_{zw}(z, p, K)\|_\infty \\ \text{sujeito a: } & \max_{p \in \bar{\mathcal{P}}} \left\{ \max_i |\lambda_i(A_f(p))| - 1 \right\} < 0 \\ & K(z) \in \mathcal{F}_K. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Defina  $f_s$  como sendo o valor da função objetivo do passo 1 (síntese), para a solução do controlador obtido, que será validado no passo de análise:

$$f_s \triangleq \max_{p \in \bar{\mathcal{P}}} \|T_{zw}(z, p, K^*)\|_\infty \quad (3.2)$$

É mais adequado aplicar um algoritmo de otimização evolutivo para resolver o problema de otimização escalar dado pelo problema 3.1, considerando o conjunto finito,  $\bar{\mathcal{P}}$ , uma vez que as funções objetivo e restrições podem ser não diferenciáveis e não convexas, com mínimos diferentes no espaço de busca.

### 3.2.2 Passo 2 - Análise

Na etapa de análise é verificado a estabilidade robusta e desempenho robusto do controlador obtido, para todo domínio infinito de incerteza,  $\mathcal{P}$ . O problema de análise de estabilidade robusta do sistema com dependência polinomial de parâmetros pode ser formulado como um problema de otimização, em que é desejado determinar se o máximo módulo dos  $n$  autovalores das infinitas matrizes  $A_f(p)$  são menores que 1:

$$p_u^* = \arg \max_{p \in \mathcal{P}} \left\{ \max_i |\lambda_i(A_f(p, K^*))| - 1 \right\}, \quad (3.3)$$

sendo  $\lambda_i(A)$  o  $i$ -ésimo autovalor de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Se  $\max_i |\lambda_i(A_f(p_u^*))| - 1 \geq 0$ , isso significa que existe polo sobre ou fora do disco de raio unitário do plano- $Z$ , e o sistema em malha-fechada com  $K^*(z)$  não é robustamente estável. Se é verificado que o sistema não é robustamente estável, então o ponto  $p_u^*$  é acrescentado no conjunto finito,  $\bar{\mathcal{P}} \leftarrow \bar{\mathcal{P}} \cup p_u^*$ , a etapa de análise é interrompida e um novo passo de síntese é executado considerando o conjunto finito com o ponto acrescentado  $p_u^*$ . Se o sistema é robustamente estável, é feita a verificação dos valores das funções objetivo e das restrições. Como descrito no Capítulo 2, os cálculos de custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema com incerteza paramétrica, pode ser formulado como o seguinte problema de otimização:

$$p^* = \arg \max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p, K^*)\|_\infty. \quad (3.4)$$

Defina:

$$f_a \triangleq \|T_{zw}(z, p^*, K^*)\|_\infty. \quad (3.5)$$

Se  $(f_a - f_s)/f_a > \varepsilon$ , então  $\bar{\mathcal{P}} \leftarrow \bar{\mathcal{P}} \cup p^*$  e executa o passo de síntese e análise novamente, caso contrário, o procedimento é finalizado resultando no controlador  $\mathcal{H}_\infty$  robusto ótimo.

Para evitar o erro de discretização do modelo com dependência de parâmetros, como descrito na seção 2.4, tanto no passo de síntese como no passo de análise, a discretização do sistema é realizada pelo método de segurador de ordem zero, apenas no momento do cálculo de  $T_{zw}(z, p, k)$  para um valor específico de  $p$ . Na próxima seção é descrito como os passos do procedimento de síntese podem ser implementados pelo método evolução diferencial.

### 3.3 Método Evolução Diferencial aplicado nos passos do procedimento de síntese

O algoritmo Evolução Diferencial (DE) é um algoritmo de otimização evolucionário para solução de problemas com funções no domínio real (STORN; PRICE, 1997; DAS; SUGANTHAN, 2011; DAS et al., 2016).

Considere o problema de otimização escalar com restrições de desigualdades representado por:

$$\begin{aligned} \chi^* &= \arg \min_{\chi} f(\chi) \\ \text{Sujeito a : } &g(\chi) < 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo  $\chi^* \in \mathbb{R}^m$  o vetor de solução do problema,  $m$  é o número de variáveis de otimização,  $\chi \in \mathbb{R}^m$  o vetor de variáveis de otimização a ser determinado. A função objetivo a ser minimizada é dada por  $f(\chi) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ , e  $g(\chi) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$  o vetor de funções das restrições que devem ser atendidas. O método DE foi desenvolvido para tratar problemas de otimização escalar irrestritos, como:

$$\chi^* = \arg \min_{\chi} f(\chi) \quad (3.7)$$

Seja  $\mathcal{U}_{(a,b)}$  um número pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo  $(a, b)$ ,  $\mathcal{I}_{(m)}$  um número inteiro pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo  $[1, m]$  e  $N$  o número de indivíduos da população. Defina a população na  $k$ -ésima iteração,  $X_k = \{\chi_{k,i}; i = 1, \dots, N\}$ , sendo a  $i$ -ésima solução:

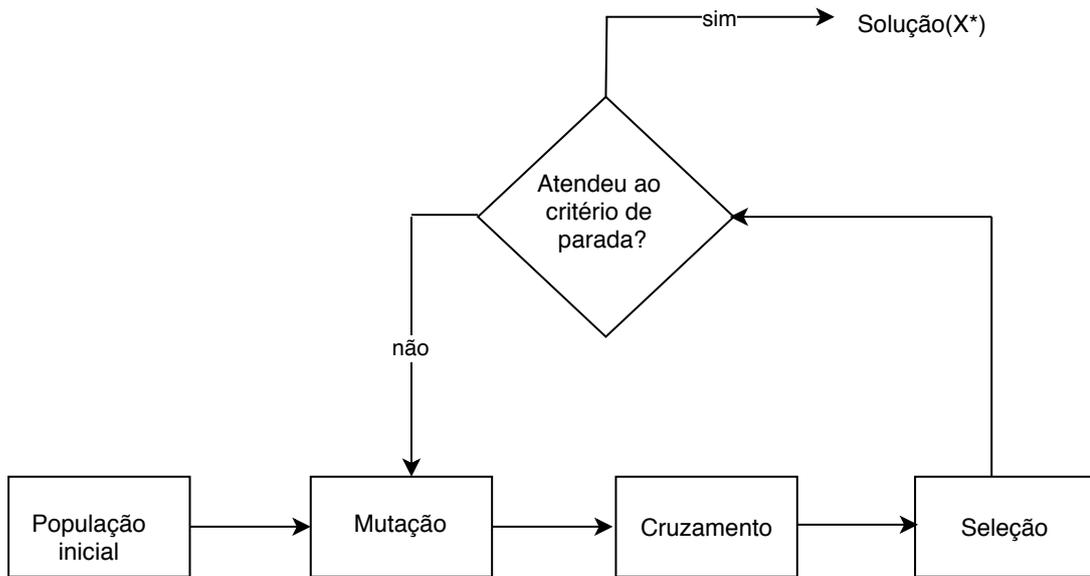
$$\chi_{k,i} = \begin{bmatrix} \chi_{k,i,1} \\ \vdots \\ \chi_{k,i,m} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

No fluxograma da Figura 3.2 é possível observar as etapas do método DE, cujos operadores são descritos a seguir.

#### 3.3.1 População Inicial

Na solução do problema (3.1) na etapa de síntese, as variáveis de otimização são os parâmetros do controlador,  $\chi_{k,i} = [\theta_1, \dots, \theta_v]^T$ , sendo  $m = n_p$ , em que  $n_p$  é o número de parâmetros ajustáveis do controlador. A população inicial é distribuída uniformemente no intervalo entre  $\underline{\chi}_j$  e  $\bar{\chi}_j$ , sendo os valores limites especificados pelo projetista, isto é,  $\chi_{1,i,j} = \mathcal{U}_{(\underline{\chi}_j, \bar{\chi}_j)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, n_p$ . Através de vários testes e para garantir o tamanho mínimo de 6, valor definido experimentalmente, o tamanho

Figura 3.2 – Fluxograma do método DE



da população foi fixado em  $N = 3 + 3n_p$ . Para o controlador padrão de realimentação de saída,  $n_p = n_c^2 + n_c n_y + n_u n_c + n_u n_y$ . A população inicial é gerada uniformemente e aleatoriamente dentro do hiper-retângulo inicial definido pelo projetista no espaço de parâmetros do controlador.

Nas soluções dos problemas (3.3) e (3.4), na etapa de análise, as variáveis de otimização são os parâmetros incertos,  $\chi_{k,i} = [p_1, \dots, p_\eta]^T$ ,  $m = \eta$ . Novamente, através de vários testes realizados e para garantir uma população maior ou igual a 10, valor também definido de forma experimental, definiu-se o tamanho da população como  $N = 5(\eta + 1)$ . Para criar a população inicial, além dos vetores gerados uniformemente e aleatoriamente dentro do hiper-retângulo no espaço dos parâmetros incertos, foi feito o cálculo da função objetivo em todos os vértices deste hiper-retângulo e foi incluído na população os  $\eta$  vértices com valores inferiores. Essa estratégia se deve ao fato de que, já é de conhecimento em vários estudos de caso realizados, que existe uma tendência do pior caso ocorrer nos vértices, tanto no caso de análise de estabilidade quanto no caso de análise de desempenho. Nos experimentos realizados, essa estratégia aumenta a probabilidade do DE atingir a solução global ótima.

### 3.3.2 Mutaçao Diferencial

Considere os índices  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_4 \neq r_5 \neq i$  dados por  $r_j = \mathcal{I}_{(N)}$  para  $j = 1, \dots, 5$ . Para resolver os problemas (3.1) e (3.3), é feito o cálculo de  $\mathbf{v}_{k,i}$  que representa a  $i$ -ésima soluçao mutante, na  $k$ -ésima geraçao, baseada na operaçao de mutaçao:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r_1} + F_{1,i}(\chi_{k,r_2} - \chi_{k,r_3}), \quad (3.9)$$



DE/best/2:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,best} + F(\chi_{k,r_1} - \chi_{k,r_2}) + F(\chi_{k,r_3} - \chi_{k,r_4})$$

DE/rand/2:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r_1} + F(\chi_{k,r_2} - \chi_{k,r_3}) + F(\chi_{k,r_4} - \chi_{k,r_5})$$

### 3.3.3 Cruzamento

O cruzamento entre as  $i$ -ésimas soluções da  $k$ -ésima população,  $\chi_{k,i}$ , e da população mutante,  $V_k$ , gera a população teste,  $U_k$ :

$$u_{k,i,j} = \begin{cases} v_{k,i,j}, & \text{se } \mathcal{U}_{(0,1)} \leq C_r \text{ ou } j = \delta_i \\ \chi_{k,i,j}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.11)$$

para  $j = 1, \dots, m$  e  $i = 1, \dots, N$ , sendo  $C_r \in [0, 1]$  a taxa de cruzamento. Com base em experiência anterior, adotamos  $C_r = 0,9$ . O índice  $\delta_i = \mathcal{I}_{(\eta)}$  garante que pelo menos uma variável de  $u_{k,i}$  é proveniente de  $v_{k,i}$  de modo que  $\mathbf{u}_{k,i} \neq \chi_{k,i}$ .

### 3.3.4 Tratamento de Restrições

O algoritmo DE foi desenvolvido para resolver problemas de otimização sem restrições. Para tratar problemas de otimização restritos, é necessário incluir as restrições na função objetivo. Existem diferentes técnicas para tratamento de restrições sendo adotado nesse trabalho o método de penalidade. Na etapa de síntese, não se restringe os parâmetros do controlador, mas é considerado as restrições que o sistema de malha fechada deve ser robustamente estável e que o controlador deve ser estável.

Seja  $f_0(K) = \max_{p \in \bar{\mathcal{P}}} \|T_{zw}(z, p, K)\|_\infty$  a função objetivo original do problema,  $g_1(K) = \max_{p \in \bar{\mathcal{P}}} (\max_i |\lambda_i(A_f(p, K))| - 1)$  a restrição que o sistema em malha fechada seja robustamente estável e  $g_2(K) = \max_i |\lambda_i(A_c)| - 1$  a restrição de que o controlador seja estável. Consideramos a seguinte função objetivo modificada no algoritmo DE:

$$f(K) = \begin{cases} 10^{14} + g_1(K), & \text{if } g_1(K) \geq 0, \\ 10^{12} + g_2(K), & \text{if } g_1(K) < 0 \text{ e } g_2(K) > 0, \\ f_0(K), & \text{if } g_1(K) < 0 \text{ e } g_2(K) \leq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

### 3.3.5 Seleção

A operação de seleção determina qual solução, se a alvo,  $\chi_{k,i}$ , ou a tentativa,  $\mathbf{u}_{k,i}$ , sobrevive para próxima geração. Para  $i = 1, \dots, N$ :

$$\chi_{k+1,i} = \begin{cases} \mathbf{u}_{k,i}, & \text{se } f(\mathbf{u}_{k,i}) \leq f(\chi_{k,i}) \\ \chi_{k,i}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.13)$$

Considerando a Equação (3.12), a seleção ocorre segundo a seguinte prioridade:

1º: Ao comparar as soluções alvo e teste, os menores valores da função objetivo são as soluções viáveis ( $g_1 < 0$  e  $g_2 \leq 0$ );

2º: As soluções que resultam em um sistema estável de malha fechada  $g_1 < 0$ , mas com um controlador que possui autovalores fora do disco unitário,  $g_2 > 1$ ;

3º: As soluções que resultam em um sistema de malha fechada instável ( $g_1 \geq 0$ ). Ao comparar duas soluções que violam as mesmas restrições, a solução mais próxima da região viável é a melhor.

Como o algoritmo DE não calcula o gradiente de  $f(K)$ , ele não tem nenhum problema com as não diferenciabilidades introduzidas pelo método de penalidade. No caso de realimentação de saída estática, existe apenas a restrição  $g_1$ . Na etapa de análise, as restrições são os parâmetros incertos pertencerem as suas faixas. Para evitar que soluções testes não factíveis sejam eliminadas, as soluções não factíveis são forçadas a serem factíveis diretamente logo após a operação de recombinação. Depois de calcular as soluções teste, se houver variáveis de otimização, os parâmetros incertos, fora do intervalo, o algoritmo implementado aplica uma operação de reflexão para impor os parâmetros incertos dentro do intervalo (TAKAHASHI, 2007).

### 3.3.6 Critério de parada

Adotou-se como critérios de parada um número máximo de gerações,  $N_g$ , ou a convergência da população comparando os valores máximos e mínimos de  $\max_i f(\chi_{k,i}) - \min_j f(\chi_{k,j}) \leq \epsilon_g$ . No passo de síntese e análise considerou-se  $\epsilon = 10^{-4}$  e selecionou-se  $N_g$  o maior possível para garantir que o algoritmo pare devido ao critério de parada.

### 3.3.7 Algoritmo básico

Considerando  $L$  uma matriz  $m \times 2$  com os limites de cada variável, e  $N$  o tamanho da população. A estrutura básica do código é dada por:

---



---

```

 $k \leftarrow 1;$ 
 $\chi_k \leftarrow$  Cria população inicial( $L, N$ )
 $F_x \leftarrow$  Função objetivo ( $\chi_k$ )
enquanto não critério de parada
     $V_k \leftarrow$  Mutação diferencial( $\chi_k$ )
     $U_k \leftarrow$  Cruzamento( $\chi_k, V_k$ )
     $U_k \leftarrow$  Tratamento restrições( $U_k$ )
     $F_u \leftarrow$  função objetivo ( $U_k$ )
     $\chi_{k+1} \leftarrow$  Seleção( $\chi_k, U_k, F_x, F_u$ )
     $k \leftarrow k + 1$ 
fim enquanto

```

---

## 3.4 Conclusão

Foi proposto neste capítulo um método de síntese de controladores robustos  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída com base no algoritmo evolução diferencial. O método de síntese foi dividido em duas etapas: na etapa de síntese é calculado o controlador que minimiza a função objetivo e atende as restrições, considerando um conjunto finito de pontos no domínio de incertezas; na etapa de análise o controlador obtido é verificado para todo o domínio de incertezas, analisando se é necessário acrescentar novos pontos no conjunto finito da etapa de síntese, utilizando o algoritmo de evolução diferencial para a resolução de ambas as etapas.

Outra forma de representar os problemas de controle robusto é através de desigualdades matriciais lineares (LMI). Sua vantagem é que torna os problemas facilmente resolvíveis numericamente com pacotes computacionais especializados. A desvantagem do uso de LMI é a possibilidade de obtenção de resultados conservadores, em algumas das vezes, a não garantia de uma solução. O Capítulo 4 aborda as LMI utilizadas a fim de realizar a comparação com o método DE que será apresentada no Capítulo 5.

# Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ baseado em LMI

## 4.1 Introdução

O problema de controle robusto abordado no Capítulo 2 é um problema de otimização minmax que pode ser formulado como um problema de otimização semi-infinita. Em alguns casos, transformando as restrições para um formato de desigualdades matriciais lineares (LMI), o problema pode ser convertido em um problema de programação semi-definida (BOYD S.; EL GHAOUI, 1994; GAHINET et al., 1995). Por meio dessas formulações LMI é possível projetar e analisar sistemas de controle considerando somente os sistemas correspondentes aos vértices do politopo, em vez do conjunto infinito de incertezas, assim, problemas de otimização não-convexos ou de factibilidade com solução complexa, são representados por problemas convexos.

Os problemas descritos através de formulações LMI podem ser programados através de interfaces simples, como por exemplo, YALMIP (do inglês, *Yet Another LMI Parser*)(LOFBERG, 2004), e podem ser solucionados eficientemente usando *softwares* como SeDuMi, (do inglês, *Self-Dual Minimization*) (STURM, 1999) e LMI Control Toolbox (GAHINET et al., 1995). Uma LMI tem a forma

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (4.1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^m$  é a variável, e as constantes são as matrizes simétricas  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para  $i = 0, \dots, m$ . O sinal de desigualdade em  $F(x) > 0$  significa que  $F(x)$  é definida positiva, isto é,  $u^T F(x) u > 0$  para todos os vetores não-nulos  $u \in \mathbb{R}^n$ . A LMI da Equação (4.1) é equivalente a um conjunto de  $n$  desigualdades polinomiais em  $x$ , requerendo que os menores principais de  $F(x)$  sejam positivos. As LMI não restritas

tem a forma de

$$F(x) \geq 0. \quad (4.2)$$

Existem diversas formulações LMI para análise de estabilidade robusta, a história das LMI na análise de sistemas dinâmicos surgiu a mais de cem anos. Começou por volta de 1890, quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo a teoria de Lyapunov (BOYD S.; EL GHAOUI, 1994). Em particular, no caso linear e invariante no tempo, Lyapunov mostrou que a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad (4.3)$$

é estável (ou seja, todas as trajetórias convergem a zero), se e somente se, houver uma matriz simétrica definida positiva  $P$ , tal que

$$A^T P + PA < 0. \quad (4.4)$$

As condições de  $P > 0$ ,  $A^T P + PA < 0$ , são o que chamamos de desigualdade de Lyapunov, que é uma forma de LMI. Sendo a primeira LMI utilizada para análise de estabilidade de um sistema dinâmico, que pode ser resolvida analiticamente (resolvendo um conjunto de equações lineares) (BOYD S.; EL GHAOUI, 1994).

Há diversas formulações LMI para análise de estabilidade robusta em tempo contínuo e discreto (OLIVEIRA et al., 1999; OLIVEIRA; PERES, 2006). As normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  e os respectivos custos garantidos, podem ser calculados por LMI. No caso do sistema em tempo discreto, existem diferentes formulações LMI para síntese de controle robusto por realimentação de estado considerando desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , como por exemplo as apresentadas em Oliveira et al. (2002).

Há problemas de controle que não possuem formulações convexas baseadas em LMI, não sendo possível a obtenção da solução com os *softwares* disponíveis para resolução de LMI, podendo recair em descrições na forma de desigualdade matricial bilinear. No caso do controle por realimentação de estado, uma simples mudança de variável linearizante é suficiente para transformar a BMI em uma LMI (BERNUSSOU et al., 1989).

Em Agulhari et al. (2010) foi proposto um método capaz de sintetizar um controlador robusto por realimentação de saída, mesmo quando a matriz de saída é incerta. Um controlador robusto por realimentação de estado dependente de parâmetros é calculado inicialmente, as matrizes obtidas são usadas para fixar variáveis em produtos de duas variáveis para transformar a formulação BMI em LMI, logo após é realizado a síntese do controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída desejado.

Nas próximas seções deste capítulo é abordado a transformação de BMI em LMI, e algumas formulações LMI.

## 4.2 Síntese robusta por realimentação estática de saída baseada na realimentação de estado

Quando substituimos as matrizes de  $T_{zw}$ , que dependem das matrizes do controlador, em uma formulação de análise LMI, ela se torna uma BMI com o produto de variáveis matriciais. No caso do controle por realimentação de estados, uma simples mudança de variáveis linearizantes é suficiente (BERNUSSOU et al., 1989). No caso de controladores por realimentação de saída, matrizes incertas do sistema aparecem no meio do produto, tornando mais difícil transformar a BMI em uma restrição LMI.

É possível formular uma síntese de controle robusto por realimentação estática de saída baseada em uma formulação LMI para síntese de controle por realimentação de estado, se  $C_y$  não for incerto e  $D_{yw} = 0$ , sendo  $q = n - n_y$  (OLIVEIRA et al., 2002). A sessão 2.5 demonstra como projetar o controlador por realimentação dinâmica de saída de qualquer ordem a partir do controlador por realimentação estática de saída.

Em primeiro lugar, considere a transformação da similaridade  $x(t) = T\bar{x}(t)$ , com  $T = [C_y^T(C_y C_y^T)^{-1} C_y^\perp, C_y C_y^\perp = \mathbf{0}]$ , tal como  $\bar{C}_y = C_y T = [I_{n_y} \ \mathbf{0}]$ . Considere  $\bar{A}_i = T^{-1} A_i T$ ,  $\bar{B}_{u,i} = T^{-1} B_{u,i}$ ,  $\bar{B}_{w,i} = T^{-1} B_{w,i}$ , e  $\bar{C}_{z,i} = C_{z,i} T$ , e o Teorema 10 em Oliveira et al. (2002) para o modelo transformado:

$$\begin{bmatrix} P_i & \bar{A}_i X + \bar{B}_{u,i} L & \bar{B}_{w,i} & \mathbf{0} \\ * & X_i + X_i^T - P_i & \mathbf{0} & X^T \bar{C}_{z,i} + L^T D_{zu_i}^T \\ * & * & \mathbf{I} & D_{zw,i}^T \\ * & * & * & \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.5)$$

Para calcular um controlador por realimentação de estados, que não depende das últimas  $q$  variáveis de  $\bar{x}$ , é necessário definir (OLIVEIRA et al., 2002):

$$X \triangleq \begin{bmatrix} X_{11} & \mathbf{0} \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix},$$

$$L \triangleq \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

sendo  $X_{11} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $X_{21} \in \mathbb{R}^{q \times n_y}$ ,  $X_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ , e  $L_1 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ , então o controlador robusto por realimentação estática de saída que garante  $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(z, \alpha)\|_\infty^2 \leq \mu$  é  $K = L_1 X_{11}^{-1}$ . Note que como  $u = \bar{K} \bar{C}_y \bar{x} = \bar{K} C_y T T^{-1} x = \bar{K} C_y x = K C_y x$ , então  $K = \bar{K}$ .

### 4.2.1 Procedimento robusto por ILMI por realimentação estática de saída

Considere a restrição BMI obtida com as matrizes de malha fechada para realimentação estática de saída, na Equação (2.38), no Teorema 4 apresentado em Oliveira et al. (2002):

$$\begin{bmatrix} P_i & (A_i + B_{u,i}KC_{y,i})G_i & B_{w,i} + B_{u,i}KD_{yw,i} & \mathbf{0} \\ * & G_i + G_i^T - P_i & \mathbf{0} & G_i^T(C_{z,i} + D_{zu,i}KC_{y,i})^T \\ * & * & \mathbf{I} & (D_{zw,i} + D_{zu,i}KD_{yw,i})^T \\ * & * & * & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.6)$$

Propomos aqui um procedimento bem conhecido para resolver problemas BMI com base em um procedimento iterativo de duas etapas (ILMI), onde cada etapa é um problema LMI.

#### Procedimento ILMI:

**Passo I.** Calcular  $P_i = P_i^T$  e  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , minimizando  $\mu$  sujeito a restrição (4.6) definindo  $K$  igual ao valor alcançado no passo II na interação anterior.

**Passo II.** Calcular  $P_i = P_i^T$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e  $K$  minimizando  $\mu$  sujeito a restrição (4.6) definindo  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , igual ao valor alcançado no passo I. Se a diferença entre  $\mu$  nas iterações atuais e anteriores é maior que  $\epsilon$ , execute outra iteração, se não pare.

Na primeira iteração, como não existe um controlador  $K$  inicial para ser fixado na restrição (4.6), é necessário calcular as matrizes  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , utilizando uma forma alternativa, podemos considerar a mesma ideia proposta em Agulhari et al. (2010). Essas matrizes podem ser calculadas a partir de um dos dois problemas de viabilidade LMI relacionados a síntese por realimentação de estados com dependência de parâmetros. O primeiro é encontrar  $P_i = P_i^T$ ,  $G_i$ , e  $L_i$   $i = 1, \dots, N$ , como:

$$\begin{bmatrix} P_i & A_iG_i + B_{u,i}L_i \\ * & G_i + G_i^T - P_i \end{bmatrix} > 0. \quad (4.7)$$

A segunda possibilidade é, considerando  $D_{yw,i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dado o escalar  $\mu$ , encontrar  $P_i = P_i^T$ ,  $G_i$ , e  $L_i$   $i = 1, \dots, N$ , como:

$$\begin{bmatrix} P_i & A_iG_i + B_{u,i}L_i & B_{w,i} & \mathbf{0} \\ * & G_i + G_i^T - P_i & \mathbf{0} & G_i^T C_{z,i}^T + L_i^T D_{zu,i}^T \\ * & * & \mathbf{I} & D_{zw,i}^T \\ * & * & * & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.8)$$

O controlador que resulta no mínimo de  $\|T_{zw}\|_\infty^2 = \mu$  requer a pesquisa de  $\mu$  por meio de uma técnica de grade. Escolher o  $\mu$  proporciona maior flexibilidade de projeto do que obtê-lo por meio de sua otimização.

#### 4.2.2 Procedimento robusto por LMI para a síntese de controle por realimentação de estados

O Teorema 2 em Agulhari et al. (2010), descrito a seguir, apresenta uma condição de síntese para obter um ganho estabilizador para a realimentação de estado para o sistema dependente de parâmetros com um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Teorema 2.** Se existem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $i = 1, \dots, N$  e  $\gamma > 0$ , tal que as seguintes LMI são verificadas:

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i G_i + B_{2i} Z_i & \mathbf{0} & B_{1i} \\ * & G_i + G_i^T - P_i & G_i^T C_{1i}^T + Z_i^T D_{2i}^T & \mathbf{0} \\ * & * & \gamma^2 \mathbf{I} & D_{1i} \\ * & * & * & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, N \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} P_i + P_j & A_i G_j + A_j G_i + B_{2i} Z_j + B_{2j} Z_i & \mathbf{0} & B_{1i} + B_{1j} \\ * & G_i + G_j + G_i^T + G_j^T - P_i - P_j & G_i^T C_{1j}^T + G_j^T C_{1i}^T + Z_i^T D_{2j}^T + Z_j^T D_{2i}^T & \mathbf{0} \\ * & * & 2\gamma^2 \mathbf{I} & D_{1i} + D_{1j} \\ * & * & * & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.10)$$

para  $i = 1, \dots, N - 1$  e  $j = i + 1, \dots, N$ , então a lei de controle com dependência de parâmetros por realimentação de estados é dada por  $u(k) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}x(k)$ , sendo  $Z(\alpha)$  e  $G(\alpha)$

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_i \quad (4.11)$$

$$G(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i G_i \quad (4.12)$$

com  $\alpha \in \Lambda$ . O sistema fica estável com o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  dado por  $\gamma$ .

No Teorema 3, apresentado em Agulhari et al. (2010), usam-se como matrizes de entrada  $Z_i$  e  $G_i$  obtidas a partir da síntese do ganho por realimentação de estados dependente de parâmetros. O projeto de controlador em Sadabadi e Karimi (2015) também assume que o ganho é inicializado por meio de um controlador por realimentação de estado dependente de parâmetro. No Lema 8 e no Teorema 5 abordado em Chang et al. (2015), considera-se que a matriz de saída é precisamente conhecida e propõe um problema LMI para calcular o controlador robusto, tal problema LMI permite que a

matriz de saída seja incerta, mas exige a busca de dois parâmetros que são necessários para transformar a BMI em LMI.

### 4.3 Conclusão

Neste capítulo foi abordado o controle robusto  $H_\infty$  baseado em formulações LMI, e como é possível formular um problema de síntese de controle robusto por realimentação estática de saída a partir de uma formulação LMI para síntese de controle por realimentação de estados dependente de parâmetros. Foi proposto também o procedimento iterativo de duas etapas, ILMI, para resolver problemas BMI. O Teorema 2, de Agulhari et al. (2010) também foi abordado, propondo uma condição de síntese para obter o ganho estabilizante.

Para fins de comparação do procedimento de síntese proposto reproduziu-se as formulações LMI baseada no Teorema 10 em Oliveira et al. (2002), descrito na sessão 4.2, o procedimento ILMI baseado no Teorema 4 (OLIVEIRA et al., 2002), apresentado acima, as formulações de síntese baseadas no Teorema 1 e 3, o Teorema 2 e 3 em Agulhari et al. (2010), o procedimento de projeto de controlador baseado no Teorema 5 e 3 (SADABADI; KARIMI, 2015) e as formulações de síntese LMI baseadas no Lema 8 e no Teorema 5 em Chang et al. (2015). Todas essas formulações de síntese são aplicadas nos exemplos do Capítulo 5, e assim comparadas com o procedimento de síntese proposto utilizando o algoritmo DE.

# Capítulo 5

## Exemplos ilustrativos

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, a metodologia de projeto proposta no Capítulo 3 foi aplicada em exemplos ilustrativos por meio de simulações computacionais. Todos os testes foram realizados utilizando o Matlab<sup>®</sup>. Os exemplos ilustrativos aplicados foram um protótipo laboratorial de suspensão ativa, um sistema de quatro tanques e um helicóptero VTOL, abordados nas seções a seguir.

Na análise dos controladores obtidos para todos os exemplos, foi considerado os valores das entradas do controlador com a mesma precisão apresentada nesta dissertação (4 casas decimais). O algoritmo DE foi aplicado para calcular  $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p)\|_\infty$  para fins de comparação. Considerou-se também um índice de desempenho baseado no sinal de erro, a integral do erro ao quadrado:

$$ISE = \sum_{i=1}^{n_y} ISE_i, \quad ISE_i = \int_0^\infty e_i^2(t) dt, \quad (5.1)$$

em que  $e_i(t) \triangleq r_i(t) - c_i(t)$ ,  $c_i(t)$  é o  $i$ -ésimo sinal de saída da planta e  $r_i(t)$  é o  $i$ -ésimo sinal de referência, no caso da resposta de rastreamento, ou zero no caso de rejeição a distúrbios. Foi feito o cálculo de  $ISE$  para o vetor de parâmetros incertos,  $p^*$ , relacionado ao pior caso de  $\|T_{zw}(z, p)\|_\infty$ .

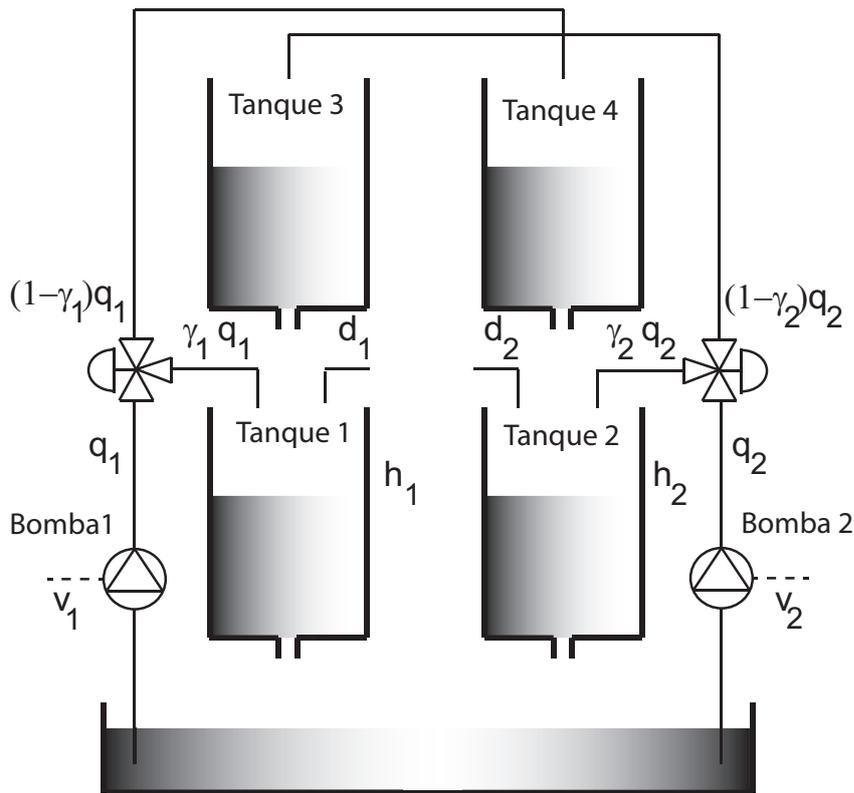
Os tempos de processamento são relativos a um notebook com processador Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> i5-7200U 2,5 GHz e memória 8044MB RAM.

## 5.1.1 Exemplo 5.1: Sistema de quatro tanques

### 5.1.1.1 Formulação do problema

Considere o processo de quatro tanques interligados entre si, abordado em Johansson (2000). Este exemplo de laboratório já foi aplicado para ilustrar diversos problemas de controle. O diagrama esquemático deste processo pode ser visto na Figura 5.1.

Figura 5.1 – Diagrama esquemático do sistema de 4 tanques.



O objetivo é controlar o nível nos dois tanques inferiores por meio de duas bombas. As configurações das válvulas de três vias estabelecem a interação entre as malhas de controle (JOHANSSON, 2000; JOHANSSON, 2002). As entradas de processo são  $v_1$  e  $v_2$  (tensões de entrada para as bombas) e as saídas são  $y_1$  e  $y_2$  (tensões dos

Tabela 5.1 – Parâmetros para  $P_-$  e  $P_+$ 

	$P_-$	$P_+$
$(h_1^0, h_2^0)$ (cm)	(12,4; 12,7)	(12,6; 13,0)
$(h_3^0, h_4^0)$ (cm)	(1,8; 1,4)	(4,8; 4,9)
$(v_1^0, v_2^0)$ (V)	(3,00; 3,00)	(3,15; 3,15)
$(k_1^0, k_2^0)$ ( $cm^3/Vs$ )	(3,33; 3,35)	(3,14; 3,29)
$(\gamma_1^0, \gamma_2^0)$ (cm)	(0,70; 0,60)	(0,43; 0,34)

sensores de medição de nível). Pela lei de balanço das massas e Bernoulli's tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} v_1 \\ \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} v_1 \\ \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_2} v_2 \\ \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} v_1 \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde  $A_i$  é a seção transversal do  $i$ -ésimo tanque,  $a_i$  é a seção transversal do orifício de saída do  $i$ -ésimo tanque,  $h_i$  o nível de água do tanque  $i$ . A tensão aplicada na  $i$ -ésima bomba é representado por  $v_i$  e o fluxo correspondente é  $k_i v_i$ , os parâmetros  $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$  são os ajustes das válvulas. O fluxo de entrada do tanque 1 é representado por  $\gamma_1 k_1 v_1$ , para o tanque 2,  $\gamma_2 k_2 v_2$ , para o tanque 3,  $(1 - \gamma_2) k_2 v_2$ , e para o tanque 4,  $(1 - \gamma_1) k_1 v_1$ .

A aceleração da gravidade é dada por  $g$ , os sinais de níveis medidos são  $k_c h_1$  e  $k_c h_2$ , segundo Johansson (2000). Os valores considerados para  $A_1$  e  $A_3$  é de  $28cm^2$ ,  $A_2$  e  $A_4$  é de  $32cm^2$ ,  $a_1$  e  $a_3$  é  $0,071cm^2$ ,  $a_2$  e  $a_4$  é  $0,057cm^2$ ,  $k_c$  é igual a  $0,5V/cm$  e  $g$  é  $981cm/s^2$ .

O modelo e o controle do processo de quatro tanques são estudados em dois pontos operacionais em Johansson (2000),  $P_-$ , fase mínima e  $P_+$ , fase não mínima. A Tabela 5.1 apresenta os valores dos parâmetros para esses pontos (SOUSA, 2017).

Considerando desvios em torno do ponto de operação e que entradas de controle e saídas de medição são sinais de tensão, o processo de quatro tanques pode ser representado por um modelo de espaço de estados linearizado com as seguintes matrizes

(JOHANSSON, 2000):

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} & 0 & 0 \\ -k_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
B_w &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_c & 0 \\ 0 & k_c \end{bmatrix}, C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
D_{zu} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_u & 0 \\ 0 & w_u \end{bmatrix}, C_y = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
D_{zw} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{yu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

As variáveis de estado são os quatro níveis dos tanques em centímetros (cm),  $h_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  e a integral de rastreamento (V),  $q_i(t) = k_c \int_0^t [r_i(\tau) - h_i(\tau)] d\tau$ ,  $i = 1, 2$ . As entradas de controle são as tensões da bomba (V),  $u(t) = [v_1(t) \ v_2(t)]^T$ , e as variáveis exôgenas são os sinais de referência (cm),  $w(t) = [r_1(t) \ r_2(t)]^T$ .

As variáveis de desempenho são as medidas dos níveis inferiores (V) e as entradas de controle com uma ponderação  $w_u = 0,125$ , que permitem obter um bom compromisso entre a resposta de rastreamento e o esforço de controle,  $z(t) = [k_c h_1(t) \ k_c h_2(t) \ w_u u_1(t) \ w_u u_2(t)]^T$ . As variáveis de medição são os níveis inferiores e as integrais de erro de rastreamento (V),  $y(t) = [k_c h_1(t) \ k_c h_2(t) \ e_1(t) \ e_2(t)]^T$ . Todas as variáveis são desvios em torno dos valores do ponto de operação. Consideramos o ponto de operação de fase mínima em Johansson (2000):  $h_1^0 = 12,4$ ,  $h_2^0 = 12,7$ ,  $h_3^0 = 1,8$ ,  $h_4^0 = 1,4$ ,  $v_1^0 = 3,00$  e  $v_2^0 = 3,00$ .

Considerou-se os parâmetros precisamente conhecidos: seções transversais do tanque:  $A_1 = A_3 = 28\text{cm}^2$ ,  $A_2 = A_4 = 32\text{cm}^2$ , coeficientes das válvulas de três vias  $\gamma_1 = 0,70$ ,  $\gamma_2 = 0,60$  e o ganho do sensor  $k_c = 0,5$ . Os demais parâmetros variam em intervalos

definidos como  $\pm 25\%$  em torno dos valores nominais:  $p_1 = 1/T_1 \in [0,0129; 0,0215]$ ,  $p_2 = 1/T_2 \in [0,0089; 0,0148]$ ,  $p_3 = 1/T_3 \in [0,0348; 0,0580]$ ,  $p_4 = 1/T_4 \in [0,0267; 0,0444]$  e os coeficientes das bombas  $p_5 = k_1 \in [2,4975; 4,1625]$  e  $p_6 = k_2 \in [2,5125; 4,1875]$ . Adotou-se o tempo de amostragem como  $T = 1 \text{ seg}$ . Este sistema pode ser representado por um modelo dependente de parâmetro afim:

$$S(p) = S_0 + p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3 + p_4 S_4 + p_5 S_5 + p_6 S_6 \quad (5.4)$$

Considere que:

$$S_i = \left[ \begin{array}{c|c|c} A & B_u & B_w \\ \hline C_z & D_{zu} & D_{zw} \\ \hline C_y & D_{yu} & D_{yw} \end{array} \right]. \quad (5.5)$$

Para esse exemplo, temos:

$$S_0 = \left[ \begin{array}{cccccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_c & 0 \\ 0 & -k_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_u & 0 & 0 \\ \hline k_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.6)$$



$$S_5 = \left[ \begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_1}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\gamma_1)}{A_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad S_6 = \left[ \begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_2}{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\gamma_2)}{A_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (5.9)$$

O objetivo do controle é minimizar os erros de rastreamento devido a variações dos sinais de referência. Mesmo sabendo que as referências não são sinais com energia limitada, minimizar o  $\|T_{zw}(z)\|_\infty$  resultará em controladores com o desempenho robusto desejado. O difícil neste exemplo é o número de parâmetros incertos que resulta em um politopo com 64 vértices. O tempo de cálculo é maior no caso de formulações LMI com maior número de restrições.

### 5.1.1.2 Resultados

Para este exemplo, adotou-se  $\mathcal{T} = [C_y^T (C_y C_y^T)^{-1} e_3 e_4]$ , em que  $e_i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{I}_6$ , tal que  $C_y \mathcal{T} = [\mathbf{I}_4 \mathbf{0}]$ , sendo  $\mathbf{I}_n$  uma matriz identidade de ordem  $n$ . Adotamos o conjunto finito inicial  $\tilde{\mathcal{P}}$  com apenas um ponto, o vetor de valores nominais  $p = [0,0129 \ 0,0089 \ 0,0580 \ 0,0267 \ 2,4975 \ 2,5125]^T$ . O método de síntese proposto converge após 5 iterações e quase 13 minutos de tempo de computação, resultando no seguinte controlador por realimentação estática de saída:

$$K_{DE} = \begin{bmatrix} 28,0946 & 3,7124 & 10,3168 & 0,7165 \\ -2,9388 & 37,9512 & -1,2645 & 12,6390 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

com  $\max_{p \in \tilde{\mathcal{P}}} \|T_{zw}(z, p, K_{DE})\|_\infty = 1,5617$ . O procedimento proposto pode garantir um sistema robusto em malha fechada estável, e o desempenho robusto  $\mathcal{H}_\infty$  com apenas cinco vetores compondo, ao final, o conjunto finito  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

A formulação LMI baseada no Teorema 10 em Oliveira et al. (2002), descrita no Capítulo 4.2, em 3,29 segundos, produz o controlador:

$$K_{T10} = \begin{bmatrix} 28,3525 & -0,8263 & 9,5006 & -0,2664 \\ 2,3055 & 36,2164 & 1,0887 & 10,8960 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Usando o método de análise robusta baseado no DE obtemos  $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p^*)\|_\infty = 1,7270$  para  $p^* = [0,0215 \ 0,0148 \ 0,0580 \ 0,0444 \ 2,4975 \ 2,5125]^T$ . A formulação baseada no Teorema 1 / Teorema 3 (AGULHARI et al., 2010), após 14 horas de processamento, alcançou:

$$K_{T1T3} = \begin{bmatrix} 30,6210 & -1,0306 & 7,7762 & -0,4973 \\ -0,1597 & 35,0591 & -0,3255 & 8,2673 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

com  $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p)\|_\infty = 2,1903$ . Devido ao maior tempo computacional, levaria mais tempo para procurar o melhor valor de  $\gamma^*$  considerando o procedimento de síntese dos Teoremas 2 e 3 (AGULHARI et al., 2010).

A formulação do Lemma 8 (CHANG et al., 2015), após aproximadamente 4 minutos, resulta:

$$K_{L8} = \begin{bmatrix} 28,9615 & -3,2738 & 9,5768 & -0,6301 \\ 3,0898 & 35,0560 & 1,4484 & 10,8765 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

obtendo  $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p^*)\|_\infty = 1,7258$  para  $p^* = [0,0215 \ 0,0148 \ 0,0580 \ 0,0444 \ 2,4975 \ 2,5125]$ . A formulação LMI baseada no Teorema 5 (CHANG et al., 2015) requer a busca de dois parâmetros para obter o melhor controle. Para  $\beta = 0,61$  e  $\rho = 0,005$ , é alcançado:

$$K_{T4} = \begin{bmatrix} 25,0594 & -2,7006 & 9,1308 & -0,5868 \\ 0,3450 & 35,1730 & 0,6519 & 11,3600 \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

obtendo  $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p^*)\|_\infty = 1,6366$  para  $p^* = [0,0215 \ 0,0148 \ 0,0580 \ 0,0444 \ 2,4975 \ 2,5125]$ . Apesar do tempo das iterações ser de apenas 5 segundos, o custo computacional para encontrar os melhores valores de  $\rho$  e  $\beta$  é muito alto.

Para este problema, o procedimento ILMI baseado no Teorema 5 / Teorema 3 em Sadabadi e Karimi (2015) implementado com ROLMIP (AGULHARI et al., 2018), tem um custo computacional inviável (vários dias para encontrar o valor do parâmetro necessário para obter uma melhor resposta). Com o procedimento ILMI apresentado na seção 4.2.1, ambas as maneiras de iniciar o procedimento resultam em um desempenho robusto semelhante. O melhor controle obtido para  $\mu = 2.5$  após 11 iterações:

$$K_{ILMI} = \begin{bmatrix} 28,3776 & -2,7856 & 10,5159 & -1,2045 \\ 2,9956 & 37,9212 & 1,0309 & 12,6933 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

obtendo  $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p^*)\|_\infty = 1,5618$ , para  $p^* = [0,0129 \ 0,0089 \ 0,0348 \ 0,0444 \ 2,4975 \ 2,5125]$ . Este valor é um pouco maior que o custo garantido,  $\mu^2 = 1,5576$ , devido à

Tabela 5.2 – Índices de desempenho - Sistema de quatro tanques

Controlador	$K_{DE}$	$K_{T10}$	$K_{T1T3}$	$K_{L8}$	$K_{T4}$	$K_{ILMI}$
$\max_{p \in \mathcal{P}} \ T_{zw}(z, p)\ _{\infty}$	<b>1,5617</b>	1,7270	2.1903	1,7258	1,6366	1,5618
ISE	4,8751	5,1782	5.7797	5,1623	5,0851	<b>4,8514</b>

aproximação de 4 dígitos dos elementos do controlador. Como o procedimento ILMI considera uma formulação LMI com menos restrições em cada etapa, o tempo de computação para uma execução é menor, quase 2 minutos, mas pode ser necessário executar o procedimento várias vezes para encontrar o melhor valor de  $\mu$ .

Foi desenvolvido uma simulação para os sistemas de malha fechada considerando  $r_1(t) = \mathbf{1}(t)$  e  $r_2(t) = \mathbf{1}(t - 30)$ , em que a função degrau unitário é definida como sendo  $\mathbf{1}(t - \tau) = 0$  para  $t < \tau$ , e  $\mathbf{1}(t - \tau) = 1$  para  $t \geq \tau$ .

Pelas Figuras 5.2 e 5.3 observa-se que todos os projetos apresentaram boas respostas transitórias com baixo acoplamento entre as malhas de controle, para o tanque 1 e 2, respectivamente. Alguns projetos apresentam menor tempo de subida, como o método DE e o procedimento ILMI baseado no Teorema 5/Teorema 3 em Sadabadi e Karimi (2015), impactando no critério de desempenho da integral do erro ao quadrado. Considerando que as bombas admitam tensões de entrada de até 10V, pela Figura 5.4 pode ser observado que todos os controladores atuariam dentro da faixa de tensão de entrada.

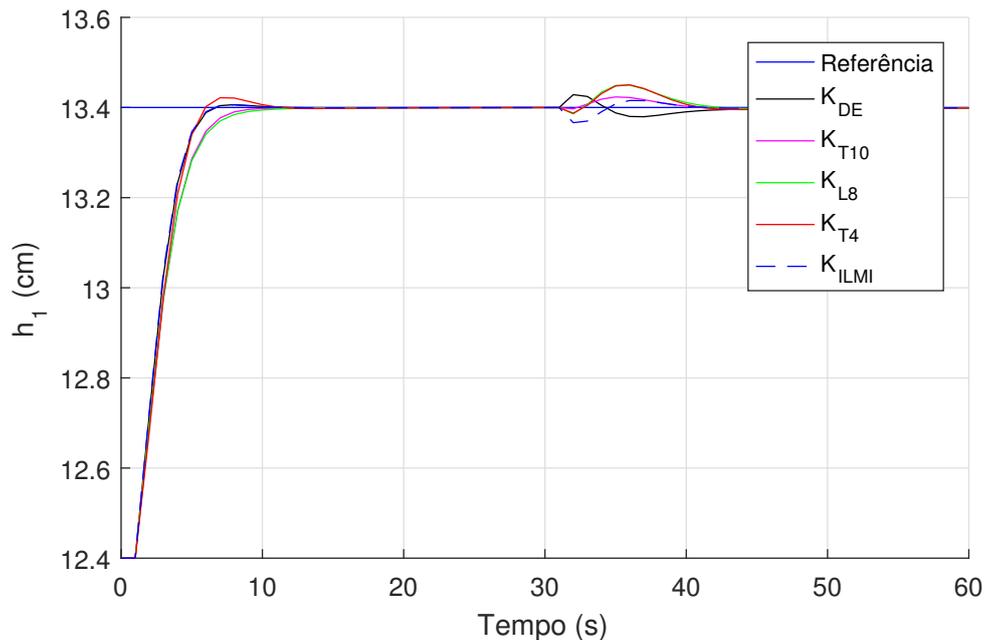
Figura 5.2 – Respostas transitórias de  $h_1$ , sistema de quatro tanques.

Figura 5.3 – Respostas transitórias de  $h_2$ , sistema de quatro tanques.

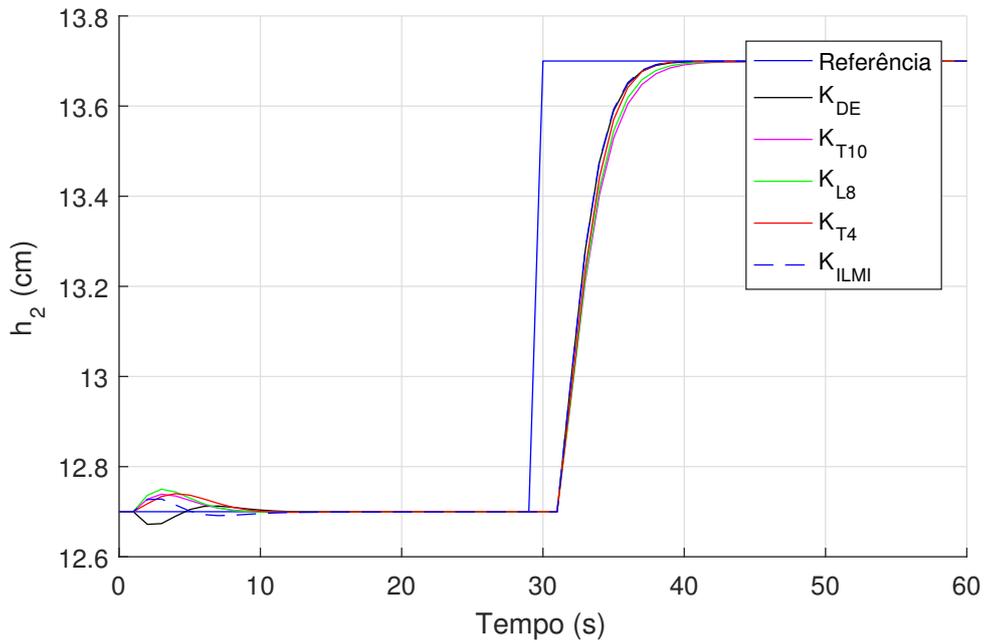
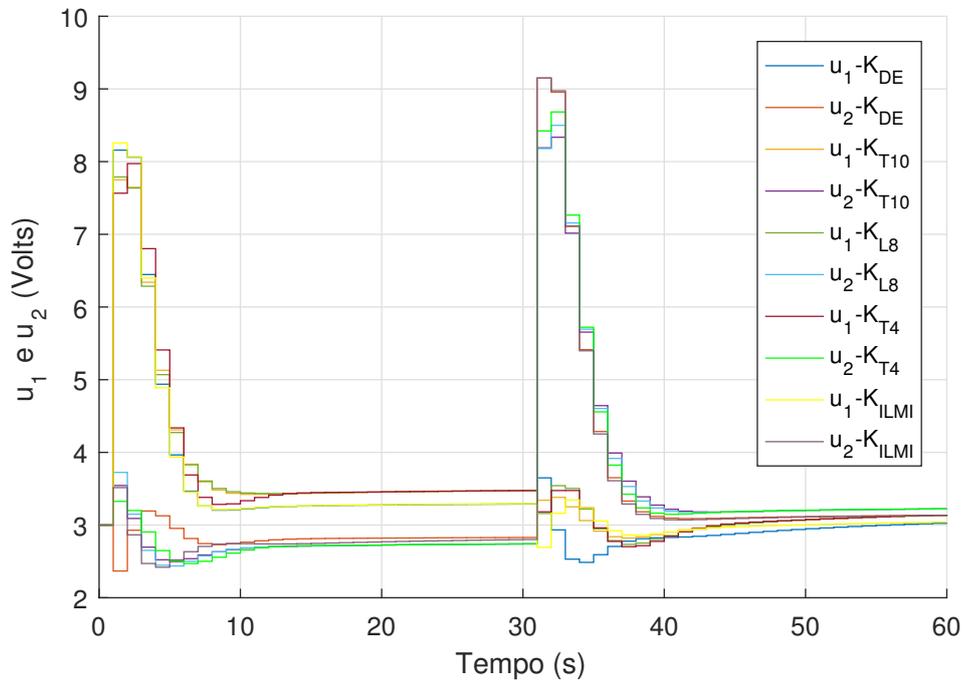


Figura 5.4 – Respostas transitórias das entradas de controle, sistema de quatro tanques.



## 5.1.2 Exemplo 5.2: Helicóptero VTOL

### 5.1.2.1 Formulação do problema

Considerou-se neste exemplo o modelo linearizado de uma aeronave de decolagem e aterrissagem vertical (VTOL, do inglês, *Vertical Take-off and Landing*) (NAREN-

DRA; TRIPATHI, 1973). Em Keel et al. (1988), Sousa (2017) e Oliveira et al. (2002) este exemplo foi aplicado. A dinâmica do helicóptero no plano vertical pode ser descrita por quatro variáveis de estado:  $x_1$ , velocidade horizontal (nós);  $x_2$ , velocidade vertical (nós);  $x_3$ , taxa de arfagem (graus/s); e  $x_4$ , ângulo de arfagem (graus). As entradas de controle são  $u_1$ , o controle coletivo (do inglês, *collective*), e  $u_2$ , o controle cíclico (do inglês, *cyclic*). Foi considerado a velocidade vertical como a saída medida,  $y = x_2$  e a variável de desempenho,  $z = x_2$ . Foi incluído no modelo original duas forças de perturbação. Para as condições típicas de carga e vôo do helicóptero a uma velocidade de 135 nós, as matrizes do modelo de espaço de estados em tempo contínuo são (NARENDRA; TRIPATHI, 1973):

$$A = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,010 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & a_{32} & -0,707 & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} -0,4422 & -0,1761 \\ b_{21} & 7,5922 \\ 5,52 & -4,49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{yu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

com  $a_{32} = 0,3681$ ,  $a_{34} = 1,420$ . e  $b_{21} = 3,5446$ . Os parâmetros do modelo do sistema variam no tempo com o ponto de operação. Considerou-se o modelo do sistema incerto, invariante no tempo. Como mencionado em Narendra e Tripathi (1973), as mudanças mais significativas ocorrem nos termos  $a_{32}$ ,  $a_{34}$  e  $b_{21}$ . Esses três termos são considerados como parâmetros incertos que variam nos intervalos:  $p_1 = a_{32} \in [0,06635; 0,5047]$ ;  $p_2 = a_{34} \in [0,1198; 2,526]$ ;  $p_3 = b_{21} \in [0,9775; 5,112]$  (NARENDRA; TRIPATHI, 1973). Todos os outros elementos são considerados constantes. Este sistema pode ser representado por um modelo dependente de parâmetro afim:

$$S(p) = S_0 + p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3 \quad (5.17)$$

Sendo:

$$S_0 = \left[ \begin{array}{cccc|cc|cc} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 & -0,4422 & -0,1761 & 0 & 0 \\ 0,0482 & -1,010 & 0,0024 & -4,0208 & 0 & 7,5922 & 0 & 0 \\ 0,1002 & 0 & -0,707 & 0 & 5,52 & -4,49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.18)$$

$$S_1 = \left[ \begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.19)$$

$$S_2 = \left[ \begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.20)$$

$$S_3 = \left[ \begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (5.21)$$

Tendo como objetivo principal minimizar a perturbação, sem nenhuma restrição. A equação geral (3.1) é representada agora na forma de:

$$K^* = \arg \min_K \max_{p \in \tilde{\mathcal{P}}} \|T_{cd}(z, p, K)\|_\infty, \quad (5.22)$$

sujeito a:  $K(z) \in \mathcal{F}$ .

### 5.1.2.2 Resultados

O objetivo do controle é minimizar o efeito dos dois distúrbios sobre a velocidade vertical. Para este problema, o solucionador SDP não consegue soluções viáveis para

todas as formulações de síntese LMI consideradas. Apesar de nenhuma solução viável, verificamos a estabilidade robusta e desempenho dos controladores resultantes. Todos os controladores de realimentação estática de saída não são robustamente estáveis. Obteve-se controladores dinâmicos de realimentação de saída que são robustamente estáveis apenas para as formulações LMI apresentadas em Agulhari et al. (2010). Verificou-se que os controladores de segunda ordem,  $n_c = 2$ , têm desempenhos semelhantes aos controladores de primeira ordem,  $n_c = 1$ . Foi selecionado o controlador obtido com o método baseado no Teorema 2/Teorema 3 (AGULHARI et al., 2010), com  $\gamma = 1,80$ :

$$K_{T_2T_3}(z) = \left[ \begin{array}{c|c} -0,0386 & 0,0002 \\ \hline -145,9564 & -9,4367 \\ -35,4785 & 7,1436 \end{array} \right], \quad (5.23)$$

isso resulta em  $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p)\|_\infty = 0,0837$ . Considerando o procedimento de síntese proposto, pode ser calculado qualquer tipo de controlador. Iniciando  $\bar{\mathcal{P}}$  com um vetor dos valores nominais, após 3 iterações e quase 30s de tempo de processamento, o procedimento iterativo proposto gerou o controlador dinâmico de realimentação de saída de primeira ordem:

$$K_{DE}(z) = \left[ \begin{array}{c|c} 0,9850 & 1,1969 \\ \hline -1,5965 & -3,0937 \\ 1,4140 & 5,7996 \end{array} \right], \quad (5.24)$$

isso resulta em  $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p)\|_\infty = 0,0298$ . Foi feita uma simulação para os sistemas de malha fechada, considerando estes dois controladores adotando  $w_1(t) = \mathbf{1}(t - 0,5) - \mathbf{1}(t - 1) + \mathbf{1}(t - 2,5) - \mathbf{1}(t - 3)$  e  $w_2(t) = \mathbf{1}(t - 1,5) - \mathbf{1}(t - 2) + \mathbf{1}(t - 2,5) - \mathbf{1}(t - 3)$ . O ISE dos dois controladores é  $1 \times 10^{-3}$  e  $4,3728 \times 10^{-5}$ , respectivamente. As respostas transitórias das variáveis de saída e de entrada, para os controladores de primeira ordem, são apresentadas nas Figuras 5.5 e 5.6, respectivamente. Baseado no  $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{zw}(z, p)\|_\infty$  e ISE, o controlador calculado com o procedimento de síntese proposto supera o controlador de primeira ordem obtido com formulações LMI. Baseado na Figura 5.5, para o vetor de perturbação de teste, o controlador  $K_{DE}(z)$  rejeita mais eficientemente os distúrbios do que o controlador  $K_{T_2T_3}(z)$  com os menores picos nas entradas de controle.

Figura 5.5 – Respostas transitórias da velocidade vertical,  $z$ , VTOL.

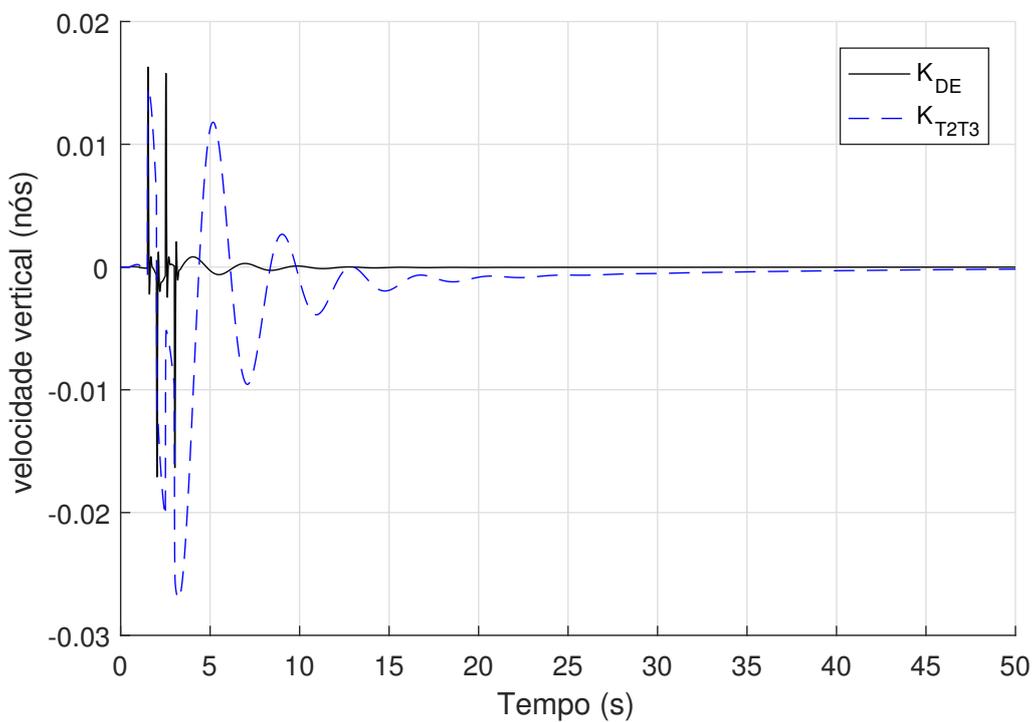
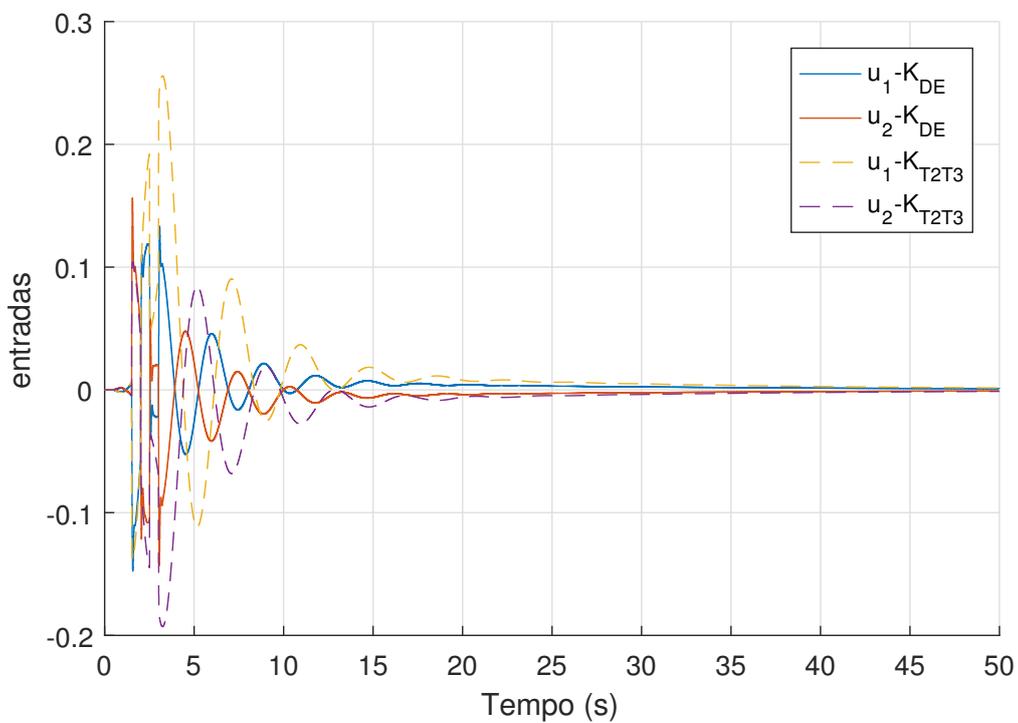


Figura 5.6 – Respostas transitórias das entradas do sistema,  $u$ , VTOL.

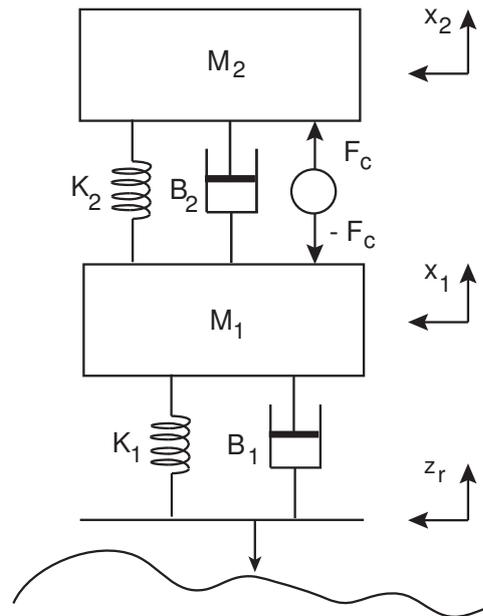


### 5.1.3 Exemplo 5.3: Suspensão ativa

#### 5.1.3.1 Formulação do Problema

Esse exemplo trata de um protótipo laboratorial de suspensão ativa fabricado pela Quanser<sup>®</sup> apresentado na Figura 5.7 (APKARIAN; ABDOSSALAMI, 2013).

Figura 5.7 – Modelo da suspensão ativa



O protótipo é composto por três placas: a placa inferior representa o perfil do piso e é excitada por um motor; a placa do meio, a massa não suspensa, representa a roda do carro e está conectada com a placa que representa o piso através de uma mola que representa o pneu; a placa superior, a massa suspensa, representa 1/4 da massa do veículo e está conectada à massa não suspensa por uma mola, que representa a mola do sistema de suspensão do veículo. Existe um motor entre as duas placas superiores que controla o sistema de suspensão ativa. Este sistema de controle é estudado em vários trabalhos, (ALVES et al., 2014), (OLIVEIRA et al., 2015) e (FORMENTIN; KARIMI, 2013).

Seja  $x_1(t) \triangleq x_{eq,1} + z_1(t)$  e  $x_2(t) \triangleq x_{eq,2} + z_2(t)$ , em que  $x_{eq,1}$  e  $x_{eq,2}$  são os deslocamentos verticais no ponto de equilíbrio,  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  são os desvios verticais em torno do ponto de equilíbrio. Definindo o vetor de espaço de estado como  $x \triangleq [z_2 - z_1 \quad \dot{z}_2 \quad z_1 - z_r \quad \dot{z}_1]^T$ , o distúrbio como  $w = \dot{z}_r$ , a entrada de controle é  $u = F_c$ , as variáveis de desempenho são a aceleração do chassi e a entrada de controle ponderada,  $z = [\ddot{z}_2 \quad w_u F_c]$  e as variáveis mensuráveis como sendo  $y = \ddot{z}_2$ , as matrizes da

representação no espaço de estados são (APKARIAN; ABDOSSALAMI, 2013):

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{K_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} & 0 & \frac{B_2}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} & -\frac{K_1}{M_1} & -\frac{B_2+B_1}{M_1} \end{bmatrix}, \\
 B_w &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{B_1}{M_1} \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_2} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_1} \end{bmatrix}, \\
 C_z &= \begin{bmatrix} -\frac{K_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} & 0 & \frac{B_2}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_{zw} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_2} \\ w_u \end{bmatrix}, \\
 C_y &= \begin{bmatrix} -\frac{K_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} & 0 & \frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix}, \\
 D_{yw} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

As matrizes em malha fechada são:

$$A_f = \begin{bmatrix} A + B_u R D_c C_y & B_u R C_c \\ B_c C_y + B_c D_{yu} R D_c C_y & A_c + B_c D_{yu} R C_c \end{bmatrix}, \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
 B_f &= \begin{bmatrix} B_w + B_u R D_c D_{yw} \\ B_c D_{yw} + B_c D_{yu} R D_c D_{yw} \end{bmatrix}, \\
 C_f &= \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} R D_c C_y & D_{zu} R C_c \end{bmatrix}, \\
 D_f &= \begin{bmatrix} D_{zw} + D_{zu} R D_c D_{yw} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Converteu-se a equação de estado de tempo contínuo para uma equação de estado de tempo discreto considerando o método de segurador de ordem zero, e o tempo de amostragem  $T = 1ms$  (sugerido pelo fabricante). Considerou-se como objetivo de controle alcançar um equilíbrio entre minimizar o efeito do distúrbio,  $w = \dot{z}_r$ , na aceleração do chassi,  $\ddot{z}_2(k)$ , e o sinal de controle,  $F_c(k)$ . Os valores nominais dos parâmetros do sistema são:  $M_1 = 1kg$ ,  $M_2 = 2,45kg$ ,  $K_1 = 2 \times 1250N/m$ ,  $K_2 = 2 \times 450N.m$ ,

$B_1 = 5\text{N.s/m}$ , e  $B_2 = 7,5\text{N.s/m}$  (APKARIAN; ABDOSSALAMI, 2013). Neste exemplo, todos os parâmetros foram considerados como incertos,  $p = [1/M_1 \ 1/M_2 \ K_1 \ K_2 \ B_1 \ B_2]^T$ , com  $\pm 25\%$ , de incerteza,  $p_1 = 1/M_1 \in [0,8; 1,3333]$ ,  $p_2 = 1/M_2 \in [0,3265; 0,5442]$ ,  $p_3 = K_1 \in [1875; 3125]$ ,  $p_4 = K_2 \in [675; 1125]$ ,  $p_5 = B_1 \in [3,75; 6,25]$ ,  $p_6 = B_2 \in [5,625; 9,375]$ . O modelo dependente de parâmetro possui os seguintes termos:

$$S(p) = S_0 + p_2 p_4 S_1 + p_2 p_6 S_2 + p_1 p_4 S_3 + p_1 p_6 S_4 + p_1 p_3 S_5 + p_1 p_5 S_6 + p_2 S_7 + p_1 S_8. \quad (5.28)$$

Considerando a Equação (5.5), para esse exemplo temos:

$$S_0 = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_u & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad S_1 = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.29)$$

$$S_2 = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad S_3 = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.30)$$

$$S_4 = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad S_5 = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.31)$$

$$S_6 = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad S_7 = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & -B_2 & 0 & B_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -k_2 & -B_2 & 0 & B_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.32)$$

$$S_8 = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & B_2 & -K_1 & -B_2 - B_1 & -1 & B_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (5.33)$$

### 5.1.3.2 Resultados

É inviável aplicar as fórmulas LMI a este problema, uma vez que  $D_{yu}$  é não nulo e incerto. O procedimento proposto de duas etapas baseado em DE pode alcançar controladores com qualquer estrutura específica. Foi calculado controladores estáticos e dinâmicos de realimentação de saída. Foi considerado um  $\tilde{P}$  com um único ponto inicial igual aos valores nominais. Simulou-se o sistema para uma perturbação  $d(t) = 0,2[1(t-0,1) - 1(t-0,2) + 1(t-2) - 1(t-2,1)]$ , considerando os parâmetros incertos para o pior caso de norma (APKARIAN; ABDOSALAMI, 2013). As variáveis de desempenho são apresentadas nas Figuras 5.8 e 5.9 para diferentes valores de  $w_u$ . Estes números mostram claramente o compromisso entre minimizar  $\ddot{z}_2$  e  $F_c$ .

Os controladores por realimentação dinâmica de saída variando  $w_c$  e considerando  $n_c = 1$  são:

- $w_c = 0,1$

$$K_{DE}(z) = \left[ \begin{array}{c|c} 1,0000 & -0,2136 \\ \hline 1,1885 & -1,9650 \end{array} \right] \quad (5.34)$$

- $w_c = 0,01$

$$K_{DE}(z) = \left[ \begin{array}{c|c} 1,0000 & 0,4845 \\ \hline -0,9825 & -94,2162 \end{array} \right] \quad (5.35)$$

- $w_c = 0,001$

$$K_{DE}(z) = \left[ \begin{array}{c|c} 1,0000 & 2,4231 \\ \hline -0,5402 & -332,4682 \end{array} \right] \quad (5.36)$$

Tabela 5.3 – Índices de desempenho - Exemplo Suspensão ativa

Ordem do Controlador	1º ordem		2º ordem	
	$\max_{p \in \mathcal{P}} \ T_{zw}(z, p)\ _\infty$	ISE	$\max_{p \in \mathcal{P}} \ T_{zw}(z, p)\ _\infty$	ISE
$w_u = 0,1$	24,4482	0,2589	23,7044	0,1933
$w_u = 0,01$	4,8193	0,0104	4,7862	0,0104
$w_u = 0,001$	1,1015	0,0014	1,1015	0,0014

Os controladores de segunda ordem obtidos  $n_c = 2$ , foram:

- $w_c = 0,1$

$$K_{DE}(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0,9727 & 0,0589 & 0,5720 \\ 0,0140 & 0,9688 & -0,0077 \\ \hline -1,1389 & 1,0170 & 0,3406 \end{array} \right] \quad (5.37)$$

- $w_c = 0,01$

$$K_{DE}(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0,9998 & 0,0297 & -1,6462 \\ 0,0011 & 0,8212 & 7,8523 \\ \hline 1,3948 & -1,7123 & -6,8090 \end{array} \right] \quad (5.38)$$

- $w_c = 0,001$

$$K_{DE}(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0,9896 & -0,5378 & -2,9963 \\ -0,0195 & -0,0084 & -4,9104 \\ \hline 3,5302 & 1,7809 & -314,7148 \end{array} \right] \quad (5.39)$$

Os resultados de todos os controladores apresentados estão listados na Tabela 5.3. Pode-se notar que os controladores obtidos tem um polo igual a 1 (ação integral). O controlador de segunda ordem também apresenta um polo próximo de 1 e tem desempenho semelhante. A Figura 5.8 mostra as respostas transitórias da aceleração do chassi para uma perturbação na forma de um pulso positivo seguido por um pulso negativo, pode-se notar que houve uma diminuição acentuada da aceleração do chassi a medida que  $w_u$  diminui. A Figura 5.9 é referente a força, nota-se que os valores para todas as variações de  $w_u$  estão abaixo de  $30N$  inferior ao valor de saturação igual a  $40N$ . Para ilustrar a eficácia do controlador, a Figura 5.10 apresenta as respostas transitórias do sistema de suspensão ativa e passiva considerando  $K_{DE}(z)$  com  $w_u = 0,1$ . O sinal tracejado é referente a malha aberta (suspensão passiva), e o contínuo é a malha fechada (suspensão ativa), nota-se uma diminuição acentuada da aceleração do chassi da suspensão ativa se comparado com a resposta da suspensão passiva.

Figura 5.8 – Resposta transitória de  $\ddot{z}_2$ , controlador de primeira ordem para diferentes valores de  $w_u$ , suspensão ativa.

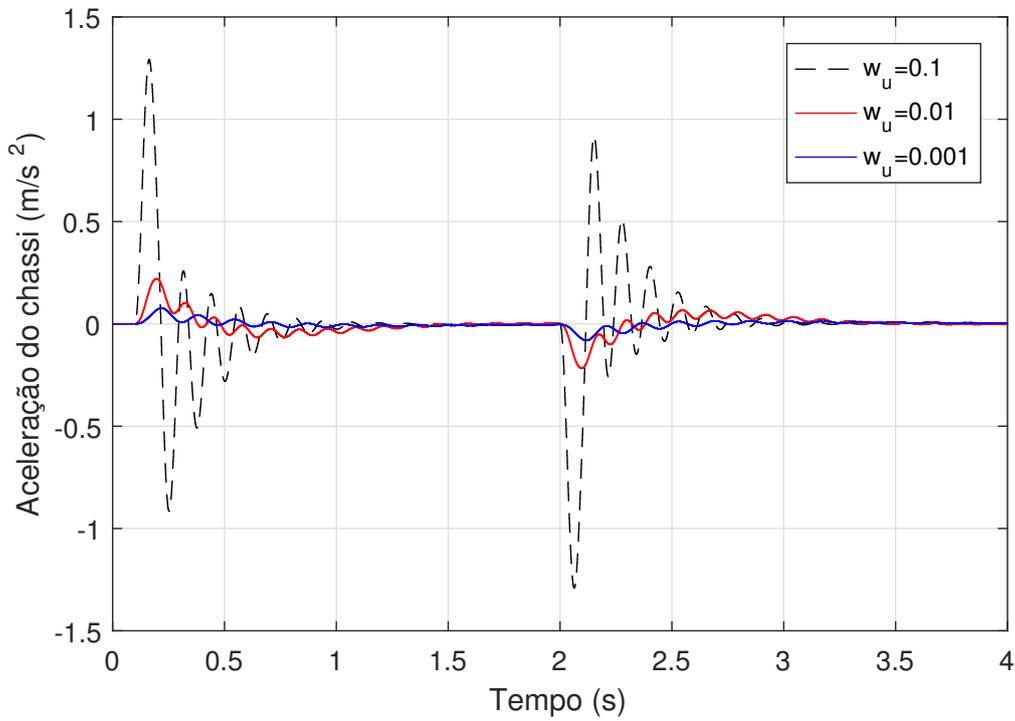


Figura 5.9 – Resposta transitória de  $F_c$ , controlador de primeira ordem para diferentes valores de  $w_u$ , suspensão ativa.

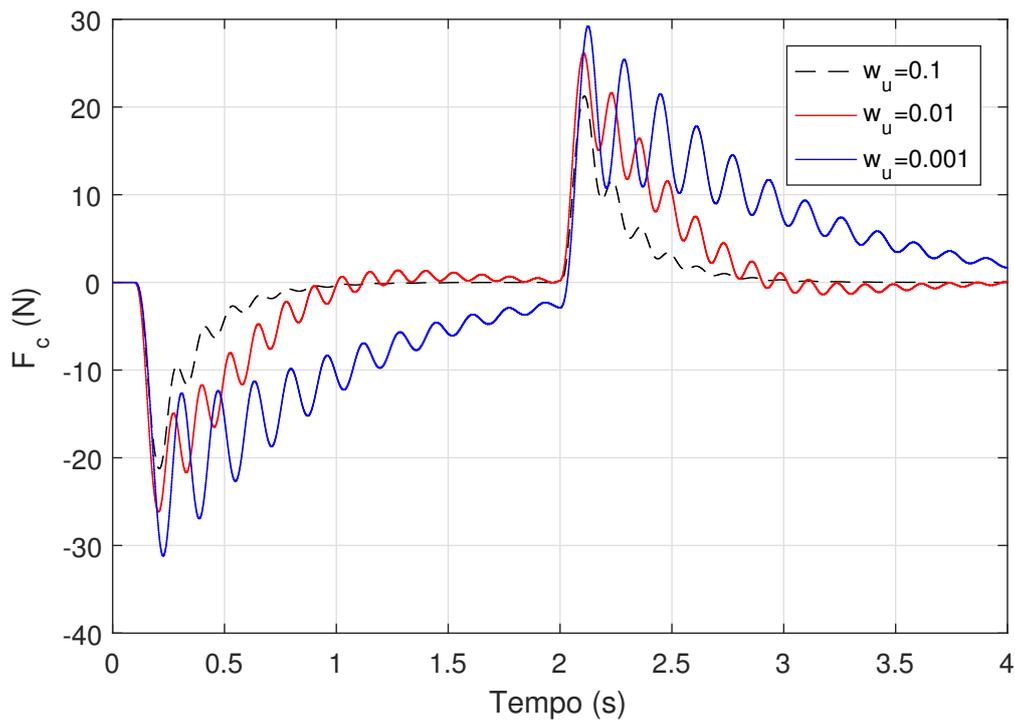
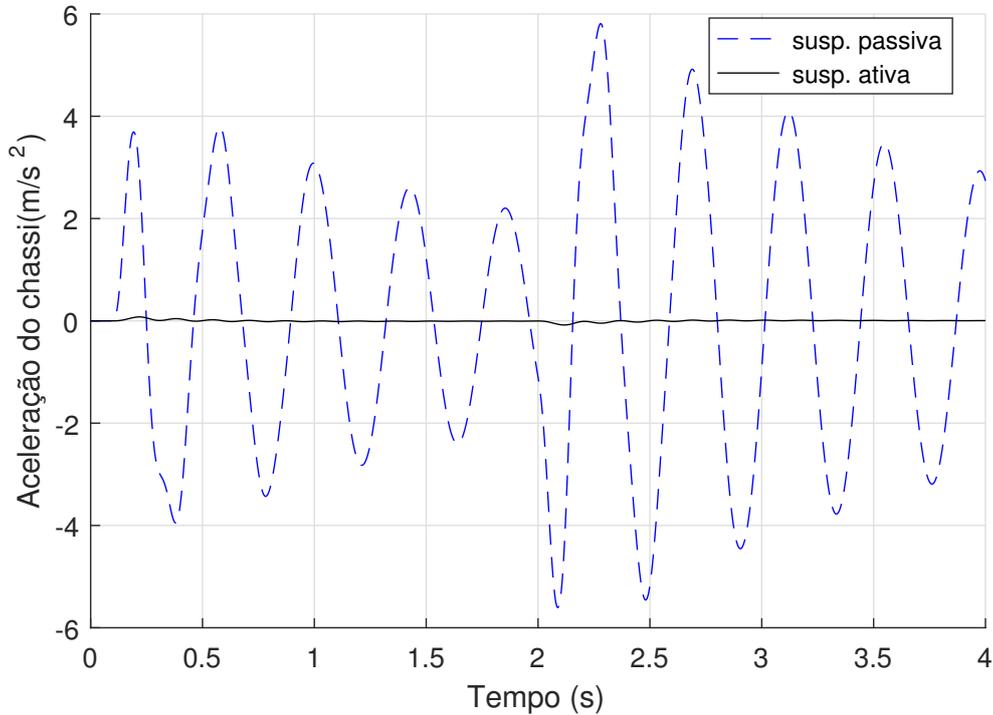


Figura 5.10 – Respostas transitórias de  $\ddot{z}_2$  do sistema de suspensão passiva e ativa,  $K_{DE}(z)$  com  $w_u = 0,1$



#### 5.1.4 Considerações finais

A síntese de controle robusto por realimentação de saída  $\mathcal{H}_\infty$  é um problema de difícil solução. Neste capítulo foi avaliada algumas implementações para solução deste procedimento de síntese fundamentados em dois passos iterativos, síntese e análise. O método proposto nesta dissertação é baseado na implementação do algoritmo de otimização evolução diferencial nas etapas de síntese e análise. Os métodos utilizados para comparação foram as formulações LMI propostas por Oliveira e Peres (2006), Oliveira et al. (2002), Agulhari et al. (2010), Sadabadi e Karimi (2015) e Chang et al. (2015), e o procedimento ILMI baseado no Teorema 4 (OLIVEIRA et al., 2002).

No primeiro exemplo ilustrativo, presente na seção 5.1.1, o tanque quádruplo possui seis parâmetros incertos, o que resulta em um polítopo com 64 vértices, dificultando o cálculo do controlador robusto através de formulações LMI. Enquanto que o método proposto nesta dissertação convergiu para o resultado esperado em 13 minutos, alguns dos procedimentos com LMI requerem encontrar um valor de  $\mu$  ou de algum outro parâmetro através de testes exaustivos, aumentando o custo computacional. O exemplo do helicóptero VTOL, na seção 5.1.2 possui 3 parâmetros incertos, apenas as formulações LMI apresentadas em Agulhari et al. (2010) obtiveram sucesso em encontrar controladores dinâmicos robustamente estáveis. O método proposto gerou um resultado satisfatório em 65s de processamento.

O exemplo da suspensão ativa, apresentado na seção 5.1.3, é um problema inviável para se aplicar as formulações LMI consideradas, uma vez que  $D_{yu}$  é diferente de zero e incerto, sendo necessário aplicar estratégias diferentes, como a implementação do DE, validando o método proposto nesta dissertação.

# Capítulo 6

## Conclusão

### 6.1 Conclusões

Nesta dissertação foi proposta uma metodologia de síntese de controladores robustos  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas discretos lineares invariantes no tempo com dependência polinomial de parâmetros. A formulação de síntese de controle proposta consiste em um problema de difícil solução, sendo conhecida como otimização semi-infinita. É apresentado um procedimento de síntese iterativa de duas etapas, onde cada etapa é a otimização de um problema mais simples, denominadas síntese e análise. No passo de síntese o problema multiobjetivo é transformado em um problema mono-objetivo, transformando a segunda função objetivo em restrição. A minimização da função objetivo e a verificação das restrições é realizada considerando um número finito de pontos do conjunto infinito de incertezas. Na etapa de análise o controlador obtido no passo de síntese é validado para todo o domínio infinito de incertezas. Foi proposta a implementação do algoritmo DE para a resolução dos passos de síntese e análise. Na etapa de síntese, para criar a população inicial, os vetores são gerados uniformemente e aleatoriamente dentro do hiper-retângulo no espaço de busca. Foi feito o cálculo da função objetivo em todos os vértices do hiper-retângulo e foi incluído na população os  $\eta$  vértices com valores inferiores, considerando que a maioria dos valores de pior caso ocorre nos vértices. No tratamento de restrições, nessa mesma etapa de síntese, considerou-se que o sistema em malha fechada deve ser robustamente estável e o controlador estável. No passo de análise a discretização do sistema é realizada pelo segurador de ordem zero, apenas no momento do cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , para evitar o erro, a conversão de tempo contínuo para discreto é feita após o cálculo do modelo com dependência de parâmetros para um vetor específico, discretizando os coeficientes da matriz do sistema. A contribuição desse trabalho foi aplicar o DE nos passos de síntese e de análise adaptando uma implementação já existente para tratar modelos com incerteza polinomial de parâmetros.

A metodologia proposta foi comparada com a aplicação de formulações LMI para a síntese de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$ . As desvantagens da abordagem proposta são maior complexidade de implementação, maior custo de computação do que as formulações LMI para problemas simples e, considerando que o algoritmo de evolução diferencial é um método estocástico, existe um pequeno risco na etapa de análise de aceitar um controlador que resulte em um sistema não robustamente estável ou um sistema com desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  pior que o valor computado. Por outro lado, não existe formulações LMI para tratar todos os casos de síntese e, para o caso em que é aplicável, pode ocorrer de não ser encontrada uma solução factível. Quando são encontradas soluções, as soluções em geral são mais conservadoras que as obtidas pelo método proposto. Uma outra desvantagem das formulações LMI é que o custo computacional cresce rapidamente com o aumento da complexidade do problema, especialmente em relação ao número de vértices do domínio de incerteza.

O método de evolução diferencial e as formulações LMI abordadas nesta dissertação foram aplicados em três exemplos ilustrativos. O primeiro exemplo trata de um processo de quatro tanques interligados entre si, cujo objetivo é controlar o nível dos dois tanques inferiores, o modelo possui seis parâmetros incertos, as formulações de LMI podem alcançar resultados semelhantes em relação ao procedimento proposto, com custo de computação menor ou muito maior de acordo com a complexidade da formulação, a formulação baseada no Teorema 10 em Oliveira et al. (2002), teve um gasto inferior a 3 segundos, o método proposto gastou 13 minutos de tempo de computação, a formulação baseada no Teorema 1/ Teorema 3 em Agulhari et al. (2010) passou quase seis horas rodando para encontrar o resultado, uma vez que é uma formulação mais complexa. O segundo exemplo trata de um modelo linearizado do VTOL, com três parâmetros incertos, onde o objetivo de controle é minimizar o efeito dos dois distúrbios sobre a velocidade. Apenas a formulação baseada no Teorema 2/ Teorema 3 apresentada em Agulhari et al. (2010) e o método proposto consegue encontrar um controlador robustamente estável, o controlador obtido pelo procedimento proposto de síntese iterativa supera o controlador obtido pela formulação LMI. O último exemplo ilustrativo trata um protótipo laboratorial de suspensão ativa com seis parâmetros incertos, a matriz  $D_{yu}$  é não nula, impossibilitando a aplicação de formulações LMI neste exemplo. O método de síntese proposto utilizando o DE é capaz de encontrar o controlador robustamente estável, comprovando assim que há aplicações em que as formulações LMI são inaplicáveis, sendo necessário utilizar outras metodologias como a abordada nesta dissertação. O método utilizando algoritmo DE não tem garantia de obtenção da solução global, porém é uma alternativa a ser considerada, foi capaz de encontrar um controlador robustamente estável para todos os exemplos propostos.

## 6.2 Trabalhos futuros

É interessante encontrar uma forma de aumentar a confiabilidade de análise de estabilidade robusta. É interessante acrescentar o cálculo de custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , de sistemas incertos lineares invariantes no tempo com modelos dependentes de parâmetros. Também é possível implementar outro tipo de algoritmo de otimização, como enxame de partículas ou busca harmônica.

Nesta dissertação o procedimento proposto de síntese de controle robusto foi aplicado em exemplos ilustrativos, em trabalhos futuros os controladores obtidos podem ser aplicados em protótipos laboratoriais.

## 6.3 Trabalho apresentado em evento científico relativo à dissertação

- Gontijo, D. S., Sousa, M. C., Gonçalves, E. N. (2018). Controle robusto  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$  de sistemas incertos em tempo discreto com dependência polinomial de parâmetros. XXII Congresso Brasileiro de Automática - João Pessoa -PB.

## Referências

- AGULHARI, C. M.; FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Manual of the robust LMI parser–version 3.0. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 43.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. In: IEEE. **American Control Conference (ACC), 2010**. Baltimore, MD, USA, 2010. p. 4677–4682. Citado 9 vezes nas páginas 3, 31, 33, 34, 35, 43, 48, 56 e 59.
- ALVES, U. N. L. T.; GARCIA, J. P. F.; TEIXEIRA, M. C.; GARCIA, S. C.; RODRIGUES, F. B. Sliding mode control for active suspension system with data acquisition delay. **Mathematical Problems in Engineering**, 2014. Citado na página 50.
- APKARIAN, J.; ABDOSALAMI, A. **Active Suspension Experiment for MATLAB®/Simulink® Users - Laboratory Guide**. Markham, Ontario, Canada, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 50, 51, 52 e 53.
- BACHUR, W. E. G.; GONÇALVES, E. N.; RAMÍREZ, J. A.; BATISTA, L. S. A multiobjective robust controller synthesis approach aided by multicriteria decision analysis. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 60, p. 374–386, 2017. Citado na página 1.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems & Control Letters**, v. 13, n. 1, p. 65–72, July 1989. Citado 3 vezes nas páginas 2, 31 e 32.
- BLANKENSHIP, J. W.; FALK, J. E. Infinitely constrained optimization problems. **Journal of Optimization Theory and Applications**, Springer, v. 19, n. 2, p. 261–281, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 4.
- BOYD S.; EL GHAOUI, L. F. E. B. V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 30 e 31.
- BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. A new procedure for discretization and state feedback control of uncertain linear systems. In: IEEE. **52nd IEEE Conference on Decision and Control**. Florence, Italy, 2013. p. 6397–6402. Citado 3 vezes nas páginas 8, 14 e 15.

CHANG, X.-H.; PARK, J. H.; ZHOU, J. Robust static output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control design for linear systems with polytopic uncertainties. **Systems & Control Letters**, v. 85, p. 23–32, November 2015. Citado 5 vezes nas páginas 3, 34, 35, 43 e 56.

DAS, S.; MULLICK, S. S.; SUGANTHAN, P. N. Recent advances in differential evolution – an updated survey. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 1, p. 1–30, April 2016. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 24.

DAS, S.; SUGANTHAN, P. N. Differential evolution: A survey of the state-of-the-art. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 15, n. 1, p. 4–31, February 2011. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.

FORMENTIN, S.; KARIMI, A. A data-driven approach to mixed-sensitivity control with application to an active suspension system. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, v. 9, n. 4, p. 2293–2300, November 2013. Citado na página 50.

GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control. **International journal of robust and nonlinear control**, Wiley Online Library, v. 4, n. 4, p. 421–448, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 16.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. **LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB®**. Natick, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 30.

GOLDBERG, D. E.; HOLLAND, J. H. Genetic algorithms and machine learning. **Machine learning**, Springer, v. 3, n. 2, p. 95–99, 1988. Citado na página 21.

GONÇALVES, B. M.; GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. Robust decoupling PI controllers for multi-loop control. In: **IEEE Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on**. Maui, HI, USA, 2012. p. 1530–1535. Citado 3 vezes nas páginas 4, 20 e 21.

GONÇALVES, E. N.; BACHUR, W. E. G.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C. Robust  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ /reference model dynamic output-feedback control synthesis. **International Journal of Control**, v. 84, n. 12, p. 2067–2080, December 2011. Citado na página 4.

GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. Improved optimisation approach to the robust  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control problem for linear systems. **IEE Proceedings-Control Theory and Applications**, IET, v. 152, n. 2, p. 171–176, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 1, 4, 20 e 21.

GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H.  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  filter design for systems with polytope-bounded uncertainty. **IEEE Transactions on Signal Processing**, IEEE, v. 54, n. 9, p. 3620–3626, 2006. Citado na página 4.

GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. A novel approach for  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  robust PID synthesis for uncertain systems. **Journal of process control**, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 19–26, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 4, 20 e 21.

GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H.; MESQUITA, R. C. Algorithm 860: Simplex—an extension of Freudenthal’s simplex subdivision. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, ACM, v. 32, n. 4, p. 609–621, 2006. Citado na página 4.

- GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H.; MESQUITA, R. C. New strategy for robust stability analysis of discrete-time uncertain systems. **Systems & control letters**, Elsevier, v. 56, n. 7-8, p. 516–524, 2007. Citado na página 4.
- JOHANSSON, K. H. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 8, n. 3, p. 456–465, May 2000. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 39.
- JOHANSSON, K. H. Interaction bounds in multivariable control systems. **Automatica**, v. 38, n. 6, p. 1045–1051, June 2002. Citado na página 37.
- KEEL, L. H.; BHATTACHARYYA, S.; HOWZE, J. W. Robust control with structure perturbations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 33, n. 1, p. 68–78, 1988. Citado na página 46.
- LEITE, V. J.; MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, P. J. d.; OLIVEIRA, R. C.; RAMOS, D. C.; PERES, P. L. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 15, n. 1, p. 24–40, 2004. Citado na página 19.
- LOFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **IEEE. 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design**. Taipei, Taiwan, 2004. p. 284–289. Citado na página 30.
- MARCOS, D. de M.; GONÇALVES, E. N. Análise de estabilidade robusta pelo método de evolução diferencial. In: CBA. **XXI Congresso Brasileiro de Automática**. Vitória, ES, 2016a. Citado 3 vezes nas páginas 5, 20 e 21.
- MARCOS, D. de M.; GONÇALVES, E. N. Cálculo do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  pelo método de evolução diferencial. In: CBA. **XXI Congresso Brasileiro de Automática**. Vitória, ES, 2016b. Citado 3 vezes nas páginas 5, 20 e 21.
- MARCOS, D. de M.; SILVA, S. J. e; GONÇALVES, E. N. Síntese de controladores robustos pelo método de evolução diferencial. In: CBA. **XXI Congresso Brasileiro de Automática**. Vitória, ES, 2016. p. 182–187. Citado 3 vezes nas páginas 5, 20 e 21.
- NARENDRA, K. S.; TRIPATHI, S. Identification and optimization of aircraft dynamics. **Journal of Aircraft**, v. 10, n. 4, p. 193–199, 1973. Citado na página 46.
- OLIVEIRA, M. C. de; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 75, n. 9, p. 666–679, 2002. Citado 9 vezes nas páginas 2, 31, 32, 33, 35, 43, 46, 56 e 59.
- OLIVEIRA, M. D.; GEROMEL, J.; HSU, L. et al. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. **Linear Algebra and its applications**, Elsevier Science, v. 296, n. 1-3, p. 27–38, 1999. Citado na página 31.
- OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent lyapunov functions. **Systems & Control Letters**, Elsevier, v. 55, n. 1, p. 52–61, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 56.

- OLIVEIRA, T. G. de; GONÇALVES, E. N.; RODRIGUES, G. G. Multi-objective  $\mathcal{H}_\infty$  control of a laboratory model of active suspension system. In: IEEE. **2015 IEEE Conference on Control Applications**. Sydney, Australia, 2015. p. 1710–1715. Citado na página 50.
- PALHARES, R.; TAICAHASHI, R.; PERES, P. L.  $\mathcal{H}_\infty$  and  $\mathcal{H}_2$  guaranteed costs computation for uncertain linear systems. **International Journal of Systems Science**, Taylor & Francis, v. 28, n. 2, p. 183–188, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- SADABADI, M. S.; KARIMI, A. Fixed-order control of LTI systems subject to polytopic uncertainty via the concept of strictly positive realness. In: AACC. **2015 American Control Conference**. Chicago, IL, USA, 2015. p. 2882–2887. Citado 6 vezes nas páginas 3, 34, 35, 43, 44 e 56.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: analysis and design**. New York: Wiley, 2007. v. 2. Citado na página 12.
- SOUSA, M. C. de. **Análise de estabilidade e desempenho robusto e síntese de controladores robustos através do método evolução diferencial para sistemas discretos**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Centro Federal de Educação tecnológica de Minas Gerais, 2017. Citado 7 vezes nas páginas 5, 19, 20, 21, 26, 38 e 46.
- SOUSA, M. C. de; GONÇALVES, E. N. Análise de estabilidade robusta pelo método evolução diferencial para sistema em tempo discreto. **XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**, 2017. Citado na página 19.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. **Berkeley: ICSI**, 1995. Citado 5 vezes nas páginas 5, 20, 21, 22 e 26.
- STORN, R.; PRICE, K. Minimizing the real functions of the ICEC’96 contest by differential evolution. In: IEEE. **Evolutionary Computation, 1996., Proceedings of IEEE International Conference on**. Nagoya, Japan, 1996. p. 842–844. Citado na página 26.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of Global Optimization**, v. 11, n. 4, p. 341–359, December 1997. Citado 3 vezes nas páginas 4, 24 e 26.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999. Citado na página 30.
- TAKAHASHI, R. H. C. **Notas de aula: Otimização Escalar e Vetorial, Vol. 2**. Belo horizonte, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 28.
- TAKAHASHI, R. H. C.; SALDANHA, R. R.; DIAS-FILHO, W.; RAMÍREZ, J. A. A new constrained ellipsoidal algorithm for nonlinear optimization with equality constraints. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 39, n. 3, p. 1289–1292, 2003. Citado na página 4.
- TROFINO, A. **Controle Robusto**. Santa Catarina, 2000. Citado na página 1.
- TROFINO, A.; COUTINHO, D. F.; BARBOSA, K. A. Improved  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems. **Revista Controle & Automação**, v. 16, n. 1-4, p. 427–434, 2005. Citado na página 9.

ŽAKOVIĆ, S.; RUSTEM, B. Semi-infinite programming and applications to minimax problems. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 124, n. 1-4, p. 81–110, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 2, 4 e 19.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials of Robust Control**. New Jersey: Prentice-Hall. Inc., 1998. ISBN 0-13-525833-2. Citado 3 vezes nas páginas 1, 9 e 11.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. et al. **Robust and optimal control**. New Jersey: Prentice hall, 1996. v. 40. Citado na página 9.