



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

MODELAGEM DE MERCADOS FINANCEIROS VIA AUTÔMATOS BASEADOS EM EQUAÇÕES DE DIFERENÇA

PALOMA DE OLIVEIRA CAMPOS XAVIER

Orientador: Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
CEFET-MG

Coorientador: Allbens Atman Picardi Faria
CEFET-MG

BELO HORIZONTE
AGOSTO DE 2019

PALOMA DE OLIVEIRA CAMPOS XAVIER

MODELAGEM DE MERCADOS FINANCEIROS VIA AUTÔMATOS BASEADOS EM EQUAÇÕES DE DIFERENÇA

Tese de Doutorado apresentado ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
CEFET-MG

Coorientador: Allbens Atman Picardi Faria
CEFET-MG

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
AGOSTO DE 2019

X3m Xavier, Paloma de Oliveira Campos
Modelagem de mercados financeiros via autômatos baseados em equações de diferença / Paloma de Oliveira Campos Xavier. – 2019. 72 f.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.
Orientador: Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães.
Coorientador: Allbens Atman Picardi Faria.
Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Mercado financeiro – Teses. 2. Matemática financeira – Teses. 3. Física estatística – Teses. 4. Automato celular – Teses. 5. Equações diferenciais – Teses. 6. Sistemas multiagentes – Teses. I. Magalhães, Arthur Rodrigo Bosco de. II. Faria, Allbens Atman Picardi. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 519.6



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

MODELAGEM DE MERCADOS FINANCEIROS VIA AUTÔMATOS BASEADOS EM EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Tese de Doutorado apresentada por **Paloma de Oliveira Campos Xavier**, em 20 de agosto de 2019, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Alibens Atman Picardi Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Dr. Eduardo Carvalho de Castro
Banco Central do Brasil

Prof. Dr. Felipe Dias Paiva
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. José Luiz Acebal Fernandes
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em
Modelagem Matemática e Computacional

Resumo

Propomos uma abordagem via método de elementos discretos inspirada em equações diferenciais, com características de autômatos celulares, para construir um modelo baseado em agentes que visa reproduzir estatísticas observadas em mercado financeiros. É investigada a dinâmica de preços de um ativo financeiro que é transacionado em um mercado onde N agentes interagem demandando ou ofertando um único ativo. Consideramos que os agentes possuem restrição orçamentária devido a uma quantidade de recursos financeiros finita. A soma de todos os recursos financeiros dos agentes compõe a riqueza total do mercado. O modelo não considera alavancagem financeira. Apresenta duas componentes estocásticas de naturezas distintas. A primeira, de caráter endógeno, modela diferentes interpretações dos agentes quanto à percepção do valor intrínseco do ativo. Já a segunda, de caráter exógeno, modela efeitos das perturbações inesperadas que influenciam o mercado de forma proeminente. A atuação, em conjunto, da limitação de recursos financeiros e da variável estocástica de caráter endógeno, leva a oscilações na dinâmica de preços, que foram analisadas por meio de uma avaliação microeconômica do mercado. Através de uma aproximação do modelo, baseada em equações diferenciais, encontramos resultados analíticos que indicam que a dinâmica de preços estabiliza em torno do preço justo médio idealizado pelos agentes que mantém suas negociações ativas no mercado. Também investigamos como o processo de percepção do preço justo do ativo impacta a acumulação de riqueza dos agentes, bem como os riscos a que estão expostos. Observamos que a eficiência do agente em avaliar o preço justo está diretamente relacionada a riqueza acumulada e inversamente ao risco. Analisamos a distribuição logarítmica dos retornos das séries de preços sintéticas, e mostramos que apresentam caudas pesadas, conforme observado em mercados reais. Realizamos uma análise multifractal das séries sintéticas, e averiguamos a presença de correlações de longo alcance. Concluimos que o modelo consegue produzir estatísticas equivalentes às observadas em mercados reais. Através do estudo da sensibilidade do modelo aos parâmetros de controle, montamos um arcabouço que permite compreender melhor as forças subjacentes ao mercado financeiro e suas inter relações.

Palavras-chave: Econofísica. Mercado financeiro. Autômatos celulares. Sistemas de equações diferenciais. Modelos baseados em agentes. Limitação de recursos. Expoente de Hurst. Análise multifractal. Caudas pesadas.

Abstract

We propose a discrete element method approach based on differential equations, with characteristics of cellular automata, to build an agent-based model that aims to reproduce statistics observed in financial markets. The price dynamics of a financial asset that is traded in a market where N agents interact demanding or offering a single asset is investigated. We consider that the agents have budgetary constraint given by a finite amount of financial resources. The sum of all agents' financial resources makes up the total wealth of the market. The model does not consider financial leverage. It presents two stochastic components of different natures. The first, of an endogenous character, models different interpretations of the agents regarding the perception of the intrinsic value of the asset. The second, of an exogenous nature, models the effects of unexpected perturbations that influence the market in a prominent way. The joint action of the limitation of financial resources and the stochastic variable of endogenous character leads to oscillations in the price dynamics, which are analyzed through a microeconomic evaluation of the market. Through an approximation of the model, based on differential equations, we find analytical results that indicate that the price dynamics stabilize around the average fair price idealized by the agents that maintains active their negotiations in the market. We also investigate how the process of perceiving the fair price of the asset impacts the wealth accumulation of the agents, as well as the risks to which they are exposed. We note that the agent's efficiency in assessing fair price is directly related to accumulated wealth and inversely to risk. We analyze the logarithmic distribution of the returns coming from the synthetic price series, and show that they present heavy tails, as observed in real markets. We performed a multifractal analysis of the synthetic series and investigated the presence of long-range correlations. We conclude that the model can produce statistics equivalent to those observed in real markets. By studying the sensitivity of the model to the control parameters, we set up a framework that allows a better understanding of the forces underlying the financial market and their interrelationships.

Keywords: Econophysics. Financial markets. Cellular automata. Systems of differential equations. Agent-based models. Resource limitation. Hurst exponent. Multifractal analysis. Fat tails.

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Tópicos sobre mercados financeiros	6
2.1 Análise de investimentos	6
2.1.1 Análise técnica	7
2.1.2 Análise fundamentalista	10
2.2 Hipótese de mercado eficiente vs Hipótese de mercado fractal	14
2.3 Posicionamento da pesquisa considerando o panorama teórico	17
3 – Ferramentas estatísticas	19
3.1 Distribuições de probabilidades e seus momentos	19
3.2 Expoente de Hurst generalizado	22
4 – O modelo	26
4.1 O Modelo sem estocasticidade	26
4.2 O Modelo com estocasticidade	29
4.2.1 Aleatoriedade endógena	29
4.2.2 Aleatoriedade exógena	30
5 – Explorando o modelo	31
5.1 Dinâmica sem estocasticidade	31
5.2 Dinâmica com estocasticidade	34
5.2.1 Dinâmica com aleatoriedade endógena e limitação de recursos	35
5.2.2 Dinâmica com aleatoriedades endógena, exógena e limitação de recursos	40
5.3 Avaliação da riqueza e do risco no modelo	42
5.3.1 Eficiência vs Riqueza e Eficiência vs Risco	42
5.4 Buscando correlações de longo alcance	48
5.4.1 Análise multifractal	49
6 – Considerações finais	54
6.1 Trabalhos futuros	58
Referências	61

Apêndices	68
APÊNDICE A – Determinação e solução das equações diferenciais usadas na aproximação do modelo	69

1 Introdução

No contexto atual, a informação tornou-se o bem mais valioso que a sociedade contemporânea pode auferir, e foi graças à explosão tecnológica das últimas décadas que conseguimos observar o fenômeno da disseminação praticamente instantânea desse bem. Neste âmbito, o Mercado Financeiro é um dos cenários mais propícios para observarmos a valoração dada à informação, pois, com o passar das décadas, eles se tornaram cada vez mais sensíveis a ela. Para acompanhar as oscilações de preços, que ocorrem no mercado de ativos, os agentes econômicos aprimoraram suas características, ficando mais estratégicos e ágeis. Afinal, é pela informação que eles pautam suas escolhas, atitudes e expectativas, e é através dela que o mercado movimenta compras e vendas de ativos, promovendo alterações nos preços dos mesmos. Desta forma, didaticamente, podemos interpretar o mercado de ativos, em parte, como um grande jogo, onde os possíveis vencedores são os agentes que conseguem montar suas estratégias alcançando maiores ganhos. Tais ganhos, na maioria das vezes, são oriundos das escolhas coerentes que fizeram para montar seus portfólios, utilizando a informação que conseguiram absorver, representando a mesma em atitudes ágeis entre comprar ou vender alguns ativos. Esse grande jogo de ganhos e perdas alimentou a curiosidade de estudiosos, e fomentou, neles, o interesse em entender melhor como o Mercado Financeiro se movimenta. Inúmeros pesquisadores estão focados na proposta de predição de cenários econômicos, podemos citar, como exemplo, [Atsalakis e Kimon \(2009\)](#) e [Atsalakis e Valavanis \(2013\)](#), com modelos e técnicas de previsão em mercados e ações. Neste sentido, também temos os trabalhos de [Poon e Granger \(2003\)](#), [Anatolyev e Gospodinov \(2007\)](#), [Bury \(2014\)](#) e [Resende et al. \(2017\)](#).

Por outro lado, encontramos um relevante grupo de pesquisadores interessados na *modelagem* da variação dos preços de ativos, baseados nas características e atitudes dos agentes econômicos, por exemplo, os autores de [Caginalp e Ermentrout \(1991\)](#), [Bak, Paczuski e Shubik \(1997\)](#), [Wang et al. \(2005\)](#), [Caginalp e Ilieva \(2006\)](#), [Samanidou et al. \(2007\)](#), [Caginalp e Merdan \(2007\)](#), [DeSantis e Caginalp \(2011\)](#), [Pickhardt e Seibold \(2014\)](#), [Platt e Gebbie \(2018\)](#), [Bookstaber, Paddrik e Tivnan \(2018\)](#), [Vilela et al. \(2019\)](#) e [Westphal e Sornette \(2019\)](#).

Neste contexto, ressaltamos a pesquisa riquíssima sobre economia experimental, de Vernon [Smith \(1994\)](#), que desenvolveu em laboratório um mercado simulado onde seus alunos exerciam papéis de consumidores e empresas. Seus resultados apontam no sentido de corroborar a teoria econômica de eficiência de mercado, pois, mantidas as condições de racionalidade dos agentes e competição perfeita, o preço ajusta-se automaticamente ao valor de equilíbrio. Foi essa pesquisa que possibilitou a Smith ganhar o Nobel de Economia em 2002, dividido com Daniel Kahneman pelo trabalho desenvolvido com Amos Tversky,

sobre psicologia econômica, conhecido como A Teoria da Perspectiva (*Prospect theory*). Trata-se de uma teoria econômica que descreve a forma como as pessoas fazem suas escolhas entre alternativas probabilísticas que envolvem o risco, sendo as probabilidades dos resultados de conhecimento de todos. Busca descrever a tomada de decisões do ponto de vista psicológico dos agentes, afirmando que eles fazem suas escolhas considerando o valor potencial de seus ganhos ou perdas. Traz para o cenário econômico uma ideia dos desvios da racionalidade, principalmente relacionados à aversão ao risco (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979).

Nas últimas décadas, houve um movimento de pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento, como Física, Engenharia, Economia, Matemática, Estatística, entre outras, empenhados em compreender o sistemas de interesse da Economia e Finanças, caracterizando, assim, uma nova corrente de pesquisa, denominada *Econofísica* (STANLEY; MANTEGNA, 2000). A *Econofísica* surge como uma novo ramo de pesquisa interdisciplinar na qual conceitos e técnicas de análise usualmente utilizados na descrição de sistemas físicos são aplicados para investigar estruturas financeiras e cenários econômicos. Atualmente, usa Física Estatística, mas não exclusivamente, para compreender a dinâmica de mercado, pontos de equilíbrio entre demanda e oferta, bem como funções de distribuição relacionadas a retornos e preço de ativos, entre outros. Inclui, também, estudos relacionados à Teoria dos Fractais e Autômatos Celulares.

A pesquisa científica nesta nova área está aquecida. Estudiosos procuram formas de modelar cenários econômicos, compreender a maneira como as flutuações de preços ocorrem em mercados financeiros, ou até mesmo como as atitudes de agentes econômicos interferem na precificação de ativos em mercados. O encontro dessas diferentes áreas de pesquisa tornou o contexto em *Econofísica* totalmente interdisciplinar, incentivando os cientistas a utilizarem diferentes métodos de análise oriundos das suas áreas de concentração. Podemos citar entre eles o economista francês Xavier Gabaix, em parceria com o físico americano Harry Eugene Stanley e demais autores (GABAIX et al., 2003), que propuseram um modelo que justifica as leis de potência, explicando as oscilações dos mercados através da atitude de agentes de grande porte nos fundos de pensão, mostrando que as leis de potência aparecem quando a negociação é feita de forma otimizada pelos agentes. Os trabalhos de Wei et al. (2003), Bartolozzi e Thomas (2004), Qiu, Kandhai e Slood (2007), Fan et al. (2009), Atman e Gonçalves (2012) e Stefan e Atman (2015) empregam a modelagem baseada em *Autômatos Celulares* (CA's)¹ para dirigir o comportamento dos agentes. Wei et al. (2003) criaram um modelo evolucionário para estudar a complexidade do mercado de ações, sendo a principal característica para a evolução do modelo o comportamento

¹ “São modelos matemáticos simples totalmente discretizados - espacialmente, temporalmente e no número de estados de cada sítio. Os CA's descrevem uma vasta gama de fenômenos nos mais variados sistemas, pertencentes a diferentes áreas do conhecimento. As regras que determinam a evolução temporal dos CA's são locais, dependendo apenas do estado da vizinhança de um dado sítio e do seu próprio estado. Tais regras podem ser determinísticas ou probabilísticas.” (ATMAN, Allbens P. F., p.7, 2002)

do investidor. Os resultados apontam que a característica anti-imitadora dos agentes e as variáveis macroeconômicas levam o modelo à estabilidade. Quanto maior a diversidade no comportamento dos investidores e menor a imitação entre eles, mais próximos os resultados se encontram de um mercado real. [Bartolozzi e Thomas \(2004\)](#), para simular um mercado de ativos, produziram um modelo bidimensional de autômatos celulares estocásticos. Usam percolação direcionada para gerar aglomerados (*clusters*) com regras que definem a posição de compra ou venda dos operadores, sendo que as negociações que ocorrem entre eles são de natureza estocástica e acontecem apenas entre os operadores que pertencem ao mesmo *cluster*. Eles promovem eventos extremos como bolhas e falhas de mercado, além de conseguirem características multifractais com o modelo. Comparam os resultados advindos do modelo com a série de fechamentos diários da S&P500. Já [Qiu, Kandhai e Sloot \(2007\)](#) desenvolveram um modelo bidimensional classificando os agentes entre imitadores e fundamentalistas, usando regras simples para evoluir as negociações entre os agentes e o preço. O interessante nessa pesquisa é que eles conseguem gerar, utilizando apenas interações locais entre os agentes, resultados empíricos de mercados reais como aglomeração de volatilidade (*volatility clustering*) e caudas pesadas nas distribuições de retornos. Por sua vez, Ying [Fan et al. \(2009\)](#) desenvolveram um modelo onde as variáveis descrevem como o mercado de ações funciona. A estabilidade do mercado é encontrada através do conceito de nível discreto. Uma das características mais interessantes do trabalho é a investigação do nível de correlação do comportamento imitador dos investidores com o grau de complexidade do mercado de ações. Em trabalhos mais recentes, como o trabalho de [Atman e Gonçalves \(2012\)](#), temos um modelo baseado em CA's para simular o mercado de ações. Os autores analisaram o padrão de investimento dos agentes utilizando o expoente de Hurst em séries simuladas para o índice de ações. Ressaltaram na pesquisa algumas situações que contradizem a hipótese de mercado eficiente (HME). Já na pesquisa de [Stefan e Atman \(2015\)](#), foi construído um modelo baseado em agentes para analisar diferentes redes de investidores com perfis e características diversificadas. Assim, com ferramentas da Física Estatística, identificaram a influência dos investidores nas oscilações do índice de mercado de ações simulado. Os resultados evidenciaram uma correlação entre a morfologia da rede e as variações do índice de mercado de ações.

Os trabalhos comentados no parágrafo anterior bebem nas águas das finanças comportamentais. Neste sentido, podemos citar também a pesquisa de [Bakker et al. \(2010\)](#) que mensura o impacto dos fatores psicológicos dos agentes sobre o mercado. Eles formularam um modelo onde os agentes são influenciados pelo comportamento de seus pares de confiança. Tal morfologia é desenvolvida com diferentes redes de confiança. O intrigante deste trabalho é como as redes de confiança entre os agentes podem atrasar o equilíbrio de mercado. Em [Petit, Lafuente e Vieites \(2019\)](#), os autores propõem um novo indicador de sentimento do investidor baseado em pesquisas na web. O interessante desse trabalho é que o indicador confirma a influência do sentimento do investidor para o

desempenho dos ativos no futuro, ressaltando uma capacidade preditiva desse indicador. Por fim, [Polach e Kukacka \(2019\)](#) construíram um modelo de precificação de ativos baseado em agentes heterogêneos e na Teoria da Perspectiva de [Kahneman e Tversky \(1979\)](#). Aplicaram diferentes estratégias para analisar o comportamento do modelo, e mostraram que agentes fundamentalistas, avessos a perdas, sobrevivem mais facilmente no mercado, que, por sua vez, tende a ser mais estável com a presença desses agentes.

Outros trabalhos relevantes são as pesquisas desenvolvidas por [Caginalp, Porter e Smith \(2000\)](#), que procuram ajustar equações diferenciais a resultados provenientes de pesquisa em laboratório de economia. [Caginalp e DeSantis \(2011\)](#) utilizaram equações diferenciais no contexto da Economia Clássica, com a proposta de quantificar o impacto que as atitudes dos agentes provocam no mercado. Temos, também, o recente trabalho de Gunduz Caginalp e de seu filho, Carey Caginalp, que desenvolveram equações para a dinâmica de preços baseadas nos ajustes das curvas de oferta e demanda neoclássicas, para compreender comportamentos de mudança do preço e sua volatilidade. Neste trabalho eles destacam a questão das altas e baixas volatilidades servirem para prever os limites de preço das negociações ([CAGINALP; CAGINALP, 2019](#)).

A complexidade da pesquisa em Econofísica vem sendo aumentada à medida em que as áreas de estudo vão se tornando cada vez mais interligadas e dependentes. Os resultados encontrados em diferentes publicações evidenciam que muitos pesquisadores vêm caminhando por “trilhos” diversos que visam muitas possibilidades. A tentativa de entender o funcionamento de sistemas tão complexos, como mercados reais, aguça o interesse de muitos estudiosos. Assim, podemos justificar e ressaltar o nosso esforço nesse tema, amplamente discutido no contexto de pesquisa atual.

Este trabalho tem como finalidade desenvolver o modelo iniciado em [Campos \(2014\)](#), cuja proposta foi criar, através de um sistema de equações diferenciais lineares, um modelo que descrevesse as flutuações do preço de um ativo financeiro. As equações representavam as atitudes de compra ou venda de cada agente, além do desvio do preço do ativo. O modelo também procurou diferenciar o comportamento que os agentes poderiam assumir (imitadores, anti-imitadores ou neutros à atitude dos demais). Através da análise estatística dos expoentes característicos encontrados nas dinâmicas propostas, foi possível evidenciar alguns resultados equivalentes aos encontrados em séries financeiras apresentadas em mercados reais, sejam eles emergentes ou eficientes ([CAJUEIRO; TABAK, 2004](#)).

De fato, em [Campos \(2014\)](#) é proposto um modelo novo e singular para a dinâmica de mercado financeiro. Até onde sabemos, em modelos baseados em CA's, um autômato representa um agente em particular. Já nos modelos baseados em equações diferenciais que conhecemos (([CAGINALP; ERMENTROUT, 1991](#)), ([CAGINALP; MERDAN, 2007](#)), ([CAGINALP; ILIEVA, 2008](#)), ([CAGINALP; DESANTIS, 2011](#))), grupos de agentes são representados pelas variáveis das equações diferenciais. Uma novidade apresentada em

[Campos \(2014\)](#) está em representar cada agente por uma variável das equações diferenciais. Por tratar-se de um modelo completamente original, muito ficou para ser aperfeiçoado e explorado. A continuação da pesquisa visa trabalhar nesse sentido. Um dos avanços alcançados encontra-se em [Xavier, Atman e Magalhães \(2017\)](#).

Assim, propomos uma abordagem, inspirada em equações diferenciais mas com características de autômatos celulares, em que o modelo baseado em agentes é construído via método de elementos discretos. Mudamos a forma como as variáveis estocásticas são introduzidas no modelo, as incluímos de uma forma mais natural, tendo em vista uma melhor exploração de como as aleatoriedades levam às estatísticas observadas em mercados reais. Ajustamos os parâmetros visando maior proximidade com a realidade. Incrementamos o modelo com aspectos mais realistas tais como a finitude de recursos financeiros dos agentes e a acurácia destes em perceber a informação, ressaltando, assim, maior ou menor eficiência em suas atitudes de compra e venda de ativos. Desta forma, o modelo foi mudado para introduzir a limitação de recursos e discretizado, aproximando-se de um *Autômato Celular*. Por fim, alteramos a metodologia do cálculo de expoente de Hurst e exploramos uma abordagem mais aprofundada sobre as correlações de longo alcance da série, executando uma análise de escalonamento multifractal.

No próximo capítulo, fundamentaremos a pesquisa no campo teórico, visando suporte dos conceitos primordiais do diagnóstico financeiro de ativos. Tais exames estão vinculados às principais diretrizes de análises de investimentos, divididos na escola técnica e a na escola fundamentalista ([Capítulo 2](#)). Ressaltaremos, também, na continuação do capítulo, as discussões atuais sobre a teoria clássica da hipótese de mercado eficiente (*HME*) contraposta à recente abordagem da hipótese de mercados fractais (*HMF*). No capítulo seguinte, faremos uma breve revisão, fundamentados nos trabalhos de [Tomé e Oliveira \(2001\)](#) e [Kantelhardt et al. \(2001\)](#), sobre as ferramentas estatísticas necessárias para validação do modelo ([Capítulo 3](#)). Prosseguiremos apresentando o modelo, que foi aprimorado com limitação de recursos e eficiência em perceber a informação, sem e com estocasticidade ([Capítulo 4](#)). Vamos explorar o modelo em diferentes aspectos, investigando inicialmente os resultados advindos do mesmo ao acrescentar gradativamente uma nova proposta de estocasticidade, corroborando as evidências observadas com resultados averiguados analiticamente. Em seguida, vamos apresentar os impactos promovidos na riqueza final dos agentes e no risco a que os mesmos estão expostos pela eficiência em perceber informação de caráter fundamentalista. Analisaremos as correlações de longo alcance que o modelo consegue promover, através de uma análise multifractal ([Capítulo 5](#)). Por fim, faremos um breve resumo das considerações mais relevantes encontradas na pesquisa, e a possibilidade de novas propostas para a continuidade do trabalho ([Capítulo 6](#)).

2 Tópicos sobre mercados financeiros

Para introduzir a temática que vamos explorar nessa pesquisa, é de suma importância abordar os princípios clássicos da análise de investimentos em Finanças, assim como apresentar as teorias econômicas sobre eficiência de mercado. Tais abordagens visam dar embasamento teórico suficiente para assimilar a proposta deste trabalho. Como mergulhamos em um universo com uma estrutura teórica consolidada há anos, no que tange ao conhecimento financeiro e econômico, é de crucial relevância fornecer os principais aspectos teóricos que fundamentam este trabalho. Desta forma, procuramos, com este capítulo, nortear a compreensão, do ponto de vista das ciências sociais aplicadas, da temática que vamos discutir nesta pesquisa, salientando nossos esforços em construir as diretrizes teóricas que amparam esta tese.

2.1 Análise de investimentos

É de conhecimento comum a importância das ciências sociais aplicadas, uma vez que visam entender e atender às necessidades da sociedade do ponto de vista acadêmico. Seus principais pensadores estabeleceram teorias que objetivavam o bem estar social. Diante desse universo, de vastos saberes, nossa pesquisa se fundamenta nos pilares da Economia e das Finanças, posto que nossas indagações elementares são norteadas pela expectativa de compreender como o mercado financeiro se comporta.

A investigação acerca de mercados financeiros é extremamente atrativa para diferentes grupos de estudiosos e para os agentes econômicos, sejam eles: pessoas físicas, empresas, governos, etc. A possibilidade de conseguir rendimentos acima da média do mercado incita seus participantes a buscarem ferramentas e conhecimentos para construir estratégias inovadoras visando tais ganhos. Essa possibilidade é vislumbrada ao longo de anos, e as diferentes ferramentas e técnicas desenvolvidas definiram um conjunto de possibilidades de investimento, cada uma embasada num tipo de estratégia e ganho, avaliando o curto e longo prazo dos investimentos.

Quando abordamos as diferentes estratégias adotadas nas análises de investimentos, estamos lidando com diferentes correntes de pensamento que consolidaram tais estratégias como instrumentos de performance financeira. As duas maiores correntes de pensamento se dividem nas escolas de *Análise Técnica*, conhecida inicialmente por *Análise Gráfica*, e a escola da *Análise Fundamentalista*.

2.1.1 Análise técnica

A *Análise Técnica* começou a ser incorporada como uma ferramenta eficiente na interpretação de preços de ativos através do trabalho do jornalista americano Charles Henry Dow. Através dos boletins econômicos diários, *Customer's Afternoon Letter*, distribuídos por toda Wall Street, em 1880, Charles ganhou destaque e fundou o jornal *The Wall Street Journal*, uma das mais respeitáveis publicações sobre economia no mundo. Em 1896, publicou o primeiro índice do mercado determinado por 12 ativos, mundialmente conhecido como índice *Dow Jones*. Dow era um pesquisador ativo, e desenvolveu inúmeros artigos que foram agregados após sua morte, em 1912, por Samuel Nelson, no livro *The ABC of stock Speculation* (NELSON, 1912). Foi esta obra que originou a teoria que determina a base da escola da análise técnica moderna, denominada em sua homenagem, de *Teoria de Dow*. Alguns anos depois, William Peter Hamilton, suplente de Charles Dow no jornal *The Wall Street Journal*, publicou o livro *The Stock Market Barometer* (HAMILTON, 1922), apresentando os princípios da teoria de Dow.

A teoria de Dow é baseada principalmente nas tendências de altas e baixas da evolução do comportamento do preço das ações. Para perceber o movimento dessas tendências é necessária uma amostra representativa de ativos, apresentadas em gráficos como: linhas, volume, pontos-e-figuras, barras e *candlesticks*. A interpretação da teoria de Dow é análoga à lei física de *Ação e Reação*: para cada movimento que promove uma variação significativa nos preços, teremos como resultado um retorno, também expressivo, seguindo a tendência na qual os preços se movimentaram. Essa tendência se mantém até que surja uma força externa que a altere.

Na década de 1930, o contador americano Ralph Nelson Elliot apresenta a *Teoria das ondas* no livro *"The wave principle"* (ELLIOTT et al., 1938). A sua teoria, juntamente com a teoria de Dow, tornaram-se as maiores referências na análise técnica moderna. A teoria das *Ondas de Elliot* usa ferramentas analíticas para perceber ou antecipar ciclos da bolsa. Elliot observou o mercado durante anos, e interpretou seus padrões através de séries de Fibonacci e representações gráficas, denominadas *ondas*. Ao examinar as ondas, segundo Elliot, é possível identificar o comportamento repetitivo das ações no mercado. Com esses padrões ele criou regras empíricas e parâmetros utilizados para prever as tendências do mercado (PINHEIRO, 2016).

De acordo com a [Comissão de Valores Mobiliários e Apimec \(2017\)¹](#), a análise técnica é pautada por princípios que, em conjunto, determinam uma variedade de técnicas e representações gráficas. Para garantir a perícia meticulosa de sua interpretação, é necessária a crença e o hábito constante da sua prática, pois na totalidade esses conhecimentos não caracterizam uma ciência. Os princípios adotados na análise técnica são:

¹ Apimec - Associação de Analistas e Profissionais de Investimentos no Mercado de Capitais.

1. **O preço desconta tudo.** Todas as informações relevantes estão incorporadas no preço, desta forma não é necessário saber o que gerou a mudança no comportamento do preço, devemos saber apenas quando comprar e quando vender baseados na tendência de baixa e alta. Mais importante que o fato que promoveu a variação no preço, é a forma como o mercado interpreta e reage a essa movimentação.
2. **O preço tem tendência.** O comportamento de um grande número de investidores gera uma tendência nos preços, logo uma previsibilidade. Esse tipo de comportamento de massa ocorre em períodos de otimismo e pessimismo exacerbado na maioria dos investidores.
3. **A história se repete.** O mercado é movimentado por pessoas que seguem uma expectativa de ganhos e perdas, acompanhada do comportamento emocional da ganância e do medo. Essa atitude comportamental pode ser observada por meio de padrões gráficos que se repetem ao longo do tempo com diferenças sutis.

As diferentes interpretações da análise técnica se dão por meio da representação de distintos gráficos. Em todos eles, ocorre a busca de sintetizar as informações relevantes numa estrutura visual que possibilite ao investidor técnico perceber as tendências dos preços, para assim caracterizar os momentos em que ele deve comprar ou vender o ativo. O gráfico largamente utilizado na interpretação da análise técnica é o *candlestick*. Essa representação gráfica ajuda o analista técnico a perceber a interação entre vendedores e compradores no período determinado para sua análise.

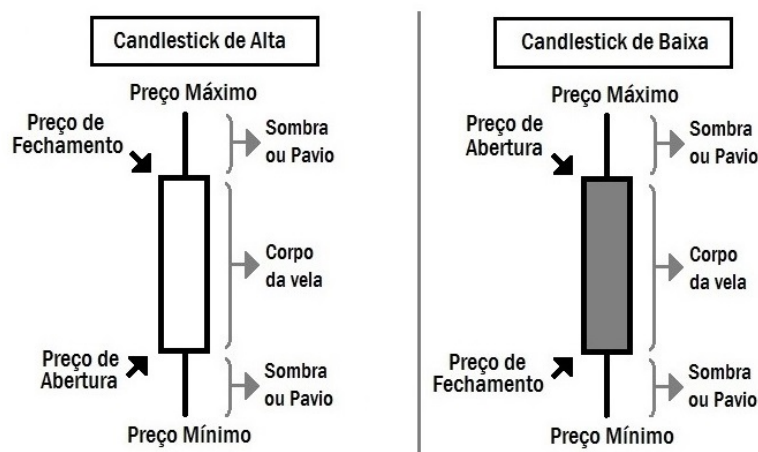


Figura 1 – Candlestick. À esquerda temos a representação de um *candlestick* em uma tendência de alta (corpo transparente ou de coloração verde), e à direita um candlestick para uma tendência de baixa (corpo escuro ou de coloração vermelha).

O candlestick (Figura 1) é um gráfico de origem japonesa (PINHEIRO, 2016), criado no século XVIII por Munehisa Homma, um operador japonês da bolsa de arroz em Dojima. Munehisa observou que o mercado se comportava de forma previsível, e começou a perceber os padrões utilizando a representação gráfica de uma *vela*. Se, no final das

negociações, o preço de fechamento estivesse acima do preço de abertura, o corpo da vela deveria ser branco, em caso contrário o corpo da vela deveria ser preto. Assim o candlestick representava os movimentos do preço do arroz no período analisado. Atualmente, na análise técnica, são utilizadas várias combinações gráficas de candlesticks para compreender tendências de preços (vide Figura 2).

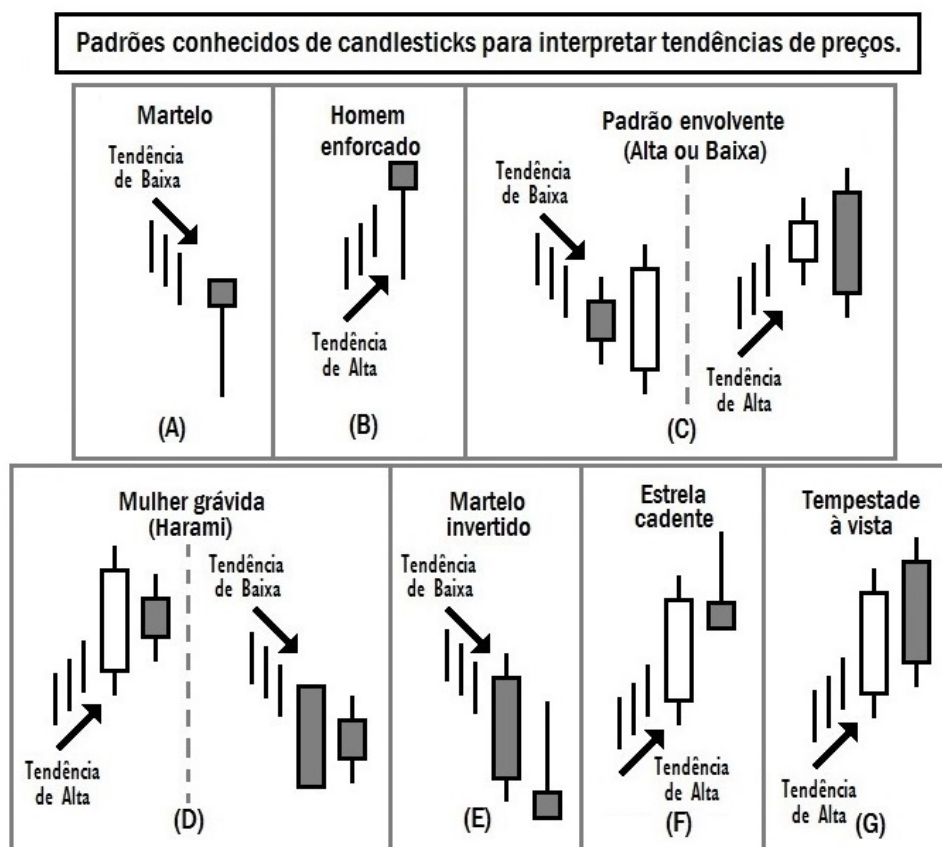


Figura 2 – Alguns dos padrões de candlestick mais observados. Em (A) temos o *Martelo*, esse padrão indica que o mercado está em uma tendência de baixa, os compradores tendem a reagir e os vendedores perdem a força. Em (B) temos o *Homem enforcado*, representa uma tendência de alta, compradores tendem a perder força e se desfazem da sua posição. Em (C) temos o *Padrão envolvente (Alta ou Baixa)*, a interpretação desse padrão está vinculada a uma reação do mercado contra a tendência predominante, seja de alta ou baixa. Em (D) temos a *Mulher grávida (Harami)*, significa um equilíbrio entre compradores e vendedores, logo a tendência predominante perderá a força. Em (E) temos o *Martelo invertido* que representa uma tendência de baixa, os vendedores perdem a força e se desfazem da sua posição. Em (F) temos a *Estrela cadente*, significa uma tendência de alta, vendedores reagem sobre compradores que, por sua vez, tendem a perder sua força. Por fim, em (G) temos *Tempestade à vista*, representando uma tendência de alta, significa que os vendedores estão ganhando força.

Segundo [Pinheiro \(2016\)](#), as tendências do mercado podem ser diferenciadas em alta, baixa ou lateral. A existência destas tendências são configuradas pelo desequilíbrio entre oferta e demanda. Uma tendência de alta pode ser observada quando os níveis de cotação dos preços, máximos e mínimos, superam seus valores anteriores, sobrepondo-se

sucessivamente. A ideia é que estes valores executem um movimento de *zigue-zague* entre si. Já a tendência de baixa, pode ser percebida, quando os níveis de cotação dos preços máximos e mínimos estão diminuindo ordenadamente. Para qualificar uma tendência, e assim tomar a decisão mais assertiva, entre comprar ou vender, o analista técnico deve observar algumas características que representam o ponto certo para executar sua ação. Ao interpretar a estrutura gráfica de uma tendência de preços, a ação do investidor pode ser sintetizada de acordo com a [Tabela 1](#). Obviamente, as ações apresentadas nesta tabela são apenas um resumo elementar do comportamento de um *trader*² exposto a situações específicas. Sua ação final levará em conta outras variáveis, que não serão exploradas aqui.

Tabela 1 – Características dos pontos de compra e venda de um analista técnico

Preços	Ponto de Compra	Ponto de Venda
Abertura	Não deve exceder o preço máximo anterior.	Não deve exceder o preço mínimo anterior.
Máximo/Mínimo	Preço máximo deve superar o anterior.	Preço mínimo deve superar o anterior.
Fechamento	Deve ser próximo sem ser inferior ao preço máximo.	Deve ser próximo sem ser inferior ao preço mínimo

Fonte: (PINHEIRO, 2016, p. 577).

Na prática, a *Análise Técnica* tem muitas exceções. Como esclarecemos aqui, ela não é uma ciência, mas um conjunto de experiências e estratégias visuais. O verdadeiro aprendizado desta análise ocorre na tentativa e erro, através da prática diária.

2.1.2 Análise fundamentalista

No início do século XX, as grandes corretoras americanas começaram a contratar para seus departamentos de análise financeira estatísticos e matemáticos, que utilizavam os poucos dados financeiros disponibilizados em fontes públicas, para comparar as empresas vinculadas ao mercado naquela época. No mesmo período, as faculdades americanas iniciavam estudos mais profundos sobre temas que abordavam investimentos financeiros. Contudo, foi somente após a crise econômica de 1929, que as pesquisas acadêmicas seguiram para áreas mais específicas como solvência³ e liquidez⁴ de empresas (COMISSÃO DE VALORES MOBILIÁRIOS E APIMEC, 2017, p.72).

Na década de 1930, o economista Benjamin Grossbaum, britânico naturalizado americano, ministrou um curso sobre análise segura de investimentos, intitulado *Investment*,

² *Traders*, ou *Day-Traders*, são investidores ativos que negociam vários valores mobiliários em curtos períodos de tempo. Basicamente operam, compra e venda, de um volume considerável de ativos no mesmo dia.

³ A solvência de uma empresa está vinculada à diferença entre seu ativo, recursos próprios, e seu passivo, obrigações e dívidas a serem cumpridas. Quanto maior o ativo em comparação com o passivo, mais solvente é uma empresa, pois maior é a sua capacidade de cumprir seus compromissos usando o próprio patrimônio.

⁴ É a capacidade de conversão de um ativo em dinheiro. Quanto mais rápido for possível executar sua conversão em recursos monetários, mais líquido é o bem.

na faculdade de Columbia⁵, em Nova York. Neste curso, ele diferenciava com precisão especulação de investimento, nascia naquele momento o que denominamos hoje de *Análise Fundamentalista*. David Dodd, um dos seus alunos mais assíduos, organizou toda a informação passada por Grossbaum, e juntos eles publicaram o livro *Security Analysis* (GRAHAM et al., 1934). Essa obra foi a primeira tentativa de Benjamin e Dodd para explicar como o mercado financeiro funcionava. Anos depois, Grossbaum publicou o livro *The Intelligent Investor* (GRAHAM, 1949), sendo uma das maiores obras da literatura econômica, conhecida atualmente como a *Bíblia dos Investimentos*. Neste segundo livro, Benjamin Graham⁶ apresenta os princípios e o instrumental necessários para se tornar um *investidor de sucesso*, sendo ele o maior exemplo dessa terminologia. De acordo com Graham (1949), no período compreendido entre 1936 até sua aposentadoria em 1956, sua empresa *Graham-Newman Corp.* obteve lucros sobre o capital investido com média de 14,7% ao ano, contra a média do mercado que ficou em torno de 12,2%. Benjamin foi a prova viva de que, usando experiência, capacidade intelectual e bom senso, era possível conseguir ganhos acima da média do mercado. Graham (1949) dirigiu suas decisões financeiras, durante sua carreira de investidor, baseado nos seguintes princípios:

1. Uma ação não é apenas um sinal eletrônico, ela representa um valor real que envolve o interesse do proprietário em efetivar um negócio, desta forma detém um valor intrínseco independente do preço que está sendo negociada.
2. O mercado é imprevisível, sempre oscila entre um humor negativo injustificável, que torna os ativos muito baratos, e um humor positivo insustentável, que os torna muito caros. O bom investidor é aquele que vende para os otimistas e compra dos pessimistas.
3. O valor futuro de todo ativo está diretamente relacionado ao seu valor presente. Quanto maior é o preço a se pagar por um ativo no presente, menor é o ganho vinculado a ele no futuro.
4. Não importa quão cuidadoso um investidor é, o *risco* de errar sempre existirá. Para minimizá-lo, o bom investidor deve se ancorar por uma *margem de segurança*, ou seja, o investidor nunca deve pagar um preço alto demais por um ativo, por mais que o investimento seja atrativo.
5. Por fim, o sucesso financeiro está vinculado ao comportamento do próprio investidor. Quanto mais crítico às informações disponíveis, investindo com paciência, confiança, disciplina e coragem, as variações de humor do mercado não impactarão as decisões de investimento de um bom investidor. Mais importante que o comportamento dos investimentos, é o comportamento do próprio investidor.

⁵ Faculdade onde Benjamin Grossbaum se formou com méritos, em 1914, no curso de Ciências Econômicas.

⁶ A família de Benjamin Grossbaum, de ascendência judia, fugiu para os EUA durante a primeira guerra mundial. Assim que desembarcaram na América, adotaram o sobrenome Graham, na intenção de se manterem escondidos dos alemães.

As contribuições de Benjamin Graham são fortes e influenciam até hoje as decisões de investimento dos maiores investidores do mercado americano, como Warren Buffett, atualmente considerado a pessoa com o maior capital do mundo e o melhor investidor do século XX, que o cita frequentemente.

A revista *American Economic* publicou em 1958 o artigo *The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment* de Modigliani e Miller (1958), sendo este o segundo passo para a evolução da *Análise Fundamentalista*. Os autores desenvolveram a famosa teoria sobre estrutura de capital *M&M*. Essa teoria afirma que se os mercados forem eficientes, os investidores racionais, e não existir impostos, o valor de mercado de uma empresa não alavancada⁷, baseado apenas nos rendimentos de seus ativos, é equivalente ao valor de mercado de uma empresa alavancada, que apresenta na sua estrutura de capital uma dívida muito mais densa. Franco Modigliani e Merton Miller construíram um modelo onde provaram que a política de financiamento escolhida por uma empresa não afeta seu valor de mercado. Tal contribuição foi tão relevante para o mundo financeiro, que resultou no prêmio Nobel de Economia, dado a Franco Modigliani em 1985. Atualmente o teorema de Modigliani-Miller é a base dos métodos de avaliação de empresas que levam em consideração a estrutura de capital e a alavancagem financeira. Dentre esses métodos, os mais conhecidos são Valor Presente Ajustado (VPL), Fluxos de Caixas Livres (FCL) e Custo Médio Ponderado de Capital (CMPC).

O terceiro grande momento da consolidação da *Análise Fundamentalista* se deu na década de 1950, através da publicação *Portfolio Selection* de Harry Max Markowitz (1952). Esta obra deu bases para a moderna teoria de carteira. Harry propôs a administração de carteiras através da diversificação de ativos, avaliando *risco-retorno*. Para Markowitz, o risco de uma carteira não pode ser considerado como a média dos riscos individuais de cada ativo. Segundo ele é possível estabelecer uma fronteira eficiente, que indica o maior retorno possível após definir qual é o nível máximo de risco que o investidor está disposto a assumir. Seu trabalho, assim como o de Franco Modiglia com Merton Miller, gerou, como consequência, o prêmio Nobel de Economia em 1990, dividido com Sharpe e Miller.

Willian Sharpe participou dessa premiação devido à sua grande contribuição, em 1964, com o modelo *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) publicado no artigo *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk* (SHARPE, 1964). Baseado na teoria de Markowitz, Willian desenvolveu um modelo de precificação de ativos relacionando o rendimento do ativo com o mercado em que ele é negociado através de um ajuste linear. O modelo determina a taxa de retorno de um ativo específico considerando uma

⁷ O termo alavancagem está intimamente vinculado à física. Um alavanca é um objeto rígido usado para amplificar a força exercida sobre outro corpo. Neste sentido, o termo alavancagem é utilizado em finanças quando uma empresa utiliza de recursos externos, empréstimos, almejando aumentar seus resultados. Em regras gerais, é mais vantajoso uma empresa tomar recursos de terceiros, do que investir capital próprio. Mesmo pagando juros sobre o recurso, a empresa pode se beneficiar de uma rentabilidade maior alcançada através do emprego correto do investimento advindo do empréstimo.

carteira diversificada, levando em consideração a sensibilidade do ativo ao risco de mercado, conhecido como risco diversificável, representado pela variável β . O valor de β é dado pela inclinação da reta de regressão

$$R_A = R_F + \beta(R_M - R_F), \quad (1)$$

onde R_A representa a taxa de retorno esperado do ativo, R_M a taxa de retorno esperado do mercado, R_F é a taxa de retorno de um investimento livre de risco, e a diferença $(R_M - R_F)$ representa o prêmio do risco esperado. Neste modelo, o custo do capital investido corresponde à taxa de retorno exigida pelo investidor como sendo um prêmio ao risco a que ele está exposto.

No final do século XX, entre as décadas de 1980 e 1990, a *Análise Fundamentalista* ganhou uma nova abordagem com os modelos econométricos que visam a previsibilidade da taxa de retorno futura de um ativo. Esses modelos consideram inúmeras variáveis explicativas para mensurar a taxa de retorno esperado de uma ação.

Na tentativa de conceituar o que é a *Análise Fundamentalista*, resolvemos resumi-la em: um estudo aprofundado de toda a informação disponível sobre determinada empresa de capital aberto, considerando o momento atual e o passado. Tal análise busca descobrir o verdadeiro valor de uma ação, para que assim o analista possa definir com sabedoria sua estratégia de investimento. Segundo [Pinheiro \(2016\)](#) essa análise utiliza dois processos para chegar à conclusão sobre qual deve ser a negociação mais assertiva para um determinado ativo. O primeiro método, concentra-se na análise *top down*, em termos gerais, de cima para baixo. Neste primeiro foco as variáveis macroeconômicas determinam o centro da análise, uma vez que os analistas adeptos deste método acreditam que o mercado reflete o comportamento da economia. O segundo método é o *bottom up*, os analistas deste método concentram-se no exame microeconômico de cada empresa, direcionado principalmente na interpretação de suas demonstrações financeiras, como o Balanço Patrimonial (BP), a Demonstração do Fluxo de Caixa (DFC), a Demonstração de Resultado do Exercício (DRE), entre outras. Os dois métodos não são excludentes, pelo contrário, eles se complementam, sendo que um bom analista fundamentalista considera os dois métodos na conclusão da sua decisão de investir.

Os pilares que sustentam a *Análise Fundamentalista* são, respectivamente, a análise da empresa, a análise do setor econômico em que a empresa está inserida, e a interpretação geral da conjuntura econômica, avaliando o horizonte da negociação, uma vez que, para os analistas fundamentalistas, a hipótese básica para se fazer uma negociação, baseados nas premissas discutidas aqui, é que "O mercado de capitais é eficiente a longo prazo, podendo ocorrer ineficiências na valorização a curto prazo que seriam corrigidas ao longo do tempo" ([PINHEIRO, 2016](#), p.480). Para compreender a ideia central da hipótese fundamentalista, é preciso entender o significado de *eficiência* no contexto abordado aqui.

Seguindo essa perspectiva, a próxima sessão destina-se a explicar o conceito de *eficiência de mercado* do ponto de vista dos analistas econômicos e financeiros.

2.2 Hipótese de mercado eficiente vs Hipótese de mercado fractal

É difícil definir eficiência. Afinal, como é possível verificar se um mercado é ou não é eficiente? Para introduzir a ideia da eficiência no contexto de avaliação de investimentos, vamos nortear nosso raciocínio na idealização de um valor verdadeiro para o ativo, definido como *preço justo*. Como abordamos na [Subseção 2.1.2](#), os investidores fundamentalistas buscam, através de suas análises, definir um valor intrínseco para o ativo que represente o verdadeiro valor da ação. Contudo conseguir com precisão essa informação é utópico, porque, para determinar o *valor justo* de uma ação, devemos considerar inúmeras variáveis quantitativas⁸ e qualitativas⁹, impossíveis de serem mensuradas.

Usando essa linha de raciocínio, podemos estimar eficiência de mercado através do seguinte argumento: quando um mercado é dito *eficiente*, o preço praticado do ativo no mercado fornece a melhor estimativa do seu valor intrínseco. Por outro lado, se um mercado for *ineficiente*, o preço praticado não refletirá o valor intrínseco do ativo, definido aqui como *preço justo*. Desta forma, em caso de ineficiência do mercado, existirá uma diferença entre o preço praticado e o preço justo do ativo. Quanto maior essa diferença, maior a possibilidade de ganho do bom analista. Uma vez que o ativo estiver supervalorizado, ou seja, quando o preço praticado é superior ao preço justo, temos um desvio positivo entre os preços. Logo, o analista pode conseguir ganhos superiores à média do mercado, ao ofertar o ativo acima do seu valor intrínseco. Em caso contrário, quando subvalorizado, o desvio é negativo, e assim o analista almeja ganhos maiores que a média do mercado ao demandar o ativo.

O conceito mais específico de eficiência de mercado foi formulado pelo economista americano Eugene Fama, no seu trabalho *Efficient capital markets: a review of theory and empirical work* (FAMA, 1970). Segundo Fama (1970), um mercado eficiente reflete todas as informações disponíveis. Desta forma, o preço representa de fato o valor verdadeiro do ativo. Fama argumentou que o mercado pode ser eficiente em três níveis, sendo eles:

1. **Eficiência Fraca:** Os preço atuais refletem toda a informação do passado. Desta forma, a *Análise Técnica* é inútil como uma estratégia de investimento.
2. **Eficiência Semi-Forte:** Os preços atuais além de refletirem toda a informação pas-

⁸ Podemos citar como elementos quantitativos que devem ser utilizados para determinar o valor intrínseco de um ativo os resultados operacionais e financeiros que as empresas são obrigadas a publicar semestralmente, assim como os índices de mercado.

⁹ Como elementos qualitativos existe uma gama de variáveis a serem consideradas, sem meios tangíveis que possibilitem sua mensuração, como: a governança corporativa, a marca da empresa, a estratégia, o potencial de crescimento, entre outros.

sada, também refletem toda a informação pública, como as demonstrações financeiras e as notícias que apresentam a realidade econômica. Desta forma, a *Análise Fundamentalista* é inútil como uma estratégia de investimento.

3. **Eficiência Forte:** Os preços atuais refletem toda a informação do passado, toda informação pública, e por fim toda a informação privada. Logo, as estratégias qualitativas, que focam em características intangíveis, também são inúteis com uma estratégia de investimento.

Fama complementou sua análise anos depois com o artigo *Efficient capital markets: II* (FAMA, 1991), afirmando que o comportamento dos preços dos ativos segue um passeio aleatório. Considerando essa afirmação, torna-se impossível que os agentes desenvolvam técnicas para conseguirem lucros acima da média do mercado.

O conceito de eficiência está atrelado à idealização de um mercado perfeito. O especialista em análise de investimentos e professor da *NYU Stern School of Business*, Aswath Damodaran (2010), apresenta a teoria de Fama com uma visão bem particular. Para ele, um mercado eficiente é aquele em que o preço de mercado é uma estimativa não-tendenciosa do valor real do investimento. Precisa-se considerar que primeiro o preço praticado não necessariamente será igual ao preço justo sempre, contudo seus desvios não podem ser tendenciosos, logo estes desvios devem apresentar variações aleatórias. Em seguida, uma vez que consideramos que os desvios do preço praticado com relação ao preço justo são aleatórios, existe então uma probabilidade idêntica do ativo estar super ou subvalorizado. Assim esses desvios não podem ser correlacionáveis com nenhuma variável do processo. Baseado nessa suposição, nenhum investidor, regularmente, conseguirá montar estratégias de investimento que sejam capazes de encontrar preços super ou subvalorizados no mercado.

Apesar do que preconiza a *hipótese de mercado eficiente*, existe uma multidão de investidores, empregando tempo e dinheiro na busca das oportunidades que teoricamente não existem. Assim, desvios da *HME* talvez possam ser considerados. Neste panorama, existe uma nova abordagem, com uma estrutura que contesta a *HME*, conhecida como a *hipótese do mercado fractal (HMF)*. É importante ressaltar que relações entre fractalidade e finanças foram exploradas inicialmente pelo matemático francês Benoît B. Mandelbrot nos trabalhos Mandelbrot, Fisher e Calvet (1997) e Mandelbrot e Stewart (1998), mas, de forma mais específica, a *HMF* foi introduzida pelo professor e gestor de ativos Edgar E. Peters no artigo *A chaotic attractor for the S&P 500* (PETERS, 1991). Neste trabalho, ele mostra, por meio da física-estatística, que o índice S&P500¹⁰ possui ciclos, que não são

¹⁰ A sigla S&P500, representa o índice (*Standard & Poor's 500 - S&P500*) das 500 ações, de empresas americanas, com maior liquidez e maior representação no setor industrial que estão inseridas. Sendo portanto, as 500 ações mais importantes da Bolsa de Ações de Nova Iorque (*New York Stock Exchange - NYSE*) e da Associação Nacional de Corretores de Títulos de Cotações Automáticas (*National Association of Securities Dealers Automated Quotations - NASDAQ*).

periódicos, pelo contrário, estes ciclos são dirigidos por um atrator caótico. A existência desse atrator, segundo Peters, se deve à natureza não linear das variáveis que direcionam o movimento do mercado. Sistemas não-lineares muitas vezes são caracterizados por correlações e tendências de longo prazo, o que sinaliza uma natureza fractal no desempenho do mercado. Uma vez que esse comportamento foi percebido, o uso das ferramentas estatísticas padronizadas foi por ele questionado.

No ano de 1994, Peters expôs sua teoria no livro *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics* (PETERS, 1994). Essa obra ficou conhecida como *bible of market chaologists*. Sua teoria não faz distinção nas transações concretizadas entre os agentes que atuam no longo e no curto prazo. Os agentes buscam efetivar suas negociações, indiferentemente do horizonte de atuação (curto ou longo). O foco da sua teoria está na liquidez dos ativos que são negociados. Segundo Cova et al. (2011), para garantir esse pressuposto é necessário manter as seguintes condições:

1. O preço praticado é necessariamente o preço que o mercado julga como o "*preço justo*" do ativo.
2. Investidores com horizontes de investimentos diferentes (longo ou curto prazo) negociam entre si os ativos.
3. Mesmo quando a oferta e a demanda ficam desequilibradas, não ocorre pânico entre os agentes.

De acordo com Peters (1994), o problema não está no desequilíbrio entre oferta e demanda, na verdade, para ele, o problema reside na liquidez dos ativos. Na história, as grandes crises financeiras, quando acontecem quebras de mercados, não ocorreram pelo acentuado volume de negociações, mas devido à falta de liquidez dos ativos. A principal crítica que Peters faz acerca da *HME* reside no fato de ela não dizer nada sobre a liquidez dos ativos. Sabemos que, em momentos onde a liquidez é mínima ou desaparece, o agente pouco se importa com o *preço justo* do ativo, ele quer fechar a negociação á qualquer preço, visando minimizar seu prejuízo. Olhando sob essa perspectiva, um mercado somente é eficiente se existir liquidez. Contudo, sabemos que nem sempre os mercados são líquidos, assim não pode-se assegurar eficiência.

Outra crítica importante está no fato da *HME* (em sua versão forte) considerar que o preço praticado reflete todas as informações disponíveis, ou seja, a informação é considerada simétrica para todos os agentes. Segundo Cova et al. (2011), na *HME* estamos considerando que todos os agentes, sendo racionais, absorvem a informação de forma equivalente. Se isso for verdade, todos os agentes executarão a mesma ordem, seja ela de comprar, ou vender, mediante a informação que eles detém. Logo, não existiria a outra parte para fechar o negócio, garantindo o equilíbrio entre demanda e oferta. Na *HMF* a atitude dos agentes é dirigida por diferentes horizontes de investimento, alguns transacionam diariamente (*Analistas adeptos à escola técnica*), outros vislumbram prazos muito maiores,

como meses e anos (*Analistas adeptos à escola Fundamentalista*). Esses agentes, com horizontes distintos, fecham negócios entre si. As informações para esses investidores são interpretadas de formas distintas, pois cada um avalia e considera relevante a informação de acordo com seu horizonte de investimento. Essas diferentes interpretações permitem que tais agentes fechem a transação, entre eles, mantendo um balanceamento entre oferta e demanda, que assegura a estabilidade do mercado. Contudo, quando uma crise está próxima, os agentes fundamentalistas tendem a alterar seus horizontes de investimentos, diminuindo o prazo que antes estavam dispostos a considerar, para o retorno do investimento. Ao perceberem a queda sucessiva dos preços, eles aumentam o volume de negociações do mercado, deixando-o instável, e diminuindo assim sua liquidez.

Um ponto central na *hipótese do mercado fractal* é a abordagem do risco. Segundo a *HMF*, todos os agentes compartilham o mesmo nível de risco (COVA et al., 2011). Apesar disso, apresentam decisões distintas devido aos diferentes horizontes de investimento em que trabalham. Os diferentes horizontes de tempo dos investidores apresentam autossimilaridade nos desvios-padrões (riscos) de seus retornos. Para Peters (1994), o mercado é uma estrutura dinâmica que pode ser interpretada por um sistema caótico ou fractal ao apresentar aleatoriedade local mas determinismo global.

2.3 Posicionamento da pesquisa considerando o panorama teórico

O modelo que vamos descrever nesta pesquisa estabelece a dinâmica de preço de um único ativo, transacionado num mercado com vários agentes. A dinâmica do preço desse ativo é influenciada por diferentes aspectos, que serão explicados no Capítulo 4. Aqui, queremos chamar a atenção apenas para os fundamentos teóricos que amparam o trabalho que será apresentado no decorrer desta tese.

Na construção do modelo, definimos um valor intrínseco para o ativo, denominado naturalmente como *preço justo*. A partir dessa definição, conseguiu-se perceber a presença das duas escolas de investimento (vide Subseção 2.1.1 e Subseção 2.1.2). Conforme apresentamos neste capítulo, todas as abordagens da análise técnica ignoram o preço justo, o que não quer dizer que o agente negligencia seu valor, mas sim no que *refere-se à análise técnica* ele não é considerado. Desta forma, nos aproximamos da análise técnica quando os agentes simulados tomam suas decisões de comprar ou vender ignorando o valor justo definido para o ativo, tendo como foco o comportamento esperado para o curto prazo. Por outro lado, a análise fundamentalista é abordada quando o agente considera o desvio do preço praticado comparado com o *preço justo*. Sua decisão de demandar ou ofertar o ativo é influenciada proporcionalmente pela magnitude de tal desvio.

Na análise fundamentalista, diferentes estruturas de cálculo geram interpretações

distintas para o valor intrínseco de uma ação. No modelo que construímos, o valor que cada agente considerada como o *preço justo* é determinado a partir de uma distribuição em torno de um *preço justo idealizado*. Desta forma, os agentes percebem *preços justos* diferentes, mas com valores próximos. Assim, cada agente detém uma interpretação individualizada sobre o *valor intrínseco* do ativo.

O fato de os agentes trabalharem suas escolhas avaliando duas escalas temporais, são um primeiro passo no sentido de aproximar o modelo da hipótese de mercados fractais. É válido frisar aqui, que nosso modelo garante que todas as atitudes, de compra e venda, sejam efetivadas mediante o equilíbrio constante da disponibilidade de recursos financeiro dos agentes e dos recursos financeiros disponíveis no mercado.

3 Ferramentas estatísticas

As conjecturas levantadas neste trabalho são de naturezas sócio-econômicas e financeiras, logo o instrumental estatístico é fundamental para validar as conclusões que obtivermos com os resultados dessa pesquisa. A validação estatística de uma ferramenta computacional que procura descrever um problema em *Econofísica* exige um embasamento teórico interdisciplinar. Assim, trataremos, neste capítulo, algumas metodologias específicas, que visam dar o aporte teórico necessário para interpretar e validar estatisticamente as simulações encontradas no decorrer da pesquisa. Para tanto vamos dissertar sobre os mecanismos estatísticos que pretendemos utilizar neste trabalho, com o intuito de comparar os resultados encontrados nos dados simulados, com inferências encontradas em séries reais.

3.1 Distribuições de probabilidades e seus momentos

Uma das motivações que nos levam a querer fazer uma inferência estatística consiste no questionamento sobre "Com que frequência essa observação se repete?". Neste trabalho estamos interessados em verificar inúmeras ocorrências sobre dados sintéticos, e verificar se tais dados apresentam alguma equivalência aos dados observados no mercado. Neste intuito, recorreremos à frequência de observações desses dados em uma partição do universo de possibilidades e a associamos à uma distribuição contínua de probabilidades.

Segundo [Tomé e Oliveira \(2001\)](#), podemos definir uma variável aleatória x que pode assumir qualquer valor sobre a reta real. Para tanto, associamos uma probabilidade a cada intervalo da reta, de forma que a probabilidade da variável aleatória estar contida no intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ será dada por

$$P[a \leq x \leq b] = \int_a^b \rho(x) dx, \quad (2)$$

onde $\rho(x)$ é a função contínua de probabilidade, também conhecida como função densidade de probabilidade (*fdp*), que deve satisfazer às seguintes propriedades:

- $\rho(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$,
- A área total definida sob $\rho(x)$ é igual a 1, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (3)$$

Já a função que descreve a probabilidade de que a variável aleatória assuma um valor inferior ou igual a um determinado valor de x . é conhecida usualmente como distribuição

acumulada de probabilidades (*fda*), dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(y) dy, \quad (4)$$

sendo esta uma função monotônica crescente.

Vamos agora descrever a *função geratriz de momentos brutos* de uma função densidade de probabilidades através de

$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \rho(x) dx. \quad (5)$$

A expressão (5) também pode ser definida pelo valor esperado da variável aleatória x^n tal que

$$M_n = E[x^n]. \quad (6)$$

Para cada número inteiro n , também podemos definir o n -ésimo **momento central** da variável aleatória. Estes momentos são tomados em torno da média da variável aleatória, e são definidos como

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^n \rho(x) dx \quad \text{ou} \quad m_n = E[x - E[x]]^n. \quad (7)$$

Logo, de acordo com (6) o primeiro momento bruto de uma distribuição é a *média*, assim

$$M_1 = E[x] \equiv \mu. \quad (8)$$

A *média* (μ) é o valor, em torno do qual, se concentra a maioria dos dados de uma distribuição. Ela representa uma das suas medidas de tendência central, sendo as outras duas conhecidas como *mediana*¹ (Md) e *moda*² (Mo). Contudo, se considerarmos os momentos centrais, conforme a expressão (7), o primeiro deles será $m_1 = 0$.

O segundo momento central determina a *variância* da função densidade de probabilidades, e esta é dada pela expressão

$$m_2 = E[x - E[x]]^2. \quad (9)$$

Substituindo (8) em (9), temos

$$m_2 = E[x - \mu]^2 \equiv \sigma^2. \quad (10)$$

A *variância* (σ^2) estabelece a dispersão dos dados em torno da média. Ela representa o valor esperado da distância quadrática da variável aleatória x com relação à sua principal medida de tendência central, a média μ .

¹ A mediana é o valor que separa o conjunto de dados pela metade, é o valor central da distribuição.

² A moda é o dado mais observado em uma distribuição, ou seja, é o valor que apresentou maior frequência no conjunto de dados.

O terceiro momento central será

$$m_3 = E[x - E[x]]^3 \quad (11)$$

É através do terceiro momento central que determinamos o coeficiente de assimetria α_3 , dado pela expressão

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{E[x - \mu]^3}{\sigma^3}. \quad (12)$$

O coeficiente α_3 mede a simetria da curva que representa a função densidade de probabilidades *fdp*. Distribuições assimétricas apresentam uma das caudas mais pesada que a outra. Podemos ter uma assimetria positiva (ou assimetria à direita), quando a cauda posicionada à direita da distribuição é mais pesada, neste caso $\alpha_3 > 0$. Sendo o oposto dessa situação denotado como assimetria negativa (ou assimetria à esquerda), nesta circunstância $\alpha_3 < 0$. Quando $\alpha_3 = 0$ temos uma curva simétrica (vide Figura 3 como exemplo).

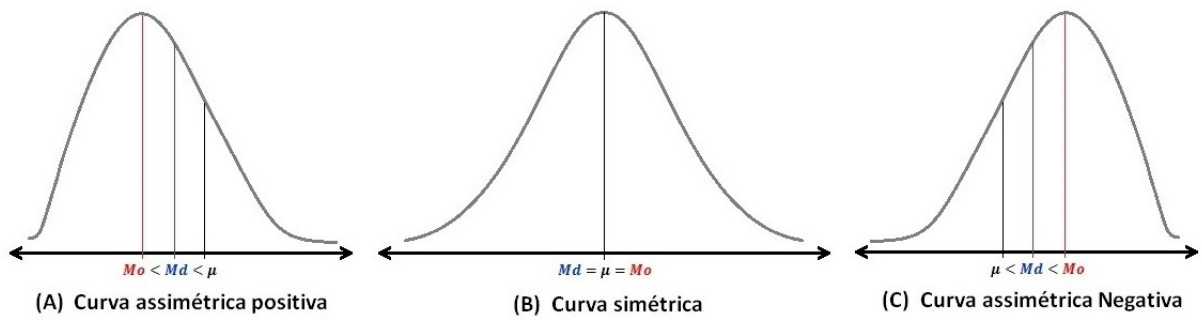


Figura 3 – Curvas, que representam *fdp(s)*, com tipos distintos de assimetria. Na ilustração (A) temos uma curva com assimetria à direita, neste exemplo as medidas de tendência central são diferentes, sendo sua ordem estabelecida por $Mo < Md < \mu$. Em (C) temos uma curva com assimetria à esquerda, logo a ordem das medidas de tendência central são definidas por $\mu < Md < Mo$. Por fim, em (B) apresentamos uma curva com assimetria nula, onde as medidas de tendência central são idênticas.

Por fim, o quarto momento central será dado por

$$m_4 = E[x - E[x]]^4. \quad (13)$$

Com o quarto momento central, estabelecemos o coeficiente de achatamento α_4 da função densidade de probabilidades, mais conhecido como curtose, definido por

$$\alpha_4 = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{E[x - \mu]^4}{\sigma^4}. \quad (14)$$

Em muitos casos podemos ter distribuições com algumas características iguais, como medidas de tendência central e variância. Entretanto as curvas que descrevem essas distribuições podem ser mais "acentuadas" ou "achatadas". Para diferenciar esse aspecto utiliza-se a curtose.

A distribuição normal (em formato de sino), é comumente utilizada como uma referência para verificar o grau de achatamento de outras distribuições. A distribuição normal ($\alpha_4 = 3$) é definida como uma distribuição *mesocúrtica*, pois detém caudas neutras. Quando ($\alpha_4 < 3$) temos uma distribuição *platicúrtica*, ou seja, mais achatada comparada à curva normal, apresenta caudas mais leves. No caso contrário, quando ($\alpha_4 > 3$), temos uma distribuição *leptocúrtica*, isto é, a distribuição apresenta picos mais acentuados comparadas à curva normal, dispõe de caudas mais pesadas (MERRILL; FOX, 1980) (vide Figura 4 como exemplo). É comum utilizar-se o cálculo do *coeficiente de achatamento* em séries financeiras para verificar distribuições com caudas mais pesadas comparadas às caudas da distribuição normal (vide Fang e Lai (1997))

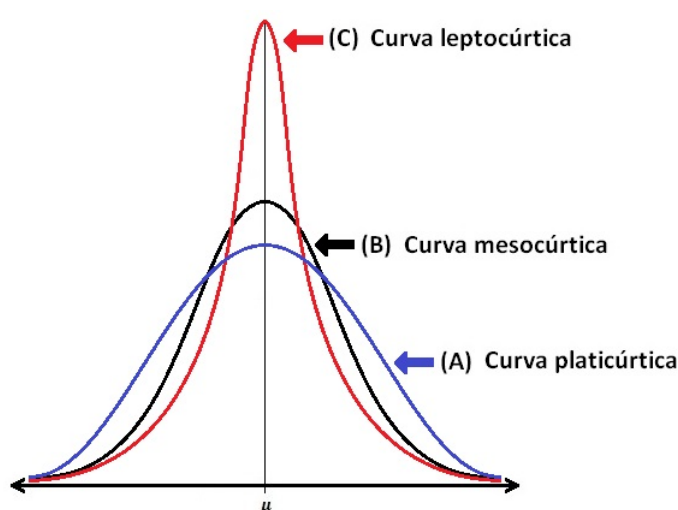


Figura 4 – Curvas, que representam $fdp(s)$, com tipos distintos de curtose. Na ilustração (A) temos uma curva platicúrtica, com $\alpha_4 < 3$, em (C) temos uma curva leptocúrtica com $\alpha_4 > 3$, e por fim em (B) apresentamos uma curva mesocúrtica com $\alpha_4 = 3$.

3.2 Expoente de Hurst generalizado

O cálculo de expoentes característicos é importante para analisar comportamento de escala em séries financeiras. Podemos ressaltar entre eles o expoente de Hurst (H), que é uma ferramenta estatística relevante na verificação do comportamento de persistência de séries financeiras. Ele é utilizado para diagnosticar propriedade de memória de longo prazo em séries temporais (MANDELBROT; WALLIS, 1969). Quando $H < 0,5$, a série possui memória de longo prazo *anti-persistente*, caracterizando o fato de que as flutuações futuras caminharão em sentido oposto às flutuações do passado. Já quando $H > 0,5$, a série possui memória de longo prazo *persistente*, neste caso, as flutuações do futuro caminharão no mesmo sentido das flutuações do passado. Neutralidade corresponde a $H = 0,5$ (*random walk*³). Existem várias técnicas para calcular o expoente de Hurst, entretanto, a que envolve

³ Um *random walk*, conhecido também como passeio aleatório (caminhada do bêbado), é uma ideia intuitiva da tomada de decisão em direção aleatória, feita através de vários passos consecutivos. Uma boa

menor custo computacional é a Análise Livre de Tendência (*Detrended Fluctuation Analysis* - *DFA* (PENG et al., 1994)). É uma técnica robusta, que minimiza o custo computacional comparada a outra metodologia de cálculo, utilizada na área, conhecida como Análise da Faixa Redimensionada (*Rescaled Range Analysis* - *R/S* (HURST, 1951)). O método *DFA* consiste em calcular a rugosidade de um conjunto de pontos distribuídos em torno de um polinômio, que melhor se ajusta aos dados, estimado pelo método dos mínimos quadrados ordinários.

Apesar do expoente de Hurst ser um procedimento de análise largamente utilizado em pesquisas que envolvem o comportamento de escala em séries financeiras, sua utilização exclusiva restringe a análise. Existem casos em que a série apresenta escalas cruzadas com diferentes expoentes de dimensionamento, como os resultados apresentados em Hu et al. (2001) e Kantelhardt et al. (2001). Tal fato ocorre porque em intervalos diversificados da série podemos ter comportamentos de escala diferentes. Neste sentido, se faz necessária uma análise multifractal, considerando diferentes expoentes de escala, para que assim seja possível avaliar o comportamento completo do dimensionamento da série. Desta forma, a metodologia estatística de investigação desta pesquisa irá considerar diferentes possibilidades de dimensionamento da série. Para tanto vamos utilizar o método *DFA* multifractal (*MF-DFA*) Kantelhardt et al. (2002), que será descrito a seguir.

Primeiramente calculamos os retornos logarítmicos $R(t)$ sobre uma série de preços $y(t)$, onde t é uma variável discreta que determina o tempo dentro do intervalo $(0, t_{max} + 1]$, assim

$$R(t) = \log y(t + 1) - \log y(t), \quad \text{onde} \quad 0 < t \leq (t_{max} + 1). \quad (15)$$

O próximo passo consiste em determinar o "perfil", subtraindo a média dos retornos através da seguinte expressão:

$$Y(t) = \sum_{t=1}^i [R(t) - \bar{R}], \quad \text{onde} \quad i = 1, 2, \dots, t_{max}, \quad (16)$$

sendo importante ressaltar que $\bar{R}$ é a média dos $R(i)$ calculada sobre o intervalo investigado.

Em seguida, dividimos a série $Y(t)$ em N intervalos denotados por I_n , com $n = 1, 2, \dots, N$. Todos os intervalos I_n terão o mesmo tamanho η . O valor do tamanho η , assim como a quantidade de intervalos N , serão obtidos pelos resultados inteiros das fórmulas

$$\eta = u(v^n) \quad \text{e} \quad N = \frac{t_{max}}{\eta}, \quad \text{onde} \quad \eta \in [\eta_{min}, \eta_{max}]. \quad (17)$$

De acordo com Kantelhardt et al. (2002), para escalas muito grandes, onde o tamanho do intervalo é dado por $\eta > t_{max}/4$, ou para escalas muito pequenas dadas por $\eta < 10$, a estatística torna-se menos confiável, por essa razão limitamos o tamanho dos intervalos

formalização físico-estatística para validar um *random walk* é o cálculo do expoente de Hurst da série, que num passeio aleatório deve ser próximo de 0,5.

η para um valor mínimo (η_{min}) até um valor máximo (η_{max}). As constantes u e v são parâmetros que ajustamos para que os tamanhos de η sejam valores inteiros determinados em uma sequência crescente não linear para $n = 1, 2, 3, \dots, n_{max}$, tal que $\eta_{min} = u(v^1)$ e $\eta_{max} = u(v^{n_{max}})$. É necessário ressaltar que estamos trabalhando com grandezas inteiras para η , logo os valores de N podem não ser quocientes exatos do tamanho total da série t_{max} . Sendo assim, possivelmente, no final da série teremos uma sobra de observações. Para que essa sobra de dados não seja ignorada, refazemos o procedimento descrito anteriormente começando do final da série, considerando a última observação como se fosse a primeira e assim sucessivamente. No final desse arranjo temporal decrescente, teremos a mesma quantidade de sobras, mas estas corresponderão às observações do início da série que já foram incorporadas no cálculo no início do procedimento. As passagens a seguir devem ser consideradas para o conjunto total de dados, sendo este conjunto definido pelo intervalo crescente de $[1, t_{max}]$ sucedido, após a última posição, pelo intervalo decrescente $[t_{max}, 1]$. Desta forma a série $Y(i)$ terá tamanho total $2(t_{max})$.

Para o conjunto de pontos dentro de cada intervalo I_n de tamanho η , podemos ajustar um polinômio de grau n , onde os coeficientes são estimados utilizando o método dos mínimos quadrados ordinários. Assim, em cada intervalo $I_{n,\eta}$, calculamos o desvio quadrático dos valores ajustados em relação aos valores observados

$$S_{n,\eta}^2 = \frac{1}{\eta} \left\{ \sum_{t=0}^{\eta} [\hat{Y}_n(t) - Y(t)]^2 \right\}, \quad \text{onde} \quad \eta_{min} < \eta < \eta_{max}. \quad (18)$$

Em seguida, associamos a essa medida o expoente característico q através da equação

$$F_q = \left\{ \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^{2N} [S_{n,\eta}^2]^{q/2} \right\}^{1/q}. \quad (19)$$

Note que para $q = 0$ a expressão (19) fica indefinida. Logo, para o caso específico de $q = 0$ usamos

$$F_q = \exp \left\{ \frac{1}{4N} \sum_{n=1}^{2N} \ln [S_{n,\eta}^2] \right\}. \quad (20)$$

Ao término dessas passagens encontramos a relação entre o tamanho η e F_q dada pela lei de potência

$$F_q(\eta) \sim \eta^{h(q)}. \quad (21)$$

observe que $h(q)$ pode ser determinado pela relação

$$\log F_q(\eta) \sim h(q) \log(\eta). \quad (22)$$

Desta forma, analisamos num gráfico, em escala log-log, o comportamento das funções de flutuação $F_q(\eta)$ versus o tamanho η . Para cada q temos um gráfico $\log \eta$ X $\log F_q$, onde ajustamos os pontos a uma reta estimada pelo método dos mínimos quadrados ordinários. Assim, a inclinação da reta estimada $h(q)$ em cada gráfico representa o *expoente de Hurst*

generalizado da série. Em séries monofractais, o valor de $h(q)$ segue independentemente dos valores de q , pois, neste tipo de série, o comportamento de escala das variâncias $S_{n,\eta}^2$ é idêntico para todos os intervalos, independentemente do tamanho η . Já em séries multifractais é comum observar que a inclinação $h(q)$ é maior para os valores de $q < 0$, comparadas as inclinações $h(q)$ para os valores de $q > 0$. Quando os valores de $h(q)$ são próximos de zero, antes de aplicar o método (MF-DFA), devemos executar uma soma dupla no "perfil". Assim, após a expressão (16) devemos fazer $\tilde{Y}(t) = \sum_{i=1}^t [Y(i) - \bar{Y}]$, para $1 \leq i \leq t_{max}$. Executando esse passo adicional, eliminamos tendências quadráticas no "perfil" $Y(i)$, e encontramos uma relação de escala para $\tilde{F}_q(\eta)$ com expoentes maiores $\tilde{h}(q) = h(q) + 1$ (KANTELHARDT et al., 2002).

De acordo com Kantelhardt et al. (2002), para analisar a multifractalidade de uma série, utilizamos o *espectro de singularidade* dado pela relação de φ , denotada por *força de singularidade*, e $f(\varphi)$, conhecida como *dimensão fractal* da série caracterizada por φ . Podemos determinar os valores de φ e $f(\varphi)$ utilizando $h(q)$, onde

$$\varphi = h(q) + qh'(q) \quad \text{e} \quad f(\varphi) = q[\varphi - h(q)] + 1. \quad (23)$$

Dessa forma, com os valores de $h(q)$, conseguimos determinar o gráfico do espectro de singularidade φ versus $f(\varphi)$. Quando o comportamento da série é *monofractal*, encontramos um único expoente característico $h(q) = h^*$, sendo assim o espectro de singularidade é representado por um único ponto. Este é um resultado ideal, para séries infinitas; para séries finitas, alguma largura do espectro será observada. Em contra partida, quando a série é *multifractal*, temos diferentes valores para h , logo a dimensão fractal $f(\varphi)$ é representada por um conjunto de pontos, que apresentam um aspecto que lembra uma parábola. Este processo é ilustrado na Figura 5.

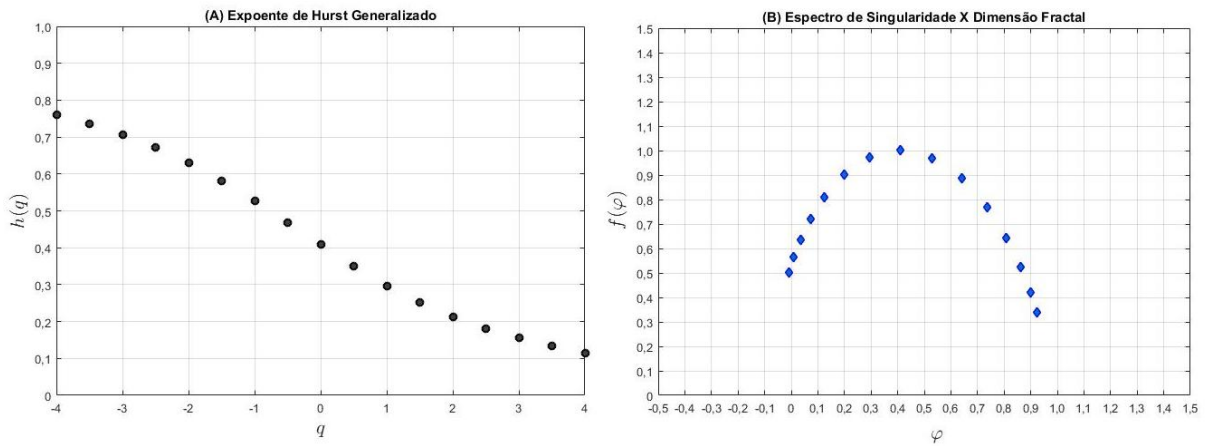


Figura 5 – Multifractalidade. A partir da variação de $h(q)$ com q , representada em (A), tem-se o espectro de singularidade apresentado em (B).

4 O modelo

Existe uma vasta diversidade de mercados no cenário econômico, nesta pesquisa, concentraremos nossa atenção no mercado de ativos financeiros, que tem como característica relevante a atuação de diferentes perfis de agentes econômicos comprando e vendendo ativos. A dinâmica de precificação de um ativo não é um assunto trivial (NETO, 2010). Desta forma, com o intuito de simplificar os aspectos teóricos da modelagem tratada aqui, incorporamos no modelo (CAMPOS, 2014) resultados advindos de teoria econômica clássica, especificamente, relacionados ao equilíbrio entre as forças de mercado denominadas *Oferta* e *Demanda* (MANKIW, 2014).

4.1 O Modelo sem estocasticidade

Construímos um modelo que simula um mercado onde o tempo é uma variável discreta e as ordens de compra e venda são públicas. Neste cenário, temos N agentes negociando um único ativo. O comportamento de cada agente é modelado utilizando a variável $x_{j,k}$, que corresponde à quantidade demandada ou ofertada pelo agente j no tempo t_k , com o seguinte significado: se $x_{j,k} > 0$, $x_{j,k}$ equivale à quantidade *demandada* pelo agente j no tempo t_k . De forma análoga, caso $x_{j,k} < 0$, $x_{j,k}$ equivale à quantidade *ofertada* pelo agente j no tempo t_k . Os intervalos de tempo Δt , entre os passos de tempo $t_{k+1} - t_k$, são idênticos. É importante ressaltar que $x_{j,k}$ não corresponde ao montante real negociado no tempo t_k ; na verdade, $x_{j,k}$ é a *intenção de comprar* (demandar) ou *intenção de vender* (ofertar) publicada pelo agente j no tempo t_k .

O preço do ativo é dado pela dinâmica que envolve a posição dos agentes em demandar ou ofertar o ativo, de acordo com a equação

$$\frac{\log P_{k+1} - \log P_k}{\Delta t} = \omega \sum_{j=1}^N x_{j,k}, \quad k \geq 0, \quad (24)$$

onde ω é um parâmetro positivo, que mensura o grau da influência dos agentes sobre o preço do ativo, e $\sum_{j=1}^N x_{j,k}$ é o excesso de demanda publicada pelos agentes no tempo t_k , tal dependência linear está de acordo com resultados empíricos (PLEROU et al., 2002).

Visando realismo, consideramos uma quantidade limitada de recursos financeiros. Ou seja, os agentes não podem negociar o ativo desmedidamente, suas ações definidas entre demandar ou ofertar serão pautadas por uma quantidade finita de dinheiro e de ativos. Tais quantidades serão incorporadas no modelo pelas variáveis $M_{j,k}$, que representa o

volume de dinheiro que o agente j possui no tempo t_k , e $A_{j,k}$, que representa o volume de ativos, em valor monetário, que o agente j possui em sua carteira no tempo t_k .

A evolução da demanda e oferta $x_{j,k}$ de cada agente depende da sua própria conduta¹, da conduta dos outros agentes desse mercado e do preço do ativo, bem como dos recursos que possui, a partir da consideração de dois aspectos. O primeiro é descrito pela equação

$$\frac{x_{j,k+1} - x_{j,k}}{\Delta t} = -\alpha_j x_{j,k} + \beta_j \sum_{i=1}^N x_{i,k} - \gamma_j (\log P_k - \log P_f), \quad i \leq j \leq N, \quad k \geq 0. \quad (25)$$

O termo $-\alpha_j x_{j,k}$ está relacionado a uma atitude comportamental, de aversão ao risco, dos agentes. Neste sentido é vinculado a uma interpretação de limitação da racionalidade dos mesmos. Este termo trabalha no sentido de diminuir a conduta atual do agente, com o intuito de que o mesmo não cometa excessos nas suas transações. Já o termo $-\gamma_j (\log P_k - \log P_f)$, por sua vez, torna os agentes sensíveis a uma avaliação direta sobre o preço do ativo, onde γ_j é uma constante arbitrária maior ou igual a zero, que mensura o grau da sensibilidade do agente j com relação ao desvio do preço em relação ao preço justo do ativo. É evidente que o conceito de preço justo é uma idealização². Se o preço do ativo está acima de P_f , o agente j fica propenso a vender o ativo em questão, pois, sendo racional, ele auferir ganhos, e vislumbra a possibilidade de lucro ao vender o ativo acima do preço justo para o mercado. Neste sentido, o termo $-\gamma_j (\log P_k - \log P_f) < 0$ deve impactar a decisão do agente j em direção a ofertar o ativo. Em contrapartida, se o preço do ativo está abaixo de P_f , o agente j fica propenso a comprar o ativo em questão, pois continua auferindo ganhos, e vislumbra a possibilidade de lucros comprando o ativo abaixo do preço justo para o mercado. Já neste sentido, o termo $-\gamma_j (\log P_k - \log P_f) > 0$ deverá impactar a decisão do agente j em direção a demandar o ativo. Por fim, os termos $\beta_j \sum_{i=1}^N x_{i,k}$ inserem no modelo uma abordagem que explora a análise de curto prazo dos agentes com relação à expectativa do preço do ativo no próximo passo de tempo (P_{k+1}). Uma vez que a informação é pública e os agentes são racionais, eles podem determinar o valor esperado do preço futuro do ativo P_{k+1} no curto prazo. Para tanto, utilizam a equação de preços dada em (24), onde

$$E[\log P_{k+1}] = \log P_{k+1} = \log P_k + \omega \Delta t \sum_{j=1}^N x_{j,k}, \quad k \geq 0. \quad (26)$$

O desvio do preço atual em relação ao preço esperado para o próximo passo de tempo é dado por

$$\log P_k - E[\log P_{k+1}] = -\omega \Delta t \sum_{j=1}^N x_{j,k}. \quad (27)$$

O termo $\beta_j \sum_{i=1}^N x_{i,k}$ é proporcional a tal desvio, sendo os $\beta_j > 0$. Desta forma, uma expectativa de preço futuro maior que o atual leva o agente a demandar, o contrário é válido

¹ A palavra "conduta", visa resumir a intensão de demandar, ou ofertar, publicada pelo agente j no tempo t_k .

² Na próxima seção trataremos este conceito de forma mais realista.

também. Quanto maior a influência deste fator de curto prazo no comportamento do agente j , maior β_j .

O segundo aspecto refere-se à limitação de recursos. Primeiro, para que o agente publique sua demanda, ou oferta, é necessário verificar se seus recursos financeiros são suficientes para garantir o negócio, ou seja, $M_{j,k} \geq x_{j,k}$, no caso de demandar, ou $A_{j,k} \geq |x_{j,k}|$, no caso de ofertar. Em caso contrário, quando essas inequações não forem satisfeitas, o valor de $x_{j,k}$ será corrigido de acordo com o limite de recursos que detém. Afinal sua conduta deve ser compatível com a quantidade de recursos disponíveis em sua carteira. Não há alavancagem no modelo.

A efetivação de compra ou venda está, neste modelo, restrita aos limites de recursos do próprio mercado. Estamos falando do equilíbrio entre demanda e oferta. Denotaremos por $S(t_k)$ e $D(t_k)$ a oferta e a demanda total do mercado, publicada pelos agentes no tempo t_k . Haverá situações em que as ofertas publicadas por um grupo de agentes não serão suficientes para satisfazer o interesse de demanda dos demais, e vice-versa. Essas situações ocorrem quando temos um excesso na demanda, $D(t_k) > S(t_k)$, ou, em caso contrário, $D(t_k) < S(t_k)$, um excesso na oferta. As transações poderão ser concretizadas de acordo com o *total* demandado e ofertado, somente se os recursos disponíveis no mercado estiverem em consonância com as ordens publicadas pelos agentes $D(t_k) = S(t_k)$. Quando ocorrer o desequilíbrio entre as ordens de compra e venda publicadas pelos agentes, vamos utilizar um índice que visa ajustar essas diferenças, a fim de calcular os valores das negociações efetivamente realizadas

$$(x_{j,k})_R = i_{S,D} \left(\sum_{j=1}^N x_{j,k} \right), \quad (28)$$

onde $i_{S,D}$ pode assumir dois valores distintos, dados por

$$\begin{aligned} i_D &= \frac{S(t_k)}{D(t_k)} & \text{se } D(t_k) > S(t_k), & \quad \text{ou} \\ i_S &= \frac{D(t_k)}{S(t_k)} & \text{se } S(t_k) > D(t_k). \end{aligned} \quad (29)$$

Desta forma, o total realizado pelo lado da oferta será equilibrado com o total realizado pelo lado da demanda.

Como garantimos que as características, discutidas aqui, são equilibradas, a transação do agente j é concretizada no tempo t_k . Assim deixa de ser uma intenção e passa a ser uma ação. Logo, os valores de $M_{j,k}$ e $A_{j,k}$ devem ser recalculados, baseados no valor de $(x_{j,k})_R$. É importante ressaltar que as variáveis $M_{j,k}$ e $A_{j,k}$ assumirão valor zero, caso o agente precise usar todo seu dinheiro, ou no caso de precisar vender todos os seus ativos.

4.2 O Modelo com estocasticidade

A dinâmica originada do modelo descrito na [Seção 4.1](#) depende apenas da conduta dos agentes e do preço. Baseia-se em processos endógenos e é claramente determinista. Embora tais processos possam existir em mercados reais, não podem constituir a totalidade dos processos que os impulsionam. Sabemos que, em mercados reais, os agentes não têm a mesma competência para tratar a informação que chega até eles e que tipos diferentes de estímulos vêm do mundo exterior, influenciando o mercado de formas praticamente imprevisíveis. Com o objetivo de incorporar tais características no modelo sem perder a possibilidade de estudar as consequências dos processos descritos na seção anterior, trataremos o sistema como aberto, introduzindo dois tipos de aleatoriedade.

4.2.1 Aleatoriedade endógena

A primeira aleatoriedade trata a assimetria no tratamento da informação que existe entre os agentes. Apesar dos agentes seguirem suas expectativas baseados num preço que consideram justo, cada agente detém uma bagagem de informação e uma forma distinta de tratar a nova informação que absorvem, o que torna a dinâmica de determinação do preço, que cada agente considerada como o justo, possivelmente diversificada. Afinal, é possível que os agentes avaliem o preço justo de maneiras diferentes, podendo assim dizer que, no que tange à avaliação dos agentes, não existe um único preço justo, e, sim, um conjunto de preços justos que cada agente j determina como sendo, no seu ponto de vista, o verdadeiro. Contudo, uma vez que pressupomos a racionalidade dos mesmos, podemos inferir que, apesar de avaliarem o preço justo de formas distintas, todos caminham na direção do preço justo idealizado P_f . Nesta abordagem, a *eficiência* está diretamente ligada à informação. Agentes com maior habilidade em tratar a informação são mais eficientes, ou seja, fazem a avaliação do seu P_j de forma mais assertiva, resultando num valor próximo de P_f . Outros são, por sua vez, menos eficientes, pois detém menor habilidade em tratar a informação, avaliam o seu P_j com menos acurácia, logo determinam um valor mais afastado de P_f . Assim, para incorporar o mecanismo da eficiência, discutido aqui, vamos definir esse conjunto de preços justos determinando um valor distinto para cada agente, logo

$$P_j = P_f[1 + \xi\phi_j] \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq N. \quad (30)$$

Cada um dos valores do vetor P_j serão determinados pela influência relativa de um termo estocástico ($\xi\phi_j$) sobre P_f . Neste termo, cada ϕ_j é uma variável aleatória com distribuição normal, que detém média igual a zero e variância dada por σ_j . Cada σ_j é obtido aleatoriamente, através de uma distribuição uniforme, e será utilizado como um *proxy*³ da eficiência do agente em avaliar o preço justo. O parâmetro ξ determina a faixa de valores

³ A palavra *proxy* é utilizada no vocabulário econômico para substituir a representação de um termo ou medida, por outro termo ou medida.

mais prováveis para P_j . Pode-se perceber que o valor esperado dos valores presentes no vetor de preços justos dos agentes $E[P_j]$ é P_f . Pretendemos que cada agente determine o seu P_j aleatoriamente em distribuições que possuam a mesma média (P_f), mas que se distingam com relação a suas variâncias (σ_j). Como pressupomos a racionalidade dos agentes, garantimos que os mesmos sempre procurem, em média, o preço justo idealizado P_f , todavia a assimetria no tratamento da informação torna os agentes mais ou menos eficientes. Logo, variâncias maiores determinam agentes *menos eficientes*, enquanto variâncias menores determinam agentes *mais eficientes*.

4.2.2 Aleatoriedade exógena

O outro tipo de aleatoriedade é de natureza macroeconômica. Neste contexto, uma variável estocástica influencia a dinâmica através de impactos sobre o preço justo idealizado P_f . Tais impactos pretendem modelar eventos que alteram a percepção dos agentes sobre o preço justo P_j , como, por exemplo, desastres naturais, mudanças políticas, desenvolvimentos tecnológicos, fusão, falência ou escândalos que envolvam grandes empresas. Esta aleatoriedade é inserida no modelo da seguinte forma: a cada passo de tempo, há uma chance para o preço justo verdadeiro P_f ser modificado; a probabilidade é p . Quando a mudança é realizada, o novo valor é o anterior, multiplicado por $e^{\nu\lambda_l}$, onde ν é um parâmetro para ajustar o tamanho médio da variação e λ_l ($l \geq 0$) são variáveis aleatórias independentes distribuídas de acordo com uma distribuição normal padrão. Assim, a variação no logaritmo do preço considerado justo segue uma distribuição normal. A mudança de P_f gera uma alteração no vetor de preços justos P_j que é recalculado para todos os agentes. Quando o preço justo idealizado muda, temos um novo preço justo dado por $P_f e^{\nu\lambda_l}$, que assumirá o papel de P_f na equação (30). Neste momento, os novos P_j devem ser recalculados, com o novo P_f e novas realizações da variável estocástica ϕ_j . Assim, estamos considerando que, uma vez que a variação no logaritmo do preço justo idealizado é

$$\ln(e^{\nu\lambda_l} P_f) - \ln P_f = \nu\lambda_l, \quad (31)$$

o evento de natureza macroeconômica, que promoveu a mudança do P_f , criou nova informação para os agentes, contudo não mudou a eficiência dos mesmos em tratar essa nova informação. Assim, os valores atribuídos às variâncias σ_j se mantêm inalterados, garantindo que os agentes mantenham a mesma eficiência em tratar a informação, determinada no início da dinâmica.

5 Explorando o modelo

Existem muitas possibilidades para explorar o modelo, desta forma, nas seções seguintes apontaremos uma abordagem particular que consideramos interessante para analisar o mesmo. Vamos explorar o modelo sem estocasticidade, inserindo a mesma gradativamente (vide [Seção 5.2](#)) com o objetivo de compreender como essas aleatoriedades impactam a dinâmica de preços. Na sequência, identificaremos como a limitação de recursos financeiros, juntamente com a assimetria no tratamento da informação, provoca uma mudança na riqueza e no risco a que o agente está exposto. Por fim, com o intuito de verificar as correlações de longo alcance, faremos uma análise do espectro multifractal da dinâmica de preços.

5.1 Dinâmica sem estocasticidade

Como descrito no capítulo anterior, as relações de influência entre os agentes e entre estes e o preço são definidas, para a versão discreta do modelo, pelos parâmetros α_j , β_j , γ_j e μ presentes no sistemas de $N + 1$ equações. Em nossas simulações, definimos um mercado com cem agentes ($N = 100$). Nas dinâmicas que iremos analisar aqui, os valores numéricos dos parâmetros

$$\alpha_j = 500, \quad \beta_j = \frac{1}{\sqrt{N-1}}, \quad \gamma_j = \frac{1000}{\sqrt{N}}, \quad \text{e} \quad \omega = \frac{1000}{\sqrt{N}} \quad (32)$$

se manterão os mesmos, para todos os agentes. Nesta primeira proposta, vamos analisar a dinâmica endógena apresentada na [Seção 4.1](#). Para que possamos observar apenas a dinâmica endógena do modelo, vamos garantir que os coeficientes ξ e ν , que determinam o impacto das duas variáveis estocásticas, ϕ_j e λ_l , sejam iguais a zero. Uma das características do nosso modelo é o fato de levar em conta a quantidade disponível de recursos financeiros dos agentes, dada por A_j e M_j , sendo estas, respectivamente, o total de ativos (em valor monetário) e o total de dinheiro, que cada agente j possui num tempo discreto t_k . Como estamos querendo observar apenas o comportamento determinístico do modelo, vamos criar uma condição exorbitante de recursos financeiros, de forma que os agentes sempre possam realizar a oferta, ou demanda, que publicarem. Estamos propondo a ideia de que, neste primeiro momento, não existe limitação de recursos. É importante ressaltar que também estamos determinando um preço justo idealizado (P_f) idêntico para todos os agentes. Assim, iremos começar as simulações observando unicamente o comportamento endógeno e sem aleatoriedade da dinâmica.

Observe que na [Figura 6](#) temos uma oscilação característica no início do processo, que vai amortecendo até estabilizar assintoticamente no preço justo idealizado ($P_f = 1$).

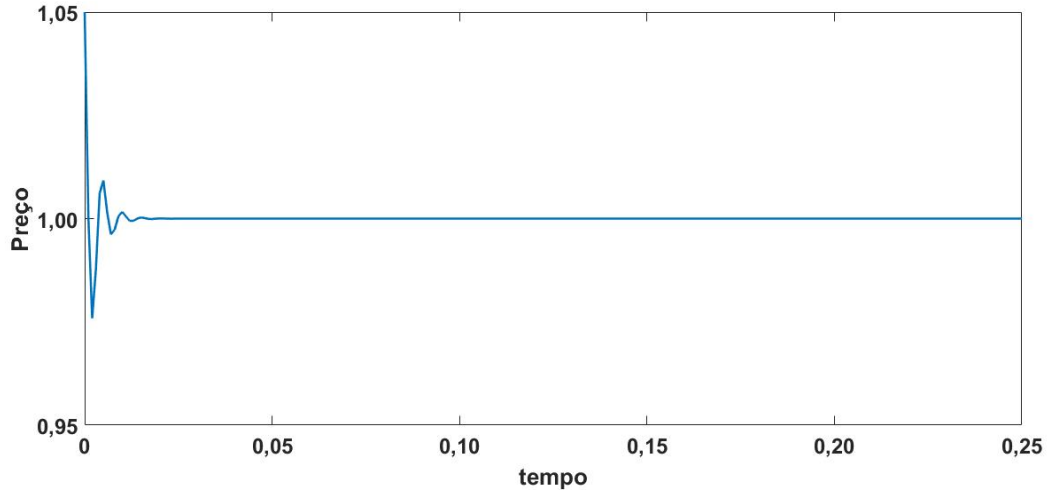


Figura 6 – Comportamento endógeno da dinâmica de preços sem aleatoriedade. Definimos o passo de tempo $\Delta t = 0,001$. O primeiro valor para o preço do ativo é $P(0) = 1,05$ e o preço justo dos agentes é idêntico, $P_j = 1,0$ para $1 \leq j \leq 100$. Os termos que determinam os recursos financeiros são iguais para todos os agentes, logo $A_j = M_j = 10.500$ para $1 \leq j \leq 100$, correspondendo à quantidade de 10.000 ativos.

Nesta simulação, o preço é um componente com autocorreção, e rapidamente se ajustará a uma cotação de equilíbrio, que corresponde ao preço justo idealizado. De acordo com [Smith \(1994\)](#), em condições de simetria de informação e competição perfeita, o preço do ativo se equilibra naturalmente com o preço considerado justo.

Com o objetivo de analisar melhor os resultados da [Figura 6](#), uma aproximação contínua foi realizada. Para tanto, consideramos o tempo como uma variável contínua e tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$ nas equações (24) e (25). Assim temos as seguintes expressões:

$$\frac{dx_j}{dt} = -a_j x_j(t) + b_j \sum_{i=1}^N x_i(t) - c_j (\log P(t) - \log P_f), \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0, \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt} \log P = \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = m \sum_{j=1}^N x_j(t), \quad (34)$$

onde os parâmetros a_j , b_j , c_j e m são positivos. Admitindo que P_f não irá variar com o tempo, podemos escrever as equações (33) e (34) como

$$\frac{d}{dt} X = AX, \quad (35)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & b_1 & -c_1 \\ b_2 & -a_2 + b_2 & \cdots & b_2 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_N & b_N & \cdots & -a_N + b_N & -c_N \\ m & m & \cdots & m & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \\ x_{N+1}(t) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

e $x_{N+1}(t) = \log P(t) - \log P_f$ é o desvio logarítmico do preço do ativo com relação ao preço considerado justo pelos agentes. O significado dos parâmetros na equações (24) e (25) pode ser melhor compreendidos a partir da situação simétrica¹ em que todos os agentes reagem de forma idêntica aos estímulos que recebem: $a_j = a$, $b_j = b$ e $c_j = c$, para $1 \leq j \leq N$. Para este caso, encontramos a equação diferencial do oscilador harmônico livre para o desvio logarítmico do preço (vide [Apêndice A](#)):

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_{N+1}}{dt} + \kappa x_{N+1} = 0, \quad (37)$$

onde

$$\Gamma = [a - (N - 1)b] \quad \text{e} \quad \kappa = cmN. \quad (38)$$

Podemos perceber que κ cumpre o mesmo papel da constante de mola em um sistema massa-mola-amortecedor. Assim, uma vez que κ depende de c e m , vemos que a relação entre o preço e a demanda ou oferta dos agentes está relacionada a uma força de restauração rumo a um desvio logarítmico de preço igual a zero. Se a constante Γ for positiva, temos amortecimento viscoso; caso a constante Γ seja negativa, podemos associar a uma força na mesma direção da velocidade. Uma vez que a é positivo, ela sempre contribui para o amortecimento. O parâmetro b , por outro lado, contribui para uma força na direção da velocidade.

A equação (37) tem como solução geral, conforme demonstrado no [Apêndice A](#),

$$\begin{aligned} x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 e^{st} + C_2 e^{-st}), & \text{para } (\Gamma/2)^2 > \kappa, \\ x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 + C_2 t), & \text{para } (\Gamma/2)^2 = \kappa, \\ x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t), & \text{para } (\Gamma/2)^2 < \kappa, \end{aligned} \quad (39)$$

onde

$$r = -\Gamma/2, \quad s = \sqrt{(\Gamma/2)^2 - \kappa}, \quad \theta = \sqrt{\kappa - (\Gamma/2)^2}, \quad (40)$$

C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Vamos usar a solução apontada para sondar alguns casos esclarecedores. Se os agentes forem extremamente sensíveis à expectativa de curto prazo sobre o preço futuro, ou seja, o parâmetro b assuma valores altos, e tal efeito prevaleça sobre as consequências da atitude de aversão ao risco $[(N - 1)b > a]$, então r será positivo e temos uma situação instável, onde $|x_{N+1}(t)|$ pode atingir valores arbitrariamente altos; isso pode ser associado ao *comportamento de manada* verificado em mercados reais, que, por evidências, não dura longos períodos de tempo. Se os agentes forem indiferentes à expectativa de curto prazo sobre o preço futuro e não houver atitude de aversão ao risco, então $r = 0$, logo o preço oscila sem amortecimento em torno de P_f ; isso também pode acontecer no caso da expectativa de curto prazo sobre o preço futuro ter efeitos equivalentes aos da aversão ao risco $[(N - 1)b = a]$. Quando os resultados da aversão ao risco são mais

¹ Esta situação é considerada simétrica devido ao fato de todos os agentes possuírem os parâmetros a_j , b_j e c_j com valores idênticos. Ou seja, a simetria refere-se às características dos agentes.

fortes do que os das expectativas de curto prazo dos agentes sobre o preço futuro, obtemos $r < 0$, o que leva a uma dinâmica amortecida onde o preço tende assintoticamente para P_f ; a presença de oscilações características da dinâmica subamortecida depende do valor de κ em comparação com $(\Gamma/2)^2$; fatores que levam a oscilações são agentes altamente sensíveis ao preço, preços altamente sensíveis ao excesso de demanda, e baixos efeitos da disputa entre a aversão ao risco e a expectativa de curto prazo sobre o preço.

Evidentemente, a dinâmica suave descrita acima não corresponde à dinâmica do mercado real, no entanto, ela ajuda a lançar luz sobre os processos que podem ocorrer durante intervalos limitados. Note que κ está relacionado diretamente à avaliação fundamentalista do preço justo e Γ à dois fatores: a aversão ao risco, com origem em componente psicológica, e a avaliação de curto prazo, relacionado ao comportamento especulativo. É talvez contra intuitivo que o amortecimento das oscilações só é possível, neste modelo, a partir da existência dos termos não fundamentalistas. Oscilações ocorrem devido a presença do termo de ordem dois na [Equação \(37\)](#). Voltando a analogia com o sistema físico massa-mola-amortecedor, percebemos que este termo representa uma componente de inércia na evolução do preço. Ressaltamos que a existência de tal componente em dinâmicas de mercados reais merece ser averiguada. Os efeitos desses processos podem ser adicionados aos efeitos de outros processos, como no modelo com variáveis estocásticas explorado na próxima seção.

5.2 Dinâmica com estocasticidade

Do ponto de vista econômico, não é possível determinar o preço justo com exatidão, pois sua definição pressupõe muitas considerações, o que torna sua mensuração algo muito oneroso e de difícil precisão ([CATTY, 2013](#)). Desta forma, nesta próxima proposta, vamos incluir as duas aleatoriedades apresentadas na [Seção 4.2](#). Traremos para a simulação a ideia da assimetria no tratamento da informação, determinada pela maior, ou menor, eficiência (σ_j) dos agentes em definir o preço justo (P_j) que cada um julga como sendo o verdadeiro, tendo em vista a busca pelo real preço justo (*idealizado*). Além disso, vamos também ajustar a dinâmica com os parâmetros que permitem que o modelo apresente uma quantidade de recursos financeiros limitada para cada agente, ou seja, vamos reduzir consideravelmente os valores de A_j e M_j , comparados aos valores apresentados na seção anterior, que na prática correspondia a recursos ilimitados. Incluiremos, também, as interferências externas, alheias ao mercado, que mudam o valor do preço justo idealizado P_f , que, por sua vez, altera também os P_j dos agentes.

5.2.1 Dinâmica com aleatoriedade endógena e limitação de recursos

Para conseguir analisar gradativamente como ocorrem as mudanças na dinâmica de preços ao introduzir a variável estocástica ϕ_j , optamos por incorporar inicialmente a aleatoriedade endógena determinando um valor finito para ξ (vide equação (30)). Na [Figura 7](#) podemos perceber que, ao introduzir a aleatoriedade endógena na dinâmica, apresentada na [Subseção 4.2.1](#), surgem novas oscilações amortecidas em diferentes momentos da dinâmica. Observe que a primeira oscilação é a que apresenta maior amplitude, enquanto as próximas oscilações vão se tornando cada vez menores. Após cada oscilação, temos um período de equilíbrio assintótico.

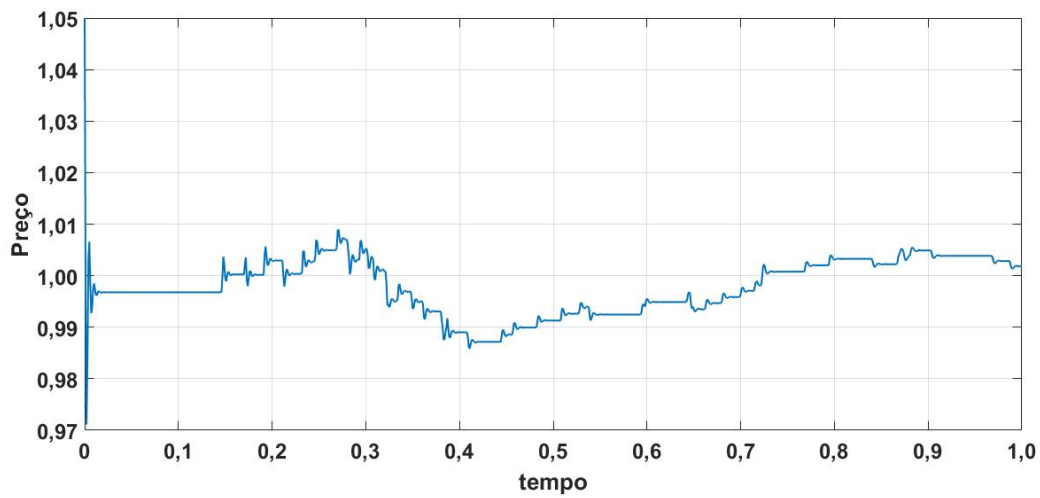


Figura 7 – Comportamento endógeno da dinâmica de preços considerando estocasticidade no vetor de preços justos P_j , para $\xi = 0,2$, e demais parâmetros dados na [Equação \(32\)](#). A limitação de recursos é determinada pelos parâmetros $A_j(0) = M_j(0) = 10,5$ para $1 \leq j \leq 100$. O passo de tempo é $\Delta t = 0,001$ e o primeiro valor para o preço do ativo é $P(0) = 1,05$.

A efetiva limitação de recursos dada pelos valores escolhidos de A_j e M_j , juntamente com a aleatoriedade endógena do modelo, leva a uma dinâmica de preços rica. Para compreender o que promove essas oscilações, em tempos distintos, analisaremos o modelo do ponto de vista microeconômico. Para tanto, reduziremos esse mercado drasticamente para apenas quatro agentes. Vamos, assim, analisar a dinâmica de preços e o volume, individual, de recursos financeiros desses agentes.

Na [Figura 8](#) temos no total oito gráficos divididos em duas colunas. Na coluna da direita, há quatro gráficos que representam a dinâmica de preços desse pequeno mercado de apenas quatro agentes. As retas horizontais, pontilhadas, presentes nos quatro gráficos, representam, respectivamente, o preço justo de cada agente: $\{1,1155; 0,9957; 0,9829; 1,1924\}$. Observe que, apesar do mercado possuir apenas quatro agentes, conseguimos perceber que a dinâmica de preços (gráficos presentes na coluna da direita), apresenta três oscila-

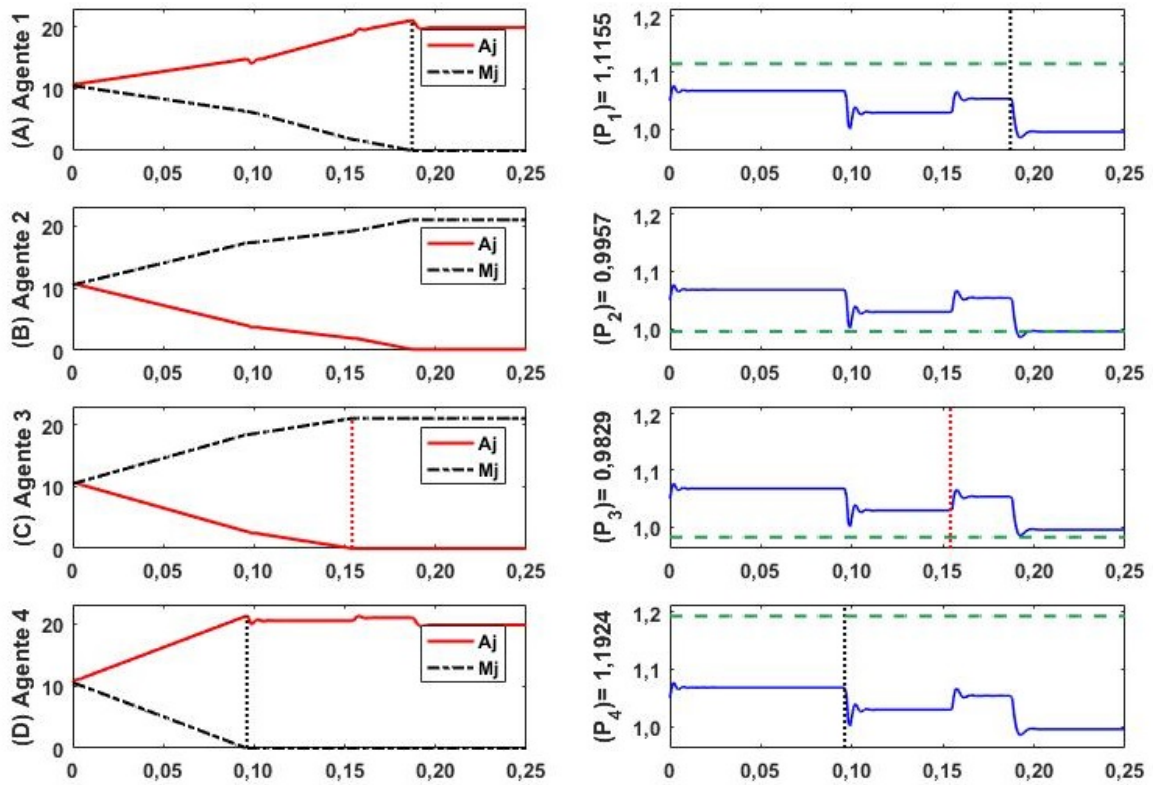


Figura 8 – Comportamento aleatório endógeno da dinâmica de preços para um mercado reduzido de apenas quatro agentes. O vetor de preços justos dado pelo termo estocástico $\xi\phi_j$ é $P_j = \{1,1155; 0,9957; 0,9829; 1,1924\}$, com $\xi = 0,2$. A assimetria no tratamento da informação é modelada por um vetor de variâncias aleatórias $\sigma_j = \{0,3495; 0,3679; 0,5471; 0,6742\}$, obtidas através de uma distribuição aleatória uniforme entre $[0,1]$. A limitação de recursos é determinada pelos termos $A_j = M_j = 10,5$ para $j = \{1, 2, 3, 4\}$, sendo a evolução dos mesmos apresentada, respectivamente, nos gráficos da esquerda (A), (B), (C) e (D). Os gráficos da direita (P_1), (P_2), (P_3) e (P_4) apresentam a dinâmica de preços $P(t)$ (linha sólida azul) e o P_j de cada agente (linha pontilhada verde). As linhas verticais pontilhadas representam momentos específicos $t = \{0,096; 0,154; 0,187\}$ que cada agente j zerou um de seus recursos, sendo $M_j = 0$ (cor preta) ou $A_j = 0$ (cor vermelha). O passo de tempo é $\Delta t = 0,001$ e o primeiro valor para o preço do ativo é $P(0) = 1,05$

ções, que ocorrem em momentos diferentes. Também é possível notar que no longo prazo a dinâmica se estabilizará em $P_2 = 0,9957$, sendo este o preço justo do agente $j = 2$. Para compreender melhor o que provoca essas oscilações na dinâmica de preços, avaliamos os recursos financeiros, A_j e M_j , de cada agente $j = \{1, 2, 3, 4\}$, durante toda a linha temporal da dinâmica. Tais recursos foram apresentados nos outros quatro gráficos, posicionados na coluna da esquerda, da Figura 8. Os gráficos (A), (B), (C) e (D) representam, respectivamente, a evolução dos recursos financeiros dos agentes 1, 2, 3, e 4. Em cada um desses gráficos a linha sólida vermelha representa a evolução do volume de ativos

A_j , em valor monetário, e a linha pontilhada preta, a evolução do volume de dinheiro M_j . Note que, três destes gráficos (D, C e A) apresentam, em momentos distintos da dinâmica $t = \{0,096; 0,154; 0,187\}$, o esgotamento de um de seus volumes financeiros. Tais instantes foram ressaltados nos gráficos por retas verticais pontilhadas. O primeiro deles, presente no gráfico (D), corresponde ao volume de recursos financeiros do agente 4. Este agente começou suas negociações comprando o ativo, pois seu preço justo $P_4 = 1,1924$ encontrava-se acima do preço inicial do ativo $P(0) = 1,05$. Assim, buscando auferir lucro, o agente inicia suas transações demandando o ativo. Afinal, sendo racional, o agente avalia que o ativo está sendo subvalorizado, ou seja, está sendo negociado num valor inferior ao que ele considera justo para o ativo em questão. A conduta de demandar do agente se mantém até $t = 0,096$, onde seu dinheiro se finda $M_4 = 0$. Neste instante, o agente não pode mais comprar, apesar de continuar avaliando que essa conduta deve-se manter, pois $P_4 > P(0,096)$: como o agente 4 não detém mais dinheiro, ele é obrigado a parar suas negociações (*compras*). Tal comportamento provoca a primeira oscilação na dinâmica de preços (vide gráfico P_4 , presente na coluna da direita, na [Figura 8](#)).

Após a primeira perturbação na dinâmica de preços, percebemos que os agentes 1, 2 e 3, continuam suas negociações, entretanto, o volume dessas transações muda. Tal característica é possível de ser percebida através das novas inclinações nas curvas de A_j e M_j presentes nos gráficos (A, B e C), a partir do instante $t = 0,096$. Veja que em (B) e (C) a inclinação de A_j diminuiu, ao passo que em (A) a inclinação de M_j aumentou. No instante $t = 0,096$ os agentes 2 e 3 se mantem ofertando o ativo, uma vez que avaliam que o ativo em questão está supervalorizado, pois $P_2 < P(t)$ e $P_3 < P(t)$. Porém, como o desvio do preço praticado no próximo equilíbrio assintótico com relação aos P_j dos agentes, em módulo, diminuiu, eles avaliam que, apesar de manterem sua conduta de vender, esses volumes negociados devem ser menores. Por outro lado, a evasão do agente 4 leva a diminuição da liquidez dos agentes que querem continuar vendendo. O agente 1 mantém sua conduta de demandar, uma vez que $P_1 > P(t)$. Porém, o desvio do preço praticado assintótico, com relação a P_1 , em módulo, é maior. Desta forma, o agente 1, que já avaliava antes da perturbação que o ativo estava subvalorizado, com a queda no preço praticado, ele aumenta sua conduta de compra, adquirindo os ativos que os outros agentes estão vendendo, acentuando a inclinação da curva M_j no gráfico (A). Esse comportamento, entre os três agentes, se mantém, até que a quantidade de ativos do agente 3 finde, $A_3 = 0$, no momento $t = 0,154$. Assim este agente é o segundo a ser obrigado a parar suas negociações por falta de ativos. Essa nova escassez de recursos promove a segunda oscilação na dinâmica (vide reta vertical pontilhada, no gráfico P_3 , presente na coluna da direita, na [Figura 8](#)).

Dada a segunda oscilação na dinâmica de preços, o novo preço assintótico $P(t)$ é maior que o anterior, o que altera novamente o volume de transações, que agora serão concentradas entre os agentes 1, comprando, e 2 vendendo. Novamente as inclinações das

curvas A_j e M_j , nos gráficos (A e B), mudam. Assim a compra e a venda entre os dois agentes se mantém até que os recursos financeiros de um dos dois agentes se esgote. Tal fato ocorre no tempo $t = 0,187$. Neste momento, a quantidade de dinheiro do agente 1 acaba. Temos, assim, o terceiro agente sendo obrigado a parar suas transações por falta de recursos financeiros. Neste ponto, devido a escassez de recursos do agente 1, ocorre a terceira e última oscilação na dinâmica, que irá amortecer no preço justo do agente 2, sendo então $P_2 = 0,9957$ o preço de equilíbrio (vide reta vertical pontilhada, no gráfico P_1 , e linha horizontal pontilhada, no gráfico P_2 , presente na coluna da direita, na [Figura 8](#)). Observe que a dinâmica do preço é determinada pela oferta e demanda, e não pelas transações efetivadas. Por este motivo é que o preço continua variando mesmo após a ausência de negociações. É a demanda insatisfeita do agente que sobrou a responsável em levar a dinâmica do preço assintoticamente para o preço que este considera justo.

Devido à polarização de recursos durante o processo, a dinâmica do preço $P(t)$ muda abruptamente três vezes, gerando novas oscilações características. Observe que todas as oscilações presentes na dinâmica de preços tendem a um equilíbrio assintótico, que é rompido devido à escassez de recursos de um agente específico, seja esta dada em ativos ($A_j = 0$) ou em dinheiro ($M_j = 0$).

Na intenção de interpretar melhor os gráficos apresentados na [Figura 8](#), adaptamos novamente o modelo por meio de uma aproximação contínua (vide [Seção 5.1](#)). Entretanto, nesta nova aproximação estamos considerando que cada agente terá para si um valor diferente do preço que considera justo para o ativo. Portanto, abolimos o valor constante P_f , substituindo-o por um vetor de preços justos P_j , para $1 \leq j \leq N$, onde cada agente terá um preço justo diferente. Assim, a expressão (33) passa a ser

$$\frac{dx_j}{dt} = -a_j x_j(t) + b_j \sum_{i=1}^N x_i(t) - c_j (\log P(t) - \log P_j), \quad 1 \leq j \leq N, \quad \text{e} \quad t \geq 0, \quad (41)$$

e reproduzimos a equação (34) aqui para referência

$$\frac{d}{dt} \log P = \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = m \sum_{j=1}^N x_j(t). \quad (42)$$

Assumindo valores diferentes para P_j , podemos reescrever as equações (41) e (42) como

$$\frac{d}{dt} X = AX + J, \quad (43)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & b_1 & -c_1 \\ b_2 & -a_2 + b_2 & \cdots & b_2 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_N & b_N & \cdots & -a_N + b_N & -c_N \\ m & m & \cdots & m & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \\ x_{N+1}(t) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} c \log P_1 \\ c \log P_2 \\ \vdots \\ c \log P_N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

e $x_{N+1}(t) = \log P(t)$. A partir das equações (41) e (42), chegamos à equação diferencial não homogênea (vide [Apêndice A](#))

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_{N+1}}{dt} + \kappa x_{N+1} = \Omega, \quad (45)$$

onde Γ e κ se mantêm idênticos aos apresentados na equação (38), e

$$\Omega = cm \left(\sum_{j=1}^N \log P_j \right). \quad (46)$$

Como demonstrado no [Apêndice A](#), a equação (45) apresenta, como solução geral,

$$x_{N+1}(t) = x_H + x_P, \quad (47)$$

sendo x_H a solução geral da equação homogênea equivalente, idêntica à apresentada na expressão (39),

$$\begin{aligned} x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 e^{st} + C_2 e^{-st}), & \text{para } (\Gamma/2)^2 > \kappa, \\ x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 + C_2 t), & \text{para } (\Gamma/2)^2 = \kappa, \\ x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t), & \text{para } (\Gamma/2)^2 < \kappa, \end{aligned} \quad (48)$$

onde,

$$r = -\Gamma/2, \quad s = \sqrt{(\Gamma/2)^2 - \kappa}, \quad \theta = \sqrt{\kappa - (\Gamma/2)^2}, \quad (49)$$

enquanto x_P é uma solução particular, sendo esta dada por

$$x_P = \frac{\sum_{j=1}^N \log P_j}{N}. \quad (50)$$

Note que a solução particular apresentada em (50) corresponde à média dos preços justos dos agentes $\overline{P_j}$.

É possível perceber na [Figura 8](#) que o equilíbrio assintótico da primeira oscilação tende à média do vetor de preços justos, sendo seu valor igual a $\frac{P_1+P_2+P_3+P_4}{4} = 1,0716$. Quando o agente 4 é forçado a parar suas negociações, devido à sua escassez de recursos, temos a primeira mudança abrupta na dinâmica de preços (em $t = 0,096$), que busca um novo equilíbrio assintótico. Neste segundo momento, o equilíbrio assintótico tende à média dos P_j dos agentes que continuaram suas transações, sendo seu valor dado por $\frac{P_1+P_2+P_3}{3} = 1,0314$. A segunda mudança abrupta na dinâmica (em $t = 0,154$) é promovida pela escassez de recursos do agente 3, que também é forçado a parar suas negociações. Desta forma, o novo equilíbrio assintótico será dado por $\frac{P_1+P_2}{2} = 1,0556$. Por fim, a terceira e última mudança abrupta (em $t = 0,187$), é dada pela escassez de recursos do agente 1, sendo este o último agente a sair do mercado. Tal fato promove o último equilíbrio assintótico, que consiste no P_j do agente 2, sendo este o único agente a se manter na dinâmica. Apesar do agente 2 não ter sofrido com a escassez de recursos, ele é obrigado a findar suas transações, devido à ausência de agentes para efetivar novos negócios neste mercado.

5.2.2 Dinâmica com aleatoriedades endógena, exógena e limitação de recursos

A aleatoriedade exógena irá acrescentar no modelo a influência dos eventos externos, de escala macroeconômica, absorvidos pelo mercado, que são refletidos no preço do ativo. Conforme descrito na [Subseção 4.2.2](#), a variável estocástica λ_l , permite que os agentes mudem sua percepção quanto ao valor que idealizam como justo para o ativo. Desta forma, para que o impacto da variável estocástica λ_l não seja exagerado, ajustamos o tamanho deste choque através do coeficiente $\nu = 0,01$. É importante ressaltar que nas simulações apresentadas consideramos que tal impacto ocorrerá em instantes de tempo l aleatórios. A cada passo de tempo, a probabilidade de um choque é $p = 0,005$.

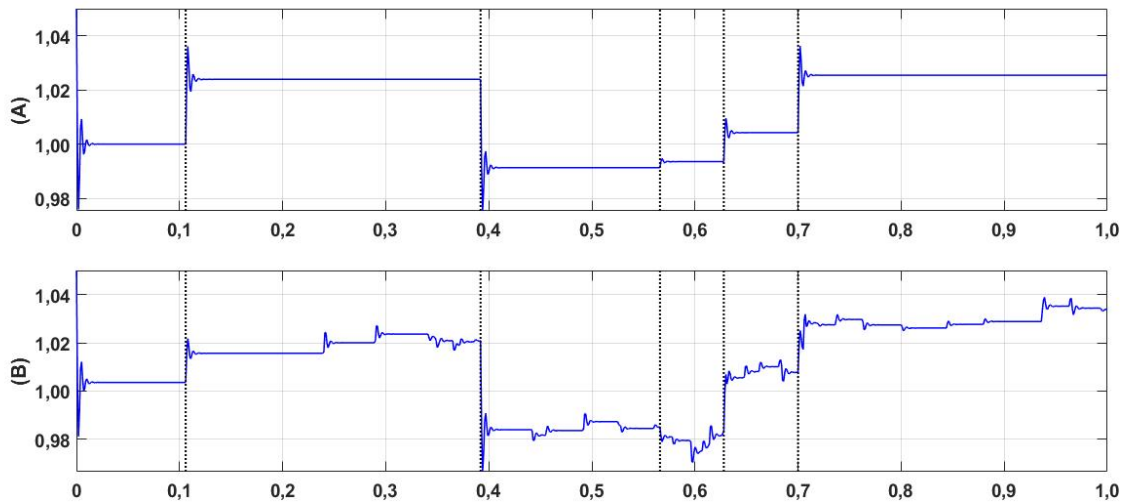


Figura 9 – Comportamento simultâneo da dinâmica de preços com a aleatoriedade exógena (A) e com aleatoriedade endógena e exógena (B). Em (A) e (B) consideramos a limitação de recursos dada pelos parâmetros $A_j(0) = M_j(0) = 10,5$ para $1 \leq j \leq N$, sendo o número de agentes $N = 100$. O passo de tempo é $\Delta t = 0,001$ e o primeiro valor para o preço do ativo é $P(0) = 1,05$. A probabilidade de ocorrer um evento de escala macroeconômica em cada passo de tempo é dada por $p = 0,005$. A variável λ_l detém distribuição normal $N[0,1]$, seu impacto é dado por $\nu = 0,01$, ocorrendo nos momentos $l = \{0,1060; 0,3920; 0,5660; 0,6280; 0,7000\}$, destacados pelas retas verticais pontilhadas. Em (A), temos todos os agentes com o mesmo preço justo idealizado, iniciado por $P_f = 1,00$, sendo seu valor alterado para $P_f = \{1,0239; 0,9913; 0,9935; 1,0042; 1,0254\}$, nos momentos destacados em l . Já em (B), temos a estocasticidade do vetor de preços justos P_j definida como o parâmetro $\xi = 0,2$. Tal vetor também é alterado nos mesmos instantes de tempo destacados em l . Os demais parâmetros são dados na [Equação \(32\)](#).

Na [Figura 9](#), temos duas dinâmicas que foram construídas simultaneamente. Na primeira situação (A), consideramos que todos os agentes possuem o mesmo preço justo idealizado (P_f), enquanto, na segunda situação (B), os agentes possuem preços justos

idealizados diferentes (P_j). O interesse aqui está em ressaltar o impacto da variável estocástica, de natureza macroeconômica, λ_t , que, embora varie com t , nas duas dinâmicas apresentará a mesma magnitude, e ocorrerá nos mesmos instantes de tempo t . Tais instantes foram destacados pelas retas verticais pontilhadas nos dois gráficos, sendo seus valores $t = \{0,1060; 0,3920; 0,5660; 0,6280; 0,7000\}$. No gráfico (A), observamos, nos tempos apresentados em t , cinco choques sobre a dinâmica de preços, alterando o seu equilíbrio assintótico. Note que o equilíbrio assintótico da dinâmica é determinado pelo preço justo idealizado dos agentes (P_f), lembrando que em (A), ele será idêntico para todos os agentes. Tais choques ocorrem porque, durante a simulação, (P_f) foi alterado cinco vezes, assumindo os valores $P_f = \{1,000; 1,0239; 0,9913; 0,9935; 1,0042; 1,0254\}$. Já no gráfico (B), percebemos, de forma sutil, os mesmos choques, nos momentos dados em t , ressaltados pelas retas verticais pontilhadas. Contudo, no intervalo temporal entre estes impactos de natureza macroeconômica, temos algumas oscilações características que mudam o equilíbrio assintótico da dinâmica de preços. Tais perturbações do equilíbrio se devem às percepções diferentes, de preços justos idealizados (P_j), dos agentes, acrescidas das limitações de recursos individuais que conduzem os mesmos a sair ou entrar no mercado. Quando ocorre escassez do patrimônio individual de um dado agente, seja esta provocada pela finitude de dinheiro ou pela finitude do volume de ativos, o agente, em particular, é forçado a parar suas transações, e desta forma, sai do mercado. Cada perturbação entre choques macroeconômicos evidencia a saída de um agente do mercado. Os agentes restantes determinam, com a média de seus preços justos idealizados (P_j), um novo equilíbrio assintótico, que poderá ser rompido em duas circunstâncias: pela escassez de recursos de outro agente ($M_j = 0$ ou $A_j = 0$) ou pelo impacto, de escala macroeconômica, sobre a percepção dos agentes com relação ao preço justo idealizado ($P_f e^{\nu \lambda_t}$). Os recursos individuais de cada agente, seja em volume de dinheiro ou ativos, limitam a influência que cada agente provoca, num determinado prazo, sobre o equilíbrio assintótico da dinâmica de preços. Quando os agentes são forçados a parar suas negociações devido a sua finitude patrimonial, o preço justo idealizado destes agentes, que não podem mais transacionar, para de influenciar o equilíbrio assintótico da dinâmica. A partir do momento em que estes agentes são retirados do mercado, o próximo equilíbrio assintótico se dará pela média da percepção do preço justo idealizado dos demais agentes, que ainda mantêm suas transações, afinal, estes ainda detêm recursos financeiros para tal. O equilíbrio perdura até que ocorra uma nova escassez de recursos ou um choque externo que atinge a percepção de todos neste mercado.

De fato, o modelo apresenta algumas particularidades, como: a forma que os agentes identificam o preço justo idealizado para o ativo, que pode assumir valores diferentes para cada um deles, além do fato de ser possível destacar na dinâmica de preços uma variação sutil, provocada pela condição patrimonial individual dos agentes ao longo do período temporal da simulação.

5.3 Avaliação da riqueza e do risco no modelo

No Mercado de Ações, os estudos das tendências de preços dos ativos são norteados por duas grandes escolas, sendo elas: a *Escola Gráfica* e a *Escola Fundamentalista*. A primeira concentra sua interpretação em gráficos, de volume e preços, pelos quais os ativos foram negociados nos pregões anteriores. Já a segunda foca sua análise nos resultados publicados pelas empresas abertas, levando em consideração o valor do ativo dentro do contexto econômico nacional e internacional (FORTUNA, 2005). O modelo aqui proposto consegue se relacionar com a interpretação das duas escolas. A *Escola Gráfica* pode ser percebida no modelo através do termo $\beta_j \sum_{i=1}^N x_{i,k}$. Este termo insere, na conduta dos agentes em demandar ou ofertar, a expectativa dos mesmos com relação ao preço do ativo no próximo passo de tempo. Embora não haja aqui uma investigação pelas séries históricas, tal comportamento se afasta do comportamento fundamentalista, tendo assim uma natureza similar à da análise técnica. Já a *Escola Fundamentalista* pode ser percebida no termo $-\gamma_j(\log P_k - \log P_f)$, que considera o desvio do preço praticado do ativo, em relação a um preço idealizado, dito como preço justo. Os dois termos citados estão presentes na Equação (25), que determina a conduta de demandar ou ofertar dos agentes.

O mercado real apresenta várias ineficiências que quebram o paradigma da *Hipótese de Mercado Eficiente* (FAMA, 1970). Os agentes fazem suas escolhas guiados, em parte, pelas diretrizes das escolas referidas, ou levados por decisões individuais, que visam equilibrar ganhos e perdas. Em qualquer uma dessas escolhas, agentes reais estão envolvidos no dilema "*risco x retorno*". Nosso modelo explora essa temática do risco e da ineficiência de mercado. Estamos trabalhando com um modelo que quantifica a ineficiência em perceber o verdadeiro valor do ativo, denominado aqui preço justo. Ele também considera uma quantidade de patrimônio dos agentes, que, por ser finita, não poderá atender sempre às escolhas dos mesmos no volume que pretendem negociar. As análises que seguem dizem respeito não apenas aos ganhos auferidos pelos agentes, mas também ao risco a que os mesmos estão submetidos, sendo estes relacionados à sua capacidade de avaliar o preço justo médio da comunidade de agentes.

5.3.1 Eficiência vs Riqueza e Eficiência vs Risco

Analisaremos aqui como a percepção de cada agente sobre o preço justo idealizado influencia o seu patrimônio individual, representado por W_j . A Figura 10 e a Figura 11 mostram a evolução da metodologia para análise da relação entre a eficiência em lidar com a informação sobre o preço considerado justo e a riqueza. A Figura 10 apresenta quatro gráficos (A), (B), (C) e (D). Nos dois gráficos posicionados à esquerda, exibimos 30 boxplots, que correspondem a 30 simulações diferentes. Já nos dois gráficos posicionados à direita, temos o último preço e o preço médio, do ativo, nas mesmas simulações dadas em (A) e (B). Em todas as simulações, os valores iniciais dos parâmetros foram mantidos idênticos aos

valores iniciais dos parâmetros apresentados no gráfico (B) da Figura 9. Todos os agentes iniciaram suas negociações com o patrimônio individual idêntico. Tal valor é determinado pela riqueza inicial de ativos dada por $A_j(0) = 10,5$, em valor monetário, acrescida de $M_j(0) = 10,5$, em dinheiro, totalizando o montante inicial de $W_j(0) = 21,0$. No gráfico (A), apresentamos as estatísticas de 30 simulações, onde consideramos, em cada uma delas, o patrimônio final de cada um dos 100 agentes, que, juntos, representam toda a riqueza do mercado. Já em (B), considerando as mesmas simulações de (A), temos as estatísticas das *médias temporais* dos patrimônios individuais. Na Figura 11, temos as estatísticas das *médias relativas temporais*, das mesmas dinâmicas citadas anteriormente. Nesta última, caracterizamos os dados como relativos: consideramos as médias dos patrimônios individuais negociados durante o período, ponderados pela riqueza total do mercado em cada passo de tempo. Tais médias serão definidas de forma mais clara no texto a seguir.

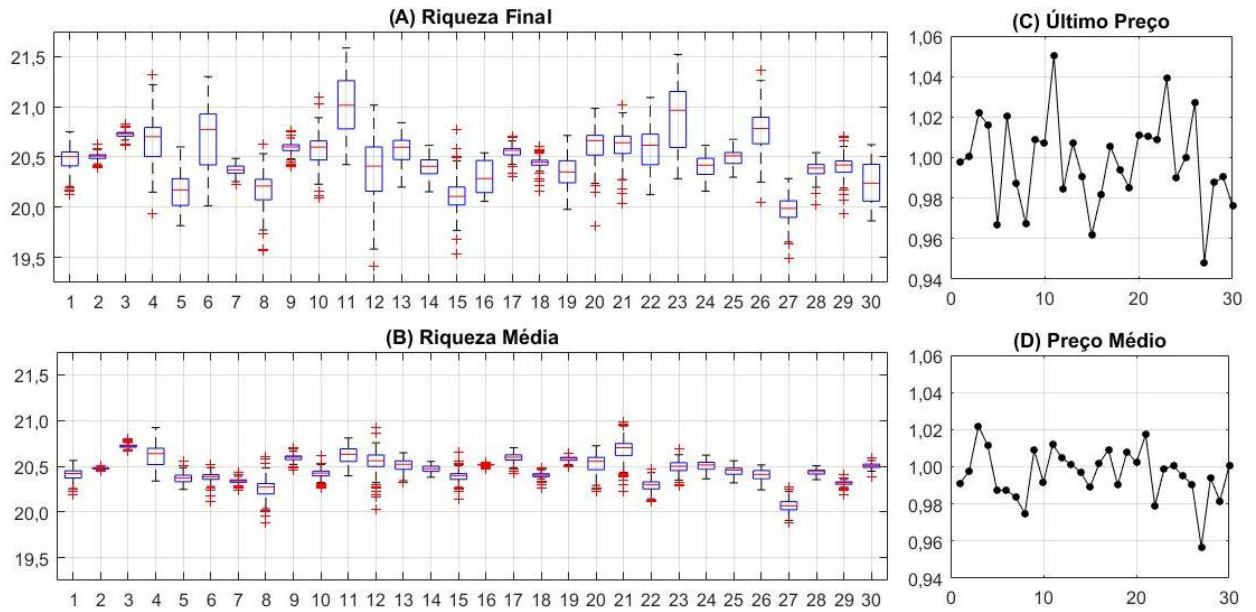


Figura 10 – Posicionados à esquerda, temos dois Boxplots de 30 amostras da riqueza, (A) final W e (B) média $\overline{W}$, de 100 agentes. Posicionados à direita, temos o último preço (C) e o preço médio (D), do ativo, em cada simulação. A condição inicial das dinâmicas que construíram as amostras apresentadas em (A) e (B) são dadas por: $N = 100$ agentes. O intervalo de tempos é $\Delta t \leq t \leq 1$, com $\Delta t = 0,001$. Os recursos individuais são $A_j(0) = M_j(0) = 10,5$, sendo a riqueza individual $W_j(0) = 21,0$, para $1 \leq j \leq 100$. O primeiro valor do preço do ativo é $P(0) = 1,05$. A probabilidade de ocorrer um evento de escala macroeconômica é definida por $p = 0,005$, $\nu = 0,01$, e a variável estocástica λ_t com distribuição normal dada por $N(0,1)$. Cada agente considera um preço justo diferente determinado pelo parâmetro $\xi = 0,2$, pelas variáveis estocásticas ϕ_j , para $1 \leq j \leq 100$. Cada variável ϕ_j possui distribuição normal dada por $N(0, \sigma_j)$, onde a variância σ_j , representa a eficiência de cada agente em perceber o preço justo idealizado ($P_f = 1,00$), sendo uma variável estocástica distribuída uniformemente no intervalo $(0,1)$.

Na intenção de verificar se as diferentes percepções do preço justo idealizado por cada um dos 100 agentes influenciam sua *performance financeira*², escolhemos primeiramente interpretar o que acontece com o volume do *patrimônio final* de cada um deles. Para tanto, construímos 30 amostras, analisadas no gráfico (A) presente na Figura 10. Note a variação entre os boxplots. Uma vez que os boxplots referem-se à escolha de um único tempo, o final, este gráfico acaba por não refletir de forma ampla a *performance financeira* dos agentes. De fato, a escolha de um único momento no tempo para análise introduz na metodologia um elemento arbitrário. Buscando mitigar tal arbitrariedade, construímos o gráfico (B). Este gráfico apresenta, também na forma de boxplots, a média da riqueza desses agentes ao longo do período de tempo compreendido no intervalo que vai $\Delta t \leq t \leq 1$, com passo $\Delta t = 0,001$. Ou seja, buscamos o valor médio da riqueza de cada agente para, assim, conseguir analisar as diferentes *performances financeiras*. Para determinar os valores apresentados em (B), calculamos

$$\overline{W_j} = \frac{\sum_t [A_j(t) + M_j(t)]}{N_P}, \quad \text{para } 1 \leq j \leq 100, \quad (51)$$

onde N_P é o número de passos de tempo em cada simulação. Observe que em (B) a variação entre as amostras ainda está presente. Contudo, apesar da alternância se manter, os boxplots que compõem as amostras apresentam menos discrepâncias em seus tamanhos, comparadas às dos boxplots de (A). As variações, entre os boxplots dos gráficos (A) e (B), em aspectos gerais, são bem parecidas, se diferenciando, de forma perceptível, na amplitude dos seus quartis centrais.

Na Figura 10, percebemos que a variação entre as amostras é fortemente influenciada pelo preço do ativo (vide gráficos à direita (C) e (D)). Afinal, em diferentes dinâmicas, o preço segue diferentes caminhos. Portanto diferentes dinâmicas apresentam riquezas de mercado diferentes. Para *agregar* dados de diferentes dinâmicas, surge a necessidade de uma medida que pondera a riqueza individual (W_j), de cada agente, pela riqueza total do mercado $\left(\sum_{j=1}^N W_j\right)$, em cada passo de tempo. Denotamos tal medida como riqueza relativa Wr_j , sendo

$$Wr_j = \frac{W_j}{\sum_{j=1}^N W_j}, \quad \text{para } 1 \leq j \leq 100, \quad (52)$$

calculada em cada passo de tempo. Para mensurar a média da riqueza relativa em todo o período temporal definido para as dinâmicas, consideramos

$$\overline{Wr_j} = \frac{\sum_t Wr_j(t)}{N_P}, \quad \text{para } 1 \leq j \leq 100. \quad (53)$$

² O termo *performance financeira* visa referenciar a inconstância do patrimônio individual de cada agente, devido as suas negociações de compra ou venda. Boa performance estará associada a uma riqueza média maior ao longo do tempo.

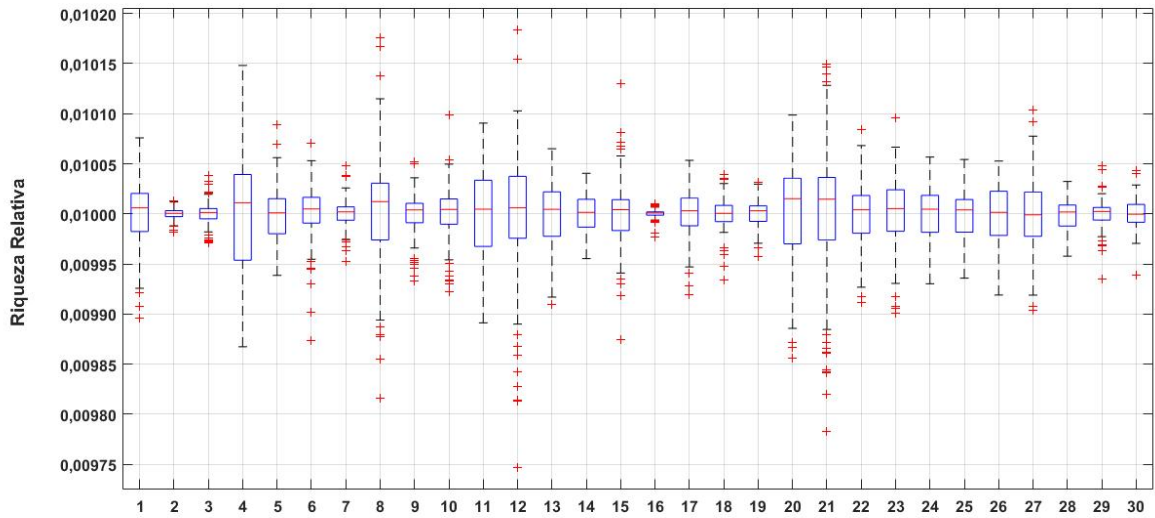


Figura 11 – Boxplots de 30 amostras da riqueza relativa média $\overline{Wr}$, de 100 agentes. A condição inicial das dinâmicas que construíram as amostras apresentadas são dadas por: $N = 100$ agentes. O intervalo de tempos é $\Delta t \leq t \leq 1$, com $\Delta t = 0,001$. Os recursos individuais são $A_j(0) = M_j(0) = 10,5$, sendo a riqueza individual $W_j(0) = 21,0$, para $1 \leq j \leq 100$. O primeiro valor do preço do ativo é $P(0) = 1,05$. A probabilidade de ocorrer um evento de escala macroeconômica é definida por $p = 0,005$, $\nu = 0,01$, e a variável estocástica λ_l com distribuição normal dada por $N(0,1)$. Cada agente considera um preço justo diferente determinado pelo parâmetro $\xi = 0,2$, pelas variáveis estocásticas ϕ_j , para $1 \leq j \leq 100$. Cada variável ϕ_j possui distribuição normal dada por $N(0, \sigma_j)$, onde a variância σ_j , representa a eficiência de cada agente em perceber o preço justo idealizado ($P_f = 1,00$), sendo uma variável estocástica distribuída uniformemente no intervalo $(0,1)$.

Observe que, na [Figura 11](#), as amostras diferem principalmente quanto ao tamanho das caixas, evidenciando amostras com amplitudes diversificadas entre o primeiro e terceiro quartis. Por outro lado, suas medianas (linha vermelha no centro das caixas) estão sutilmente alinhadas, com uma leve variação, acima do valor 0,01. O maior ganho no cálculo de Wr_j consiste que agora temos uma medida que considera a riqueza dos agentes menos dependente do preço do ativo durante a passagem de tempo. Com esta metodologia, podemos analisar se agentes com maior acurácia em perceber o verdadeiro preço justo obtiveram variações positivas em seu patrimônio relativo médio.

Ao finalizar todas as dinâmicas, as amostras agregadas apresentaram 3000 agentes, com riquezas relativas médias ($\overline{Wr_j}$) diferentes, sendo que cada agente também apresenta eficiências diferentes, dadas pelo valor da variância σ_j^3 da variável estocástica ϕ_j . Na intenção de examinar a influência da eficiência dos agentes em perceber o verdadeiro preço justo P_f , dividimos os agentes em classes, diferenciadas pelo valor de σ_j , já que o mesmo é determinado, para cada agente, aleatoriamente dentro do intervalo $(0,2)$. Assim,

³ Conforme definido na [Subseção 4.2.1](#), σ_j é aqui um *proxy* para tal eficiência.

construímos 10 classes com amplitude de 0,2, para agrupar os 3000 agentes, apresentadas no gráfico de barras (A) da Figura 12. A interpretação da eficiência está na determinação de σ_j , pois quanto menor é o seu valor, mais eficiente o agente em perceber o valor de P_f , ao passo que um valor maior de σ_j torna o agente menos eficiente em perceber P_f . Desta forma, os agentes presentes nas primeiras classes são mais eficientes que os agentes presentes nas classes finais dos gráficos contidos na Figura 12.

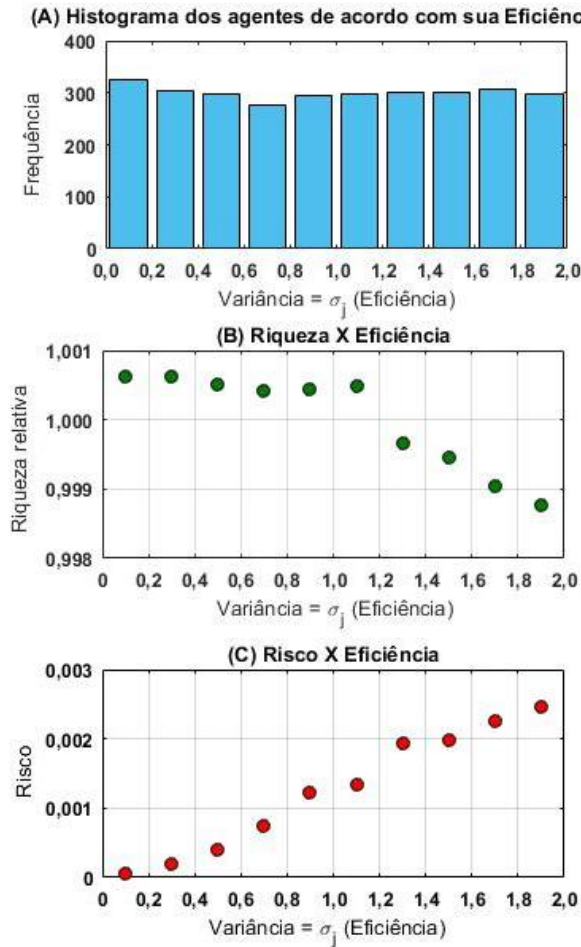


Figura 12 – As abscissas dos gráficos acima correspondem a σ_j , que determina a variância relacionada a percepção do preço justo de cada agente. Observe que maiores eficiências na percepção do agente estão relacionadas a menores valores da abscissa. Em (A) apresentamos a frequência de 3000 agentes, presentes em 30 simulações diferentes. Cada simulação detinha 100 agentes negociando o ativo. Os 3000 agentes foram distribuídos em classes de eficiência, com amplitude de 0,2, diferenciadas pelos valores de σ_j , contidos no intervalo de $[0,2]$. Já em (B) temos a relação entre *Eficiência* e *Riqueza*: os pontos de coloração verde, apresentam o percentual médio, que cada classe de agentes detém da riqueza total do mercado. O coeficiente de correlação de Pearson da nuvem de dados é $r_{(B)} = -0,9176$. O p-valor é $p_{-valor(B)} = 0,00018217$. Por fim em (C) apresentamos a relação entre *eficiência* e *risco*: os pontos de coloração vermelha, apresentam o desvio padrão da riqueza dos agentes em cada classe. O coeficiente de correlação de Pearson da nuvem de dados é $r_{(C)} = 0,9911$. O p-valor é $p_{-valor(C)} = 0,00000003$.

O gráfico (B) apresenta a relação entre *eficiência* e *riqueza*. Em cada classe calculamos a média de $\overline{Wr_j}$, dos agentes contidos naquela classe. Observe que à medida em que os agentes vão se tornando menos eficientes (classes posicionadas mais a direita no gráfico (B)) temos uma média de $\overline{Wr_j}$ menor. Para verificar tal interpretação, calculamos o coeficiente de correlação de Pearson dos dados apresentados, resultando em $r_{(B)} = -0,9176$. Na inferência estatística, o nível de significância de 5% é usual em testes de hipóteses⁴, sendo a medida de referência mais comum para verificar se estamos cometendo erro *Tipo I*⁵ no teste. Ao executar o teste, consideramos as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \text{não existe nenhuma correlação entre as variáveis;} \\ H_A : \text{existe correlação entre as variáveis,} \end{cases} \quad (54)$$

encontramos a probabilidade $p\text{-valor}(B) = 0,00018217$. No teste, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%. Ou seja, mais evidências eu tenho *contra* a afirmação de "*inexistência de correlação entre as variáveis*". Logo, podemos garantir, com fortes evidências estatísticas, que tal resultado corrobora com nossa interpretação, denotando que, aproximadamente 92% dos dados apresentam uma dependência linear negativa, ou seja, quanto maior a *eficiência* menor será a *riqueza*.

Já no gráfico (C), temos a relação entre *eficiência* e *risco*. Primeiro, é importante qualificar a palavra denotada como *risco*. Em finanças, existem vários métodos de quantificar o *risco*. Neste trabalho, o risco é definido como o desvio padrão da riqueza relativa média em cada classe de eficiência. Note que, na nuvem de pontos, presente em (C), percebemos uma *fortíssima* correlação positiva entre *eficiência* e *risco*. Para validar tal asserção, calculamos o coeficiente de correlação de Pearson $r_{(C)}$ entre os dados, sendo $r_{(C)} = 0,9911$. Da mesma forma que fizemos em (B), ao executar o teste de hipóteses para verificar as mesmas hipóteses apresentadas na [Equação \(54\)](#), encontramos o $p\text{-valor}(C) = 0,00000003$, o que nos permite inferir, assim como no teste anterior, uma vez que a probabilidade encontrada no teste deve ser $p\text{-valor}(C) \leq 0,05$, que temos evidências estatísticas *contra* a afirmação de "*inexistência de correlação entre as variáveis*". Ou seja, podemos concluir, com fortes indícios estatísticos, que 99% dos dados possuem, de fato, uma dependência linear positiva. Assim podemos afirmar que, no nosso modelo, a *eficiência* está diretamente vinculada ao *risco*, sendo que, quanto mais eficiente for um agente, menor será o risco a que ele estará exposto.

⁴ Uma probabilidade ($p\text{-valor}$), calculada no teste, é significativa, quando $p\text{-valor} \leq 0,05$, ou não é significativa, quando $p\text{-valor} > 0,05$. Ou seja, quanto menor a probabilidade encontrada no teste ($p\text{-valor}$) comparado ao nível de significância ($NS = 0,05$), mais evidências eu tenho contra a hipótese nula (H_0), assumindo que a hipótese (H_A) tem mais chances de oferecer uma explicação melhor para os dados da amostra.

⁵ É o erro cometido quando rejeitamos a hipótese nula (H_0), quando ela é verdadeira

5.4 Buscando correlações de longo alcance

No cenário de pesquisa atual, encontramos trabalhos relevantes que utilizam o expoente de *Hurst* como uma ferramenta de análise estatística. Estas pesquisas, em sua grande maioria, investigam a presença de correlações lineares em séries financeiras, tais como: indicadores de mercado, índices de bolsas de valores, retornos de ações, volume de ativos negociados, dentre outras (vide [Bianchi e Pianese \(2018\)](#), [Guedes et al. \(2017\)](#), [Yim, Oh e Kim \(2014\)](#), [Souza, Tabak e Cajueiro \(2006\)](#) e [Kwapień, Oświecimka e Drożdż \(2005\)](#)). Os avanços das metodologias desse tipo de análise estatística vêm crescendo largamente no campo das Finanças. Atualmente, alguns trabalhos ganham destaque, ao diagnosticar também a presença de correlações não lineares, através da análise de multifractalidade (vide [Kwapień, Oświecimka e Drożdż \(2015\)](#), [Green, Hanan e Heffernan \(2014\)](#) e [Calvet e Fisher \(2002\)](#)).

Diante desse contexto, buscamos interpretar os resultados do modelo simulado em relação a resultados empíricos de dados da área, que destacam a lei de potência cúbica inversa encontrada inúmeras vezes nas caudas pesadas das distribuições de retornos de ativos, dos diferentes mercados do mundo (vide [Pan e Sinha \(2008\)](#), [Rak, Drożdż e Kwapień \(2007\)](#), [Malevergne*, Pisarenko e Sornette \(2005\)](#), [Gabaix et al. \(2003\)](#), [Liu et al. \(1999\)](#) e [Gopikrishnan et al. \(1998\)](#)). Algumas pesquisas apontam que a função que descreve a distribuição acumulada de probabilidades dos retornos logarítmicos de alguns ativos, $F(x)$, decresce com uma lei de potência menor que a potência cúbica inversa, ou seja, $F(x) \propto x^{\Upsilon}$, onde $\Upsilon > -3$, destacando um peso acentuado nas caudas das distribuições (vide [Romanovsky e Vidov \(2011\)](#), [Yan et al. \(2005\)](#)). Outros trabalhos indicam que as distribuições de retornos logarítmicos caem mais rapidamente, com uma lei de potência maior $\Upsilon < -3$ (vide [Zhang, Zhang e Kleinert \(2007\)](#)). Entretanto, em todas essas investigações empíricas, é evidente que existe uma interpretação estatística em torno das caudas das distribuições de retornos, sendo que na maioria destes trabalhos, os pesquisadores procuram comprovar que tais distribuições apresentam caudas mais pesadas comparadas a uma distribuição gaussiana.

Na [Figura 13](#), apresentamos, em (A), o retorno logarítmico⁶ do preço de 100 amostras de dados sintéticos. Cada amostra possui 80.000 pontos. Tais amostras foram agregadas para a análise. A distribuição densidade de probabilidade *fdp* desses dados apresentou uma assimetria igual a $\alpha_3 = -0,031866$, representando quase uma curva simétrica, acentuada por uma leve assimetria negativa. Já a curtose da *fda* é igual a $\alpha_4 = 1,744957$, destacando uma distribuição *platicúrtica*. Com o intuito de investigar as caudas da *fdp*, representamos a função acumulada de probabilidade *fda* dos retornos logarítmicos em escala log-log da cauda positiva⁷ (B) e da cauda negativa (C). Observe que, nos dois gráficos, as

⁶ Aqui o Retorno logarítmico é determinado por $R(t) = \log y(t+1) - \log y(t)$, onde $y(t)$ representa a série de preços.

⁷ Quando usamos a expressão cauda positiva, estamos fazendo referência a cauda da *fdp* que representa

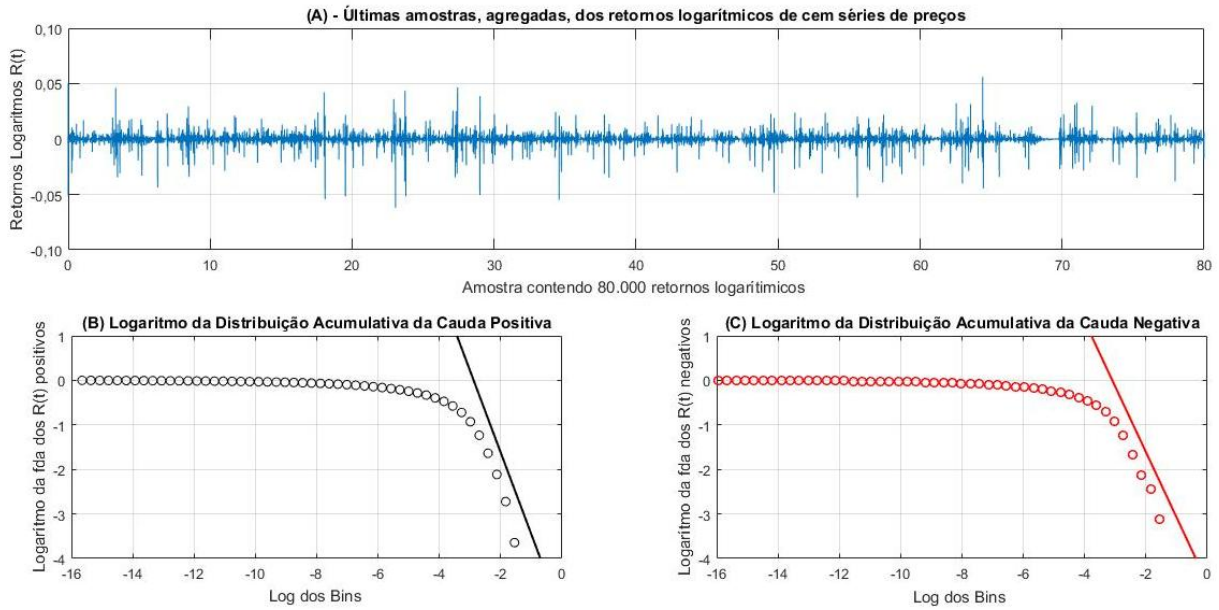


Figura 13 – (A) Retornos logarítmicos dos dados sintéticos, de 100 amostras, agregadas, com 80.000 pontos cada, sendo as condições iniciais da dinâmica idênticas às estabelecidas na figura (9). O coeficientes de assimetria e curtose, da distribuição logarítmica de retornos do agregado de 100 amostras, são, respectivamente, $\alpha_3 = -0,031866$ e $\alpha_4 = 1,744957$. Em (B) e (C) apresentamos a distribuição acumulada das caudas, positiva (B) e negativa (C), em escala log-log. As retas, representam o ajuste linear dos 5 últimos pontos das caudas, suas inclinações são $-1,838190$ (cauda positiva) e $-1,469067$ (cauda negativa).

fda apresentam, em suas extremidades, dados que evidenciam caudas significativamente pesadas. Para corroborar tal afirmação, representamos o ajuste linear, feito pelo método dos mínimos quadrados ordinários, nos cinco últimos pontos das duas caudas. Note que inclinação no final das caudas é bem acentuada, sendo seus valores iguais a $-1,838190$ em (B) e $-1,469067$ em (C). Tais retas foram construídas para guiar nosso olhar no sentido que temos um decaimento em lei de potência acentuado no final das caudas das distribuições acumuladas de probabilidades. Tal característica denota que nosso modelo, com dados sintéticos, atende às expectativas estatísticas encontradas em análises de dados reais. Para corroborar a afirmação destacada aqui, aprofundaremos a análise estatística dos dados sintéticos examinando a possibilidade de escalonamento multifractal (*multifractal scaling*) na série.

5.4.1 Análise multifractal

Sabemos que séries financeiras apresentam comportamento de escala (MANTEGNA; STANLEY, 1999) e, muitas vezes, o reconhecimento deste comportamento baseia-

os retornos logarítmicos positivos (cauda direita), ao passo que, a expressão cauda negativa, refere-se a cauda da *fdp* dos retornos logarítmicos negativos (cauda esquerda).

se na interpretação do expoente de *Hurst*. Este procedimento busca detectar a presença de propriedades de memória de longo prazo das séries examinadas. Sob essa perspectiva, recorreremos, inicialmente, ao cálculo do expoente de Hurst, sendo este igual a $H = 0,3165$, o que sinaliza a presença de *anti-persistência* na série de dados sintéticos.

Contudo, assim como apresentamos no [Capítulo 3](#), na [Seção 3.2](#), o diagnóstico da presença de correlações de longo alcance pode ser aprofundado verificando-se a possibilidade de um comportamento multifractal na série. Esta análise explora uma interpretação apoiada na sondagem de vários expoentes característicos, ao invés de diagnosticar este comportamento exclusivamente na interpretação de um único expoente, no caso, H .

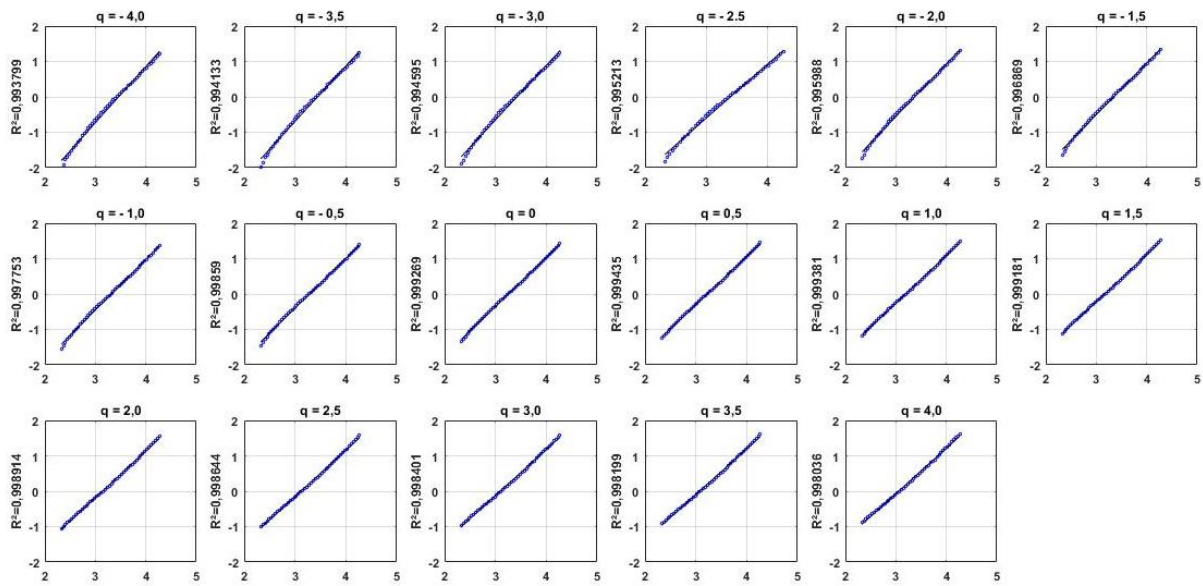


Figura 14 – Multifractalidade. Ajuste linear da relação de η com Fq , estabelecida pela média dos retornos logarítmicos de 100 amostras com 80.000 preços. Em cada gráfico consideramos um valor diferente de q , presente no intervalo $[-4,4]$, variando com o passo $\Delta q = 0,5$, totalizando assim 17 q (s). No eixo vertical de cada gráfico temos o coeficiente de determinação R^2 , que estão presentes no intervalo $[0,9938; 0,9994]$.

A [Figura 14](#) apresenta dezessete gráficos, que visam encontrar diferentes expoentes de hurst generalizados $h(q)$. Para determinar estes expoentes, inicialmente consideramos diferentes tamanhos de intervalos η e calculamos, para estes valores distintos de η , a estatística F_q (vide [Seção 3.2](#)). Em cada um dos gráficos apresentados na [Figura 14](#), utilizamos valores distintos de q , tais que $q \in [-4,4]$, variando com o passo $\Delta q = 0,5$. Após definir o conjunto de pontos que representa F_q versus η , em uma escala *log-log*, executamos o ajuste linear sobre os pontos utilizando o método dos mínimos quadrados ordinários. Este procedimento foi executado para cada um dos dezessete q (s) estabelecidos, e representamos no eixo vertical de cada um dos gráficos o valor do coeficiente de determinação R^2 , que mensura a qualidade do ajuste dos dados à reta de regressão estabelecida. Os

valores de R^2 estão contidos no intervalo $[0,9938; 0,9994]$, enfatizando um excelente ajuste do conjunto de pontos com relação às retas.

Observe que à medida em que aumentamos o valor de q , através da sequência de apresentação dos gráficos da esquerda para direita, de cima para baixo, da [Figura 14](#), observamos uma diminuição na inclinação da reta ajustada. Este talvez seja um gatilho para verificar a presença de correlações não lineares em um intervalo de escala específico da série.

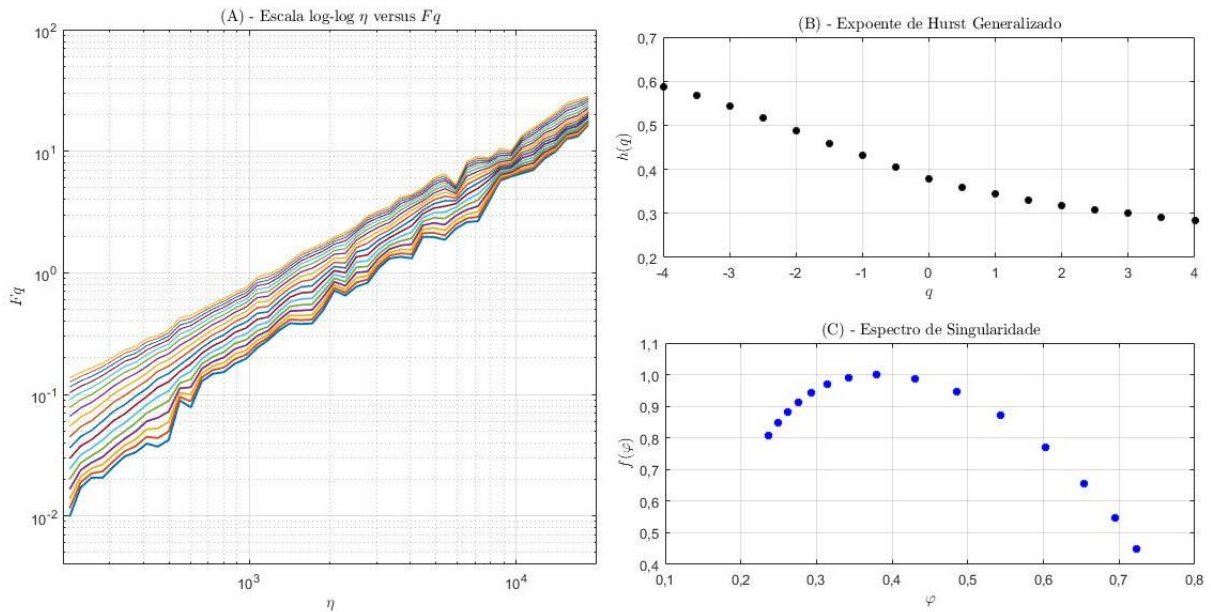


Figura 15 – Análise multifractal. Em (A) temos 17 gráficos, estabelecidos por uma "nuvem" de pontos que representam a relação η versus F_q , em escala logarítmica. Sendo que, cada conjunto de pontos está interligado por uma linha sólida, ponto à ponto, que detém coloração e espessura diferente das demais. Cada linha representa a relação de η versus F_q , considerando um valor de q diferente. São 17 valores de q presentes no intervalo de $[-4,4]$, com $\Delta q = 0,5$. Para cada q calculamos a estatística F_q considerando diferentes valores de intervalos η , onde $\eta \in (200, 20000)$. Já em (B) temos os expoentes de Hurst generalizados $h(q)$ para cada um dos 17 valores de q (KAN-TELHARDT et al., 2002). Por fim, em (C) apresentamos o Espectro de Singularidade, elaborado para a dimensão fractal $f(\varphi)$, encontrada numa série de retornos logarítmicos constituída de 80.000 retornos sintéticos. O valor dos parâmetros que estabelecem as condições iniciais da dinâmica simulada, que determina as 100 amostras, são idênticos aos valores estabelecidos nos dados da [Figura 9](#).

A [Figura 15](#) apresenta três gráficos, correspondendo o primeiro, gráfico (A), ao conjunto total de pontos que representa a relação do comprimento dos intervalos η versus a estatística F_q , para os dezessete valores de q ressaltados nos gráficos da [Figura 14](#). Observe que, ao juntar o conjunto de pontos, de todos os dados, no mesmo gráfico, notamos um afunilamento à medida em que η fica maior, se aproximando de $\eta = 20000$. Tal afunilamento destaca visivelmente o comportamento de escala dos dados sintéticos.

Já a figura (B) apresenta o valor do expoente $h(q)$, para cada um dos $q(s)$. Note que o expoente de Hurst generalizado apresenta uma relação inversa com o valor de q , ficando menor à medida que q aumenta.

Por fim, o gráfico (C) representa o espectro de singularidade dos dados, avaliando a dimensão fractal $f(\varphi)$ em função de $\varphi = h(q) + qh'(q)$. Aqui é possível perceber um largura do espectro de singularidade, em torno de 0,5, estabelecida pela distância horizontal entre o maior e o menor valor de φ .

Após as análises feitas nesta seção, na intenção de verificar se as correlações percebidas na Figura 15 se manteriam, embaralhamos os dados de cada uma das 100 amostras do preço. Após o embaralhamento, recalculamos os retornos logarítmicos e executamos novamente a análise multifractal, seguindo os mesmos passos descritos anteriormente nesta seção. Os resultados estão apresentados nas figuras (16) e (17).

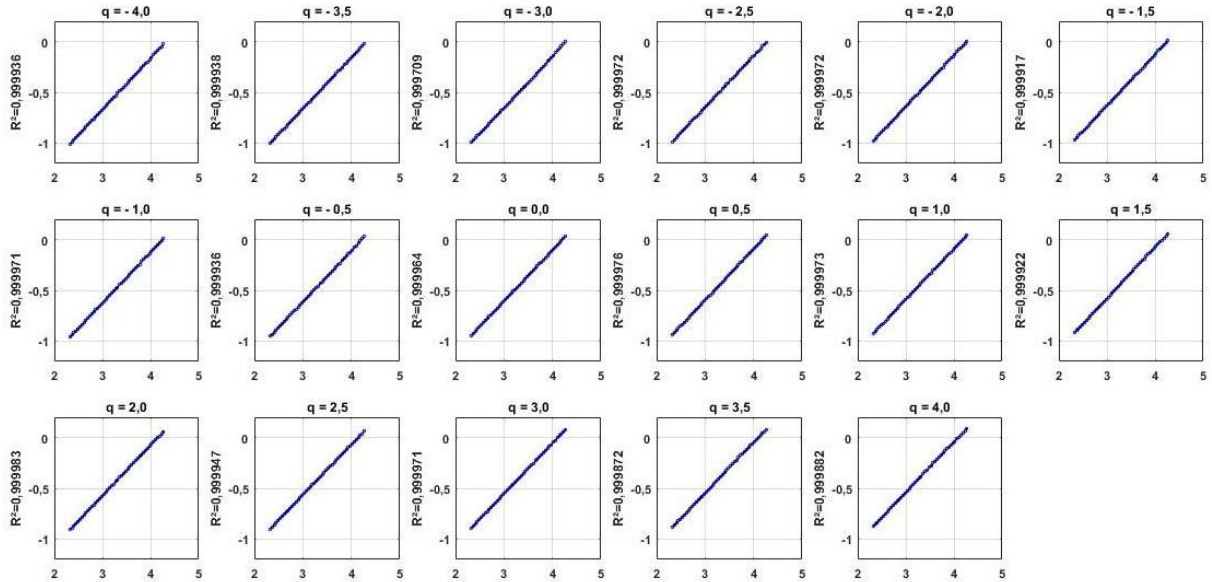


Figura 16 – Multifractalidade para dados embaralhados. Ajuste linear da relação de η com Fq , estabelecida pela média dos retornos logarítmicos embaralhados das mesmas amostras apresentadas na Figura 15. Apresentamos 17 $q(s)$, da mesma forma que apresentamos na Figura 14. No eixo vertical, vemos o R^2 de cada gráfico, presentes no intervalo $[0,999709; 0,999983]$.

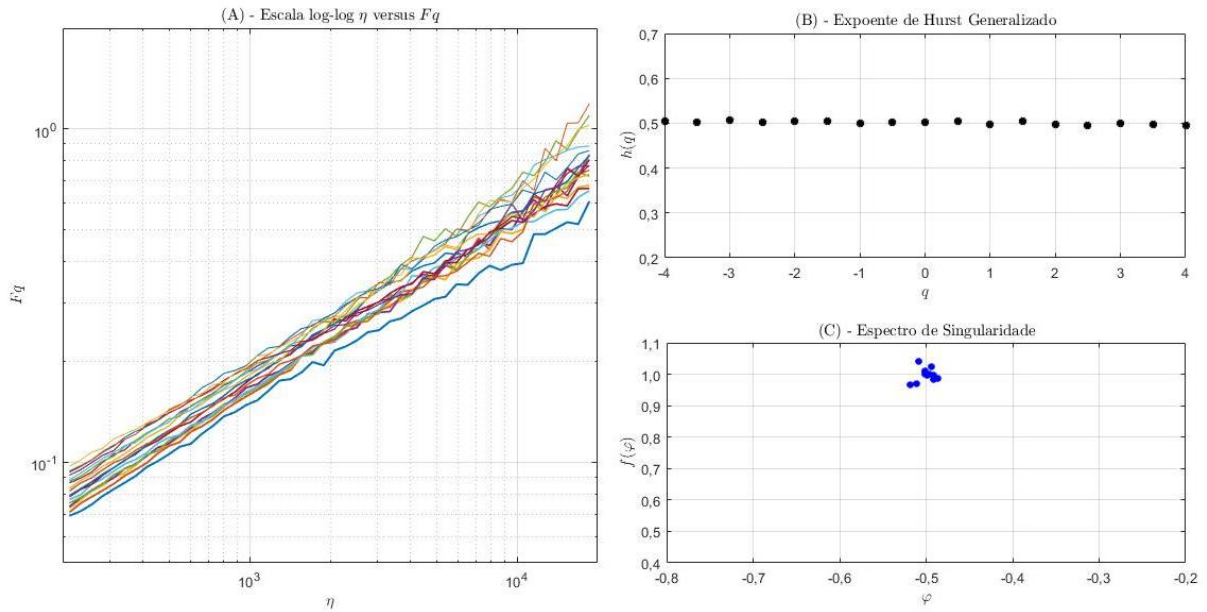


Figura 17 – Análise multifractal para os dados embaralhados. Em (A) temos 17 gráficos, em escala logarítmica, que representam a relação η versus F_q , onde $\eta \in (200, 20000)$. Para cada gráfico de (A) temos um q presente no intervalo de $[-4, 4]$, com $\Delta q = 0,5$. Já em (B) temos os expoentes de Hurst generalizados $h(q)$ para cada um dos 17 valores de q . Por fim, em (C) apresentamos o Espectro de Singularidade, elaborado para a dimensão fractal $f(\varphi)$, encontrada numa série de retornos logaritmos constituída de 80.000 retornos sintéticos. Os demais parâmetros são idênticos aos valores estabelecidos nas condições iniciais apresentadas na Figura 9.

Observamos no gráfico (A) da Figura 17 que o afunilamento percebido no gráfico (A) da Figura 15 desapareceu. Pelo contrário, no gráfico da Figura 17 existe um alargamento do conjunto de pontos à medida que η aumenta. Note, também, que os dados se misturam, e, se não fosse pela alteração de cor entre as linhas, não perceberíamos a diferença entre cada conjunto de pontos, que são distinguidos por um valor diferente de q . Tal afirmação é confirmada quando analisamos o gráfico (B), pois percebe-se que mesmo estabelecendo distintos valores de q , $h(q)$ quase não se altera, mantendo-se praticamente constante. Por fim, o gráfico (C) apresenta um espectro de singularidade com uma largura menor ($\Delta\varphi = 0,03$) do que o espectro analisado na Figura 15. Por se tratar de uma série finita, ainda conseguimos perceber alguma largura. Contudo, conjecturamos que se os dados analisados fossem infinitos, teríamos representado em (C) apenas um ponto, uma vez que, ao executar o embaralhamento dos dados, notamos uma característica monofractal no escalonamento da série.

6 Considerações finais

Os principais profissionais do mercado que defendem a teoria da *hipótese do mercado eficiente*, são gestores de *Fundos de Índices*¹, do inglês *Exchange Traded Funds (ETFs)*, dado que os produtos que oferecem são mais passivos no que tange à natureza da carteira (vide (PORTAL DO INVESTIDOR (CVM), 2019), (CAIXA ECONÔMICA FEDERAL, 2019) e (BANCO DO BRASIL, 2019)). O portfólio de um fundo desse tipo acompanha a performance de um índice econômico (*Benchmark*), que é usado como referência. Logo, sua rentabilidade se mantém na média do mercado. Esses profissionais defendem a *HME*, visto que nessa teoria é impossível conseguir ganhos maiores que a média do mercado. Assim, não há necessidade dos agentes investirem em aplicações mais agressivas que prometem rentabilidades maiores, já que, no final, todos convergiriam para a rentabilidade média do mercado, que é garantida por esses fundos passivos e menos custosos. Entretanto, é importante ressaltar aqui os esforços de outros profissionais do mercado e estudiosos de diferentes áreas do conhecimento, que investem, respectivamente, dinheiro e tempo, na busca de refutar a teoria da *HME*, sendo esta característica um dos motores propulsores para a ampliação e aquecimento do cenário de pesquisa em *Econofísica*.

Alguns dos trabalhos publicados nas últimas décadas em *Econofísica* indicam, através da análise estatística de séries de mercados reais, inconsistências com o que preconiza a teoria clássica da *Hipótese de Mercado Eficiente* (vide (NISAR; HANIF, 2012), (CAGINALP; DESANTIS, 2011), (BORGES, 2010), (CAJUEIRO; TABAK, 2004), (SMITH; RYOO, 2003) e (LUX; MARCHESI, 1999)). Acredita-se que a maior quebra do paradigma econômico que defende a *HME* refere-se ao comportamento *racional* dos agentes, sendo este estabelecido como uma das condições necessárias para garantir a hipótese (vide (BIKAS et al., 2013), (LO, 2004), (SHLEIFER, 2000), (DANIEL; TITMAN, 1999) e (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979)). Por outro lado, há contribuições que a corroboram, *e.g.*, utilizando experimentos laboratoriais, Vernon Smith conseguiu demonstrar que, mantidas as condições idealizadas, torna-se possível encontrar resultados que favorecem as ideias defendidas por economistas há décadas (SMITH, 1994).

Ao observar mercados reais, podemos perceber que o comportamento do investidor não é dirigido apenas à racionalidade. Em vários casos, o comportamento do agente é

¹ Um *Fundo de Investimento* é destinado a oferecer uma aplicação que visa uma fonte coletiva de investidores. Detém a ideia de um condomínio, ou seja, o investidor, ao adquirir uma cota do fundo, deve pagar a taxa de administração da carteira, para que os gestores, profissionais habilitados no que tange a estratégias de financiamento, administrem o portfólio do *Fundo de Investimentos*. Essa taxa é diária, e é cobrada de acordo com um valor percentual sobre o patrimônio total do Fundo. Os fundos de investimento, na sua maioria, são uma maneira *passiva* de investir no mercado, podem ser classificados como fundos de renda fixa ou variável, e devem obedecer às regras determinadas pela CVM (Comissão de Valores mobiliários) (FORTUNA, 2008).

fortemente influenciado por expectativas além dos resultados comuns, buscando auferir ganhos acima da média do mercado. Assim, abrimos a argumentação para uma outra discussão no campo das *finanças comportamentais*, que engloba a psicologia do investidor. [Kahneman e Tversky \(1979\)](#) idealizaram modelos onde analisam a decisão do investidor numa situação de risco. Eles explicam como os agentes fazem escolhas inconsistentes, ao tomarem suas decisões guiados por suas expectativas para ganhos ou perdas.

Há anos observamos anomalias no mercado que geram bolhas especulativas e excesso de volatilidade. Tais anomalias, na maioria das vezes, acarretam crises econômicas. Sendo assim, se o mercado é realmente eficiente, conforme a teoria de [Fama \(1970\)](#), como justificar tais anomalias? Teóricos que defendem a *HME* caracterizam racionalidade dos agentes por um viés muito específico, baseados na definição de *Homo Economicus*², criado por economistas clássicos há séculos. Se considerarmos que racionalidade vai além da característica do agente econômico que almeja apenas consumir e produzir, visando ganhos pessoais, agir de forma especulativa buscando possibilidades de arbitragem³ é uma ação racional. Neste contexto, a investigação da *HME* dá margem a diferentes definições de racionalidade.

O economista e psicólogo Hebert Simon apresentou na pesquisa, *Administrative Behavior. A Study of Decision-making Processes in Administrative Organization*, um conceito novo sobre racionalidade ([SIMON; BARNARD, 1947](#)). Essa teoria ficou conhecida como *A teoria das Decisões*, concedendo-lhe o prêmio Nobel de 1978. Simon critica o conceito de racionalidade dos agentes visto pela economia clássica. Para ele, a racionalidade do agente econômico é limitada. O processo decisório de um agente, sob o olhar da Teoria das Decisões, desvia da estrutura das escolhas determinadas pelo conceito clássico de *Homo Economics*. Simon divide a tomada de decisão de um agente através de dois elementos, sendo eles: o *elemento de valor*, que determina uma meta que o agente deseja conseguir, e o *elemento de fato*, que é o comportamento humano relacionado a tal meta pré-estabelecida. De acordo com [Simon e Barnard \(1947\)](#), os indivíduos reais, *Homo Sapiens*, não conseguem absorver toda a informação disponível, sendo assim, acabam tomando suas decisões limitados por uma interpretação que representa apenas um fragmento de todo o contexto do processo decisório.

² O engenheiro e economista francês, porém de ascendência direta italiana, Vilfredo Pareto, foi um dos primeiros economistas a utilizar a expressão *Homo Economicus*, em seu manual de economia política ([PARETO, 1906](#)). Esse termo visa uma interpretação utópica do ser humano, idealizado por economistas clássicos. O termo define o homem enquanto agente econômico como sendo um ser racional, que utiliza apenas seu raciocínio para consumir e produzir, visando seus interesses pessoais. Essa expressão abdica de todas as outras características psicológicas e culturais, que definem a essência de um ser humano. Segundo os economistas clássicos, essa definição foi necessária para enxergar o homem sob o ponto de vista da sua racionalidade atuando na economia.

³ É a ação de comprar ou vender um ativo, baseada na possibilidade de ganhos advindos da diferença especulativa do preço desse ativo, considerando que este preço possa estar subvalorizado (abaixo do valor justo para o ativo) ou supervalorizado (acima do valor justo para o ativo).

Desta forma, é possível destacar a importância da pesquisa na qual estamos engajados neste cenário acadêmico. Nosso trabalho atua num campo singular, pois estamos considerando relevantes discussões tratadas atualmente na área, dentre elas o paradigma da *hipótese de mercado eficiente* e as prerrogativas de racionalidade dos agentes discutidas em *finanças comportamentais*. O trabalho insere-se como a continuidade e evolução da pesquisa iniciada em Campos (2014). Fizemos importantes alterações no modelo, com o intuito de montar uma estrutura para a dinâmica de preços que seja mais próxima à realidade do mercado. Alteramos a concepção do cálculo do preço do ativo, para que este ficasse equivalente a equações de preços encontradas na área (CAGINALP; ERMENTROUT, 1991). Um ponto particularmente importante é que acrescentamos ao modelo uma limitação de recursos financeiros, representada por uma quantidade finita de ativos e dinheiro disponível de cada agente, sendo que o agregado de todas essas quantidades correspondente a todos os recursos do mercado. Desta forma os agentes podem negociar apenas o que é factível, sem alavancagem, baseados no equilíbrio da sua restrição orçamentária, o recurso que de fato cada um detém, frente ao que efetivamente é publicado pelo mercado.

Em Campos (2014), havia um termo aleatório diretamente somado ao preço do ativo a cada passo de tempo. Aqui, os termos estocásticos são inseridos no modelo de uma forma fundamentada. Consideramos duas variáveis estocásticas, que possuem interpretações bem específicas. A primeira tem um caráter endógeno no modelo, e é representada por ϕ_j (vide Equação (30)). Ela introduz no mesmo a influência do tratamento da informação sobre o comportamento do agente, visto que agentes mais eficientes em lidar com a informação disponível detêm uma maior acurácia em perceber o verdadeiro preço justo, ao passo que o contrário define uma menor eficiência do agente. A segunda, de natureza exógena, denotada por λ_l (vide Equação (31)), mensura impactos externos ao mercado que mudam a percepção dos agentes sobre o preço justo. Desta forma, acreditamos que conseguimos um ganho significativo na correspondência do modelo com o que esperamos ocorrer em mercados reais.

O comportamento individual de cada uma dessas componentes, limitação de recursos e a aleatoriedade de caráter endógeno, sozinhas, não provocavam uma mudança perceptível na dinâmica, em relação ao que já era encontrado em Campos (2014). Contudo, ao incorporar essas duas novas características atuando em conjunto, a dinâmica exibiu uma performance diferente, apresentando uma espécie de *rugosidade* que ainda não havia sido alcançada. Neste sentido conseguimos um estrutura nova, que fomentou um interesse maior de pesquisa, nos guiando a uma interpretação mais sólida do modelo e validação estatística para os dados sintéticos quando comparados a resultados empíricos da área.

Para compreender o que promovia essas oscilações abruptas na dinâmica de preços, resolvemos explorar o modelo de forma gradativa, para que entendêssemos a influência dessas características sobre a dinâmica. Neste sentido, observamos diferentes situações.

Percebemos, na primeira situação definida pelo caso da dinâmica sem estocasticidade, e sem limitação de recursos financeiros, que, quanto mais distante o preço inicial estava do preço considerado justo, mais perceptíveis são as oscilações do início da dinâmica. Neste caso, o preço atua como um componente de autocorreção, e se ajustará rapidamente a uma cotação de equilíbrio. Confirmamos essa interpretação com a solução analítica que apresentamos na [Seção 5.1](#) (vide [Equação \(39\)](#)).

Já na segunda situação, definida pela dinâmica com aleatoriedade endógena e limitação de recursos, observamos oscilações amortecidas que surgem de tempos em tempos. Para que pudêssemos compreender as oscilações abruptas percebidas no gráfico da dinâmica, tal comportamento precisou ser modelado numa estrutura de mercado pequena, sobre uma visão microeconômica. Esse comportamento destaca o fato da polarização de recursos impactar o equilíbrio assintótico da dinâmica de preços. Notamos que a escassez de recursos de um agente específico, seja ela dada em dinheiro ou ativos, força o mesmo a sair do mercado. Com a saída desse agente, temos um novo equilíbrio que será perseguido pelos demais agentes, dado pela média do preço considerado justo dos agentes que mantiveram suas negociações. Esse processo acontece gradativamente, até restar apenas um único agente, que definirá o equilíbrio assintótico através do preço que este último agente considera justo.

Na terceira situação, definida pela dinâmica com aleatoriedade endógena, exógena e limitação de recursos, resolvemos agregar ao comportamento observado na situação anterior o impacto de eventos externos, sob um olhar macroeconômico. Nesta situação, o valor do preço idealizado P_f , em momentos aleatórios, mudava. Como o preço justo dos agentes é baseado no preço justo idealizado e na eficiência em percebê-lo (vide [Equação \(30\)](#)), o impacto dessa segunda variável estocástica mudava apenas o valor de P_f , mantendo a eficiência de cada agente em perceber o preço justo idealizado, dada no início do processo por ϕ_j . Desta forma, a partir de cada novo valor de P_f , cada agente redefine o preço que considera justo (P_j).

Como nosso modelo apresentou uma dinâmica rica graças às novas características incorporadas, resolvemos analisá-la sob outra ótica: verificamos o que ocorre com os agentes, diferenciados pela sua eficiência em perceber o preço justo idealizado, no que tange à sua riqueza individual e ao risco a que estavam expostos. Observamos que agentes ditos *mais eficientes* conseguiram uma riqueza maior, comparada a média do mercado, estando expostos a um risco menor, ao passo que agentes ditos *menos eficientes* apresentaram uma riqueza menor ficando expostos a um risco maior. Confirmamos nossa interpretação ao fazer o teste de hipótese, em que a hipótese nula é não existir relação entre as variáveis, contra a hipótese alternativa que defende o contrário, sob um nível de significância de 5%, para o coeficiente de correlação de pearson calculado na relação entre *eficiência versus riqueza* e na relação *eficiência versus risco*. Em ambas relações, os testes confirmaram, com

fortíssimas evidências estatísticas, o fato das variáveis estarem correlacionadas. Na relação entre *eficiência versus riqueza* as variáveis apresentam uma correlação linear negativa em torno de 0,92, mostrando que quanto maior for a eficiência de um agente em perceber o preço justo idealizado (ressaltando que tal eficiência é averiguada por um valor menor da variância de ϕ_j (vide 5.3.1)), maior será a sua riqueza. Na relação *eficiência versus risco*, as variáveis apresentam uma correlação linear positiva ao nível de 0,99, mostrando que agentes menos eficientes (maior valor da variância ϕ_j) estão expostos a um risco maior.

Ao analisar a distribuição dos retornos logarítmicos, sobre a média de 100 amostras distintas da série de preços sintética, observamos a presença de caudas pesadas, como as observadas em mercados reais. Também realizamos uma análise sobre o comportamento de escala desses retornos. Assim, ao avaliar diferentes expoentes característicos, construímos um espectro de singularidade que comprova o comportamento multifractal da série. Diferentes fractalidades observadas no mercado são reproduzidas em séries geradas por esse modelo.

Desta forma, observamos que nosso modelo foi capaz de gerar estatísticas próximas as observadas em mercados reais, sendo assim uma ferramenta útil para entender processos que efetivamente podem estar ocorrendo na dinâmica interna entre os agentes.

6.1 Trabalhos futuros

Nossa perspectiva para o futuro aborda formas diferentes de trabalhar com o modelo, visando construir distintas possibilidades de interpretação do mesmo. A primeira possibilidade que estamos considerando é trazer a definição de *margem de segurança* para o modelo. O ponto central nessa abordagem reside na atitude do agente a partir de um desvio do preço praticado com relação ao preço justo do ativo. A questão que estamos querendo levantar aqui são as distintas interpretações que existem entre comprar e vender, que ainda não estão sendo consideradas no modelo. Podemos notar que, no modelo apresentado nesta tese, quando incide sobre a decisão do agente entre comprar ou vender o ativo um impacto *negativo*⁴, o agente é influenciado a ofertar o ativo. Em caso contrário, quando o impacto é *positivo*, o agente é influenciado a demandar o ativo.

Note que, na segunda colocação, quando o impacto é *positivo*, ou seja, quando o preço praticado é menor que o preço justo, o agente torna-se propenso a comprar ativos. Esta atitude é coerente, considerando a interpretação racional do agente, que é baseada no ganho futuro, quando este irá vender o ativo acima do valor pelo qual ele foi adquirido.

⁴ Considerando aqui, esse impacto, dado apenas pelo termo que mensura o desvio do preço praticado com relação ao preço justo deixando de lado os outros termos que compõem a conduta do agente. De acordo com o modelo, este impacto será positivo quando o preço praticado for menor que o preço justo, e negativo quando o preço praticado for maior que o preço justo, devido à presença do parâmetro $-\gamma_j$ (vide Equação (25)).

Contudo, nessa decisão, ele assume riscos intrínsecos que são inerentes ao desvio do preço e, nesta ótica, surge a *margem de segurança*. Sob o contexto descrito, existem no mercado condições atrativas para comprar o ativo, no que tange à diferença entre o preço praticado e o preço justo. Entretanto, se espera que, em mercados reais, o agente também agregue na sua decisão um viés relacionado ao risco, que inibe sua escolha em demandar, apesar de ser coerente sob a ótica dessa circunstância.

Veja que, ao abordarmos a proposta que considera a *margem de segurança*, estamos avaliando apenas o impacto *positivo* do desvio do preço sobre a decisão do agente. Isto porque estamos considerando que a conduta de comprar envolve um risco maior que a conduta de vender. Na venda dos ativos, o agente transforma um bem mobilizado (ações) em um bem líquido (dinheiro). Diferentemente da compra, na venda dos ativos, a preocupação do agente está direcionada à liquidez, e não ao risco intrínseco a que está exposto ao manter os ativos em sua carteira.

É importante levantar o ponto chave da interpretação que estamos buscando. Observe que a possibilidade de ganho não necessariamente é a efetivação do ganho. Quando o agente decide comprar uma quantidade de ativos, ele almeja lucros visando uma possibilidade de vender os ativos por um preço maior do que ele pagou. Para tanto, ele assume o risco de deter uma quantidade de capital imobilizado em ações esperando o momento certo de converter este patrimônio imobilizado em dinheiro. Nesse sentido, o agente assume um risco intrínseco, da efetivação do negócio no futuro, ao manter estes ativos na carteira. Assim, nossa proposta futura visa buscar uma forma de abordar a influência desse risco usando a definição de *margem de segurança*.

Nossos próximos movimentos visam uma abordagem sobre a seguinte avaliação: o agente será influenciado na sua conduta de demandar o ativo considerando, para tal comportamento, um valor mínimo para a magnitude do desvio do preço, que será denominado como *margem de segurança*. Diferentes agentes podem apresentar diferentes perfis neste tocante por meio da *margem de segurança* que variam entre eles.

As perspectivas seguintes são ainda mais incipientes e necessitam de um aprofundamento maior entre teoria e técnica para suas implementações. Assim, podemos apresentar como a segunda possibilidade que pretendemos considerar para o modelo, a adequação do mesmo operando com mais de um ativo, destacado a possibilidade destes ativos se distinguirem entre: bens substitutos ou bens complementares. Diante dessa interpretação vamos observar como o mercado simulado irá se comportar quando esses ativos se diferenciarem quanto à sua natureza econômica. A terceira possibilidade visa aproximar o modelo da hipótese do mercado fractal, considerando múltiplos horizontes de investimento entre os agentes. Como uma quarta possibilidade, pretendemos acrescentar a ideia de *custos de transações* no modelo, inibindo o volume de negociações. Tais custos podem ter uma parcela fixa e uma parcela dependente do volume de transações efetivadas. Os impactos da

situação financeira do agente ao que tange à liquidez em sua decisão devem ser estudados nessa abordagem. Por fim, visamos incluir, também, *alavancagem financeira*, investigando o impacto que essa alteração traz para a dinâmica. Enquanto questões relacionadas aos *custos de transação* e à *margem de segurança* tendem a diminuir o volume de negociações, a *alavancagem financeira* trabalha no sentido oposto. Em todas essas propostas, temos que ancorar nossas novas interpretações usando teorias consolidadas em Ciências Sociais Aplicadas. A visão da Física Estatística, mais uma vez, será empregada na análise do que emergir das simulações.

Referências

ANATOLYEV, S.; GOSPODINOV, N. Modeling financial return dynamics via decomposition. **Journal of Business & Economic Statistics**, p. 232–245, 2007. Citado na página 1.

ATMAN, A.; GONÇALVES, B. A. Influence of the investor's behavior on the complexity of the stock market. **Brazilian Journal of Physics**, Springer, v. 42, n. 1-2, p. 137–145, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

ATSALAKIS, G. S.; KIMON. Surveying stock market forecasting techniques – part ii: Soft computing methods. **Expert Systems with Applications**, p. 5932–5941, 2009. Citado na página 1.

ATSALAKIS, G. S.; VALAVANIS, K. P. Surveying stock market forecasting techniques - part i: Convencional methods. **Computation Optimization in Economics and Finance Research Compendium**, p. 49–104, 2013. Citado na página 1.

BAK, P.; PACZUSKI, M.; SHUBIK, M. Price variations in a stock market with many agents. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 246, n. 3-4, p. 430–453, 1997. Citado na página 1.

BAKKER, L. et al. A social network model of investment behaviors in the stock market. **Physica A**, v. 389, n. 6, p. 1223–1229, 2010. Citado na página 3.

BANCO DO BRASIL. **Fundos de Investimento**. 2019. Disponível em: <<https://www.bb.com.br/pbb/pagina-inicial/voce/produtos-e-servicos/investimentos/fundos#/>>. Acesso em: 05 jul. 2019. Citado na página 54.

BARTOLOZZI, M.; THOMAS, A. W. Stochastic cellular automata model for stock market dynamics. **Physical review E**, APS, v. 69, n. 4, p. 046112, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

BIANCHI, S.; PIANESE, A. Time-varying hurst–holder exponents and the dynamics of (in) efficiency in stock markets. **Chaos, Solitons & Fractals**, Elsevier, v. 109, p. 64–75, 2018. Citado na página 48.

BIKAS, E. et al. Behavioural finance: The emergence and development trends. **Procedia-social and behavioral sciences**, Elsevier, v. 82, p. 870–876, 2013. Citado na página 54.

BOOKSTABER, R.; PADDRIK, M.; TIVNAN, B. An agent-based model for financial vulnerability. **Journal of Economic Interaction and Coordination**, Springer, v. 13, n. 2, p. 433–466, 2018. Citado na página 1.

BORGES, M. R. Efficient market hypothesis in european stock markets. **The European Journal of Finance**, Taylor & Francis, v. 16, n. 7, p. 711–726, 2010. Citado na página 54.

BURY, T. Predicting trend reversals using market instantaneous state. **PhPhysica: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 404, p. 79–91, 2014. Citado na página 1.

CAGINALP, C.; CAGINALP, G. Stochastic asset price dynamics and volatility using a symmetric supply and demand price equation. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, 2019. Citado na página 4.

CAGINALP, G.; DESANTIS, M. A paradigm for quantitative behavioral finance. **American Behavioral Scientist**, v. 55, n. 21, p. 1014–1034, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 54.

CAGINALP, G.; ERMENTROUT, G. B. Numerical studies of differential equations related to theoretical financial markets. **Applied Mathematics Letters**, v. 4, n. 1, p. 35–38, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 1, 4 e 56.

CAGINALP, G.; ILIEVA, V. The dynamics of trader motivations in asset bubbles. **IV Workshop LABSI on Behavioral Finance: Theory and Experimental Evidence Certosa di Pontignano (Siena)**, p. 6–8, 2006. Citado na página 1.

CAGINALP, G.; ILIEVA, V. The dynamics of trader motivations in asset bubbles. **Journal of Economic Behavior and Organization**, v. 66, p. 641–656, 2008. Citado na página 4.

CAGINALP, G.; MERDAN, H. Asset price dynamics with heterogeneous groups. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 225, p. 43–54, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 4.

CAGINALP, G.; PORTER, D.; SMITH, V. Momentum and overreaction in experimental asset markets. **International Journal of Industrial Organization**, v. 18, p. 187–204, 2000. Citado na página 4.

CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. **E-Fundos**. 2019. Disponível em: <<http://www.caixa.gov.br/fundos-investimento/e-fundos/Paginas/default.aspx>>. Acesso em: 05 jul. 2019. Citado na página 54.

CAJUEIRO, D. O.; TABAK, B. M. The hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. **Physica A**, v. 336, p. 521–537, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 54.

CALVET, L.; FISHER, A. Multifractality in asset returns: theory and evidence. **Review of Economics and Statistics**, MIT Press, v. 84, n. 3, p. 381–406, 2002. Citado na página 48.

CAMPOS, P. O. **Modelo baseado em um sistema de equações diferenciais lineares para a dinâmica de preços de um ativo financeiro**. 104 p. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal Tecnológico de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 4, 5, 26 e 56.

CATTY, J. P. **IFRS: Guia de Aplicação do Valor Justo**. [S.l.]: Bookman Editora, 2013. Citado na página 34.

COMISSÃO DE VALORES MOBILIÁRIOS E APIMEC. **Análise de investimentos: histórico, principais ferramentas e mudanças conceituais para o futuro / Associação de Analistas e Profissionais de Investimentos no Mercado de Capitais - APIMEC**. 1. ed. Rio de Janeiro, 2017. 230 p. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 10.

COVA, C. J. G. et al. **Finanças e mercados de capitais - Mercados fractais a nova fronteira das finanças**. [S.l.]: Cengage Learning, 2011. 191 p. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

DAMODARAN, A. **Avaliação de investimentos: ferramentas e técnicas para a determinação do valor de qualquer ativo**. [S.l.]: Qualitymark, 2010. Citado na página 15.

DANIEL, K.; TITMAN, S. Market efficiency in an irrational world. **Financial Analysts Journal**, Taylor & Francis, v. 55, n. 6, p. 28–40, 1999. Citado na página 54.

DESANTIS, M.; CAGINALP, G. Multi-group asset flow equations and stability. **Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B**, v. 16, n. 1, p. 109–150, 2011. Citado na página 1.

ELLIOTT, R. N. et al. **The wave principle**. [S.l.: s.n.], 1938. Citado na página 7.

FAMA, E. F. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. **Journal of Finance**, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970. Citado 3 vezes nas páginas 14, 42 e 55.

FAMA, E. F. Efficient capital markets: li. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 46, n. 5, p. 1575–1617, 1991. Citado na página 15.

FAN, Y. et al. The effect of investor psychology on the complexity of stock market: An analysis based on cellular automaton model. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier Ltd, v. 56, n. 1, p. 63–69, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

FANG, H.; LAI, T.-Y. Co-kurtosis and capital asset pricing. **Financial Review**, Wiley Online Library, v. 32, n. 2, p. 293–307, 1997. Citado na página 22.

FORTUNA, E. Mercado financeiro: produtos e serviços. 15ª edição. **Rio de Janeiro**, 2005. Citado na página 42.

FORTUNA, E. **Mercado financeiro: produtos e serviços**. [S.l.]: Qualitymark Editora Ltda, 2008. Citado na página 54.

GABAIX, X. et al. A theory of power-law distributions in financial market fluctuations. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 423, n. 6937, p. 267, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 48.

GOPIKRISHNAN, P. et al. Inverse cubic law for the distribution of stock price variations. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 3, n. 2, p. 139–140, 1998. Citado na página 48.

GRAHAM, B. The intelligent investor (re-issue of the 1949 edition). **New York: Collins**, 1949. Citado na página 11.

GRAHAM, B. et al. **Security analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1934. Citado na página 11.

GREEN, E.; HANAN, W.; HEFFERNAN, D. The origins of multifractality in financial time series and the effect of extreme events. **The European Physical Journal B**, Springer, v. 87, n. 6, p. 129, 2014. Citado na página 48.

GUEDES, E. et al. Dcca cross-correlation in blue-chips companies: A view of the 2008 financial crisis in the eurozone. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 479, p. 38–47, 2017. Citado na página 48.

HAMILTON, W. P. **The Stock Market Barometer; a Study of Its Forecast Value Based on Charles H. Dow's Theory of the Price Movement**. [S.l.]: Harper & Bros., 1922. Citado na página 7.

- HU, K. et al. Effect of trends on detrended fluctuation analysis. **Physical Review E**, APS, v. 64, n. 1, p. 011114, 2001. Citado na página 23.
- HURST, H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. **Trans. Amer. Soc. Civil Eng.**, v. 116, p. 770–799, 1951. Citado na página 23.
- KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. **Econometrica**, v. 47, p. 263–292, 1979. Citado 4 vezes nas páginas 2, 4, 54 e 55.
- KANTELHARDT, J. W. et al. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 295, n. 3-4, p. 441–454, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 23.
- KANTELHARDT, J. W. et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 316, n. 1-4, p. 87–114, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 23, 25 e 51.
- KWAPIEŃ, J.; OŚWIECIMKA, P.; DROŹDŹ, S. Detrended fluctuation analysis made flexible to detect range of cross-correlated fluctuations. **Physical Review E**, APS, v. 92, n. 5, p. 052815, 2015. Citado na página 48.
- KWAPIEŃ, J.; OŚWIECIMKA, P.; DROŹDŹ, S. Components of multifractality in high-frequency stock returns. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 350, n. 2, p. 466 – 474, 2005. ISSN 0378-4371. Citado na página 48.
- LIU, Y. et al. Statistical properties of the volatility of price fluctuations. **Physical review e**, APS, v. 60, n. 2, p. 1390, 1999. Citado na página 48.
- LO, A. W. The adaptive markets hypothesis. **Journal of Portfolio Management**, v. 30, n. 5, p. 15–29, 2004. Citado na página 54.
- LUX, T.; MARCHESI, M. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 397, n. 6719, p. 498, 1999. Citado na página 54.
- MALEVERGNE*, Y.; PISARENKO, V.; SORNETTE, D. Empirical distributions of stock returns: between the stretched exponential and the power law? **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 5, n. 4, p. 379–401, 2005. Citado na página 48.
- MANDELBROT, B. B.; FISHER, A. J.; CALVET, L. E. A multifractal model of asset returns. Cowles Foundation discussion paper, 1997. Citado na página 15.
- MANDELBROT, B. B.; STEWART, I. Fractals and scaling in finance. **Nature**, [London: Macmillan Journals], 1869-, v. 391, n. 6669, p. 758–758, 1998. Citado na página 15.
- MANDELBROT, B. B.; WALLIS, J. R. Robustness of the rescaled range r/s in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. **Water Resources Research**, Wiley Online Library, v. 5, n. 5, p. 967–988, 1969. Citado na página 22.
- MANKIW, N. G. **Introdução à Economia: Tradução da 6 edição norte Americana**. [S.l.]: Cengage Learning, 2014. Citado na página 26.
- MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. **Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance**. [S.l.]: Cambridge university press, 1999. Citado na página 49.

- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. Citado na página 12.
- MERRILL, W. C.; FOX, K. A. Estatística econômica: uma introdução. **São Paulo: Atlas**, 1980. Citado na página 22.
- MODIGLIANI, F.; MILLER, M. H. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. **The American**, v. 1, p. 3, 1958. Citado na página 12.
- NELSON, S. A. **The ABC of Stock Speculation**. [S.l.]: Doubleday, Page, 1912. v. 5. Citado na página 7.
- NETO, A. A. **Finanças Corporativas e Valor**. [S.l.]: São Paulo: Atlas, 2010. Citado na página 26.
- NISAR, S.; HANIF, M. Testing weak form of efficient market hypothesis: empirical evidence from south asia. **World Applied Sciences Journal**, v. 17, n. 4, p. 414–427, 2012. Citado na página 54.
- PAN, R. K.; SINHA, S. Inverse-cubic law of index fluctuation distribution in indian markets. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 387, n. 8-9, p. 2055–2065, 2008. Citado na página 48.
- PARETO, V. **Manuale di economia politica con una introduzione alla scienza sociale**. Milano: Societa Editrice, 1906. v. 13. Citado na página 55.
- PENG, C.-K. et al. Mosaic organization of dna nucleotides. **Physical review e**, APS, v. 49, n. 2, p. 1685, 1994. Citado na página 23.
- PETERS, E. E. A chaotic attractor for the s&p 500. **Financial Analysts Journal**, Taylor & Francis, v. 47, n. 2, p. 55–62, 1991. Citado na página 15.
- PETERS, E. E. **Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1994. v. 24. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- PETIT, J. J. G.; LAFUENTE, E. V.; VIEITES, A. R. How information technologies shape investor sentiment: A web-based investor sentiment index. **Borsa Istanbul Review**, Elsevier, 2019. Citado na página 3.
- PICKHARDT, M.; SEIBOLD, G. Income tax evasion dynamics: Evidence from an agent-based econophysics model. **Journal of Economic Psychology**, Elsevier, v. 40, p. 147–160, 2014. Citado na página 1.
- PINHEIRO, J. L. **Mercado de Capitais. Inclui a nova plataforma de negociação PUMA e novos instrumentos de captação de recursos**. 8. ed. [S.l.: s.n.], 2016. Citado 5 vezes nas páginas 7, 8, 9, 10 e 13.
- PLATT, D.; GEBBIE, T. Can agent-based models probe market microstructure? **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 503, p. 1092–1106, 2018. Citado na página 1.
- PLEROU, V. et al. Quantifying stock-price response to demand fluctuations. **Physical Review E**, APS, v. 66, n. 2, p. 027–104, 2002. Citado na página 26.

- POLACH, J.; KUKACKA, J. Prospect theory in the heterogeneous agent model. **Journal of Economic Interaction and Coordination**, Springer, v. 14, n. 1, p. 147–174, 2019. Citado na página 4.
- POON, S.-H.; GRANGER, C. W. J. Forecasting volatility in financial markets: A review. **Journal of Economic Literature**, XLI, n. 2, p. 478–539, 2003. Citado na página 1.
- PORTAL DO INVESTIDOR (CVM). **Fundos de Índices (ETFs)**. 2019. Disponível em: <https://www.investidor.gov.br/menu/Menu_Investidor/valores_mobiliarios/ETFs.html>. Acesso em: 05 jul. 2019. Citado na página 54.
- QIU, G.; KANDHAI, D.; SLOOT, P. Understanding the complex dynamics of stock markets through cellular automata. **Physical Review E**, APS, v. 75, n. 4, p. 046116, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- RAK, R.; DROŽDŽ, S.; KWAPIEŃ, J. Nonextensive statistical features of the polish stock market fluctuations. **Physica A: statistical mechanics and its applications**, Elsevier, v. 374, n. 1, p. 315–324, 2007. Citado na página 48.
- RESENDE, C. C. de et al. Investigating market efficiency through a forecasting model based on differential equations. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, 2017. Citado na página 1.
- ROMANOVSKY, M. Y.; VIDOV, P. Analytical representation of stock and stock-indexes returns: Non-gaussian random walks with various jump laws. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 390, n. 21-22, p. 3794–3805, 2011. Citado na página 48.
- SAMANIDOU, E. et al. Agent-based models of financial markets. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 70, n. 3, p. 409, 2007. Citado na página 1.
- SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964. Citado na página 12.
- SHLEIFER, A. **Inefficient markets: An introduction to behavioural finance**. [S.l.]: OUP Oxford, 2000. Citado na página 54.
- SIMON, H. A.; BARNARD, C. I. **Administrative behavior: A study of decision-making processes in administrative organization**. [S.l.]: Macmillan, 1947. Citado na página 55.
- SMITH, G.; RYOO, H.-J. Variance ratio tests of the random walk hypothesis for european emerging stock markets. **The European Journal of Finance**, Taylor & Francis, v. 9, n. 3, p. 290–300, 2003. Citado na página 54.
- SMITH, V. L. Economics in the laboratory. **Journal of Economic Perspectives**, v. 8, p. 113–131, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 1, 32 e 54.
- SOUZA, S. R.; TABAK, B. M.; CAJUEIRO, D. O. Investigação da memória de longo prazo na taxa de câmbio no brasil. **Revista Brasileira de Economia**, SciELO Brasil, v. 60, n. 2, p. 193–209, 2006. Citado na página 48.
- STANLEY, H.; MANTEGNA, R. **An introduction to econophysics**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Citado na página 2.

STEFAN, F.; ATMAN, A. Is there any connection between the network morphology and the fluctuations of the stock market index? **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 419, p. 630–641, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. de. **Dinâmica estocástica e irreversibilidade**. [S.l.]: Edusp, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 19.

VILELA, A. L. et al. Majority-vote model for financial markets. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 515, p. 762–770, 2019. Citado na página 1.

WANG, J. et al. Evolutionary percolation model of stock market with variable agent number. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 354, p. 505–517, 2005. Citado na página 1.

WEI, Y.-m. et al. The cellular automaton model of investment behavior in the stock market. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 325, p. 507–516, 2003. Citado na página 2.

WESTPHAL, R.; SORNETTE, D. Market impact and performance of arbitrageurs of financial bubbles in an agent-based model. **Swiss Finance Institute Research Paper**, n. 19-29, 2019. Citado na página 1.

XAVIER, P. O.; ATMAN, A.; MAGALHÃES, A. B. de. Equation-based model for the stock market. **Physical Review E**, APS, v. 96, n. 3, p. 032305, 2017. Citado na página 5.

YAN, C. et al. Power-law properties of chinese stock market. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 353, p. 425–432, 2005. Citado na página 48.

YIM, K.; OH, G.; KIM, S. An analysis of the financial crisis in the kospi market using hurst exponents. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 410, p. 327–334, 2014. Citado na página 48.

ZHANG, J.; ZHANG, Y.; KLEINERT, H. Power tails of index distributions in chinese stock market. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 377, n. 1, p. 166–172, 2007. Citado na página 48.

Apêndices

APÊNDICE A – Determinação e solução das equações diferenciais usadas na aproximação do modelo

Para chegar à equação diferencial do oscilador harmônico amortecido para o desvio logarítmico do preço

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_{N+1}}{dt} + \kappa x_{N+1} = 0, \quad (55)$$

montamos, de forma expandida, o sistema de equações diferenciais descrito pela equação (35). Assim temos

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} \\ \frac{dx_{N+1}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & b_1 & -c_1 \\ b_2 & -a_2 + b_2 & \cdots & b_2 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_N & b_N & \cdots & -a_N + b_N & -c_N \\ m & m & \cdots & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \\ x_{N+1}(t) \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Executando a multiplicação matricial, determinamos as N equações que compõe as condutas dos agentes desse mercado (vide Equação (33)), assim como também determinamos a equação $(N + 1)$ -ésima, última expressão do sistema, que representa o desvio logarítmico do preço (vide Equação (34)):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dx_1}{dt} & = & -ax_1 + b \sum_{i=1}^N x_i - c(x_{N+1}) \\ \frac{dx_2}{dt} & = & -ax_2 + b \sum_{i=1}^N x_i - c(x_{N+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} & = & -ax_N + b \sum_{i=1}^N x_i - c(x_{N+1}) \\ \frac{dx_{N+1}}{dt} & = & m \sum_{j=1}^N x_j \end{array} \right. \quad (57)$$

Considerando apenas a última equação do sistema (57), podemos representar o somatório na forma expandida como

$$\frac{dx_{N+1}}{dt} = m [x_1 + x_2 + \dots + x_N]. \quad (58)$$

Ao derivar a equação (58) obtemos a segunda derivada do termo x_{N+1}

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{dt^2} = m \left[\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{dx_N}{dt} \right]. \quad (59)$$

Note que a soma das N derivadas dadas em (59) representa a soma das equações diferenciais apresentadas no sistema dado em (57). Assim podemos representar a derivada segunda do termo x_{N+1} como

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{d^2 t} = m \left[-a \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) + bN \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) - cN (x_{N+1}) \right]. \quad (60)$$

Uma vez que

$$\frac{dx_{N+1}}{dt} = m \left(\sum_{j=1}^N x_j \right), \quad (61)$$

temos

$$\left(\sum_{j=1}^N x_j \right) = \frac{1}{m} \cdot \frac{dx_{N+1}}{dt}. \quad (62)$$

Desta forma, a expressão (60) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{d^2 t} = m \left[(-a + bN) \left(\frac{1}{m} \cdot \frac{dx_{N+1}}{dt} \right) - cN (x_{N+1}) \right]. \quad (63)$$

Manipulando algebricamente a equação (63), encontramos a equação diferencial homogênea de segunda ordem que representa o oscilador harmônico amortecido

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{d^2 t} + (a - bN) \frac{dx_{N+1}}{dt} + cmN (x_{N+1}) = 0. \quad (64)$$

Para simplificar a apresentação da expressão e direcionar as análises das possíveis soluções da equação diferencial (64), definimos as constantes

$$\Gamma = [a - (N - 1) b] \quad \text{e} \quad \kappa = cmN. \quad (65)$$

Assim, a equação Equação (64) passa a ser

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{d^2 t} + \Gamma \frac{dx_{N+1}}{dt} + \kappa (x_{N+1}) = 0. \quad (66)$$

Analisando a equação (66), pode-se perceber que a sua solução consiste em presumir que a segunda derivada é exprimível como uma combinação linear de sua primeira derivada e zerésima¹ derivada. Tal característica nos induz a presumir que a solução deve ter a forma $x_{N+1}(t) = e^{rt}$, pois as derivadas dessa função exponencial são constantes multiplicadas pela mesma expressão exponencial. Substituindo a solução e_{rt} na expressão (66), encontramos

$$e^{rt}(r^2 + \Gamma r + \kappa) = 0. \quad (67)$$

Queremos que a expressão seja verdadeira para todo t real. Logo nossa análise se resume à equação característica ($r^2 + \Gamma r + \kappa = 0$). Como trata-se de uma expressão do segundo grau, pela fórmula de *Bhaskara*, a solução geral é

$$\begin{aligned} x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 e^{st} + C_2 e^{-st}), & \text{para } (\Gamma/2)^2 > \kappa, \\ x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 + C_2 t), & \text{para } (\Gamma/2)^2 = \kappa, \\ x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t), & \text{para } (\Gamma/2)^2 < \kappa. \end{aligned} \quad (68)$$

¹ A zerésima derivada de uma função, determina a própria função.

onde

$$r = -\Gamma/2, \quad s = \sqrt{(\Gamma/2)^2 - \kappa}, \quad \theta = \sqrt{\kappa - (\Gamma/2)^2}. \quad (69)$$

Consideremos agora a equação diferencial

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_{N+1}}{dt} + \kappa x_{N+1} = \Omega. \quad (70)$$

Apesar de ser parecida com a expressão (55), trata-se de uma equação diferencial não homogênea, devido à presença do termo Ω . Do mesmo modo que fizemos em (56), para encontrar a equação diferencial dada em (70) ampliamos a representação do sistema em (43):

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} \\ \frac{dx_{N+1}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & b_1 & -c_1 \\ b_2 & -a_2 + b_2 & \cdots & b_2 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_N & b_N & \cdots & -a_N + b_N & -c_N \\ m & m & \cdots & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \\ x_{N+1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \log P_1 \\ c \log P_2 \\ \vdots \\ c \log P_N \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Ao executar a multiplicação matricial, determinamos as N equações que compõe as condutas dos agentes desse mercado (vide Equação (41)), assim como também determinamos a equação $(N + 1)$ -ésima que representa o desvio logarítmico do preço (vide Equação (42))

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -ax_1 + b \sum_{i=1}^N x_i - c(x_{N+1}) + c(\log P_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = -ax_2 + b \sum_{i=1}^N x_i - c(x_{N+1}) + c(\log P_2) \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} = -ax_N + b \sum_{i=1}^N x_i - c(x_{N+1}) + c(\log P_N) \\ \frac{dx_{N+1}}{dt} = m \sum_{j=1}^N x_j \end{cases}. \quad (72)$$

Assim como fizemos nos passos de (58) até (60) encontramos a derivada segunda do termo x_{N+1} dada por

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{dt^2} = m \left[-a \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) + bN \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) - cN (x_{N+1}) + c \left(\sum_{j=1}^N \log P_j \right) \right]. \quad (73)$$

Seguindo os mesmos passos de (61) e (62), chegamos a

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{dt^2} = m \left[(-a + bN) \left(\frac{1}{m} \cdot \frac{dx_{N+1}}{dt} \right) - cN (x_{N+1}) + c \left(\sum_{j=1}^N \log P_j \right) \right]. \quad (74)$$

Por fim, encontramos a equação diferencial não homogênea

$$\frac{d^2 x_{N+1}}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_{N+1}}{dt} + \kappa (x_{N+1}) = \Omega, \quad (75)$$

sendo

$$\Gamma = [a - (N - 1)b], \quad \kappa = cmN \quad \text{e} \quad \Omega = cm \left(\sum_{j=1}^N \log P_j \right). \quad (76)$$

Avaliando a equação diferencial (75), percebe-se que para encontrar a solução $x_{N+1}(t)$, devemos combinar a solução dada em (68), denotada agora por x_H , com uma solução particular x_P relacionada ao termo não homogêneo Ω . Assim a solução geral será

$$x_{N+1}(t) = x_H + x_P. \quad (77)$$

Uma vez que já conhecemos x_H , nosso problema consiste em determinar x_P . Desta forma, x_P deve ser tal que a combinação linear $x_{N+1}'' + \Gamma x_{N+1}' + \kappa x_{N+1}$ seja igual a uma constante, a saber $\Omega = cm \left(\sum_{j=1}^N \log P_j \right)$. Assim, utilizando o método dos coeficiente indeterminados, a solução particular imediata será

$$x_P = \frac{\sum_{j=1}^N \log P_j}{N}. \quad (78)$$

Consequentemente, a solução geral terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 e^{st} + C_2 e^{-st}) + \left(\frac{\sum_{j=1}^N \log P_j}{N} \right), & \text{para } (\Gamma/2)^2 > \kappa, \\ x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 + C_2 t) + \left(\frac{\sum_{j=1}^N \log P_j}{N} \right), & \text{para } (\Gamma/2)^2 = \kappa, \\ x_{N+1}(t) &= e^{rt}(C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t) + \left(\frac{\sum_{j=1}^N \log P_j}{N} \right), & \text{para } (\Gamma/2)^2 < \kappa. \end{aligned} \quad (79)$$

onde

$$r = -\Gamma/2, \quad s = \sqrt{(\Gamma/2)^2 - \kappa}, \quad \theta = \sqrt{\kappa - (\Gamma/2)^2}. \quad (80)$$