



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**UTILIZAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES
CONFORMES E DE
SCHWARZ-CHRISTOFFEL COMO MÉTODO
DE ABORDAGEM DE PROBLEMAS NA
ELETROSTÁTICA**

ANDRÉ LUIZ DE PAULO E SILVA

Orientador: Giancarlo Queiroz Pellegrino
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

BELO HORIZONTE
AGOSTO DE 2019

ANDRÉ LUIZ DE PAULO E SILVA

**UTILIZAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES CONFORMES
E DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL COMO MÉTODO DE
ABORDAGEM DE PROBLEMAS NA ELETROSTÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: Giancarlo Queiroz Pellegrino
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

S586u Silva, André Luiz de Paulo e
Utilização das transformações conformes e de Schwarz-Christoffel
como método de abordagem de problemas na eletrostática / André Luiz
de Paulo e Silva. – 2019.

111 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Giancarlo Queiroz Pellegrino.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de
Minas Gerais.

1. Mapeamento conforme – Teses. 2. Transformação de Schwarz-
Christoffel – Teses. 3. Funções harmônicas – Teses. 4. Dirichlet,
Problemas de – Teses. 5. Eletrostática – Teses. I. Pellegrino, Giancarlo
Queiroz. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.
III. Título.

CDD 515.9



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**“UTILIZAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES CONFORMES E DE
SCHWARZ-CHRISTOFFEL COMO MÉTODO DE ABORDAGEM DE
PROBLEMAS NA ELETROSTÁTICA”**

Dissertação de Mestrado apresentada por **André Luiz de Paulo e Silva**, em 28 de agosto de 2019, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr.^a Ursula do Carmo Resende
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Carlos Magno Martins Cosme
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Leonardo dos Santos Lima
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática e Computacional

Agradecimentos

Agradeço a Deus e a todos que proporcionaram a concretização desse sonho.

*“Sonho que se sonha só
É só um sonho que se sonha só,
Mas sonho que se sonha junto
É realidade.”* (Raul Seixas, texto da música
“Prelúdio” de 1974.)

Resumo

Esta dissertação utiliza as transformações conformes e de Schwarz-Christoffel como método de abordagem de problemas bidimensionais de valor de contorno envolvendo a Equação de Laplace, com o foco nos problemas da eletrostática. As condições de contorno que são trabalhadas por essas transformações são dos tipos Dirichlet constantes e Neumann nulas, sendo o foco desta dissertação as condições do primeiro tipo. Esse método de abordagem é baseado no mapeamento de regiões de um plano complexo em outro, permitindo que as regiões mapeadas possam sempre voltar para suas geometrias originais. Nesse sentido, a região de destino deve apresentar um menor nível de complexidade do problema e, se possível, uma solução analítica já conhecida. As transformações de Schwarz-Christoffel são um tipo específico de transformações conformes envolvendo domínios poligonais. Nesta dissertação, encontram-se as definições e propriedades matemáticas de ambos os mapeamentos com algumas demonstrações. Além disso, cinco problemas são solucionados analiticamente com as transformações conformes e um com a de Schwarz-Christoffel. E quatro problemas são solucionados numericamente via Schwarz-Christoffel pelo pacote *SC Toolbox* do MATLAB e confrontados com as soluções analíticas, quando estabelecidas, ou confrontadas com as soluções numéricas obtidas pelo método de Elementos Finitos do pacote *PDE Toolbox* do MATLAB.

Palavras-chave: Transformação conforme. Transformação de Schwarz-Christoffel. Equação de Laplace. Condição de Dirichlet constante. Eletrostática.

Abstract

This dissertation uses the conformal and Schwarz-Christoffel transformations as a method of approaching two-dimensional boundary value problems involving Laplace equation, with a focus on electrostatic problems. The boundary conditions that are worked by these transformations are of constant Dirichlet and null Neumann types, being the focus of this dissertation the conditions of the first type. This approach method is based on mapping regions from one complex plan to another, always allowing mapped regions to return to their original geometries. In this sense, the target region should present a lower level of complexity of the problem and, if possible, a known analytical solution. Schwarz-Christoffel transformations are a specific type of conformal transformations that involve polygonal domains. In this dissertation, we find the definitions and mathematical properties of both mappings with some demonstrations. In addition, five problems are analytically solved with conformal transformations and one with Schwarz-Christoffel transformation. Also, four problems are solved numerically via Schwarz-Christoffel by the *MATLAB SC Toolbox* package and confronted with the analytical solutions when these are established, or they are confronted with the numerical solutions obtained by the *MATLAB PDE Toolbox* Finite Element method.

Keywords: Conformal transformation. Schwarz-Christoffel transformation. Laplace equation. Constant Dirichlet condition. Electrostatic.

Lista de Figuras

Figura 1 – Efeito de vazamento nas bordas de um capacitor de placas paralelas . . .	3
Figura 2 – Procedimento para a solução de problemas que envolvam a equação de Laplace utilizando as transformações conformes	5
Figura 3 – Diferentes tipos de curvas	12
Figura 4 – Curva suave sendo transformada em curva suave por meio de uma transformação analítica em z_0	18
Figura 5 – Transformação conforme no ponto z_0	18
Figura 6 – Condições de contorno preservadas sob a transformação conforme . . .	25
Figura 7 – Problema das bordas do capacitor de placas paralelas	31
Figura 8 – Domínio e imagem da transformação $T(z) = z + e^z$	32
Figura 9 – Composição de funções para a mudança de geometria do problema 1 . .	33
Figura 10 – Curvas equipotenciais do problema 1 encontradas analiticamente	35
Figura 11 – Curvas de fluxo elétrico do problema 1 encontradas analiticamente . . .	36
Figura 12 – Seção transversal do semicilindro referente ao Problema 2	37
Figura 13 – Procedimento para a transformação da geometria do semicilindro na geometria do capacitor de placas paralelas de dimensões “infinitas”. . .	37
Figura 14 – Equipotenciais geradas pelo MATLAB para o Problema 2	40
Figura 15 – Seção transversal referente ao Problema 5	41
Figura 16 – Transformação proposta para se solucionar o Problema 5	42
Figura 17 – Equipotenciais geradas pelo MATLAB para o Problema 3	44
Figura 18 – Seção transversal referente ao Problema 4	45
Figura 19 – Transformação proposta para se solucionar o Problema 4	46
Figura 20 – Equipotenciais geradas pelo MATLAB para o Problema 4	48
Figura 21 – Seção transversal de dois cilindros com dois dielétricos entre eles e a imagem dessa geometria	49
Figura 22 – Equipotenciais geradas pelo MATLAB para os planos z e w do Problema 5	51
Figura 23 – Problema de valor de contorno para o domínio (i) e para a imagem (ii) em relação à função $f(z) = \exp z$	52
Figura 24 – Curvas equipotenciais cujos potenciais variam de $1/2$ em $1/2$ para as geometrias do domínio e da imagem através do pacote <i>PDE Toolbox</i> . . .	53
Figura 25 – Exemplos de regiões poligonais limitada e ilimitada	58
Figura 26 – Representação do eixo real x sendo levado no contorno de um polígono limitado	61
Figura 27 – Dois caminhos de integração contidos em um domínio simplesmente conexo	63
Figura 28 – Composição de funções que leva o círculo unitário em um polígono qualquer	69

Figura 29 – Solucionando a equação de Laplace com duas condições de contorno de Dirichlet constantes pela <i>transformação da Faixa</i>	74
Figura 30 – Domínio da transformação de Schwarz-Christoffel para o método <i>Transformação da Faixa</i> com os pré-vértices sobre o contorno	76
Figura 31 – Transformação de Schwarz-Christoffel na forma de <i>Transformação da Faixa</i> , levando a faixa infinita em uma região poligonal ilimitada	79
Figura 32 – A função exponencial proporcionando a rotação da “placa” superior em relação à “placa” inferior mantida fixa	80
Figura 33 – Domínio relacionado ao Problema <i>A</i>	86
Figura 34 – Equipotenciais encontradas numericamente e analiticamente sobrepostas para o Problema <i>A</i> com os seus respectivos potenciais indicados	88
Figura 35 – Polígono fechado sugerido para se construir a região poligonal ilimitada relacionada ao Problema <i>B</i>	89
Figura 36 – Região poligonal ilimitada que representa uma das bordas do capacitor de placas paralelas que é o Problema <i>B</i>	92
Figura 37 – Curvas equipotenciais e linhas de fluxo geradas para o Problema <i>B</i>	93
Figura 38 – Domínio relacionado ao Problema <i>C</i>	94
Figura 39 – Domínio e imagem do Problema <i>C</i>	95
Figura 40 – Problema de valor de contorno <i>C</i> transferido para o semiplano superior	98
Figura 41 – Polígono do Problema <i>C</i> criado no MATLAB	101
Figura 42 – Curvas equipotenciais e linhas de fluxo geradas para o Problema <i>C</i>	102
Figura 43 – Domínio relacionado ao Problema <i>D</i>	103
Figura 44 – Curvas equipotenciais geradas para o Problema <i>D</i>	104
Figura 45 – Polígono aproximado para representar um retângulo com uma fenda no interior	105
Figura 46 – Curvas equipotenciais do Problema <i>D</i> à medida que a fenda vai diminuindo o seu comprimento	105

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Dados do polígono do Problema B	91
Tabela 2 – Dados do polígono do Problema C	101
Tabela 3 – Dados do polígono do Problema D	103

Sumário

1 – Introdução	1
1.1 Relevância do Tema sob Investigação	1
1.2 Contextualização da Dissertação	2
1.3 Objetivos e Metodologia	4
1.4 Organização do Texto	5
2 – Transformações Conformes	7
2.1 Introdução	7
2.2 Funções Analíticas e Condições de Cauchy-Riemann	7
2.3 Definições Matemáticas Importantes	11
2.4 Funções Harmônicas Conjugadas	13
2.5 Definição da Transformação Conforme	17
2.6 Propriedades da Transformação Conforme	20
3 – Aplicações das Transformações Conformes	27
3.1 Introdução	27
3.2 Equação de Laplace na Eletrostática	27
3.3 Problema 1	30
3.4 Problema 2	36
3.5 Problema 3	41
3.6 Problema 4	45
3.7 Problema 5	49
3.8 Problema 6	52
4 – Transformações de Schwarz-Christoffel	55
4.1 Introdução	55
4.2 Teorema do Mapeamento de Riemann	56
4.3 Considerações sobre o Polígono	57
4.4 Ideia Intuitiva da Transformação de Schwarz-Christoffel	59
4.5 Propriedades da Transformação de Schwarz-Christoffel	62
4.5.1 Analiticidade e Continuidade da Transformação de Schwarz-Christoffel	63
4.5.2 Mapeamento pela Transformação de Schwarz-Christoffel	67
4.6 Problema do Parâmetro e sua Abordagem Numérica	70
4.7 Métodos de Solução da Equação de Laplace em Geometrias Poligonais	74
4.7.1 Primeiro Método	74
4.7.2 Segundo Método	80

5 – Aplicações das Transformações de Schwarz-Christoffel	84
5.1 Introdução	84
5.2 Ângulos Internos de Vértices no Infinito	84
5.3 Problema <i>A</i>	86
5.4 Problema <i>B</i>	89
5.5 Problema <i>C</i>	93
5.5.1 Solução Analítica via Transformação de Schwarz-Christoffel	94
5.5.2 Solução Numérica pelo Pacote <i>SC Toolbox</i>	100
5.6 Problema <i>D</i>	102
6 – Conclusão	107
6.1 Resultados Alcançados	107
6.2 Propostas de Continuidade	108
Referências	110

Capítulo 1

Introdução

1.1 Relevância do Tema sob Investigação

As transformações conformes em geral, e a transformação de Schwarz-Christoffel em particular, são assuntos que despertam atualmente interesse de pesquisadores de várias áreas, principalmente com o advento da computação e, conseqüentemente, do tratamento numérico de problemas ([DRISCOLL; TREFETHEN, 2002](#)), apesar de poderem ser utilizadas também visando a soluções analíticas.

Essas transformações são basicamente formas de se mapear regiões de um plano complexo em outro, permitindo que as regiões mapeadas possam sempre voltar para suas geometrias originais. Dentro dessa perspectiva, pelo próprio conceito e propriedades, as pesquisas que fazem uso dessas transformações buscam geometrias mais “simples” em relação às suas geometrias originais, para facilitarem análises ou mesmo soluções de seus problemas.

A aplicação mais natural e adequada é a solução da equação de Laplace no plano com condições de contorno constantes por partes, e no caso de condições que envolvam derivadas homogêneas. Esta dissertação baseia-se nesse universo de problemas de valor de contorno. Com relação a aplicações, um campo com abundância de fenômenos relevantes é a engenharia elétrica. As transformações de Schwarz-Christoffel, por exemplo, já foram usadas em aplicações de circuitos integrados, motores magnéticos, controle automático, detecção de trincas, medição de resistência, entre outros. Outra das principais áreas clássicas de transformação conforme é a mecânica dos fluidos. A própria geração de malha, para a resolução numérica desses problemas, foi a principal motivação para alguns pesquisadores considerarem a transformação de Schwarz-Christoffel e tem sido usada com sucesso em algumas aplicações, apesar de historicamente a geração de malha ter desempenhado um papel maior no desenvolvimento da transformação de Schwarz-Christoffel do que vice-versa ([DRISCOLL; TREFETHEN, 2002](#)).

Muitos trabalhos vêm se desenvolvendo do ano de 2010 em diante. Por exemplo, (ZUMBRUM; EDWARDS, 2014) aplica a transformação de Schwarz-Christoffel em biossensores ópticos e (XU; WANG; LIU, 2015), em dois métodos de geração de malha para os modelos globais de circulação geral dos oceanos. Ambos os trabalhos fazem uso do pacote numérico *SC Toolbox* no MATLAB, que foi desenvolvido por (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002), e que também é usado no Capítulo 5 desta dissertação. Além desses, (FLOREA, 2015) faz uso da transformação conforme que leva a seção transversal de cilindros excêntricos na de cilindros concêntricos, aplicada no campo da Biotribologia, enquanto (YU et al., 2011) aplica outra transformação no processamento de dados sísmicos e (YANG; MEI; CUI, 2014) usa-a em projetos de lentes ópticas com o intuito de modificar a sua forma geométrica de circular para retangular. Dentro da proposta desta dissertação, que são problemas envolvendo a equação de Laplace, (YARIV; SHERWOOD, 2015) faz uma aplicação de uma transformação de Schwarz-Christoffel à análise da condução elétrica através de uma ranhura e (WANG; REN; DONG, 2018) usa uma classe específica das transformações conformes, conhecida em (BROWN; CHURCHILL, 2015) por Transformação Linear Fracionária, na geração de imagens de Tomografia por Impedância Elétrica.

1.2 Contextualização da Dissertação

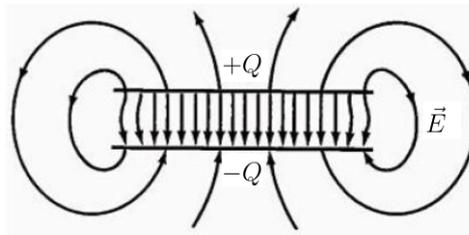
Uma aplicação bastante utilizada da transformação conforme é a equação de Laplace. Esta dissertação restringe-se a problemas que envolvam essa equação, com o direcionamento específico para a solução de problemas da eletrostática envolvendo um conjunto de condutores mantidos em diferentes potenciais elétricos. Exemplos de tais problemas incluem capacitores e válvulas eletrônicas. Mas as equações de Laplace não são úteis apenas para resolver problemas de campos eletrostáticos, como também são úteis em outros problemas que envolvam campos. Por exemplo, $\phi(x, y)$ que é interpretado como potencial eletrostático nesta dissertação, poderia ser o potencial magnético escalar em magnetostática, como a temperatura em condução de calor, como uma função tensão em fluxo de fluidos e como uma perda de carga em vazamentos (SADIKU, 2012).

É fundamental que os problemas que envolvam a equação de Laplace sejam bidimensionais, uma vez que a teoria das transformações conformes está relacionada a funções complexas de uma variável complexa, ou seja, funções que fazem o mapeamento de uma região de um plano a outro. Pode ser um problema tridimensional, desde que haja alguma simetria com relação a uma dimensão, tornando-se então efetivamente bidimensional. Além disso, incluir um termo forçado, obtendo uma equação de Poisson, ou quaisquer condições de contorno que não sejam de Dirichlet constantes ou de Neumann nulas faz toda a diferença, uma vez que o uso da teoria das transformações conformes em tais problemas podem afetá-los, aumentando mais a complexidade do problema na geometria transfor-

mada. No entanto, a equação de Laplace é uma das mais fundamentais na física e o caráter bidimensional ainda é valioso para muitos fenômenos (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002).

O cálculo analítico do campo eletrostático e do potencial eletrostático para o capacitor de placas paralelas de dimensões “infinitas”, partindo da equação de Laplace, é uma aplicação direta dessa equação e, neste caso, não há necessidade de um método numérico para resolvê-la. Porém, considerando o capacitor de dimensões finitas, o efeito das bordas aparece, como mostrado na Figura 1, e a solução analítica já não se torna trivial (SADIKU, 2012).

Figura 1 – Efeito de vazamento nas bordas de um capacitor de placas paralelas.



Fonte: (SADIKU, 2012).

A aplicação de métodos numéricos já conhecidos, como o *método de Elementos Finitos* (FEM), resolveria o problema, mas a abordagem desenvolvida neste trabalho é uma transformação de geometrias do problema, independentemente da forma como se deseja solucioná-lo. O que se pretende fazer para resolver esse problema é usar uma transformação conforme, para transformar essa geometria de um capacitor finito na de um capacitor de dimensões “infinitas”, para o qual a solução analítica para o potencial e campo eletrostáticos está disponível. Com a solução obtida, após a transformação, o objetivo final é voltar com as equações para a geometria inicial, através da transformação conforme inversa.

As transformações de Schwarz-Christoffel são como uma classe específica de transformações conformes que têm como uma das geometrias envolvidas uma região poligonal, seja ela limitada ou ilimitada. Esse mesmo capacitor de dimensões finitas da Figura 1 pode ser visto como uma região poligonal ilimitada e pode ser tratada também numericamente através da Transformação de Schwarz-Christoffel. Esse exemplo é feito no Capítulo 5 e comparado com a solução analítica do Capítulo 3. Além desses problemas, outros também são solucionados nesta dissertação, tanto analiticamente quanto numericamente com o pacote *SC Toolbox* do software MATLAB, mostrando a força que esse ferramental das transformações conformes possui.

1.3 Objetivos e Metodologia

O objetivo geral desta dissertação é utilizar as transformações conformes e as transformações de Schwarz-Christoffel como método de abordagem de problemas bidimensionais que envolvam a equação de Laplace, especificamente na eletrostática. Deseja-se mostrar o quanto essas transformações podem contribuir nas soluções analíticas e computacionais. A fim de se atingir esse objetivo geral, apresentam-se os seguintes objetivos específicos:

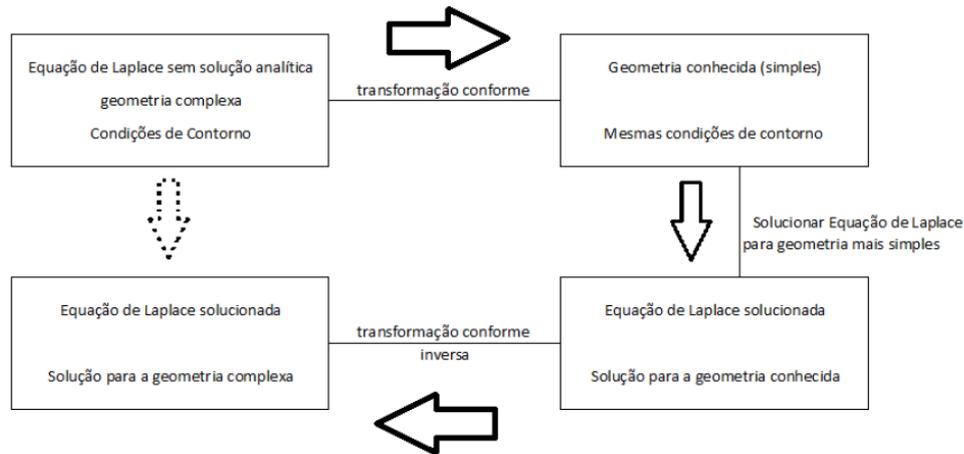
- Trabalhar os conceitos e teoremas matemáticos das transformações conformes, suas propriedades e como elas podem adaptar as geometrias de variados problemas que envolvam a equação de Laplace;
- Trabalhar os conceitos matemáticos e geométricos das transformações de Schwarz-Christoffel, mostrando o seu caráter conforme e também como são aplicadas;
- Utilizar o pacote *SC Toolbox* do MATLAB desenvolvido por (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002), mostrando a sua potencialidade e algumas limitações;
- Utilizar o *método de Elementos Finitos*, por ser robusto e usado comercialmente, específico do pacote *PDE Toolbox* do MATLAB, para efeito de comparação com os resultados obtidos.

A ideia do que é realizado nesta dissertação, com relação à abordagem dos problemas, é análoga à ideia da transformada de Laplace, em que se deseja solucionar uma equação diferencial analiticamente e, em vez de se utilizar os métodos analíticos diretos, utiliza-se a transformada de Laplace para transformar a equação diferencial em uma equação algébrica no “domínio da frequência”, que por sua vez tem uma solução direta e, muitas vezes, conhecida. Por fim, utiliza-se a transformada inversa de Laplace para encontrar a solução no “domínio do tempo” em que se procurava.

A Figura 2 mostra o procedimento do que se propõe com a teoria das transformações conformes (setas de linha contínua) no ataque aos problemas, ao passo que a solução direta (seta de linha tracejada) torna-se muito complexa analiticamente ou apresenta alto custo computacional, quando realizada por meio de alguma técnica numérica, como o *método de Elementos Finitos*.

A ideia de aplicação das transformações de Schwarz-Christoffel segue a mesma ideia da Figura 2, de modo que é feita uma composição de duas funções, uma que é a própria solução do problema físico no plano de destino e outra que é a transferência da solução para o domínio de origem. Essa composição é realizada numericamente.

Figura 2 – Procedimento para a solução de problemas que envolvam a equação de Laplace, especificamente problemas de eletrostática, utilizando as transformações conformes.



Fonte: Arquivo próprio.

Todos os problemas propostos nessa dissertação são solucionados por dois caminhos para efeito de comparação, mesmo quando uma das soluções é analítica. Na busca de maior consistência dos resultados, o *método de Elementos Finitos*, através do pacote *PDE Toolbox* do MATLAB, é utilizado na solução de quase todos os problemas. O pacote *PDE Toolbox* utiliza o *método de elementos finitos* em problemas bidimensionais, realizando discretizações em elementos triangulares de regiões variadas através do *método de Galerkin* (ZAUDERER, 2006). Todas as simulações e gráficos foram obtidos também pelo software MATLAB.

1.4 Organização do Texto

Esta dissertação está organizada em seis capítulos, incluindo este capítulo introdutório.

No Capítulo 2, é fundamentado o conceito de transformação conforme dentro da teoria das variáveis complexas, mostrando as suas principais propriedades, que fazem dela uma boa opção para se abordar problemas de valor de contorno que envolvam a equação de Laplace sobre cujo contorno deve haver condições de Dirichlet constantes ou de Neumann nulas.

No Capítulo 3, são resolvidos analiticamente cinco problemas de valor de contorno envolvendo a equação de Laplace na eletrostática pelo uso de transformações conformes, sendo quatro deles comparados com o *método de Elementos Finitos* do *PDE Toolbox* do MATLAB. No sexto problema, uma transformação conforme é utilizada apenas para confirmar o mapeamento correto da solução obtida através do *PDE Toolbox* do MATLAB.

No Capítulo 4, é fundamentado o conceito de transformação de Schwarz-Christoffel dentro da teoria das variáveis complexas, mostrando suas principais propriedades, uma delas sendo a “conformidade” para o interior da região transformada. E finaliza com a abordagem numérica dessa transformação, justificando a sua maior potencialidade de uso após o surgimento do computador.

No Capítulo 5, são resolvidos, numericamente pelo pacote *SC Toolbox* do MATLAB, quatro problemas de valor de contorno envolvendo a equação de Laplace na eletrostática pelo uso das transformações de Schwarz-Christoffel. Desses quatro, dois são resolvidos analiticamente e dois pelo *método de Elementos Finitos* do *PDE Toolbox* do MATLAB, para efeito de comparação e validação dos resultados.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões deste trabalho e algumas propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Transformações Conformes

2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivos estabelecer matematicamente, com a inclusão de algumas demonstrações, a relação entre a teoria das variáveis complexas e a equação de Laplace, esta presente em muitos problemas da física; e explorar o conceito e as propriedades das transformações conformes, mostrando que essas transformações são uma boa alternativa para se tratar problemas que envolvam a equação de Laplace em “difícil” geometria. Nesse sentido, a Seção 2.2 apresenta o conceito de analiticidade, as condições de Cauchy-Riemann e as condições suficientes para que se garanta tal analiticidade. A Seção 2.3 traz algumas definições matemáticas que são utilizadas ao longo da dissertação. A Seção 2.4 mostra o caráter harmônico das partes real e imaginária de uma função analítica. A Seção 2.5 apresenta a definição de uma transformação conforme e sua característica geométrica fundamental. Por fim, a Seção 2.6 apresenta as propriedades da transformação conforme que fazem dela uma boa ferramenta para a abordagem de problemas de valor de contorno que envolvam a equação de Laplace.

2.2 Funções Analíticas e Condições de Cauchy-Riemann

Os conceitos de limite, continuidade e derivada para funções complexas de uma variável complexa são análogos aos de funções reais de uma variável real. A diferença resultante das aplicações desses conceitos em ambos os campos deve-se fundamentalmente ao fato do domínio e da imagem estarem contidos em planos complexos para o primeiro, enquanto estão restritos a eixos reais para o segundo. Portanto, a diferença significativa está na dimensão 2 da definição de $f'(z)$. Conseqüentemente, muitos resultados do cálculo de variáveis reais não se aplicam ao cálculo de variáveis complexas. Como exemplo, pode-se provar conceitualmente que a função real $|x|^2$ possui a derivada $2x$ para todo x real, enquanto a derivada de $|z|^2$ existe somente no ponto $z = 0$ (CHURCHILL, 1975).

O teorema a seguir é extremamente importante para mostrar o cálculo do limite e a análise da continuidade de funções complexas de uma variável complexa, através de funções reais de duas variáveis reais.

Teorema 2.1. *Sejam*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy \quad \text{e} \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Então, o limite de f existe em z_0 e é igual a $u_0 + iv_0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0 \quad (1)$$

se, e somente se, os limites de u e v existem em (x_0, y_0) e são iguais a u_0 e v_0 respectivamente,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0. \quad (2)$$

A prova encontra-se em (CHURCHILL, 1975). Do Teorema 2.1 segue-se que $f = u + iv$ é contínua se, e somente se, u e v são contínuas. Além do mais, as propriedades dos limites e das derivadas para as funções complexas de uma variável complexa valem da mesma forma para as funções reais de uma variável real.

Assim como no cálculo real, a derivabilidade de uma função complexa diz muito sobre seu comportamento, sobre a forma como o mapeamento de planos ocorre localmente, sobre a correspondência entre as partes real e imaginária dessa função, entre muitas outras informações. Por isso o conceito de analiticidade de uma função é extremamente importante para o desenvolvimento de toda a teoria das variáveis complexas, incluindo o mapeamento conforme e as transformações de Schwarz-Christoffel. Uma função f da variável complexa z se diz **analítica** num ponto z_0 , se sua derivada $f'(z)$ existe não só em z_0 como também em todo ponto z de alguma vizinhança de z_0 (ZILL; SHANAHAN, 2011). f é *analítica num domínio* do plano z , se ela é analítica em todo ponto desse domínio (CHURCHILL, 1975). O primeiro ponto importante decorrente da derivabilidade de uma função complexa são as condições de Cauchy-Riemann.

Teorema 2.2. *Se a derivada $f'(z)$ de uma função $f = u + iv$ existe num ponto z , então as derivadas parciais de primeira ordem, em relação a x e y , de cada uma das partes u e v , existem nesse ponto e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann. Também, $f'(z)$ é dada em termos dessas derivadas parciais.*

Demonstração. Suponha que uma função tenha derivada em z_0 . Escrevendo $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad f'(z_0) = a + ib,$$

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0),$$

e Δv para o acréscimo correspondente em $v(x, y)$. Então,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = a + ib,$$

e, em vista do Teorema 2.1, vem

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right) = a, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Im} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right) = b, \quad (3)$$

Particularmente, quando $\Delta y = 0$, isto é, quando $\Delta z = \Delta x$, os limites acima reduzem-se a limites de funções de uma só variável x , decorrendo daí que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = a, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = b,$$

isto é, $\partial u/\partial x$ e $\partial v/\partial x$ existem no ponto (x_0, y_0) e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b \quad (4)$$

em (x_0, y_0) . Da mesma maneira, quando $\Delta x = 0$ ($\Delta z = i\Delta y$), os limites em (3) reduzem-se a

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = a, \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{-\Delta y} = b.$$

Assim, as derivadas parciais em relação a y existem e

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b \quad (5)$$

em (x_0, y_0) . De acordo com as equações (4) e (5), tem-se, no ponto z_0 ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6)$$

Essas equações em (6) são as condições de Cauchy-Riemann. Como $f'(z_0) = a + ib$, as fórmulas em (4) e (5) fornecem duas expressões fundamentais para a derivada de f , que são:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

no ponto $z = z_0$, como se queria mostrar. \square

Esse Teorema 2.2 e sua demonstração foram retirados de (CHURCHILL, 1975), mostrando que as partes real e imaginária de uma função analítica estão, de certa forma, “amarradas” uma à outra em sua estrutura algébrica. Em contrapartida, esse mesmo teorema aplica-se a funções analíticas. Portanto, falta um teorema que cuide de avaliar se uma dada função complexa é analítica e para qual região do plano complexo isso acontece. Este teorema vem a seguir e encontra-se em (BROWN; CHURCHILL, 2015) juntamente com sua demonstração.

Teorema 2.3. *Suponha que a função*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

esteja definida em toda uma vizinhança de um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, e suponha que

- a) *as derivadas parciais de primeira ordem em relação a x e y das funções u e v existam em cada ponto dessa vizinhança e que*
- b) *essas derivadas parciais sejam contínuas em (x_0, y_0) e que satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0) .*

Então, existe a derivada $f'(z_0)$, e seu valor é dado por

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

em que as derivadas parciais do lado direito devem ser calculadas em (x_0, y_0) .

Demonstração. Primeiramente, supõe-se que as condições a) e b) da hipótese estejam satisfeitas em uma vizinhança $|z - z_0| < \epsilon$ e escreve-se $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ se $0 < |\Delta z| < \epsilon$, bem como

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

Assim,

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v. \quad (8)$$

em que

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

e

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0).$$

A hipótese da continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de u e v no ponto (x_0, y_0) permite escrever o diferencial Δu e o diferencial Δv , respectivamente, por um teorema em (KAPLAN, 2002), como

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \quad (9)$$

e

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_3\Delta x + \epsilon_4\Delta y, \quad (10)$$

em que $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ e ϵ_4 tendem a zero, se $(\Delta x, \Delta y)$ tender a $(0, 0)$ no plano z . A substituição das expressões (9) e (10) na equação (8) fornece

$$\begin{aligned} \Delta w = & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y + \\ & i \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_3\Delta x + \epsilon_4\Delta y \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Como hipótese também tem-se as equações de Cauchy-Riemann no ponto (x_0, y_0) . Então, substituindo $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$ por $-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ por $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ na equação (11) e, dividindo tudo por $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, obtém-se

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + (\epsilon_1 + i\epsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\epsilon_2 + i\epsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}. \quad (12)$$

Ocorre que $|\Delta x| \leq |\Delta z|$ e $|\Delta y| \leq |\Delta z|$, pois Δx e Δy são, respectivamente, as partes real e imaginária de Δz . Portanto,

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq 1.$$

Conseqüentemente, aplicando uma desigualdade triangular e a propriedade que o módulo do produto é o produto dos módulos,

$$\left| (\epsilon_1 + i\epsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leq |\epsilon_1 + i\epsilon_3| \leq |\epsilon_1| + |\epsilon_3|$$

e

$$\left| (\epsilon_2 + i\epsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq |\epsilon_2 + i\epsilon_4| \leq |\epsilon_2| + |\epsilon_4|.$$

Ou seja, se a variável $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tender a zero, as duas últimas parcelas do lado direito da equação (12) também tendem a zero. Portanto, está estabelecida a validade da expressão de $f'(z_0)$ dada pelo teorema. \square

Para $z \neq 0$, as condições de Cauchy-Riemann e o Teorema 2.3 das condições suficientes podem ser reescritos de forma análoga na forma polar, em que se obtém, para

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta) \quad \text{e} \quad z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i\text{sen} \theta_0),$$

as condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

E a derivada de f em z_0 na forma polar é

$$f'(z)|_{z_0} = (\cos \theta - i\text{sen} \theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{z_0}.$$

2.3 Definições Matemáticas Importantes

Tendo apresentado a definição de analiticidade e as condições suficientes para que uma função seja analítica, esta seção traz alguns conceitos matemáticos importantes que são usados ao longo de toda a dissertação.

Definição 2.1. *Região* é um conjunto **aberto e conexo** (ÁVILA, 2008). A definição de **Domínio** em (CHURCHILL, 1975) é sinônimo da definição de “região” em (ÁVILA, 2008), e essa analogia é utilizada nessa dissertação.

Definição 2.2. Um **domínio simplesmente conexo** S é aquele em que todo caminho fechado contido em S envolve somente pontos de S (CHURCHILL, 1975). Portanto, um domínio simplesmente conexo é aquele em que não apresenta “buracos” em seu interior.

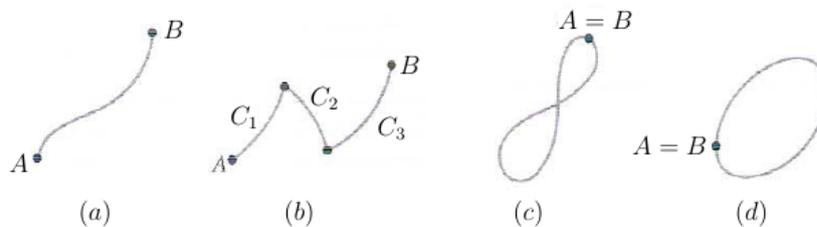
Definição 2.3. Se $\phi(x, y)$ é uma função escalar com derivadas segundas contínuas para um domínio D e

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

em D , então $\phi(x, y)$ é uma função **harmônica** em D (KAPLAN, 2002).

Seja uma curva C parametrizada no plano por um conjunto de equações $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais contínuas. Denota-se, baseados na Figura 3, os **pontos inicial e terminal** de C , ou seja, $(x(t_1), y(t_1))$ e $(x(t_2), y(t_2))$, pelos símbolos A e B , respectivamente. Assim, (ZILL; SHANAHAN, 2011) apresenta cinco definições a seguir relacionadas à Figura 3.

Figura 3 – Diferentes tipos de curvas, sendo (a) uma curva suave e simples, (b) uma curva suave por partes e simples, (c) uma curva fechada e não simples, e (d) uma curva fechada e simples.



Fonte: Adaptação de (ZILL; SHANAHAN, 2011).

Definição 2.4. C é uma **curva suave**, se x' e y' forem contínuas no intervalo fechado $[t_1, t_2]$ e não simultaneamente nulas em um ponto t no intervalo aberto (t_1, t_2) .

Definição 2.5. C é uma **curva suave por partes**, se consistir em um número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n unidas nas extremidades, isto é, o ponto terminal da curva C_k coincide com o ponto inicial da próxima curva C_{k+1} .

Definição 2.6. C é uma **curva simples**, se não tiver autointerseções (se não cruzar a si mesma), exceto, talvez, em $t = t_1$ e $t = t_2$.

Definição 2.7. C é uma **curva fechada**, se $A = B$.

Definição 2.8. C é uma **curva fechada simples**, se não tiver autointerseções e $A = B$, ou seja, se for simples e fechada.

2.4 Funções Harmônicas Conjugadas

Esta seção traz o conceito de funções harmônicas conjugadas, mostrando que as partes real e imaginária de uma função analítica são funções harmônicas. No fim, essa seção mostra que, dada uma função harmônica $u(x, y)$ sobre um domínio simplesmente conexo no plano, é garantida a existência de uma função harmônica conjugada $v(x, y)$, tal que $f = u + iv$ seja analítica sobre esse domínio.

Tomando duas funções analíticas f e g em um domínio $D \subseteq \mathbb{C}$, então pelo próprio conceito de analiticidade, essas funções têm derivadas em todos os pontos em D . Assim, da mesma forma como acontece para funções reais de uma variável real, tem-se, como consta em (CHURCHILL, 1975), que:

- $f + g$ é analítica em D ;
- $f \cdot g$ é analítica em D ;
- $\frac{f}{g}$ é analítica em D , exceto nos pontos em que $g(z) = 0$.

Além disso, seja g uma função analítica de z num domínio D_1 e seja R o conjunto formado pelas imagens $g(z)$ para os pontos z em D_1 . Então, se f é analítica num domínio $D_2 \supset R$, segue-se que a função composta $f \circ g$ é analítica em D_1 . Portanto, a composta de funções analíticas é analítica.

Diante de todas essas propriedades, pode-se provar que os **polinômios**, as **funções racionais**, a função **exponencial**, as funções **trigonométricas** e **hiperbólicas** são exemplos de funções analíticas para todo o plano complexo, com exceção dos pontos em que haja divisão por zero. Além dessas, pode-se estabelecer um domínio interior ao plano complexo, tal que as funções **logarítmicas**, de **expoentes complexos**, as **trigonométricas inversas** e as **hiperbólicas inversas** também sejam analíticas (CHURCHILL, 1975).

Uma grande novidade que há no cálculo de variável complexa e que não há para o cálculo de variável real está relacionado ao Teorema 2.4, que é a primeira parte de um teorema que se encontra em (ÁVILA, 2008).

Teorema 2.4. *Uma função analítica numa região R possui derivadas de todas as ordens, as quais, por sua vez, são também analíticas em R .*

A hipótese de que a função deve ser analítica para um domínio R está relacionada ao fato de que, contido nesse domínio, pode-se conseguir um domínio simplesmente conexo S . Daí tira-se a Fórmula Integral de Cauchy, que é associada à teoria mais avançada de integração de funções complexas, que, por sua vez, não é tratada aqui. A demonstração do Teorema 2.4 e a Fórmula Integral de Cauchy com sua demonstração encontram-se em (CHURCHILL, 1975).

Como consequência do Teorema 2.4, se f for derivável em todos os pontos em algum domínio, todas as derivadas f', f'', f''', \dots existem nesse domínio. Já no cálculo real isso pode não ser verdade. Por exemplo, a função real $f(x) = x^{7/3}$ é derivável em toda a reta real. No entanto, $f'''(x) = (28/27)x^{-2/3}$ não existe em $x = 0$.

Com os Teoremas 2.2 e 2.4, chega-se ao Teorema 2.5 abaixo, que é uma ligação direta entre as funções complexas analíticas e a equação de Laplace.

Teorema 2.5. *Seja uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica em um domínio D . Então, as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são harmônicas em D .*

Demonstração. Assumindo que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em um domínio D , então, pelo Teorema 2.4, f tem derivadas de todas as ordens. Portanto, as derivadas parciais de u e v de todas as ordens existem e são funções contínuas de x e y . Além disso, como f é analítica, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para todo o domínio, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Derivando os dois lados da primeira equação em relação a x e derivando os dois lados da segunda equação em relação a y , obtém-se, respectivamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Segue-se dessa equação que as duas derivadas mistas são iguais pelo Teorema de Schwarz (GUIDORIZZI, 2001), uma vez que as derivadas de segunda ordem de u e v existem e são contínuas em D . Portanto, da equação anterior

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 u = 0.$$

Isso mostra que $u(x, y)$ é harmônica.

Agora, diferenciando a primeira condição de Cauchy-Riemann dos dois lados em relação a y , diferenciando a segunda condição dos dois lados em relação a x e igualando novamente as derivadas mistas, chega-se em

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 v = 0.$$

□

As funções u e v são consideradas **funções harmônicas conjugadas**, se a função $f = u + iv$ é analítica. Uma importante característica das funções harmônicas conjugadas

diz respeito a um significado geométrico interessante, expresso no teorema seguinte (ÁVILA, 2008).

Teorema 2.6. *Se $f = u + iv$ é analítica num domínio D , então, para as constantes reais k_1 e k_2 , as curvas das famílias*

$$u(x, y) = k_1 \quad \text{e} \quad v(x, y) = k_2$$

cruzam-se em ângulo reto em todo ponto z em D onde $f'(z) \neq 0$.

Demonstração. Sendo $f(z)$ uma função analítica, então $u(x, y)$ e $v(x, y)$, pelos Teoremas 2.5 e 2.2, são, respectivamente, funções harmônicas e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann no domínio D . Portanto, para todo ponto z em D , onde $f'(z) \neq 0$, tem-se

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \neq 0 + i0.$$

Pela desigualdade acima, se $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ então $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ e vice-versa. E isso garante que os vetores gradientes das famílias $u(x, y) = k_1$ e $v(x, y) = k_2$ existam e sejam não nulos. Assim, por definição e por hipótese,

$$\nabla u(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \neq (0, 0) \quad \text{é ortogonal às curvas de nível} \quad u(x, y) = k_1,$$

e

$$\nabla v(x, y) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \neq (0, 0) \quad \text{é ortogonal às curvas de nível} \quad v(x, y) = k_2$$

Fazendo o produto interno (produto escalar usual) entre $\nabla u(x, y)$ e $\nabla v(x, y)$ e aplicando as condições de Cauchy-Riemann, então

$$\begin{aligned} \langle \nabla u(x, y), \nabla v(x, y) \rangle &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Portanto $\nabla u(x, y)$ e $\nabla v(x, y)$ são vetores ortogonais, ou seja, as famílias $u(x, y) = k_1$ e $v(x, y) = k_2$ são famílias de curvas ortogonais, como se queria mostrar. \square

Os teoremas anteriores tomam uma função $f(z)$ analítica, sendo que a partir dela é que se extraem as funções harmônicas conjugadas. O próximo teorema garante a existência de uma função harmônica conjugada de qualquer função harmônica $u(x, y)$ definida em um domínio simplesmente conexo (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Teorema 2.7. *Se uma função harmônica $u(x, y)$ estiver definida em um domínio simplesmente conexo D , então existe uma harmônica conjugada $v(x, y)$ em D tal que $f = u + iv$ seja analítica em D .*

Demonstração. Suponha que $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio simplesmente conexo D do plano xy , e sejam (x_0, y_0) e (x, y) dois pontos quaisquer de D . Se $P_y = Q_x$ em cada ponto de D , então a integral curvilínea

$$\int_C P(s, t)ds + Q(s, t)dt$$

de (x_0, y_0) até (x, y) é independente do caminho C que é usado, desde que o caminho esteja todo contido em D . Além disso, fixando o ponto (x_0, y_0) e deixando (x, y) variar em D , essa integral representa uma função

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(s, t)ds + Q(s, t)dt \quad (13)$$

de x e y , cujas derivadas parciais de primeira ordem são dadas pelas equações

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \quad (14)$$

Perceba que o valor de F é alterado por uma constante ao se escolher um outro ponto inicial (x_0, y_0) .

Voltando à função harmônica $u(x, y)$ dada, observa-se que, da equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, segue que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

em cada ponto de D . Além disso, as derivadas parciais de segunda ordem de u são contínuas em D , significando que as derivadas parciais de primeira ordem de $-\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial x}$ são contínuas nesse domínio. Assim, fixado (x_0, y_0) em D , a função

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u(s, t)}{\partial t} ds + \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} dt \quad (15)$$

está bem definida em cada (x, y) de D e, de acordo com as equações (14),

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}. \quad (16)$$

Essas são as equações de Cauchy-Riemann. Como as derivadas parciais de primeira ordem de u são contínuas, então fica claro, das equações (16), que essas mesmas derivadas de v também são contínuas. Logo, pelo Teorema 2.3, a função $u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em D e, portanto, v é uma harmônica conjugada de u . \square

É importante ressaltar que a função v , definida pela equação (15), não é a única harmônica conjugada de u , pois a função mais geral $v(x, y) + c$ também é outro exemplo, para qualquer constante real c . Além disso, as funções harmônicas conjugadas podem ter seus papéis invertidos, criando a função $g = -v + iu$, também analítica (CHURCHILL, 1975).

2.5 Definição da Transformação Conforme

As Seções 2.2 e 2.4 começam a mostrar a importância de se garantir a analiticidade de uma função complexa, a fim de se obter propriedades fundamentais para os objetivos deste trabalho. O que esta seção proporciona é mais uma importantíssima propriedade das funções analíticas, com o olhar mais geométrico da correspondência dos planos de saída z e de chegada w da função f .

Para isso, deseja-se examinar a mudança na direção de curvas num ponto z_0 sob uma transformação $w = f(z)$, quando a função f é analítica nesse ponto e $f'(z_0) \neq 0$. Mas, primeiramente, precisa-se mostrar que a imagem de um arco suave numa vizinhança de z_0 é um arco suave no plano w , se a função transformadora f for analítica em z_0 .

Seja C uma curva suave representada pela equação

$$z = z(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

e seja $f(z)$ uma função definida em todos os pontos z do arco C . A equação

$$w = f[z(t)] \quad (a \leq t \leq b)$$

é uma representação paramétrica da imagem Γ de C pela transformação $w = f(z)$.

Suponha que C passe por um ponto $z_0 = z(t_0)$ ($a < t_0 < b$), no qual f seja analítica e tal que $f'(z_0) \neq 0$. De acordo com a regra da cadeia, se $w(t) = f[z(t)]$, então

$$w'(t_0) = f'[z(t_0)]z'(t_0); \quad (17)$$

ou seja, $w'(t_0) \neq 0$, pois $f'(z_0) \neq 0$ e $z'(t_0) \neq 0$ por C ser um arco suave. E, como $w' \neq 0$ para z_0 , então pode-se provar que existe uma vizinhança de z_0 tal que $|w'|$ supera certa constante positiva para todos os z nessa vizinhança (CHURCHILL, 1975), ou seja, $w' \neq 0$ para qualquer valor de z nessa vizinhança de z_0 . Portanto, a imagem de um arco suave numa vizinhança de z_0 é um arco suave, como se queria mostrar (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Além disso, igualando os argumentos de cada lado da equação (17), chega-se em

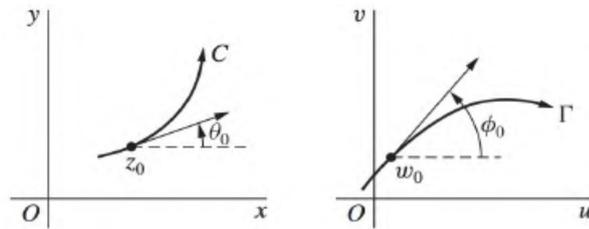
$$\arg w'(t_0) = \arg f'[z(t_0)] + \arg z'(t_0). \quad (18)$$

A equação (18) é importante para relacionar as direções de C e Γ nos pontos z_0 e $w_0 = f(z_0)$, respectivamente.

Denotando $\theta_0 = \arg z'(t_0)$ e $\phi_0 = \arg w'(t_0)$, esses ângulos representam, respectivamente, o ângulo de inclinação de uma reta orientada que é tangente a C em z_0 e o ângulo

de inclinação de uma reta orientada que é tangente a Γ no ponto $w_0 = f(z_0)$, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Curva suave sendo transformada em curva suave por meio de uma transformação analítica em z_0 .



Fonte: (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Pela equação (18), existe um valor para ψ_0 , tal que

$$\phi_0 = \psi_0 + \theta_0. \quad (19)$$

Portanto, $\phi_0 - \theta_0 = \psi_0$, ou seja, os ângulos ϕ_0 e θ_0 diferem pelo **ângulo de rotação**

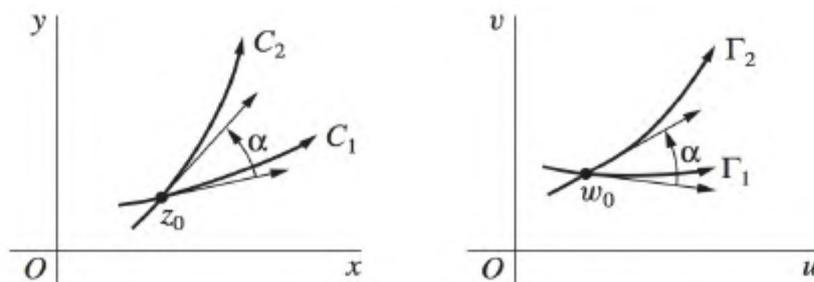
$$\psi_0 = \arg f'(z_0). \quad (20)$$

Tomando C_1 e C_2 como dois arcos suaves passando por z_0 e sendo θ_1 e θ_2 , respectivamente, os ângulos de inclinação de retas orientadas tangentes a C_1 e C_2 em z_0 , então, da equação (19), pode-se inferir que

$$\phi_1 = \psi_0 + \theta_1 \quad \text{e} \quad \phi_2 = \psi_0 + \theta_2$$

são os ângulos de inclinação de retas orientadas tangentes no ponto $w_0 = f(z_0)$ às curvas Γ_1 e Γ_2 , que são imagens, respectivamente, de C_1 e C_2 . Assim, $\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$, ou seja, o ângulo $\phi_2 - \phi_1$ de Γ_1 até Γ_2 é igual, em magnitude e orientação, ao ângulo $\theta_2 - \theta_1$ de C_1 até C_2 . Esses ângulos estão identificados por α na Figura 5 (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Figura 5 – Transformação conforme no ponto z_0 .



Fonte: (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Devido a essa propriedade de preservação de ângulos, diz-se que a transformação $w = f(z)$ é **conforme** em um ponto z_0 se f for analítica nesse ponto, com $f'(z_0) \neq 0$. Uma transformação dessas, na verdade, é conforme em cada ponto de alguma vizinhança de z_0 . De fato, ela tem derivadas em todos os pontos de uma vizinhança de z_0 e, como a derivada f' é contínua nessa vizinhança, então existe alguma vizinhança de z_0 na qual $f'(z_0) \neq 0$.

Uma transformação $w = f(z)$ é conforme em um domínio D , se for conforme em cada ponto de D , ou seja, uma transformação por uma função analítica com derivada não nula em D .

Outra característica de uma transformação conforme em um ponto z_0 é obtida considerando-se o módulo de $f'(z_0)$, que é não nulo. Pela definição de derivada, pela propriedade que garante que o módulo do limite de uma função complexa é o limite do módulo dessa função e pela propriedade que garante que o módulo do produto é o produto dos módulos (CHURCHILL, 1975), chega-se que

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}. \quad (21)$$

Pode-se perceber que $|z - z_0|$ é o comprimento de um segmento de reta ligando z_0 a z , e $|f(z) - f(z_0)|$ é o comprimento do segmento de reta ligando os pontos $f(z_0)$ e $f(z)$ do plano w . Então, pelo próprio conceito, se z estiver próximo de z_0 , a razão

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

dos dois comprimentos é aproximadamente igual a $|f'(z_0)|$. É intuitivo que $|f'(z_0)| > 1$ representa uma expansão e que $|f'(z_0)| < 1$ representa uma contração.

Apesar do ângulo de rotação $\arg f'(z)$ e o **fator de escala** $|f'(z)|$ em geral variarem de ponto a ponto, segue da continuidade de f' que esses valores são dados, aproximadamente, por $\arg f'(z_0)$ e $|f'(z_0)|$ em pontos z próximos de z_0 . Assim, a imagem de uma pequena região (localmente) em uma vizinhança de z_0 é *conforme* à região original, no sentido de ter, aproximadamente, a mesma forma. No entanto, uma região maior pode ser transformada em uma região sem semelhança alguma com a original (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Um ponto no qual $f'(z) = 0$ é chamado **ponto crítico** da transformação. Por exemplo, o ponto $z = 0$ é ponto crítico da transformação $w = z^2 + 1$. Ao se escrever $z = r \exp(i\theta)$ e $w - 1 = \rho \exp(i\phi)$, então $\rho \exp(i\phi) = r^2 \exp(2i\theta)$, de onde se tira que cada raio $\theta = c$ emanando do ponto $z = 0$ é transformado num raio $\phi = 2c$ emanando do ponto $w = 1$. Assim, o ângulo entre dois raios saindo desse ponto crítico é duplicado por esta transformação. Portanto, é fundamental que se garanta derivadas não nulas no domínio da transformação, a fim de se ter preservações angulares.

Ainda nessa ideia de preservação de ângulos, toda transformação conforme deve transformar curvas ortogonais em curvas ortogonais. Em particular, se f é analítica e $f'(z) \neq 0$ num ponto, a transformação $w = u + iv = f(x + iy)$ transforma as curvas $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$, que se interceptam nesse ponto, nas retas $u = c_1$ e $v = c_2$ no plano w . Como as retas são ortogonais, a curva $u(x, y) = c_1$ é ortogonal à curva $v(x, y) = c_2$. E esse fato ilustra o Teorema 2.6 que, não por acaso, tem como hipótese a analiticidade da função, cuja derivada seja diferente de zero no seu domínio.

2.6 Propriedades da Transformação Conforme

De posse das transformações conformes, até o momento, já se tem a garantia da analiticidade e continuidade da função cujas partes real e imaginária são funções harmônicas conjugadas. Além disso, há a preservação de ângulos em valor absoluto e sentido entre os pares de curvas do domínio, e a ortogonalidade entre as curvas das famílias $u(x, y) = k_1$ e $v(x, y) = k_2$, k_1 e k_2 como constantes reais.

Como o objetivo a não se perder de vista é encontrar uma transformação que seja capaz de mapear geometrias “complexas” em geometrias mais “simples”, para problemas de valor de contorno que envolvam a equação de Laplace, então há ainda três requisitos que essa transformação deve obedecer, para que não haja interferência nas condições em que o problema se encontre.

O primeiro requisito é que deve existir uma transformação inversa única que também seja conforme, a fim de se levar a solução encontrada na geometria mais simples para o domínio original.

O segundo requisito é que a equação de Laplace se conserve após passar por uma transformação conforme, ou seja, que a função harmônica nos pontos do domínio continue a ser harmônica para os pontos da imagem.

E o terceiro é que as condições de contorno do problema se conservem após passarem pela transformação conforme.

Se algum requisito não for atendido, a transformação conforme pode dificultar a solução do problema, uma vez que a própria transformação interferiria no problema em que estaria inserida para solucionar. Com os Teoremas 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11 a seguir, é possível concluir que a transformação conforme atende a todos esses requisitos propostos.

O Teorema 2.8 trata da garantia de uma transformação conforme inversa única de caráter local, ou seja, aplica-se o Teorema em apenas uma vizinhança de um dado ponto do domínio por vez. Já o Teorema 2.9 trata da garantia da transformação conforme inversa de

caráter global; portanto, coloca condições suficientes para que se tenha uma transformação conforme inversa única para um domínio de definição.

Teorema 2.8. *Uma transformação $w = f(z)$ que é conforme em um ponto z_0 tem uma inversa local nesse ponto. Isto é, existe uma vizinhança do ponto $w_0 = f(z_0)$ no plano w na qual a função*

$$w = f(z) \quad (22)$$

tem uma única inversa

$$z = F(w),$$

no sentido de que a função F é univalente e analítica aí, e $F(w_0) = z_0$ e $w = f[F(w)]$; além disso,

$$F'(w) = \frac{1}{f'(z)}. \quad (23)$$

Demonstração. Primeiramente, pode-se reescrever a equação (22) na forma

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (24)$$

Como w é analítica no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, ela é analítica numa vizinhança desse ponto. Além disso, pelo Teorema 2.4, as funções u e v , assim como suas derivadas parciais, são contínuas na vizinhança. Além da continuidade das funções u e v e das suas derivadas, uma outra condição para que as equações simultâneas (24) tenham soluções únicas para x e para y como funções contínuas de u e v , é que o jacobiano das funções u e v ,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (25)$$

seja diferente de zero no ponto (x_0, y_0) (CHURCHILL, 1975). Em vista das condições de Cauchy-Riemann, o valor desse determinante torna-se

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2, \quad (26)$$

e, por hipótese, $f'(z)$ é diferente de zero no ponto z_0 . De fato, como f' é analítica em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$, existe uma vizinhança do ponto z_0 que não contém zeros de f' . Assim, fica estabelecido que, numa vizinhança do ponto $w_0 = u_0 + iv_0$, existe um único par de funções contínuas $x(u, v)$ e $y(u, v)$ tal que as funções

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (27)$$

satisfazem as equações (24) e tal que

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad y_0 = y(u_0, v_0).$$

As equações (27) podem ser escritas na forma complexa

$$z = F(w),$$

onde F é uma função contínua. Para mostrar que sua derivada existe, escreve-se

$$\frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\Delta w / \Delta z}. \quad (28)$$

Como w é uma função analítica de z , ela é contínua, e como z é uma função contínua de w , segue-se que, quando Δw tende para zero, Δz também tende para zero, e reciprocamente. Ora, dw/dz existe e é diferente de zero; decorre, portanto, da fórmula (28) que

$$\frac{dz}{dw} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta w / \Delta z} = \frac{1}{dw/dz}.$$

Fórmula equivalente à (23), como se queria demonstrar. Como $F'(w)$ existe numa vizinhança de w_0 , a função F é analítica aí. \square

A fórmula (23) pode ser usada para se obter as fórmulas de derivação para as inversas locais das funções elementares. Esse resultado é de caráter local e não permite concluir que a inversa existe em toda a imagem do domínio de f . Por exemplo, a função $w = z^2$ é conforme e apresenta uma inversa local para todo o plano, com exceção da origem, pois $w' = 2z$. No entanto, f não tem uma inversa única, já que $z^2 = (-z)^2$. Para a inversão global, o teorema a seguir estabelece as duas condições necessárias e suficientes para que uma função possa admitir uma inversa global para o domínio dado.

Teorema 2.9. *Uma função f admite uma inversa global numa região R se ela é analítica e injetiva em R .*

Este teorema encontra-se em (ÁVILA, 2008) e mostra que, garantida a injetividade e a analiticidade da função no domínio, a função apresenta derivadas não nulas para esse domínio, e por consequência f é uma transformação conforme. Como há inversas locais únicas para cada ponto do domínio pelo Teorema 2.8 e f é injetiva, então há uma inversa global única para esse domínio, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os pontos do domínio e da imagem. Voltando ao exemplo da função $f(z) = z^2$, sabe-se que $f(-z) = f(z) = z^2$, ou seja, para se garantir a inversão global dessa função, deve-se restringir o seu domínio para o semiplano superior ou para o semiplano inferior, ambos os semiplanos sem a inclusão do eixo real, garantindo assim a injeção de f .

O próximo teorema refere-se à garantia da invariância da equação de Laplace ao se realizar uma transformação conforme, para a busca de uma geometria mais “simples” para o problema. Essa invariância é mostrada através da relação entre os laplacianos da função escalar ϕ no domínio e da função escalar Φ na imagem. Este teorema e sua demonstração foram retiradas de (ÁVILA, 2008).

Teorema 2.10. *Seja $\phi(x, y)$ uma função real que possui derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas e*

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

uma função que transforma a região R do plano z numa região D do plano w . Seja também $\Phi(u, v)$ a imagem de $\phi(x, y)$ pela transformação f . Se a função f for uma transformação conforme para o domínio R , então a função harmônica ϕ do plano z tem como imagem a também função harmônica Φ do plano w .

Demonstração. Tomando a hipótese de que f é uma transformação conforme, então f é analítica para todo o domínio de transformação com $f'(z) \neq 0$. Calculando as derivadas parciais de ϕ pela regra da cadeia, obtém-se

$$\phi_x = \Phi_u u_x + \Phi_v v_x, \quad \phi_y = \Phi_u u_y + \Phi_v v_y;$$

$$\phi_{xx} = \Phi_{uu}(u_x)^2 + \Phi_{uv}u_x v_x + \Phi_u u_{xx} + \Phi_{vv}(v_x)^2 + \Phi_{vu}v_x u_x + \Phi_v v_{xx};$$

$$\phi_{yy} = \Phi_{uu}(u_y)^2 + \Phi_{uv}u_y v_y + \Phi_u u_{yy} + \Phi_{vv}(v_y)^2 + \Phi_{vu}v_y u_y + \Phi_v v_{yy}.$$

Somando essas duas últimas expressões, membro a membro, usando as condições de Cauchy-Riemann vindo da analiticidade de f e o fato de que u e v são funções harmônicas conjugadas, obtém-se

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = (\Phi_{uu} + \Phi_{vv})(u_x^2 + v_x^2),$$

ou ainda, com a hipótese de que $f'(z) \neq 0$, ou seja, $|f'(z)|^2 = (u_x^2 + v_x^2) \neq 0$, assim

$$\nabla^2 \Phi = |f'(z)|^{-2} \nabla^2 \phi. \quad (29)$$

Portanto, a relação $\nabla^2 \phi = 0 \iff \nabla^2 \Phi = 0$, isto é, a equação de Laplace é invariante por transformações conformes no domínio onde $f'(z) \neq 0$. \square

O Teorema 2.10 mostra que uma transformação conforme não modifica o caráter harmônico das soluções nas geometrias original e transformada do problema, ainda que a transformação do laplaciano de ϕ no plano z possa ser bem diferente do laplaciano de Φ no plano w , devido ao fator $|f'(z)|^{-2}$ da equação (29). É exatamente esse fator que está associado à transformação de problemas de valor de contorno envolvendo a equação de Poisson (BROWN; CHURCHILL, 2015), podendo aumentar a complexidade do problema transformado, uma vez que a equação (29) independe da transformação conforme utilizada e da função escalar ϕ estabelecida para o domínio.

O Teorema 2.9, por sua vez, mostra que a transformação conforme tem uma inversa global única, que também é conforme, ou seja, resolve-se o problema na imagem dessa transformação e, depois, retorna-se com o resultado para o domínio inicial.

Uma última análise diz respeito às condições de contorno do problema. As condições que prescrevem que uma função harmônica H ou a sua derivada normal sejam constantes sobre uma parte da fronteira de uma região são encontradas na física e na engenharia, embora não sejam os únicos tipos importantes de condição de contorno. O Teorema 2.11 a seguir mostra que, sob uma transformação conforme, permanecem inalteradas as condições de contorno de Dirichlet constantes e de Neumann nulas (CHURCHILL, 1975).

Teorema 2.11. *Suponha que uma transformação*

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

seja conforme em cada ponto de um arco regular (suave) C e que Γ seja a imagem de C por essa transformação. Além disso, seja $h(u, v)$ uma função que satisfaz uma das condições

$$h = h_0 \quad \text{e} \quad \frac{dh}{dn} = 0$$

nos pontos de Γ , em que h_0 é uma constante real e dh/dn representa a derivada normal de h a Γ . Então, a função

$$H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)]$$

satisfaz a condição correspondente

$$H = h_0 \quad \text{ou} \quad \frac{dH}{dN} = 0$$

nos pontos de C , em que dH/dN simboliza a derivada direcional de H normal a C .

Demonstração. Primeiramente, é bom enfatizar que, nas transformações, C pode ser toda a fronteira de algum domínio ou, então, apenas uma parte da fronteira. A fim de se mostrar que a condição de Dirichlet constante é inalterada com a transformação conforme, ou seja, que $h = h_0$ em Γ implica que $H = h_0$ em C , observa-se que da expressão para $H(x, y)$, como uma hipótese do teorema, decorre que o valor de H em qualquer ponto (x, y) de C é igual ao valor de h na imagem (u, v) de (x, y) pela transformação $w = f(z)$. Como o ponto (u, v) da imagem está em Γ e como $h = h_0$ ao longo dessa curva, segue que $H = h_0$ ao longo de C .

Para provar que condição de Neumann nula também se mantém inalterada, suponha que $dh/dn = 0$ em Γ . Do Cálculo (THOMAS; WEIR; HASS, 2012), tira-se que

$$\frac{dh}{dn} = \langle \nabla h, \hat{n} \rangle = \|\nabla h\| \cdot \|\hat{n}\| \cdot \cos(\theta), \quad (30)$$

em que ∇h denota o vetor gradiente de h em um ponto (u, v) de Γ , \hat{n} é o vetor unitário normal a Γ em (u, v) e θ é o ângulo entre esses dois vetores. Como $dh/dn = 0$ em Γ e a norma de \hat{n} é 1, da equação (30), tira-se que

$$\frac{dh}{dn} = \|\nabla h\| \cdot \cos(\theta) = 0. \quad (31)$$

Ou seja, a equação (31) mostra que $\theta = 90^\circ$ para que a igualdade se confirme, visto que

$$\nabla h(u, v) = \left(\frac{\partial h}{\partial u}(u, v), \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) \right) \neq (0, 0),$$

caso contrário a curva de nível $h(u, v) = c$ não seria suave em (u, v) . Portanto, ∇h é ortogonal a \hat{n} em (u, v) . Ou seja, ∇h é tangente a Γ nesse ponto, como mostra a Figura 6. No entanto, os gradientes são ortogonais às curvas de nível e, como ∇h é tangente a Γ , tem-se que Γ é ortogonal a uma curva de nível $h(u, v) = c$ que passa por (u, v) , sendo c uma constante real.

Ocorre que, como já dito anteriormente, a curva de nível $H(x, y) = c$ do plano z pode ser escrita como

$$h[u(x, y), v(x, y)] = c.$$

Logo, é transformada em uma curva de nível $h(u, v) = c$ pela transformação $w = f(z)$. Além disso, como C é transformada em Γ e, pelo que se acaba de ver, Γ é ortogonal à curva de nível $h(u, v) = c$, segue que C também é ortogonal à curva de nível $H(x, y) = c$ no ponto (x, y) correspondente a (u, v) , pois a transformação $w = f(z)$ é conforme e, por consequência, preserva os ângulos entre curvas que passam por essa transformação. Já que os gradientes são ortogonais às curvas de nível, isso significa que ∇H é tangente a C em (x, y) , como pode-se notar também pela Figura 6. Consequentemente, sendo \hat{N} o vetor unitário normal a C em (x, y) , então ∇H é ortogonal a \hat{N} , assim,

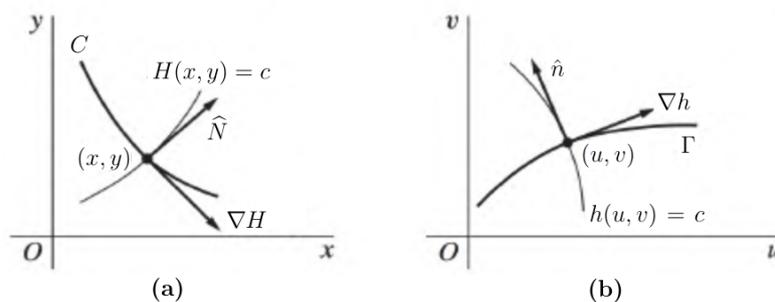
$$\nabla H \cdot \hat{N} = 0. \quad (32)$$

Finalmente, como

$$\frac{dH}{dN} = \nabla H \cdot \hat{N},$$

pode-se concluir da equação (32) que $dH/dN = 0$ nos pontos de C , como se queria demonstrar. \square

Figura 6 – A transformação conforme da curva C (a) na imagem da curva Γ para a análise das condições de contorno.



Fonte: Adaptação de (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Concluindo, com as propriedades mostradas ao longo desse capítulo, o problema de valor de contorno relacionado à equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ com condições de contorno de Dirichlet constantes e de Neumann nulas é transformado, através de uma transformação conforme, em um problema de valor de contorno relacionado à equação de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ com as mesmas condições de contorno de Dirichlet constantes e de Neumann nulas para a geometria transformada. Além disso, é garantido que há sempre uma transformação conforme inversa que faça o caminho inverso de mapeamento de geometrias.

Capítulo 3

Aplicações das Transformações Conformes

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é a aplicação das transformações conformes em problemas envolvendo a equação de Laplace com condições de contorno de Dirichlet constantes, um deles também envolvendo uma condição de Neumann nula. A seção 3.2 contextualiza a aplicação da equação de Laplace em problemas de eletrostática, deixando claro que qualquer problema que seja modelado por uma equação de Laplace também pode ser abordado por esse ferramental. As demais seções são as propostas de problemas e suas respectivas soluções. Para todos os problemas deste capítulo, há a comparação com a solução do *método de Elementos Finitos* através do pacote *PDE Toolbox*, com exceção do Problema 1, cuja solução analítica obtida neste capítulo foi comparada com a solução numérica pelo pacote *SC Toolbox* na Seção 5.4.

3.2 Equação de Laplace na Eletrostática

O objetivo desta seção é contextualizar o uso da equação de Laplace para a área da eletrostática, trazendo a ideia do problema físico em que as transformações conformes são aplicadas ao longo deste capítulo e do Capítulo 5.

Como princípios fundamentais da eletrostática, a *Lei de Coulomb* e o *Princípio da Superposição* estão definidos, respectivamente, a seguir (GRIFFITHS, 2013):

Definição 3.1. Lei de Coulomb: A força elétrica entre duas cargas elétricas pontuais q e Q é um vetor com a direção da reta que une as cargas e com o módulo proporcional ao módulo do produto qQ das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Definição 3.2. Princípio da Superposição: Se $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ são forças elétricas produzidas, respectivamente, pelas cargas q_1, q_2, \dots, q_n que atuam sobre uma mesma carga Q e \vec{F}_R é a força resultante que atua sobre essa carga elétrica, então $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$.

Pelo Princípio da Superposição, os campos elétricos produzidos por uma linha, superfície e volume de cargas podem ser encontrados por um somatório (integral) de campos elétricos produzidos por cargas pontuais, pois a relação entre a força elétrica aplicada em uma carga pontual e o campo elétrico \vec{E} causador dessa força é dada por

$$\vec{F} = Q\vec{E}, \quad (33)$$

sendo Q a carga de prova inserida nesse campo.

Um pressuposto importante da eletrostática é que todo campo elétrico de problemas a serem tratados é originário apenas de cargas elétricas estáticas, nenhum vindo de variação de campo magnético. Diante disso, pela equação de Maxwell na forma diferencial, relacionada à Lei de Faraday (GRIFFITHS, 2013), tem-se

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (34)$$

Pelo Teorema de Stokes, utilizando a equação (34), a forma integral da Lei de Faraday pode ser deduzida, chegando em

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (35)$$

Essa integral de linha do campo elétrico sobre um caminho fechado pode ser visto como o trabalho do campo elétrico para levar uma carga unitária saindo de um ponto qualquer até voltar para esse mesmo ponto. Se esse trabalho é nulo, como mostra (35), então o campo elétrico gerado por cargas estáticas é conservativo, proporcionando o conceito de potencial elétrico.

Mover uma carga em um campo elétrico requer gasto de energia. A tensão ou a diferença de potencial ϕ_{ba} entre os pontos a e b , com o ponto b assumido num potencial mais elevado, é o trabalho por unidade de carga necessário para mover a carga de a para b , como indicado na equação (PAUL, 2006)

$$\phi_{ba} = \phi(b) - \phi(a) = \frac{W_{ba}}{Q}. \quad (36)$$

Pela definição de trabalho de uma força elétrica \vec{F} e utilizando a equação (33), chega-se na equação (37) (SADIKU, 2012)

$$\phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (37)$$

O sinal negativo em (37) refere-se ao trabalho realizado para mover a carga contra o campo.

Pelo *Teorema Fundamental do Gradiente*, para a função potencial elétrico ϕ , vale que (GRIFFITHS, 2013)

$$\int_a^b \nabla \phi \cdot d\vec{l} = \phi(b) - \phi(a). \quad (38)$$

Igualando as equações (37) e (38), conclui-se que

$$\vec{E} = -\nabla \phi, \quad (39)$$

ou seja, o campo elétrico é o negativo do gradiente do potencial ϕ . O sinal negativo mostra que a direção de \vec{E} é oposta à direção em que ϕ cresce. O termo gradiente se refere, nesse problema físico, ao fato de que, à medida que se move perpendicularmente às superfícies equipotenciais, o campo elétrico associado aumenta ou diminui na máxima taxa (SADIKU, 2012).

A outra equação de Maxwell da eletrostática, que é relacionada à *Lei de Gauss* na forma diferencial, é dada pela equação

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v, \quad (40)$$

sendo \vec{D} o vetor densidade de fluxo elétrico que se relaciona com o vetor campo elétrico através da equação

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (41)$$

ϵ sendo a permissividade elétrica do meio. A equação (41) vale para dielétricos lineares, e esse pressuposto é admitido. Substituindo a equação (39) em (41) e inserindo o resultado em (40), chega-se em (SADIKU, 2012)

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla \phi) = \rho_v, \quad (42)$$

sendo ρ_v a densidade volumétrica de carga livre. Para um meio não homogêneo, a permissividade ϵ varia para alguma direção no plano; e, portanto, a equação (42) não pode ser simplificada de imediato. Já para o meio homogêneo, ou seja, quando ϵ é constante em toda a região na qual ϕ está definido, a equação (42) torna-se (SADIKU, 2012)

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (43)$$

Esta é conhecida como equação de *Poisson*. Um caso especial desta equação ocorre quando $\rho_v = 0$, ou seja, numa região sem cargas. Então, a equação (43) torna-se

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (44)$$

que é a **equação de Laplace** esperada. Por exemplo, o problema envolvendo condutores em diferentes potenciais e em que toda a carga é encontrada na superfície desses condutores é um exemplo em que se aplica a equação de Laplace. Além disso, dada uma solução da equação de Laplace para um problema de valor de contorno, essa solução é única para

esse problema, como mostrado pelo **Teorema da Unicidade** em (SADIKU, 2012). Assim, obtendo experimentalmente, graficamente ou analiticamente uma solução da equação de Laplace que satisfaça as condições de contorno dadas, essa solução é única.

Restringindo esse problema físico a duas dimensões, utilizando os Teoremas 2.6 e 2.7 da Seção 2.4 e as equações de Maxwell da Lei de Gauss e da Lei de Faraday (GRIFFITHS, 2013), pode-se provar que, se $\psi(x, y)$ é uma conjugada harmônica da função potencial elétrico $\phi(x, y)$, então as curvas $\psi = c$, c uma constante, são as **linhas de fluxo** ou **linhas de campo elétrico**. Essas curvas são sempre ortogonais às curvas equipotenciais e essa ortogonalidade também fica clara pela equação (39), ou seja, pelo vetor campo elétrico ser o negativo do gradiente da função potencial. Esse vetor campo elétrico tem a direção da linha de fluxo em cada ponto (CHURCHILL, 1975).

Diante dos pontos levantados nessa seção, todos os problemas que se encontram neste capítulo e no Capítulo 5 partem dos pressupostos aqui descritos, tais como regiões bidimensionais sem cargas livres, meio linear homogêneo e, conseqüentemente, a aplicabilidade da equação de Laplace e a garantia da ortogonalidade entre a família de curvas equipotenciais e de linhas de fluxo. Além disso, não foram estabelecidas unidades de medida para o potencial e nem para o campo elétrico, pois há a intenção de se deixar interpretar as curvas equipotenciais, as geometrias e condições de contorno propostas, com outros sentidos físicos que também envolvam a equação de Laplace.

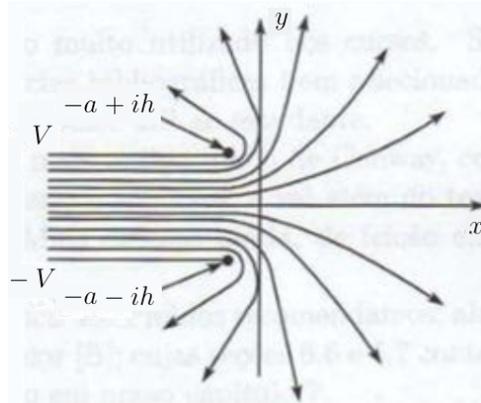
É importante ressaltar que as transformações conformes utilizadas na abordagem dos problemas deste capítulo foram encontradas em (ÁVILA, 2008), (BROWN; CHURCHILL, 2015) e (ZILL; SHANAHAN, 2011). Inclusive há uma tabela de funções com os seus respectivos mapeamentos geométricos em (BROWN; CHURCHILL, 2015), mostrando até mais de um mapeamento para a mesma função. Todas essas transformações são basicamente funções elementares cujos mapeamentos podem ser compreendidos pela manipulação algébrica de tais funções. Por exemplo, para a função complexa exponencial $w = \exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos y + i\sin y)$, a parte real de um número complexo do domínio é mapeado no módulo de sua imagem e a parte imaginária é mapeada no argumento de sua imagem. Dessas relações surgem vários mapeamentos de regiões do plano complexo para essa função (CHURCHILL, 1975). Nesse mesmo sentido, inúmeros mapeamentos podem ser feitos com as funções elementares e suas composições.

3.3 Problema 1

Este problema trata de um capacitor de placas paralelas cujas placas são dois semi-planos paralelos, como é mostrado na Figura 7, com a simetria em relação a uma dimensão. Essas placas, que representam o contorno do problema, estão separadas por uma distância

$2h$ e são mantidas a potenciais V e $-V$. Como pode-se notar pela Figura 7, as linhas equipotenciais esperadas estão representadas e o objetivo é encontrar a solução analítica das linhas equipotenciais e de fluxo elétrico para essa borda do capacitor representada.

Figura 7 – Problema do cálculo das linhas equipotenciais e de fluxo nas bordas do capacitor de placas paralelas cujos parâmetros são $a > 0$, $h > 0$ e $V > 0$.



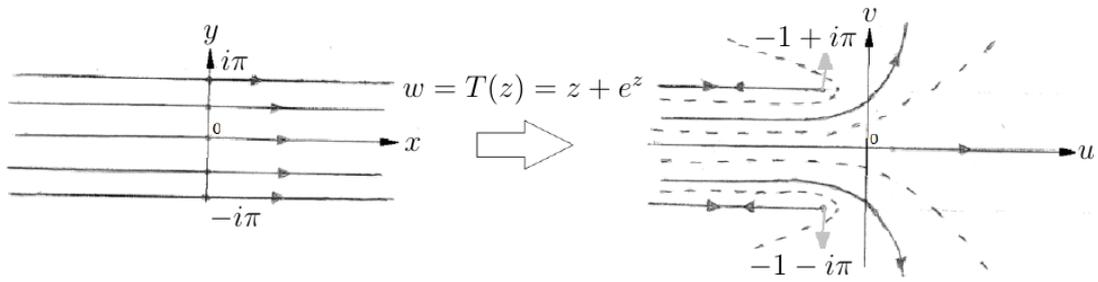
Fonte: Adaptação de (ÁVILA, 2008).

O espalhamento das linhas equipotenciais representado é intuitivo, porém encontrar as equações que representam essas linhas pelo desenvolvimento da equação de Laplace em duas dimensões não é trivial. Assim, o primeiro passo é buscar uma transformação conforme que leve o domínio da Figura 7 a uma imagem, cuja geometria permita encontrar diretamente as equações que representem as equipotenciais e as linhas de fluxo.

A transformação proposta para a mudança de geometria que se deseja é $T(z) = z + \exp(z)$, e a primeira observação a se fazer é considerar $\exp(z) = e^z$, pois a todo momento é admitido o *valor principal* de e^z , como potência de e , e portanto $\exp(z \text{Log } e) = \exp(z)$ (CHURCHILL, 1975). Sabe-se que a transformação exponencial é conforme para todo o plano complexo e é injetiva para regiões do plano complexo, como por exemplo a faixa $-\pi < y < \pi$. Assim, pelo Teorema 2.9, a função exponencial admite uma inversa global única (ÁVILA, 2008) para essa região de injetividade.

Essa transformação, mostrada pela Figura 8, tem um domínio de solução conhecida, que é o problema do capacitor de placas paralelas de dimensões “infinitas”, e a imagem como sendo o capacitor do problema em questão, com a diferença de que, em vez das placas superior e inferior estarem, respectivamente, posicionadas nas posições ih e $-ih$, elas estão em $i\pi$ e $-i\pi$. Esse mapeamento pode ser verificado pela manipulação algébrica de sua expressão $z + \exp(z)$, visando transformar as retas horizontais do domínio.

Figura 8 – Domínio e imagem da transformação $T(z) = z + e^z$.



Fonte: Adaptação de (ÁVILA, 2008).

Portanto o capacitor transformado difere apenas na distância entre as placas, e isso é corrigido com uma transformação que não muda a geometria do problema, que é a transformação linear, como traz a definição abaixo (CHURCHILL, 1975).

Definição 3.3. A transformação linear é representada por meio da função

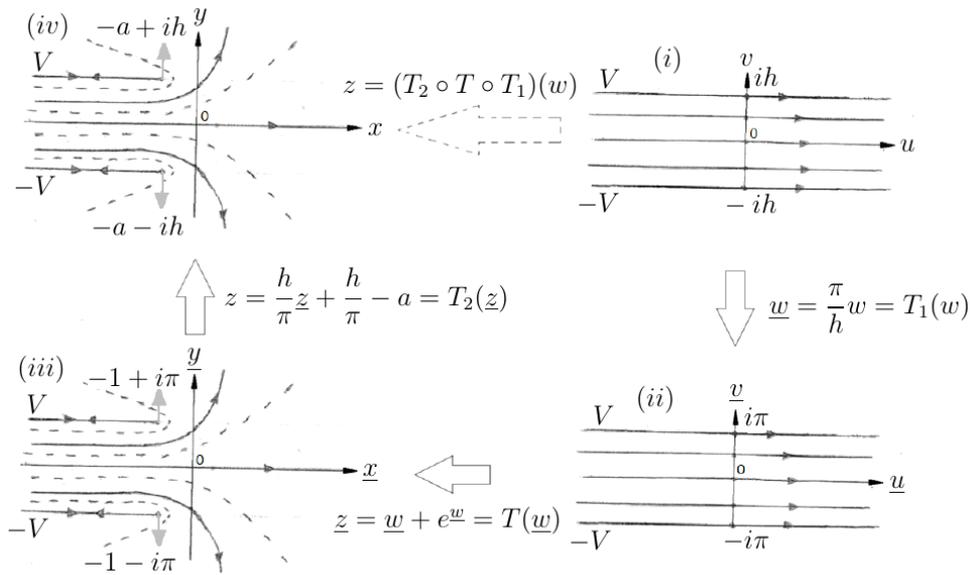
$$f(z) = Bz + C, \quad B \neq 0 \text{ e } C \text{ números complexos,} \quad (45)$$

que consiste, em relação a cada ponto do domínio, na rotação pelo ângulo $\arg B$ e expansão pelo fator $|B| > 1$ ou contração por $|B| < 1$, seguidas pela translação pela constante C a ser somada. A expansão ou contração e translação ocorrem em relação à origem.

Portanto, a transformação linear não modifica o formato do domínio, mas pode transladar e rotacionar a geometria sobre o plano complexo, além de esticar ou contrair as dimensões dessa geometria. Além disso, a transformação linear é conforme e injetiva para todo o plano de origem, admitindo uma transformada inversa global única que é também uma transformação linear, visto que $B \neq 0$.

Diante dessas transformações propostas, pode-se montar a composição necessária para se levar a solução trivial da geometria “simples” para a geometria “complexa”. E isso está proposto pela Figura 9.

Figura 9 – Composição de funções para a transformação da geometria do capacitor infinito de placas paralelas na região de bordas do capacitor finito de placas paralelas.



Fonte: Arquivo próprio baseado em (ÁVILA, 2008).

Pela Figura 9, as curvas equipotenciais são retas horizontais em (i) variando entre $-ih$ e ih , e as linhas de fluxo elétrico são, portanto, segmentos de reta verticais para a faixa entre $-\infty$ a ∞ . A ideia é tomar as retas equipotenciais para o plano de destino e levá-las até o plano de origem. Essa volta é feita, portanto, através da transformação inversa $T_0^{-1}(w) = z$ que é uma composição de transformações

$$T_0^{-1}(w) = z = (T_2 \circ T \circ T_1)(w). \quad (46)$$

Assim, tomando as linhas equipotenciais já adquiridas como soluções para um problema físico de um capacitor “infinito”, primeiramente elas são transformadas pela função linear $T_1(w) = \frac{\pi}{h}w$ que objetiva mudar a localização das placas superior e inferior das posições ih e $-ih$ para as posições $i\pi$ e $-i\pi$, respectivamente, ou seja, mudar a espessura do capacitor. Por as placas estarem nessas novas posições, a transformação $T(w) = w + e^w$ torna-se aplicável para a mudança de geometria das equipotenciais e linhas de fluxo. Por fim, estando o domínio já representado pelas placas com suas bordas, então o último passo é a transformação que leva as extremidades das placas para as posições $-a + ih$ e $-a - ih$, ou seja, um capacitor com a mesma espessura do inicial. Isso é feito novamente por uma transformação linear, agora $T_2(z) = \frac{h}{\pi}z + \frac{h}{\pi} - a$. Essa última transformação não é necessária para se chegar à solução do problema, pois ela não modifica a geometria das curvas equipotenciais e das linhas de fluxo. Mas a ideia dessa última transformação é levar o problema simplesmente matemático ao problema de dimensões físicas análogo ao inicial. Cada uma dessas transformações está representada e equacionada na Figura 9. Assim, de

(46) tem-se

$$z = (T_2 \circ T \circ T_1)(w) = (T_2 \circ T)\left(\frac{\pi}{h}w\right) = T_2\left(\frac{\pi}{h}w + e^{\frac{\pi}{h}w}\right),$$

e portanto,

$$T_0^{-1}(w) = z = \frac{h}{\pi} \left(\frac{\pi}{h}w + e^{\frac{\pi}{h}w} \right) + \frac{h}{\pi} - a. \quad (47)$$

A equação (47) representa a transformação de geometrias que se busca para a solução analítica do problema, estabelecendo ela uma correspondência biunívoca entre os pontos do domínio e da imagem, devido ao carácter conforme e injetivo para $-h < v < h$. Sabe-se, da eletrostática, que a equação do potencial entre as placas de um capacitor de placas paralelas de dimensão “infinita” é dado, no plano w da Figura 9 (i), por (SADIKU, 2012)

$$\Phi(u, v) = \frac{V}{h}v. \quad (48)$$

Por consequência, as equipotenciais $\Phi = c_1$ constante com $-V < c_1 < V$ da Figura 9 (i) são representadas pelas linhas $v = c_2$ constante com $-h < c_2 < h$. Logo, igualando as partes real e imaginária de (47) com $v = c_2$, tem-se

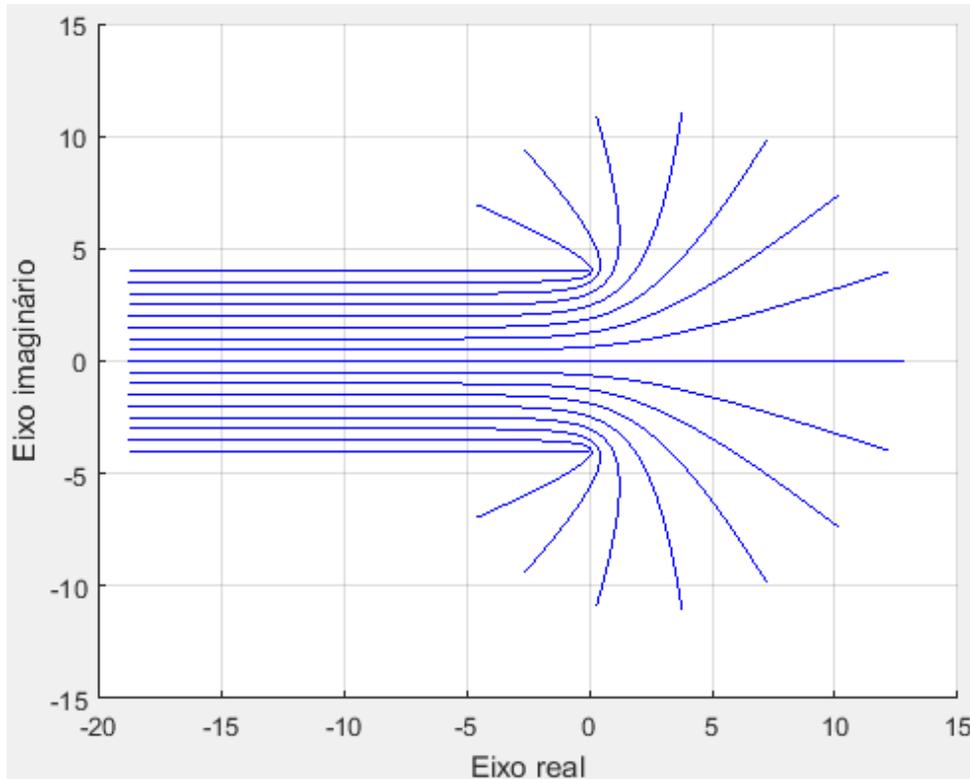
$$x = x(u) = u + \frac{h}{\pi} - a + \frac{h}{\pi} e^{\frac{\pi}{h}u} \cos\left(\frac{\pi}{h}c_2\right), \quad (49)$$

e

$$y = y(u) = c_2 + \frac{h}{\pi} e^{\frac{\pi}{h}u} \sen\left(\frac{\pi}{h}c_2\right), \quad (50)$$

ou seja, uma dada equipotencial $v = c_2$ constante no plano w é parametrizada por $x(u)$ e $y(u)$ no plano desejado z , com $-\infty < u < \infty$. Essas equações com os parâmetros $-20 \leq u \leq 5/2$, $h = 4$ e $a = 0$ geram o gráfico $(x(u), y(u))$ da Figura 10 com as equipotenciais de $c_2 = -4$ a $c_2 = 4$ com intervalos de $1/2$.

Figura 10 – Curvas equipotenciais encontradas analiticamente para as bordas do capacitor de placas paralelas.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

Sendo as curvas de fluxo elétrico uma família ortogonal à família das curvas equipotenciais, elas são representadas por $u = c_3$ constante no plano w . Assim, igualando as partes real e imaginária de (47), tem-se

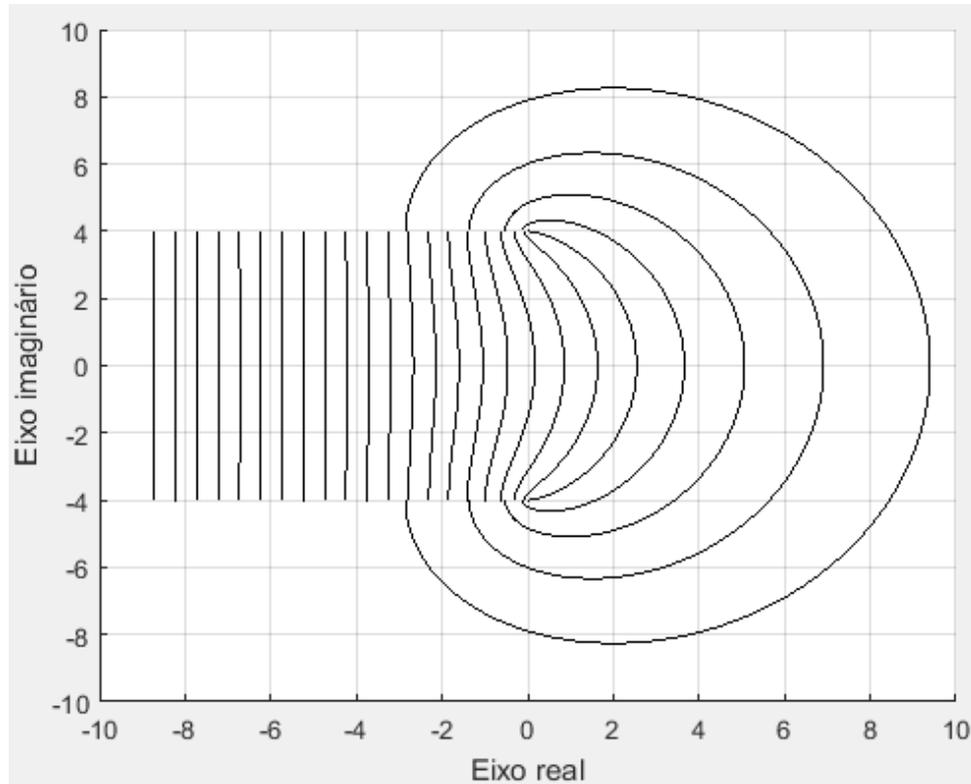
$$x = x(v) = c_3 + \frac{h}{\pi} - a + \frac{h}{\pi} e^{\frac{\pi}{h}c_3} \cos\left(\frac{\pi}{h}v\right) \quad (51)$$

e

$$y = y(v) = v + \frac{h}{\pi} e^{\frac{\pi}{h}c_3} \sin\left(\frac{\pi}{h}v\right), \quad (52)$$

ou seja, uma dada linha de fluxo elétrico $u = c_3$ constante no plano w é parametrizada por $x(v)$ e $y(v)$ no plano desejado z , com $-h \leq v \leq h$. Essas equações, quando montadas no MATLAB, geram o gráfico $(x(v), y(v))$ da Figura 11 com os mesmos parâmetros a e h da simulação anterior das equipotenciais. Foram geradas as linhas de fluxo para $-10 \leq c_3 \leq 2$ com intervalos de $1/2$.

Figura 11 – Curvas de fluxo elétrico encontradas analiticamente para as bordas do capacitor de placas paralelas.



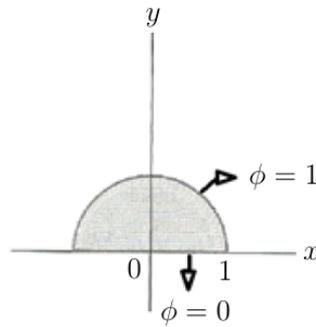
Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

Pode-se perceber, pelas Figuras 10 e 11, o efeito de bordas esperado, assim como a sua diminuição e tendência à extinção, quanto mais no interior do capacitor se está. Essa solução encontrada é analítica e, no Capítulo 5, é confrontada com a solução numérica pela transformação de Schwarz-Christoffel, sendo a geometria das placas da Figura 7 vista como um polígono ilimitado, ou seja, com vértices no infinito.

3.4 Problema 2

O Problema 2 busca determinar o potencial eletrostático ϕ no corte $x^2 + y^2 < 1, y > 0$ do semicilindro, tal que $\phi = 0$ em $y = 0$ e $\phi = 1$ em $x^2 + y^2 = 1$. Portanto, o que se objetiva é encontrar o potencial na região interior à seção transversal do semicilindro, mostrada na Figura 12.

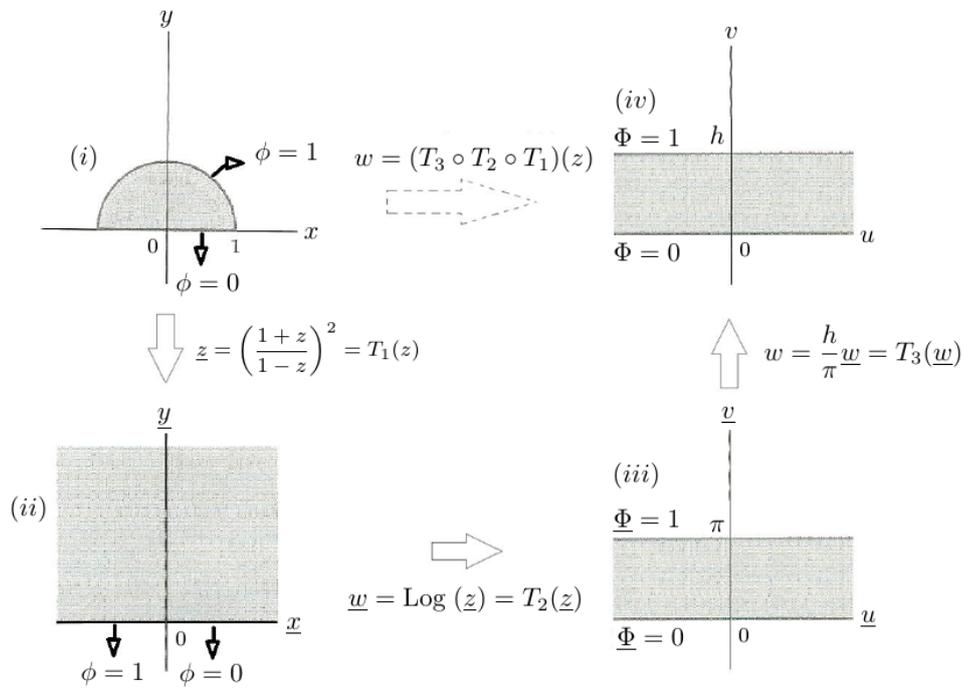
Figura 12 – Seção transversal do semicilindro com condições de contorno de Dirichlet constantes especificadas.



Fonte: Adaptação de (ZILL; SHANAHAN, 2011).

Buscando transformações que possam levar essa geometria do problema a outra de solução já conhecida, três transformações são encontradas e, formando uma composição, levam a geometria da Figura 12 à seção transversal do capacitor de placas paralelas “infinito”. A Figura 13 mostra o procedimento para se solucionar o problema proposto.

Figura 13 – Procedimento para a transformação da geometria do semicilindro na geometria do capacitor de placas paralelas de dimensões “infinitas”.



Fonte: Adaptação de (ZILL; SHANAHAN, 2011).

Pela Figura 13, tem-se que a transformação composta $w = T(z) = (T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z)$ é a transformação desejada. O que T_1 faz é levar o semicírculo ao semiplano, como mostram,

respectivamente, as partes (i) e (ii) da Figura 13. O que T_2 faz é levar o semiplano à faixa infinita entre as retas $\underline{v} = 0$ e $\underline{v} = \pi$, como mostram, respectivamente, as partes (ii) e (iii) da Figura 13. A função T_2 trata do ramo principal da função logarítmica, que está bem definida para o domínio do semiplano superior (CHURCHILL, 1975). O ramo principal não está definido para o semieixo $\text{Re}(z) < 0$, além do ponto de ramificação $z = 0$. Mas, como o domínio do problema é apenas o semiplano superior com o eixo real como contorno, então basta considerar que a transformação do contorno é o caso limite para caminhos contidos no semiplano superior. E, por fim, o que T_3 faz é uma mudança de variáveis, alterando apenas a distância entre as placas paralelas. Na verdade, essa transformação T_3 não é necessária, pois já se tem uma solução da equação de Laplace para a geometria (ii) da Figura 13. Mas T_3 , além de não aumentar a complexidade da solução, pois trata-se de uma função linear, proporciona ajustar para qualquer h de distância entre as placas, levando o problema simplesmente matemático a um problema de dimensões físicas encontrado na prática.

Portanto, a transformação composta $w = T(z)$ é dada da seguinte forma:

$$T(z) = (T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) = T_3 \circ T_2 \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 \right] = T_3 \left[\text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 \right],$$

ou seja,

$$w = T(z) = \frac{h}{\pi} \text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2. \quad (53)$$

Para o ramo principal da função logarítmica, a equação (53) fica (CHURCHILL, 1975)

$$T(z) = \frac{2h}{\pi} \text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right). \quad (54)$$

Pode-se observar pela equação (54) que a transformação não está bem definida nos pontos $z_0 = 1$ e $z_0 = -1$, o que não compromete a solução desse problema, uma vez que esses pontos estão no contorno, onde o potencial tem a condição de Dirichlet constante, e quaisquer pontos do contorno e do domínio do problema, que estejam tão próximos quanto se queira de $z_0 = 1$ ou $z_0 = -1$, são bem definidos por $T(z)$. Essa transformação é uma composição das funções linear fracionária e logarítmica. Como transformação linear fracionária, tem-se (CHURCHILL, 1975)

Definição 3.4. *A transformação*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0), \quad (55)$$

onde a, b, c e d são constantes complexas, é chamada transformação linear fracionária. Se $ad - bc = 0$, o lado direito de (55) se torna uma constante ou sem sentido.

A transformação linear fracionária é analítica e injetiva com exceção da raiz do denominador, e a logarítmica é injetiva e analítica ao se estabelecer o seu ramo principal,

pois tem a função exponencial como inversa única (ÁVILA, 2008). Para confirmar que a transformação (54) é conforme para o domínio, deve-se encontrar a sua derivada. Tomando a derivada do ramo principal da função logarítmica, tem-se (CHURCHILL, 1975)

$$\frac{d}{dz}(\text{Log } z) = \frac{1}{z}. \quad (56)$$

Aplicando a regra da cadeia e a regra do quociente em (54) para se encontrar w' , e utilizando (56), então

$$w' = \frac{4h}{\pi} \frac{1}{(1+z)(1-z)}. \quad (57)$$

Assim, conclui-se que a transformação não é conforme para os mesmos pontos $z_0 = 1$ e $z_0 = -1$, onde também T não está definida, como justificado anteriormente. Ou seja, para o domínio dado, tem-se que a transformação é conforme e, pelo Teorema 2.9, admite uma inversa global única, estabelecendo a correspondência biunívoca entre os pontos do domínio e da imagem.

Diante de uma composição de transformações conformes, tem-se que as condições de contorno de Dirichlet constante são preservadas após cada transformação. Os únicos pontos onde a transformação não é conforme são exatamente aqueles onde há a troca de potencial das condições de contorno. Assim, basta que se considere os pontos $z = \pm 1$ como isolantes das duas placas de potenciais distintos.

Substituindo $T(z) = u + iv$ e $z = x + iy$ na equação (54) e aplicando a função exponencial em cada lado da equação, então

$$\exp(u + iv) = \exp \left[\frac{2h}{\pi} \text{Log} \left(\frac{1+x+iy}{1-x-iy} \right) \right]. \quad (58)$$

Considerando o valor principal de $e^z = \exp(z)$ que é a função inversa do ramo principal $\text{Log}(z)$ em (58), tem-se

$$e^u e^{iv} = \left(\frac{1+x+iy}{1-x-iy} \right)^{\frac{2h}{\pi}}. \quad (59)$$

Aplicando a fórmula de Euler no lado esquerdo da equação (59) e buscando encontrar as partes real e imaginária de cada lado da equação, tem-se

$$e^u [\cos(v) + i \text{sen}(v)] = \left[\frac{1-x^2-y^2+i2y}{(1-x)^2+y^2} \right]^{\frac{2h}{\pi}}. \quad (60)$$

Fazendo a igualdade de ângulos que deve ser respeitada na forma polar em (60), então

$$v = \frac{2h}{\pi} \text{tg}^{-1} \left(\frac{2y}{1-x^2-y^2} \right). \quad (61)$$

Para a Figura 13 (iv) tem-se que o potencial apresenta solução já conhecida. Para a diferença de potencial de 1 entre as placas com distância h entre as mesmas, a função potencial é

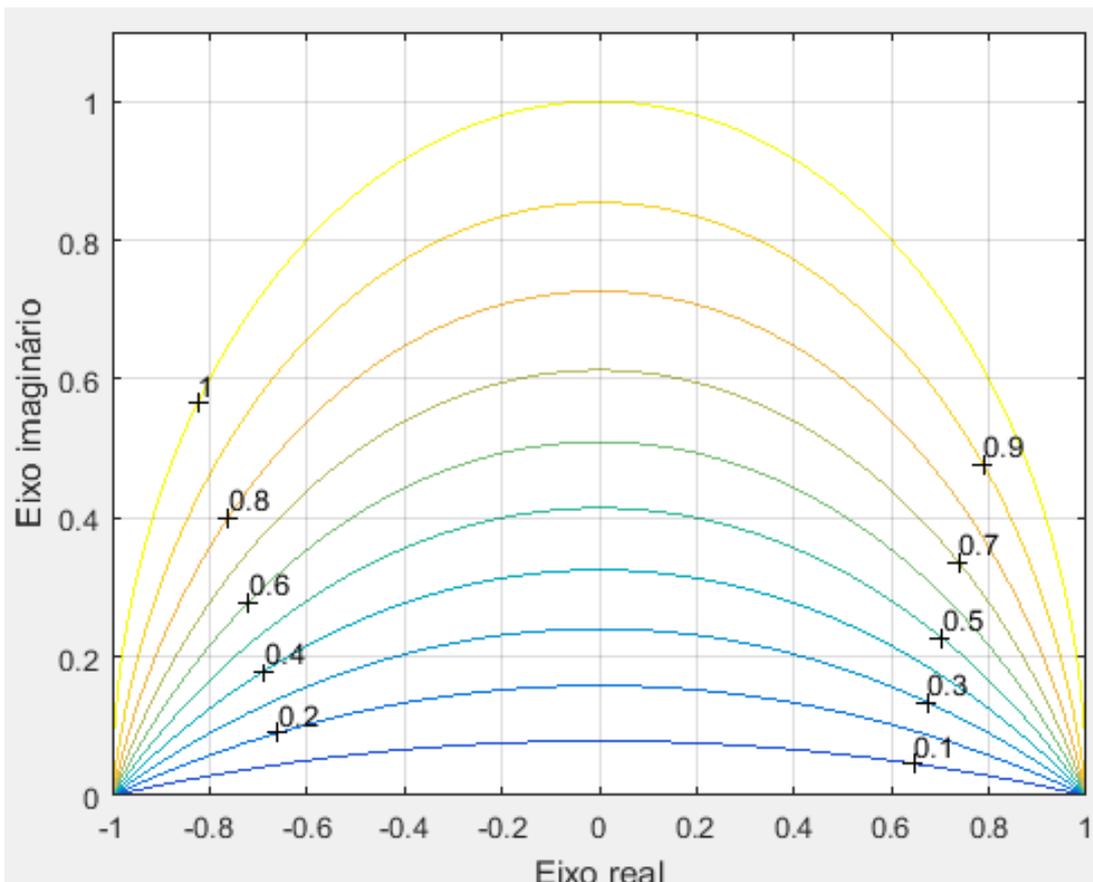
$$\Phi(u, v) = \frac{1}{h} v, \quad (62)$$

para $0 < v < h$, uma vez que as placas de dimensão “infinita” estão localizadas nas posições $v = 0$ e $v = h$. A equação (62), bem conhecida, mostra que o potencial depende somente da coordenada v do plano w . E a coordenada v está representada em função de x e y através da equação (61). Portanto, substituindo a equação (61) em (62), tem-se

$$\phi(x, y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2y}{1 - x^2 - y^2} \right). \quad (63)$$

A equação (63) representa o potencial eletrostático ϕ no semicilindro de seção $x^2 + y^2 < 1, y > 0$, tal que $\phi = 0$ em $y = 0$ e $\phi = 1$ em $x^2 + y^2 = 1$. Pode-se encontrar as equipotenciais desse problema, ou seja, as curvas de nível $\phi(x, y) = c$, c sendo uma constante que varia entre os potenciais 0 e 1. Logo, traçando as curvas de nível de ϕ no MATLAB pelo comando *contour*, tem-se

Figura 14 – Equipotenciais geradas pelo MATLAB para o Problema 2 com os seus respectivos potenciais indicados.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

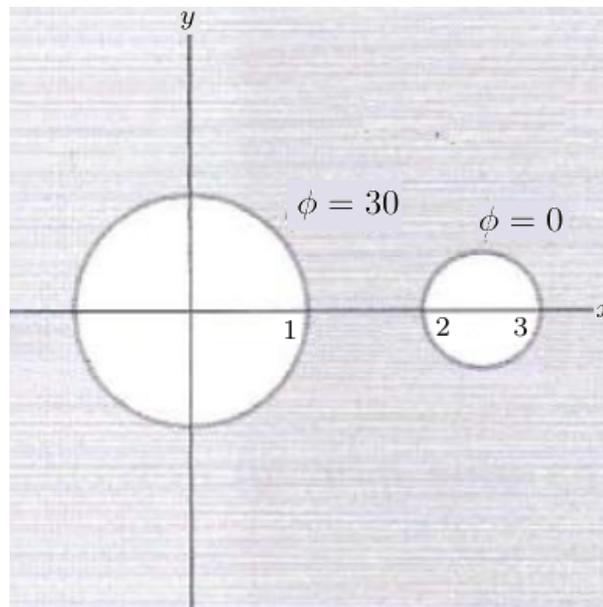
Esse mesmo problema foi resolvido utilizando o *método de Elementos Finitos* contido no pacote numérico *PDE Toolbox* do MATLAB. Foram gerados 7936 elementos triangulares

e 5625 nós, obtendo as mesmas curvas equipotenciais da Figura 14 com o erro absoluto na ordem de 10^{-4} em relação à solução analítica obtida via transformação conforme.

3.5 Problema 3

Este problema busca determinar a função potencial e as curvas equipotenciais para a geometria entre dois cilindros de comprimento “infinito”, sendo um ao lado do outro, como se pode ver pela Figura 15, que é a seção transversal dos cilindros. O cilindro maior tem a seção transversal centrada em $(0, 0)$ e raio igual a 1; e o menor com a seção transversal centrada em $(5/2, 0)$ e raio igual a $1/2$.

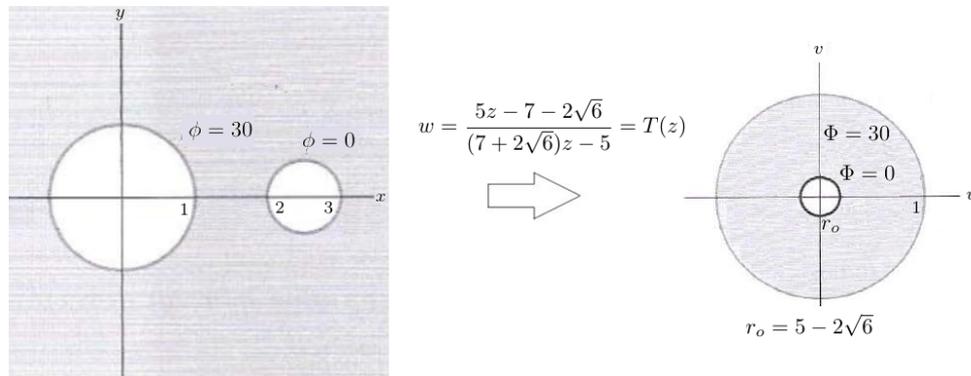
Figura 15 – Seção transversal de dois cilindros, um ao lado do outro, com condições de contorno de Dirichlet constantes especificadas.



Fonte: Adaptação de (ZILL; SHANAHAN, 2011).

Pode-se observar pela Figura 15 que o cilindro maior tem a condição de contorno em sua superfície no valor de 30 e o cilindro menor tem a condição de contorno nula em sua superfície. A região externa às seções transversais dos dois cilindros representa o domínio desse problema. Buscando transformações conformes que possam levar esse domínio em outro com solução da equação de Laplace simplificada, encontra-se uma transformação que leva a geometria da Figura 15 à seção transversal de dois cilindros coaxiais, cuja solução já é conhecida. A Figura 16 mostra a transformação para se solucionar o problema proposto.

Figura 16 – Transformação que leva a região da seção transversal entre os dois cilindros à seção transversal de dois cilindros coaxiais.



Fonte: Adaptação de (ZILL; SHANAHAN, 2011).

A transformação da Figura 16 tem como equação

$$w = \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})z - 5}. \quad (64)$$

Pela equação (64), pode-se observar que a transformação w não está bem definida para $z = \left(\frac{5}{7 + 2\sqrt{6}}, 0\right) \approx (0.42, 0)$, um ponto dentro do cilindro maior, região essa que não compõe o domínio. Outra observação importante é que, apesar de o cilindro maior manter-se inalterado ao se passar pela transformação w ; o cilindro menor, além de ter sido deslocado, com o seu centro passando a estar na origem, também sofreu a alteração em seu raio, passando de $1/2$ para $5 - 2\sqrt{6} \approx 0.10$.

Para verificar se a transformação w é conforme, encontra-se a derivada de (64), que, pela regra do quociente, é

$$w' = T'(z) = \frac{48 + 28\sqrt{6}}{[(7 + 2\sqrt{6})z - 5]^2}, \quad (65)$$

ou seja, w é conforme para todo o domínio definido, uma vez que w' não se anula para nenhum ponto do plano complexo e o único ponto no qual o denominador de w' se anula está fora do domínio de definição. Além disso, essa transformação (64) também é injetiva sobre o domínio, pois trata-se de uma transformação linear fracionária e, pelo Teorema 2.9, essa transformação admite uma inversa global única, ou seja, há uma correspondência biunívoca entre os pontos do domínio e da imagem.

De posse da transformação conforme representada pela equação (64), o próximo passo é encontrar a solução da equação de Laplace para a imagem. Essa solução é aplicação direta da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, devido à simetria axial gerada pela transformação. Então, primeiramente, pode-se denominar as coordenadas

cilíndricas com as letras ρ , θ e h , com o intuito de não repetir as letras ϕ e z já usadas para denominarem, respectivamente, o potencial no plano complexo de saída e a variável complexa z . Assim definidas, a única coordenada que varia com o potencial Φ é a coordenada ρ , devido à simetria em relação à origem que a imagem da transformação apresenta. Portanto, aplicando a equação de Laplace para as coordenadas cilíndricas no plano w , tem-se (SADIKU, 2012)

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial h^2} = 0. \quad (66)$$

Sendo o potencial independente das coordenadas θ e h , a equação (66) reduz-se a

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\Phi}{d\rho} \right) = 0. \quad (67)$$

Para que a equação (67) seja satisfeita, então

$$\rho \frac{d\Phi}{d\rho} = A, \quad (68)$$

sendo A uma constante real, pois a derivada de uma constante é nula, satisfazendo a equação (67). Integrando os dois lados da equação (68), tem-se

$$\int \frac{d\Phi}{d\rho} d\rho = \int A \frac{d\rho}{\rho} \implies$$

$$\Phi(\rho, \theta, h) = A \text{Log} \rho + B, \quad (69)$$

sendo B uma outra constante real; e o termo $\text{Log} \rho$, o logaritmo real. Das coordenadas cilíndricas, tem-se $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$, com u e v funções reais de duas variáveis. Partindo de (69), então

$$\Phi(u, v) = A \text{Log} \sqrt{u^2 + v^2} + B, \quad (70)$$

faltando, portanto, encontrar as constantes A e B , para se obter a solução do potencial para dois cilindros coaxiais. Com base na condições de contorno de Dirichlet constantes no plano w da Figura 16, tem-se

$$\Phi(r_o, \theta, h) = 0, \quad (71)$$

$$\Phi(1, \theta, h) = 30. \quad (72)$$

Aplicando as condições de contorno (71) e (72) em (70), as constantes A e B são obtidas. Portanto,

$$\Phi(u, v) = \frac{-30 \text{Log} \sqrt{u^2 + v^2}}{\text{Log}(5 - 2\sqrt{6})} + 30. \quad (73)$$

Resta levar essa solução para o domínio da transformação. Substituindo $w = u + iv$ em (64), então

$$u + iv = \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})z - 5} \implies$$

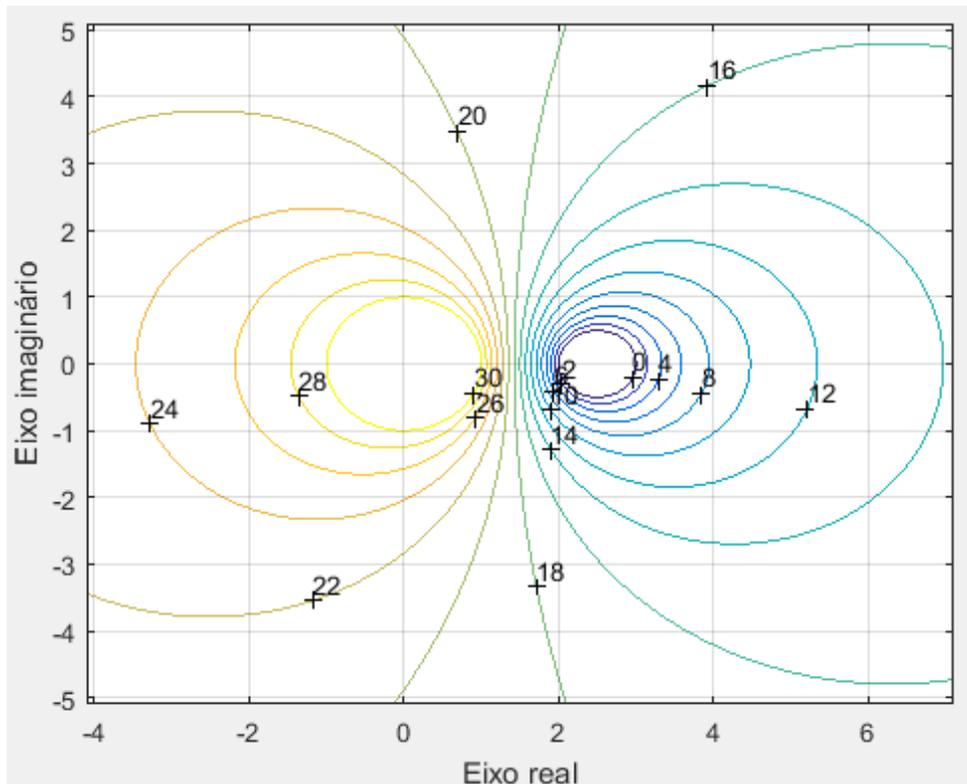
$$\sqrt{u^2 + v^2} = \left| \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})z - 5} \right|. \quad (74)$$

A equação (74) representa o módulo da transformação w , e ela pode ser substituída diretamente na equação (73), resultando em

$$\phi(x, y) = \frac{-30}{\text{Log}(5 - 2\sqrt{6})} \text{Log} \left| \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})z - 5} \right| + 30. \quad (75)$$

A equação (75) representa o potencial desejado para a geometria proposta, sendo $z = x + iy$. Seguem na Figura 17, algumas curvas equipotenciais $\phi(x, y) = c$, c sendo uma constante que varia entre as condições de contorno 0 e 30.

Figura 17 – Equipotenciais geradas pelo MATLAB para o Problema 3 com os seus respectivos potenciais indicados nas curvas.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

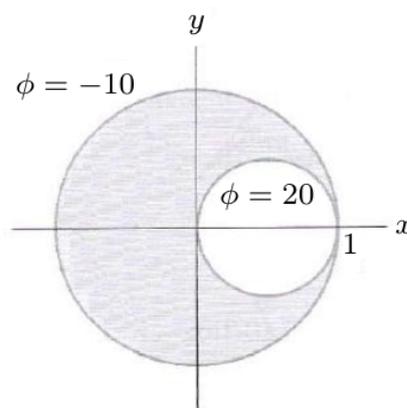
Pela Figura 17, pode-se observar as curvas equipotenciais com seus respectivos potenciais e suas formas são intuitivamente esperadas devido às condições de contorno especificadas. Outra observação importante quanto a essa transformação é que, enquanto a geometria inicial no plano z é ilimitada, a geometria de chegada no plano w é limitada, proporcionando uma diminuição do custo computacional, ao se resolver o problema transformado usando um método numérico qualquer. Para comparação, esse mesmo problema

foi resolvido utilizando o *método de Elementos Finitos* contido no pacote numérico *PDE Toolbox* do MATLAB. Por se tratar de um domínio ilimitado, foi necessário criar no *PDE Toolbox* um domínio limitado cujo contorno estava a uma distância suficientemente grande das duas circunferências da Figura 15. Para isso, foi adotado um quadrado de lado com comprimento 2000 centrado na origem, cuja fronteira possui a condição de contorno de Neumann nula, visando a uma menor interferência sobre o problema. Essa aproximação é bastante razoável, visto que a condição de Neumann no contorno é o próprio módulo da componente normal do campo elétrico em relação a esse contorno e a intensidade do campo elétrico cai com a distância ao quadrado em relação a uma carga elétrica pontual, como proposto pela *Lei de Coulomb* e pela equação (33) da Seção 3.2. Adotando esse procedimento e gerando uma malha com 419840 elementos triangulares e 210367 nós, as mesmas curvas equipotenciais da Figura 17 foram obtidas com o erro absoluto na ordem de 10^{-4} em relação à solução analítica via transformação conforme.

3.6 Problema 4

Este problema busca determinar a função potencial e as curvas equipotenciais para a geometria entre dois cilindros de comprimento “infinito”, sendo que um está dentro do outro; e, além disso, eles se tangenciam, como se pode ver pela Figura 18, que é a seção transversal dos cilindros. O cilindro maior tem a seção transversal centrada em $(0, 0)$ e raio igual a 1, e o menor com a seção transversal centrada em $(1/2, 0)$ e raio igual a $1/2$.

Figura 18 – Seção transversal dos dois cilindros, um dentro do outro, que se tangenciam com condições de contorno de Dirichlet constantes especificadas.

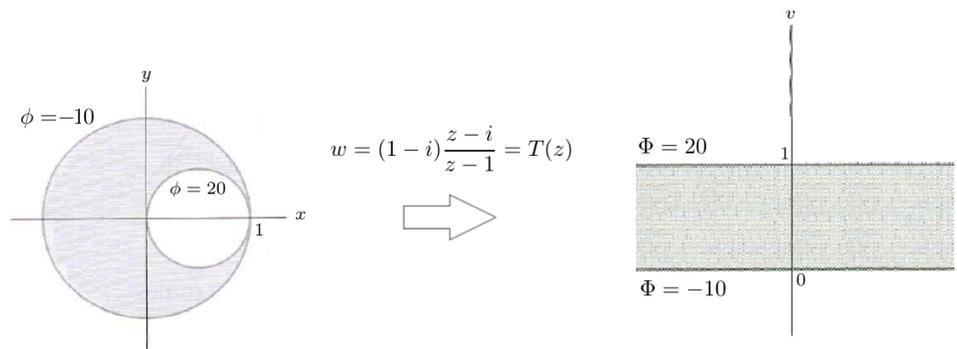


Fonte: Adaptação de (ZILL; SHANAHAN, 2011).

Pode-se observar pela Figura 18 que os cilindros se tangenciam ao longo da reta parametrizada $\{ x = 1, y = 0 \text{ e } z = t / -\infty < t < \infty \}$. Pode-se observar também que o cilindro maior tem a condição de contorno de Dirichlet constante em sua superfície no

valor de -10 e o cilindro menor tem a condição de contorno de Dirichlet em sua superfície no valor de 20 . A região entre essas seções transversais dos dois cilindros representa o domínio desse problema. Buscando transformações conformes que possam levar esse domínio em outro com solução da equação de Laplace já conhecida, encontra-se uma transformação que leva a geometria da Figura 18 à seção transversal do capacitor de placas paralelas “infinito”, de solução já conhecida. A Figura 19 mostra a transformação para se solucionar o problema proposto.

Figura 19 – Transformação que leva a região da seção transversal entre as superfícies dos dois cilindros à seção transversal do capacitor “infinito” de placas paralelas.



Fonte: Adaptação de (ZILL; SHANAHAN, 2011).

A transformação da Figura 19 tem como equação:

$$w = T(z) = (1 - i) \frac{z - i}{z - 1}. \quad (76)$$

Pela equação (76), pode-se observar que a transformação $w = T(z)$ não está bem definida para $z = (1, 0)$, exatamente o ponto onde as seções transversais dos cilindros se tangenciam. Isso tem sentido físico, uma vez que é o ponto em que estão definidos dois potenciais diferentes. Uma boa aproximação a se fazer é tratar esse problema com os dois cilindros estando a uma distância “infinitesimal” a ponto de quase se tangenciarem, e considerar o ponto $(1, 0)$ como um ponto de isolamento elétrico entre as seções dos cilindros. Essa aproximação faz com que o problema passe a ter um sentido físico e a se desconsiderar o ponto $(1, 0)$ do domínio. Entretanto, ao se considerar o conceito de *plano complexo estendido*, que inclui pontos no infinito (ÁVILA, 2008), o ponto $(1, 0)$ pode ser visto como pré-imagem do ponto no infinito da região entre as placas paralelas da Figura 19.

Para verificar se a transformação (76) é conforme, deve-se encontrar a derivada de (76). Aplicando a regra de derivação do quociente, tem-se

$$w' = T'(z) = \frac{2i}{(z - 1)^2}. \quad (77)$$

A equação (77) mostra que a transformação w é conforme para todo ponto do domínio, uma vez que o ponto $(1, 0)$ está fora do domínio da transformação. Além disso, a função (76) é uma transformação linear fracionária e, portanto, injetiva para o domínio proposto, ou seja, essa transformação estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do domínio e da imagem, como propõe o Teorema 2.9.

Substituindo $w = u + iv$ e $z = x + iy$ na equação (76), então

$$u + iv = (1 - i) \frac{x + iy - i}{x + iy - 1} = (1 - i) \frac{x + i(y - 1)}{x - 1 + iy} \frac{x - 1 - iy}{x - 1 - iy} \implies$$

$$u + iv = \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1}{(x - 1)^2 + y^2} + i \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2}. \quad (78)$$

Fazendo a igualdade das partes imaginárias de cada lado da equação (78), tem-se

$$v = \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2}. \quad (79)$$

Para a imagem da transformação w , tem-se a solução da equação de Laplace já conhecida e, atendendo às condições de contorno da Figura 19, então o potencial $\Phi(u, v)$ é dado por:

$$\Phi(u, v) = 30v - 10. \quad (80)$$

Como já esperado, o potencial para a imagem da Figura 19 depende somente de v , logo, substituindo a equação (79) na equação (80), tem-se, por fim

$$\phi(x, y) = 30 \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2} - 10. \quad (81)$$

A equação (81) representa o potencial eletrostático desejado para a seção entre os cilindros. Simulando as equipotenciais $\phi(x, y) = c$ no MATLAB, sendo c uma constante que varie entre os potenciais -10 e 20 , chega-se na Figura 20. Partindo da equação (81) e utilizando a relação $k = (c + 10)/30$, chega-se que as equações das curvas equipotenciais são

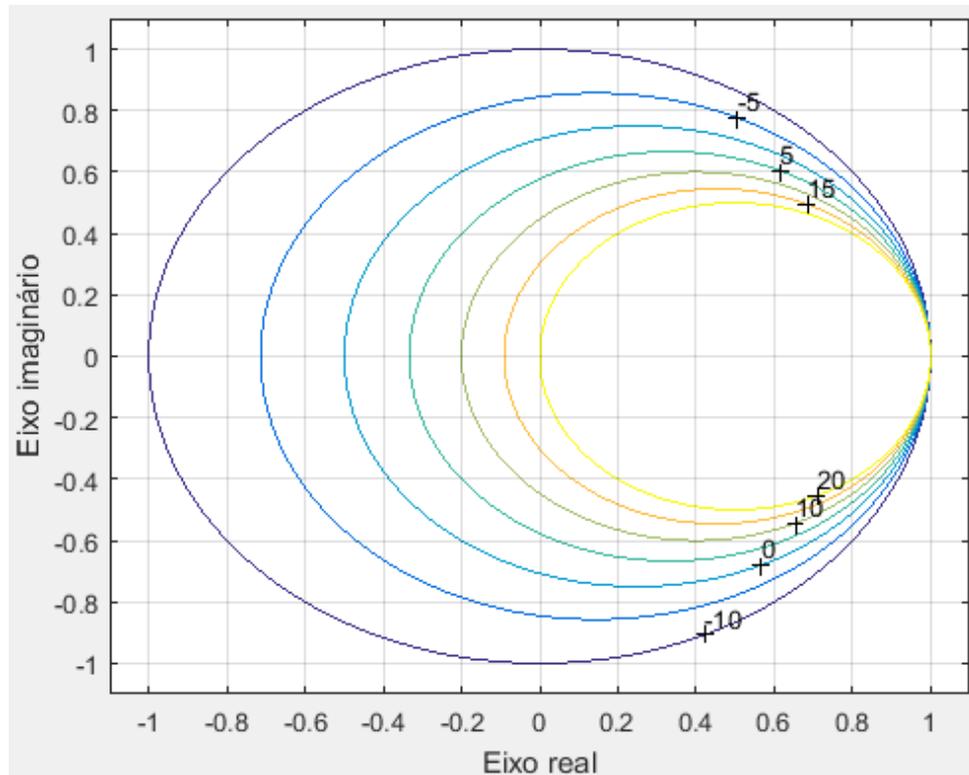
$$\left(x - \frac{k}{k + 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{k + 1}\right)^2, \quad (82)$$

com $0 \leq k \leq 1$, pois $-10 \leq c \leq 20$. Se o potencial $c = -10$, então $k = 0$ e a equação (82) torna-se a circunferência externa do domínio da Figura 19. Enquanto que, se o potencial $c = 20$, então $k = 1$ e a equação (82) gera a circunferência interna do domínio, confirmando as fronteiras desse problema.

Além disso, pode-se notar, pela equação (82), que as curvas equipotenciais são circunferências centradas sobre o eixo real, de modo que, quanto maior o valor de k (mais próximo de 1), mais à direita fica localizado o centro da circunferência e menor é o seu raio.

Alem disso, sempre uma circunferência está dentro de outras e o ponto $(1, 0)$ é comum a todas essas circunferências, confirmando a Figura 20.

Figura 20 – Equipotenciais geradas pelo MATLAB para o Problema 4 com os seus respectivos potenciais indicados.



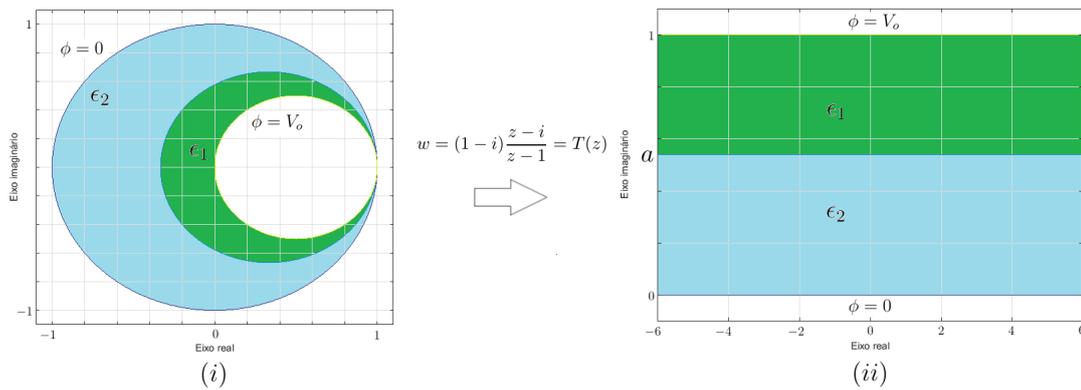
Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

Esse mesmo problema foi resolvido utilizando o *método de Elementos Finitos* contido no pacote numérico *PDE Toolbox* do MATLAB. Foram gerados 28928 elementos triangulares e 14952 nós, obtendo as mesmas curvas equipotenciais da Figura 20 com o erro absoluto na ordem de 10^{-4} em relação à solução analítica obtida via transformação conforme. Pelas curvas equipotenciais da Figura 20, para cada reta horizontal entre as placas paralelas do plano w , há uma circunferência correspondente no plano z . Se entre essas placas, que formam o contorno da imagem da transformação que está na Figura 19, houver dois dielétricos homogêneos separados por uma interface representada por uma reta horizontal, então essa interface torna-se uma circunferência no plano original que também separa os dois meios homogêneos. Esse fato acontece de uma forma natural por se tratar de uma transformação conforme e é a proposta do Problema 5 a seguir.

3.7 Problema 5

Este problema busca determinar a função potencial e as curvas equipotenciais para a Figura 21 (i) que apresenta dois meios dielétricos de permissividades elétricas distintas localizados entre a circunferência externa de condição de contorno de Dirichlet nula e a circunferência interna de condição de contorno de Dirichlet V_o . Além disso, esses dois meios são separados por uma interface sem cargas elétricas livres. Aplicando a mesma transformação (76) do Problema 4, pois trata-se da mesma geometria de contorno, então a imagem é levada para a Figura 21 (ii). A interface entre os meios é uma circunferência intermediária também centrada sobre o eixo real, ou seja, é uma curva equipotencial do Problema 4 em que há apenas um meio. Dessa forma, a proposta deste problema é que a interface escolhida seja levada em uma reta horizontal a uma distância a da placa inferior.

Figura 21 – Seção transversal de dois cilindros com dois dielétricos entre eles e a imagem dessa geometria.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

As condições de interface entre os meios para problemas de eletrostática vêm das mesmas equações de Maxwell, da *Lei de Gauss* e da *Lei de Faraday*, que resultam na equação de Laplace. Assim, como a equação de Laplace permanece inalterada ao passar uma transformação conforme e como a geometria de interface é também transformada, as condições de interface mantêm-se inalteradas ao passarem por uma transformação conforme, desde que não haja carga elétrica sobre essa interface. Dessa forma, as condições de interface entre dois meios dielétricos no domínio original que são (SADIKU, 2012)

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} &= \rho_s = 0 \\ E_{1t} - E_{2t} &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (83)$$

com ρ_s sendo a densidade de cargas livres sobre a interface nula, tornam-se

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_{1n}^* - \epsilon_2 E_{2n}^* &= 0 \\ E_{1t}^* - E_{2t}^* &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (84)$$

com E_{1n}^* representando a componente normal do campo elétrico transformado para meio dielétrico 1 e E_{2t}^* , a componente tangencial do campo elétrico transformado para o meio dielétrico 2.

Com as condições de interface mantidas inalteradas, esse problema é facilmente resolvido no plano w , uma vez que as equipotenciais desejadas continuam sendo retas horizontais, inclusive a interface entre os meios. Sendo assim, o problema para a imagem é composto por uma equação de Laplace para o meio homogêneo 1, uma equação de Laplace para o meio homogêneo 2, as condições de contorno sobre as placas superior, inferior e as condições de interface, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \Phi_1 &= 0 \\
 \nabla^2 \Phi_2 &= 0 \\
 \Phi_1(u, 1) &= V_o \\
 \Phi_2(u, 0) &= 0 \\
 \Phi_1(u, a) &= \Phi_2(u, a) \\
 \epsilon_1 E_{1n}^* - \epsilon_2 E_{2n}^* &= 0
 \end{aligned} \tag{85}$$

As duas últimas equações de (85) representam duas condições sobre a interface entre os meios, sendo a última equação referente à primeira condição de interface estabelecida em (84). Pela geometria estabelecida na imagem do problema, as duas primeiras equações de (85) saem diretamente, e todas as equações do sistema (85) tornam-se, respectivamente,

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(u, v) &= A_1 v + B_1 \\
 \Phi_2(u, v) &= A_2 v + B_2 \\
 A_1 + B_1 &= V_o \\
 B_2 &= 0 \\
 A_1 a + B_1 &= A_2 a + B_2 \\
 \epsilon_1 A_1 &= \epsilon_2 A_2
 \end{aligned} \tag{86}$$

A última equação de (86) é encontrada pela relação do campo sendo o negativo do gradiente da função potencial, com a função potencial variando apenas em relação à variável v . Desse sistema, encontra-se as variáveis A_1 , B_1 e A_2 , visto que $B_2 = 0$, e, portanto, conclui-se que

$$\Phi_1(u, v) = \frac{\epsilon_2 V_o}{\epsilon_1 a + \epsilon_2 (1 - a)} v + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) a V_o}{\epsilon_1 a + \epsilon_2 (1 - a)} \tag{87}$$

e

$$\Phi_2(u, v) = \frac{\epsilon_1 V_o}{\epsilon_1 a + \epsilon_2 (1 - a)} v. \tag{88}$$

Pela transformação (76), que resulta na correspondência (79) da variável v com as variáveis x e y , chega-se, por fim, para a geometria original, que

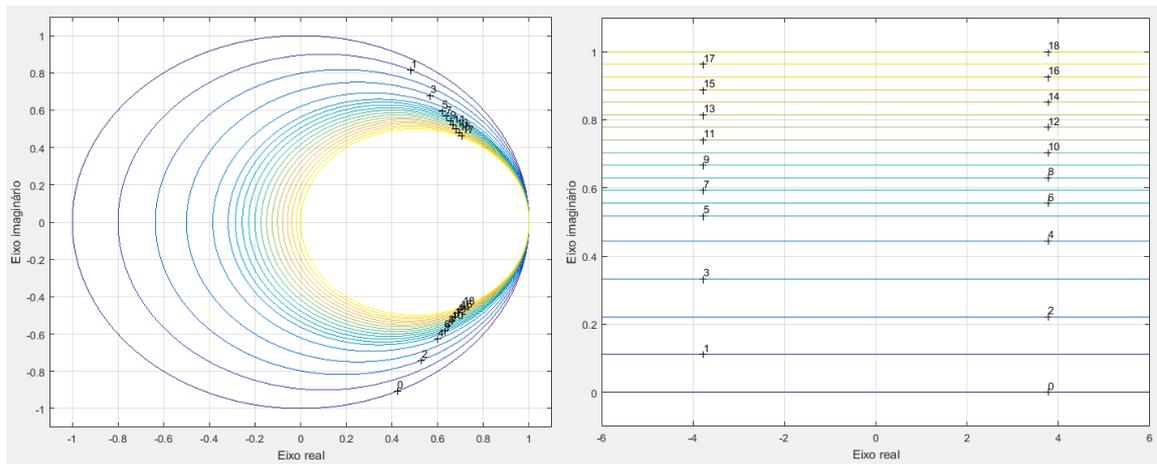
$$\phi_1(x, y) = \frac{\epsilon_2 V_o}{\epsilon_1 a + \epsilon_2(1 - a)} \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)a V_o}{\epsilon_1 a + \epsilon_2(1 - a)} \quad (89)$$

e

$$\phi_2(x, y) = \frac{\epsilon_1 V_o}{\epsilon_1 a + \epsilon_2(1 - a)} \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2}. \quad (90)$$

De posse das equações (87), (88), (89) e (90), fazendo $a = 1/2$, $V_o = 18$, $\epsilon_1 = 1$ e $\epsilon_2 = 3$, chega-se na Figura 22, que mostra a correspondência entre as equipotenciais dos planos z e w .

Figura 22 – Equipotenciais geradas pelo MATLAB para os planos z e w do Problema 5 com os respectivos potenciais indicados.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

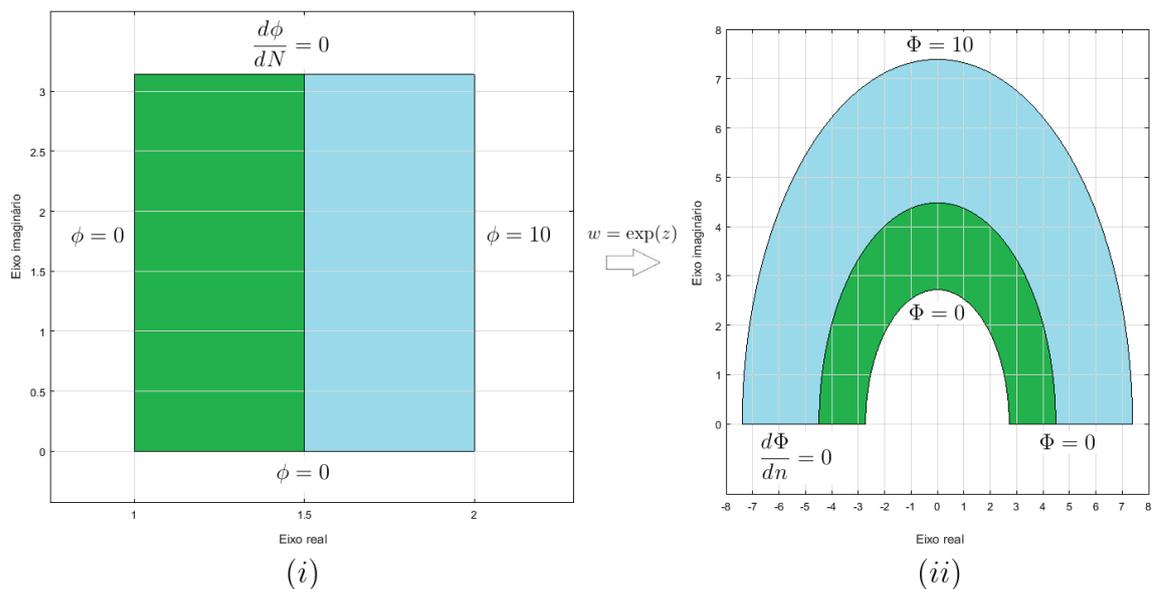
Pela Figura 22, nota-se que foram geradas 19 curvas equipotenciais cujos potenciais são números inteiros de 0 a 18, e que há um acúmulo dessas curvas para o meio dielétrico de menor permissividade, como confirma a última equação do sistema (86). Esse Problema 5 também foi resolvido numericamente pelo *método de Elementos Finitos* no pacote *PDE Toolbox* do MATLAB, gerando 28928 elementos triangulares e 14952 nós, resultando nas mesmas curvas equipotenciais geradas para a geometria original da Figura 22 com o erro absoluto na ordem de 10^{-4} em relação à solução analítica via transformação conforme. Diante disso, conclui-se que problemas que envolvam mais de um meio dielétrico homogêneo também podem ser resolvidos pelo uso de transformações conformes, uma vez que essas transformações simplesmente fazem o mapeamento das soluções. Para esses casos, deve-se levar em conta que a interface entre os meios também é transformada e, dependendo da geometria dessa interface, o problema pode ser dificultado no plano transformado, ou seja, ao se escolher uma transformação para o tratamento do problema,

as geometrias do contorno e da interface devem ser consideradas. O facilitador do Problema 5 é que a própria interface é uma curva equipotencial.

3.8 Problema 6

Este último problema desse capítulo é mais uma confirmação do funcionamento das transformações conformes em problemas que envolvam mais de um meio dielétrico homogêneo, dessa vez sem que a interface entre os meios seja uma curva equipotencial. O problema de valor de contorno envolvendo a equação de Laplace é solucionado nas geometrias do domínio e da imagem pelo *método de Elementos Finitos* através do pacote *PDE Toolbox*. Esse problema envolve três condições de contorno de Dirichlet constantes e uma condição de Neumann nula, como pode ser observado pela Figura 23, sendo que a função complexa que faz o mapeamento é $f(z) = \exp z$.

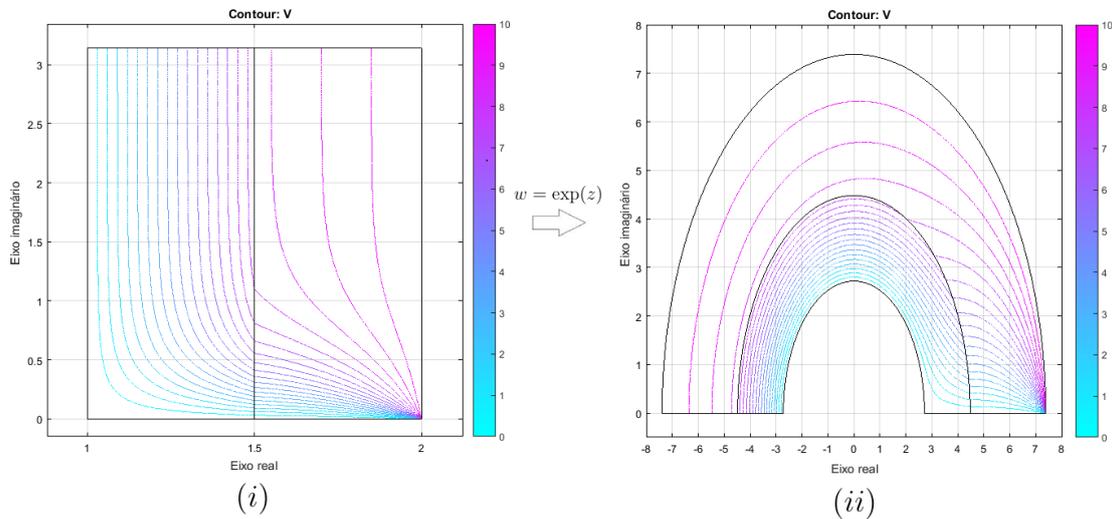
Figura 23 – Problema de valor de contorno para o domínio (i) e para a imagem (ii) em relação à função $f(z) = \exp z$.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

A Figura 23 mostra uma região retangular (i) sendo levada em uma região entre duas semicircunferências (ii). Além disso, a interface entre os meios, que é um segmento de reta vertical, é levada na semicircunferência intermediária. As equações de Laplace, as condições de contorno e as condições de interface mantêm-se inalteradas ao passarem pela transformação conforme. Além disso, a permissividade elétrica do meio dielétrico 1 (em verde) é $\epsilon_1 = 1$ e a permissividade elétrica do meio dielétrico 2 (em azul) é $\epsilon_2 = 5$. As soluções, pelo *PDE Toolbox*, para o domínio e para a imagem encontram-se na Figura 24.

Figura 24 – Curvas equipotenciais cujos potenciais variam de 1/2 em 1/2 para as geometrias do domínio e da imagem através do pacote *PDE Toolbox*.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

Foram gerados 49601 elementos triangulares e 98304 nós sobre o domínio (i), e foram gerados 60929 elementos triangulares e 120832 nós sobre a imagem (ii) da Figura 24. Pelos resultados obtidos, confirma-se o que já era esperado com relação à concentração de curvas equipotenciais para o meio dielétrico de menor permissividade. Além disso, são perceptíveis as mudanças abruptas de direções das curvas equipotenciais relativas às condições de interface entre os meios.

Para confirmar que a transformação conforme realmente leva as curvas equipotenciais de uma geometria para a outra, vários pontos de algumas curvas equipotenciais do domínio (i) da Figura 24 são mapeados pela função $f(z) = \exp z = \exp x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Se os pontos calculados estiverem sobre as curvas equipotenciais de mesmos potenciais na imagem, então a transformação conforme mapeou sem distorções as soluções do domínio. Isso foi feito com dezenas de pontos e todos eles foram mapeados corretamente para a equipotencial correspondente considerando arredondamentos na terceira casa decimal. Além disso, foi observado que ao “caminhar” sobre uma equipotencial do domínio gerada pelo *PDE Toolbox*, a função mapeou ponto a ponto de modo a “caminhar” no mesmo sentido sobre a equipotencial de mesmo potencial gerada pelo *PDE Toolbox* na imagem. Portanto a transformação conforme pode ser utilizada naturalmente em problemas que envolvam mais de um meio dielétrico, como já era esperado. Além disso, unindo os métodos numéricos, como o *método de Elementos Finitos*, com o ferramental das transformações conformes, muitos problemas podem ter suas soluções com custos computacionais diminuídos ou com maior precisão por parte dos métodos numéricos.

Portanto, de posse das transformações conformes, pode-se mudar geometrias em

formas variadas, de modo que regiões no plano z são associadas a regiões no plano w com todas as propriedades que são proporcionadas pela característica “conforme” da transformação. Além disso, para uma mesma transformação conforme, regiões distintas do plano complexo e curvas específicas são também mapeadas, desde que sejam definidas e conformes pela função, para se analisar e estudar as características dessa transformação. Assim, junta-se uma coletânea de transformações conformes com suas respectivas características geométricas para serem aplicadas em problemas físicos de várias áreas que envolvam a equação de Laplace como, por exemplo, da magnetostática, da termodinâmica, da mecânica dos fluidos. De posse dessa coletânea de transformações, esse Capítulo 3, por exemplo, mostra a aplicação direta de algumas transformações em problemas de eletrostática.

Capítulo 4

Transformações de Schwarz-Christoffel

4.1 Introdução

A abordagem de tomar funções para estudar o que cada uma faz, montando uma coletânea e escolhendo uma função que atenda à mudança de geometria desejada do problema, como foi feito no Capítulo 3, é fragmentada e não mostra as verdadeiras potencialidades inerentes ao assunto de mapeamento conforme (NEHARI, 1952). Então, este capítulo apresenta um método que encontra diretamente a função que transforma um “determinado” domínio em uma imagem que simplifica o problema a ser resolvido. Nesse sentido, três perguntas são discutidas ao longo desse capítulo:

1. Dados dois domínios quaisquer D e D^* , existe sempre pelo menos uma transformação conforme e injetiva $w = f(z)$ que mapeie D em D^* ?
2. Se forem impostas algumas “condições” sobre D e D^* , existe sempre pelo menos uma transformação conforme $w = f(z)$ que faça o mapeamento? Se sim, quais “condições” seriam essas?
3. Existindo tal função w que atenda às condições da primeira pergunta ou da segunda pergunta, como encontrá-la?

De imediato, a pergunta número 1 tem a resposta “não” e apenas um contraexemplo é suficiente para confirmá-la. Esse contraexemplo é a transformação do plano complexo inteiro no interior do círculo unitário (NEHARI, 1952). Sendo a imagem dessa transformação limitada, pois $|w| < 1$, e sendo a função analítica para esse domínio, que é o plano z inteiro, então f deve ser uma constante, pelo *Teorema de Liouville*. Esse teorema garante que se uma função f for *inteira*, ou seja, analítica para todo o plano complexo, e limitada nesse plano, então f é constante em todo o plano (BROWN; CHURCHILL, 2015). Mas isso é um absurdo, visto que a transformação sugerida leva todo o plano complexo no interior do disco. Dessa forma, está justificado o contraexemplo dado.

Já para a segunda pergunta, pode haver mais de uma resposta, pois depende das “condições” impostas sobre D e D^* . O *Teorema do Mapeamento de Riemann* vem para mostrar que a resposta à segunda pergunta pode ser sim para domínios simplesmente conexos (NEHARI, 1952). Assim, diante desse Teorema, pode-se garantir que haja uma função que execute uma transformação desejada, mesmo sem se conhecer tal função. Portanto, resta conseguir equacionar tal função, que é exatamente a pergunta número 3.

Apesar desse importante resultado que é o *Teorema do Mapeamento de Riemann*, ele não ajuda em nada para se responder a pergunta número 3. E diante da infinita variabilidade de geometrias representadas por domínios simplesmente conexos, encontrar um método genérico que abarque as várias formas distintas é um grande desafio e, portanto, a resposta para a pergunta número 3 depende de quais geometrias estejam envolvidas.

As transformações de Schwarz-Christoffel vêm como propostas de solução de problemas que envolvam geometrias poligonais, pois essas transformações basicamente relacionam o semiplano superior ou o disco unitário a regiões poligonais limitadas ou ilimitadas. Assim, a resposta para a pergunta número 3 vai ser restrita a essas regiões descritas. A ideia é que, ao se lidar com problemas que envolvam a equação de Laplace, deve-se usar as transformações de Schwarz-Christoffel para mapear a solução dessa equação, já estabelecida de forma genérica no semiplano superior, na região poligonal desejada.

Portanto, este Capítulo inicia-se com o *Teorema do Mapeamento de Riemann* na Seção 4.2, depois traz algumas definições geométricas importantes e considerações sobre os polígonos na Seção 4.3, seguida das ideias intuitiva e formal da transformação de Schwarz-Christoffel na Seção 4.4, seguidas de suas propriedades na Seção 4.5. Em sequência, vêm os conceitos e justificativas que embasam o cálculo numérico dessas transformações através do *Problema do Parâmetro* na Seção 4.6; e, por fim, são apresentados dois métodos para se solucionar a equação de Laplace em regiões poligonais na Seção 4.7.

4.2 Teorema do Mapeamento de Riemann

O *Teorema do Mapeamento de Riemann* confirma ainda mais a importância das transformações conformes, visto que são causadoras de uma infinidade de mudanças de geometria no plano complexo, mesmo sem se conhecer as suas expressões algébricas, como se apresenta a seguir em (ÁVILA, 2008).

Teorema 4.1. (*Teorema do Mapeamento de Riemann*) *Dado um domínio simplesmente conexo D , que não seja o plano todo, existe uma transformação conforme e injetiva $w = f(z)$ que mapeia D no interior do círculo unitário $|w| < 1$. Além disso, a função w é única se especificarmos, para um ponto qualquer $z_0 \in D$, que $f(z_0) = 0$ e que $f'(z_0)$ seja real e maior que zero.*

Devido a sua enorme extensão e por envolver outros conceitos não trazidos nessa dissertação, a demonstração do Teorema 4.1 não está apresentada aqui. A demonstração encontra-se em (NEHARI, 1952).

Pelo Teorema 4.1, se D e D^* são dois domínios simplesmente conexos tais que sejam diferentes do plano complexo inteiro, então D e D^* podem ser levados no disco unitário, respectivamente, pelas transformações conformes e injetivas T e T^* . Como foi visto na Seção 2.4, a composta de funções analíticas é analítica e, portanto, a composta de transformações conformes é conforme. Além disso, pelo Teorema 2.9, se uma transformação é conforme e injetiva para uma região, então essa transformação admite uma transformação inversa global única que também é conforme. Com esses dois resultados, a transformação composta $(T^*)^{-1} \circ T$ é conforme e leva o domínio D no domínio D^* . Ou seja, qualquer região simplesmente conexa que não coincide com o plano todo pode ser transformada em qualquer outra região do mesmo tipo através de uma transformação conforme e injetiva.

Além disso, o *Teorema do Mapeamento de Riemann* traz que, não só existe uma transformação que leva D no círculo unitário, como também essa transformação não é única. Por esse mesmo teorema, nota-se que, atribuindo os três parâmetros z_0 , $f(z_0)$ e $f'(z_0)$, essa transformação torna-se única, se fixado $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) > 0$. A condição $f(z_0) = 0$ determina que z_0 é levado no centro do disco unitário e a condição $f'(z_0) > 0$ determina que as direções por z_0 não sofrem rotações pela função w , uma vez que $\arg f'(z_0) = 0$.

De forma análoga, a atribuição desses três parâmetros, para se ter unicidade, vale também para a composta $U = (T^*)^{-1} \circ T$ que leva D em D^* . Uma vez que há uma infinidade de funções, fornecer esses três parâmetros é fundamental. Se esses parâmetros forem colocados pelos requisitos de que um determinado ponto z_0 de D deve ser mapeado em um determinado ponto de D^* e de que $\arg U'(z_0)$ deve ter um determinado valor, então a função de mapeamento também é determinada de forma única (NEHARI, 1952). Portanto, z_0 , $U(z_0)$ e $U'(z_0)$ são os três parâmetros necessários.

4.3 Considerações sobre o Polígono

Antes de se definir o conceito da transformação de Schwarz-Christoffel, faz-se necessário definir alguns conceitos e propriedades relacionados à região poligonal (ZILL; SHANAHAN, 2011).

Definição 4.1. *Uma região poligonal no plano complexo é uma região conexa e limitada por uma curva suave por partes, simples e que consiste em um número finito de segmentos de reta.*

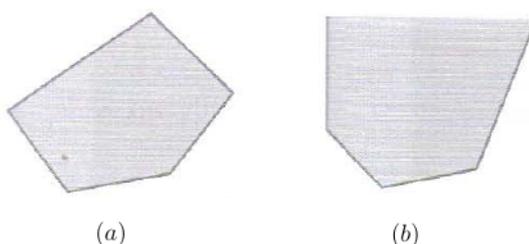
Definição 4.2. *O polígono é a curva de fronteira de uma região poligonal.*

Definição 4.3. Os **vértices** são os extremos dos segmentos de reta do polígono.

Definição 4.4. A região poligonal é **limitada** quando o polígono for uma curva fechada. A região poligonal é **ilimitada** quando não for limitada. Nesse caso, diz-se que o polígono possui um vértice no infinito.

Baseado em (ZILL; SHANAHAN, 2011), a Figura 25 apresenta dois exemplos de regiões poligonais, uma limitada e outra ilimitada.

Figura 25 – Exemplos de regiões poligonais limitada (a) e ilimitada (b).



Fonte: (ZILL; SHANAHAN, 2011).

Pensando em uma região poligonal limitada, (LIMA, 1991) faz uma demonstração de um resultado muito importante, que é usado na transformação de Schwarz-Christoffel e que aparece a seguir.

Proposição 4.1. *Todo polígono fechado de n lados pode ser decomposto como uma reunião de $n - 2$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

Dessa forma, como a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre π radianos, logo (LIMA, 1991)

Proposição 4.2. *A soma dos ângulos internos de um polígono fechado de n lados é igual a $(n - 2)\pi$ radianos.*

Por consequência, devido ao fato de que, para um polígono fechado qualquer, a soma de cada ângulo interno e seu ângulo externo associado ser π radianos, ou seja, eles serem suplementares (BARBOSA, 1985), então

Proposição 4.3. *A soma dos ângulos externos de um polígono fechado é sempre 2π , independentemente do seu número de lados.*

Um resultado mais importante é proposto em (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002), que está de pleno acordo com os resultados anteriores, mas amplia o conceito de polígono,

e por consequência amplia a definição de ângulos externos e internos. O seu conceito aparece a seguir.

Definição 4.5. *Um polígono é definido como um conjunto de vértices w_1, w_2, \dots, w_n e de ângulos internos $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$. Esses vértices pertencem a um plano complexo estendido, podendo um ou mais vértices desse polígono estarem no infinito.*

Apesar de não denominado em (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002), nesta dissertação $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são chamados de **ângulos internos relativos** do polígono, uma vez que são exatamente a razão dos respectivos ângulos internos por π . Com isso, diferentemente de (ZILL; SHANAHAN, 2011), (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002) propõe a possibilidade de mais de um vértice estar no infinito, desde que

$$\sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j) = \sum_{j=1}^n k_j = 2, \quad (91)$$

onde $k_j, j = 1, 2, \dots, n$, são os **ângulos externos relativos**. A identidade estabelece que a soma dos ângulos externos deve continuar sendo 2π , mesmo que em (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002) não se fale em ângulos externos, considerando que a soma do ângulo interno e do seu correspondente ângulo externo continua sendo π . Essa relação é trazida com alguns exemplos por (CHURCHILL, 1975), chamando de *polígono degenerado* aquele que tem pelo menos um vértice no infinito, visto que esse vértice é tratado como o caso limite de um vértice que está muito distante dos restantes. Um método para se encontrar o valor de um ângulo interno de um vértice no infinito é proposto no Capítulo 5 e baseia-se em encontrar um polígono limitado de mesma “forma” que o polígono ilimitado e levar alguns de seus vértices ao infinito mantendo todos os seus ângulos internos fixos. Essa analogia pode ser feita, visto que, considerando o plano complexo estendido, qualquer região poligonal pode ser tratada como “fechada”, com algumas curvas de fronteira compostas por pontos no infinito.

Com essa ampliação da definição de polígono, (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002) também traz, por consequência, que, se o vértice é finito, então seu ângulo interno é $0 < \alpha\pi \leq 2\pi$. Quando $\alpha\pi = 2\pi$, então o vértice é a ponta de uma **fenda**, pois os dois lados incidentes sobre esse vértice são colineares. Por outro lado, se o vértice é infinito, então seu ângulo interno é $-2\pi \leq \alpha\pi \leq 0$, ou seja, é negativo ou nulo. As Seções 5.4 e 5.5 trazem exemplos de fendas nos polígonos.

4.4 Ideia Intuitiva da Transformação de Schwarz-Christoffel

Agora que se tem o *Teorema do Mapeamento de Riemann* e os conceitos básicos relacionados a regiões poligonais limitadas e ilimitadas, o grande desafio é buscar como

descobrir as equações que representam essas transformações mais “genéricas” de geometrias poligonais. As transformações de Schwarz-Christoffel tratam de mapear qualquer polígono, regular ou irregular, limitado ou ilimitado, em um semiplano. Esse semiplano, por sua vez, pode ser mapeado no círculo unitário, através de uma transformação linear fracionária, e em inúmeras outras geometrias (CHURCHILL, 1975). Assim, um próprio polígono pode ser mapeado em outro polígono, pois uma das propriedades da transformação de Schwarz-Christoffel é que ela admite inversa.

Partindo do *Teorema 4.1 do Mapeamento de Riemann*, então a região do semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$ pode ser levada à região do interior de um polígono qualquer através de uma transformação conforme e injetiva. A ideia inicial é mostrar uma transformação que leve a fronteira da região $\text{Im}(z) > 0$, ou seja, o eixo real x , no polígono propriamente dito que está contido no plano complexo w . E depois mostrar intuitivamente que essa mesma transformação leva os pontos do semiplano superior no interior do polígono. Esses dois pontos iniciais encontram-se em (CHURCHILL, 1975).

Primeiramente, tomando novamente a Figura 4 da Seção 2.5, seja o número complexo t como o vetor unitário tangente a um arco suave e orientado C num ponto z_0 . E seja τ o número que representa o vetor unitário tangente no ponto correspondente w_0 da imagem Γ de C sob uma transformação $w = f(z)$, em que f é analítica em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$. A partir das equações (19) e (20) que encontram-se na mesma Seção 2.5, obtém-se diretamente que

$$\arg \tau = \arg t + \arg f'(z_0). \quad (92)$$

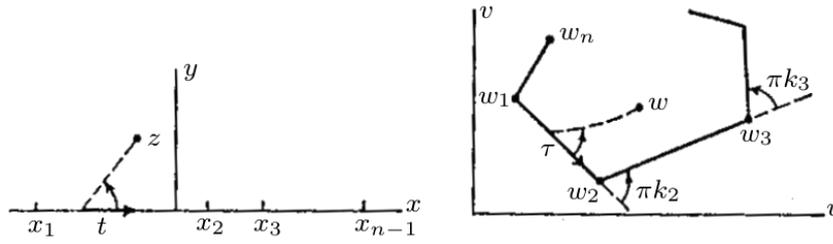
Particularizando, se C é um segmento do eixo x com sentido positivo, da esquerda para a direita, então em cada um dos seus pontos $z_0 = x$ tem-se que $t = 1$ e $\arg t = 0$, reduzindo a equação (92) a

$$\arg \tau = \arg f'(x). \quad (93)$$

Pode-se observar pela equação (93) que, se $f'(z)$ tem o argumento constante ao longo desse segmento, segue-se que $\arg \tau$ é constante, ou seja, a imagem S desse segmento também é um segmento de reta.

Objetiva-se, a partir daqui, tomar uma transformação $w = f(z)$ que leve todo o eixo real em um polígono limitado de n lados, onde x_1, x_2, \dots, x_{n-1} e $z = \infty$ são os pontos do eixo x , cujas imagens devem ser os vértices do polígono e onde $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$. Por serem as pré-imagens dos vértices do polígono são chamados de **pré-vértices**. A transformação desejada está representada na Figura 26 a seguir, levando o eixo real no polígono.

Figura 26 – Representação do eixo real x sendo levado no contorno de um polígono limitado no plano w .



Fonte: (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Os vértices são os pontos $w_j = f(x_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) e $w_n = f(\infty)$. A transformação w deve ser tal que $\arg f'(z)$ dê um “salto” de um valor constante para outro nos pontos x_j , quando o ponto z percorre o eixo real x .

A partir deste ponto, a função desejada é proposta para se analisar a sua estrutura algébrica e geométrica. Assim, tomando

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \dots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}}, \quad (94)$$

em que A é uma constante complexa, cada k_j é uma constante real, os fatores $(z - x_j)^{-k_j}$ ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) representam ramos das funções potência com seus cortes de ramo estendendo-se abaixo desse eixo, ou seja, os raios $\beta_j = -\pi/2$ ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) são os cortes de ramo, pois o domínio é o semiplano superior. O argumento de $f'(z)$ comporta-se da forma dita anteriormente, quando z percorre o eixo real, pois o argumento da função (94) pode ser escrito na forma

$$\arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - k_2 \arg(z - x_2) - \dots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}). \quad (95)$$

Para o primeiro caso, quando $z = x$ e $x < x_1$, então $\arg(z - x_1) = \arg(z - x_2) = \dots = \arg(z - x_{n-1}) = \pi$.

Para $x_1 < x < x_2$, $\arg(z - x_1)$ passa a ser nulo, mas os demais argumentos permanecem π . Para o terceiro caso, $x_2 < x < x_3$, $\arg(z - x_1) = \arg(z - x_2) = 0$, mas os demais ainda permanecem π . E assim continua sucessivamente, até que todos os argumentos se anulem para $x > x_{n-1}$. Dessa forma, de acordo com a equação (95), $\arg f'(z)$ aumenta abruptamente do ângulo $k_1\pi$, quando z se move para a direita passando pelo ponto $z = x_1$. O mesmo ocorre no ponto $z = x_2$, sendo que o aumento nesse ponto é de $k_2\pi$, e assim sucessivamente, até que $\arg f'(z) = \arg A$, quando $x > x_{n-1}$.

Devido à equação (93), o vetor unitário τ é constante em direção, quando z vai passando de x_{j-1} até x_j , de modo que w se move nessa direção fixa ao longo de uma

reta. Mas a direção de τ muda rapidamente em um valor de $k_j\pi$ na imagem w_j de x_j . E é exatamente esse processo que é mostrado no plano w da Figura 26. Esses ângulos $k_j\pi$ são os ângulos externos, e também conhecidos por **ângulos de rotação**, do polígono, devido a esses saltos abruptos.

Os ângulos de rotação, pela própria definição, podem ser limitados entre $-\pi$ e π ; então $-1 < k_j < 1$. Já pelo conceito de (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002), o ângulo de rotação pode ser $-\pi$, caso em que o ângulo interno é 2π , ou seja, o vértice trata-se da ponta de uma fenda. Supõe-se que os lados do polígono nunca se interceptem, exceto em suas próprias extremidades, pelas próprias Definições 4.1 e 4.2. E a soma dos ângulos de rotação de um polígono fechado é sempre 2π , independentemente do seu número de lados, como é trazido pela Proposição 4.2. Assim, o ângulo externo no vértice w_n , imagem do ponto $z = \infty$ é $k_n\pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1})\pi$. Assim, os números k_j devem satisfazer necessariamente as condições

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} + k_n = 2, \quad -1 < k_j < 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (96)$$

Pode-se notar que $k_n = 0$ quando $k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} = 2$; então, neste caso, as direções do primeiro e do último lado do polígono são as mesmas, ou seja, w_n não é vértice do polígono, pela sua definição. Assim, w_n é um ponto do primeiro lado, e o polígono tem $n - 1$ lados.

Dada a ação da derivada $f'(z)$ apresentada na equação (94), a transformação de Schwarz-Christoffel proposta é

$$w = \int_{z_0}^z f'(s) ds. \quad (97)$$

Feito esse trabalho inicial sobre a transformação da fronteira, que é intuitivo e que apresenta alguns argumentos matemáticos e geométricos, resta entender como essa função w leva o semiplano superior no interior do polígono. Essa ideia intuitiva também engloba a fronteira de regiões poligonais ilimitadas, ou seja, com um ou mais vértices no infinito. Além disso, é necessário discutir a analiticidade da função e verificar se ela é uma transformação conforme.

4.5 Propriedades da Transformação de Schwarz-Christoffel

O objetivo desta seção é analisar o processo de integração na equação (97), que transforma o eixo real num polígono, definir a transformação de Schwarz-Christoffel e suas formas canônicas, e obter importantes propriedades que garantam o uso dessa transformação com “segurança” em problemas de valor de contorno que envolvam a equação de Laplace.

4.5.1 Analiticidade e Continuidade da Transformação de Schwarz-Christoffel

Baseado na teoria da integração complexa, seguem duas proposições importantes com o objetivo de discutir, respectivamente, a analiticidade e a continuidade da transformação de Schwarz-Christoffel.

Proposição 4.4. *A integral complexa $F(z)$ de uma função analítica $f(z)$ é uma função analítica do seu limite superior de integração, desde que o caminho de integração seja confinado a um domínio simplesmente conexo em que o integrando é analítico.*

Demonstração. Para mostrar que a integral complexa $F(z)$ é uma função analítica em um domínio simplesmente conexo D , o que se quer mostrar é que existe a derivada dessa integral para todos os pontos de D . Tomando-se dois caminhos de integração contidos em D , como representa a Figura 27, o primeiro ligando z_0 a z e o segundo ligando z a $z + \Delta z$, então por definição

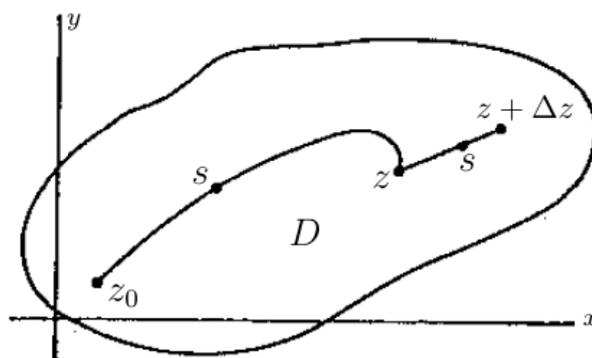
$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds - \int_{z_0}^z f(s)ds,$$

para s sendo a variável de integração ao longo dos dois caminhos. Portanto

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(s)ds, \quad (98)$$

onde o caminho de integração de z a $z + \Delta z$ pode ser escolhido como um segmento reto, como é o caso da Figura 27.

Figura 27 – Dois caminhos de integração contidos em um domínio simplesmente conexo.



Fonte: (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Pode-se escrever (CHURCHILL, 1975)

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} ds = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z)ds, \quad (99)$$

uma vez que a variável de integração é s . Assim, usando as equações (98) e (99), então

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds. \quad (100)$$

Mas f é contínua no ponto z_0 , uma vez que é analítica nesse ponto. Logo, dado um número $\epsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que

$$|f(s) - f(z)| < \epsilon, \quad (101)$$

quando $|s - z| < \delta$, ou, em particular, para o segundo caminho da Figura 27, quando $|\Delta z| < \delta$. Portanto, quando $|\Delta z| < \delta$, pelas equações (100) e (101), então

$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{\epsilon}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |ds| = \epsilon, \quad (102)$$

ou seja,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z). \quad (103)$$

Assim, a equação (103) confirma a existência da derivada da função integral $F(z)$, concluindo que $F'(z) = f(z)$. Além disso, quaisquer outros dois caminhos poderiam ter sido tomados, desde que no interior de D , levando à conclusão da analiticidade de F em todo o domínio D . Assim, a demonstração está finalizada. \square

Proposição 4.5. *A integral complexa $F(z)$ de uma função contínua $f(z)$ é uma função contínua do seu limite superior de integração, desde que o caminho de integração seja confinado a um domínio simplesmente conexo em que o integrando é uma função contínua.*

Demonstração. Sendo s a variável de integração dos dois caminhos contidos no domínio simplesmente conexo D da Figura 27 e partindo da hipótese de que se tem f contínua em D , então dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(s) - f(z)| < \epsilon_1 \quad (104)$$

quando $|s - z| < \delta_1$, ou, em particular, para o segundo caminho da Figura 27, quando $|\Delta z| < \delta_1$. Portanto, partindo de (104) e fazendo o uso de uma das desigualdades triangulares (BROWN; CHURCHILL, 2015), tem-se

$$|f(s)| - |f(z)| \leq |f(s) - f(z)| < \epsilon_1, \quad (105)$$

isto é,

$$|f(s)| \leq \epsilon_1 + |f(z)| \leq M, \quad (106)$$

sendo M um número real. Ou seja, para $|\Delta z| < \delta_1$, tem-se $|f(s)| \leq M$. E o que se quer mostrar é que $F(z)$ também é contínua em D ; assim, dado $\epsilon_2 > 0$, deve existir $\delta_2 > 0$, tal que $|F(z + \Delta z) - f(z)| < \epsilon_2$, quando $|\Delta z| < \delta_2$. Dessa forma, $|F(z + \Delta z) - F(z)|$ continuará

menor que ϵ_2 para $|\Delta z| < \min \{\delta_1, \delta_2\}$. De fato, tomando $\delta_2 = \epsilon_2/M$, M estipulado pela equação (106), e usando a relação obtida em (98), então

$$|F(z + \Delta z) - F(z)| = \left| \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds \right| \leq \int_z^{z+\Delta z} |f(s)| |ds|. \quad (107)$$

Essa propriedade vale sempre que f é contínua, que é o caso em questão (BROWN; CHURCHILL, 2015). Partindo de (107), então

$$|F(z + \Delta z) - F(z)| \leq M \int_z^{z+\Delta z} |ds| = M|\Delta z|, \quad (108)$$

pois o caminho de z a $z + \delta z$ é um segmento de reta. Assim

$$|F(z + \Delta z) - F(z)| \leq M|\Delta z| < M\delta_2 = \epsilon_2, \quad (109)$$

e, portanto, $F(z)$ é contínua em z . Além disso, quaisquer outros dois caminhos poderiam ter sido tomados, desde que no interior de D , levando à conclusão da continuidade de F em todo o domínio D . \square

Tomando, novamente, a função (94)

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \dots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}},$$

escolhendo os raios $\beta_j = -\pi/2$ ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) como os seus cortes de ramo, como já proposto na Seção 4.4, e sendo $(z - x_j)^{-k_j}$ uma função potência com seu módulo e seu argumento, escreve-se

$$(z - x_j)^{-k_j} = |z - x_j|^{-k_j} \exp(-ik_j\theta_j), \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_j < \frac{3\pi}{2} \right), \quad (110)$$

em que $\theta_j = \arg(z - x_j)$ e $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Com isso, obtém-se que $f'(z)$ é analítica em todo o semiplano $\text{Im}(z) > 0$, exceto nos $n - 1$ pontos de ramificação x_j (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Se z_0 é um ponto nessa região de analiticidade, então a função

$$F(z) = \int_{z_0}^z f'(s) ds \quad (111)$$

é analítica, pela Proposição 4.4, quando $y \geq 0$ e $z \neq x_j$, desde que o caminho de integração de z_0 a z seja um caminho nesse semiplano, que não passe por nenhum dos pontos x_j . Além disso, $F'(z) = f'(z)$. E também, sob essas mesmas condições, $F(z)$ é univalente para o z_0 fixado, uma vez que $f'(z)$ é univalente para os ramos adotados em (110). Ademais, sabe-se que $F(z)$ varia de uma constante aditiva, quando o limite inferior de integração z_0 é substituído por uma outra constante (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Agora que já se sabe a respeito da analiticidade de F , o próximo passo é saber a respeito da continuidade de F nos pontos de ramificação x_j ($j = 1, 2, \dots, n - 1$), uma vez que esses são os únicos pontos do semiplano de interesse, $y \geq 0$, nos quais F não tem derivada.

Para definir a função F no ponto $z = x_1$ de tal modo que seja contínua nesse ponto, observa-se que $(z - x_1)^{-k_1}$ é o único fator na equação (94) que não é analítico em x_1 . Logo, se $\phi(z)$ denota o produto dos demais fatores da expressão (94), então $\phi(z)$ é analítico em x_1 e é representado em uma vizinhança de x_1 , ou seja, em todo um disco aberto $|z - x_1| < R_1$, por sua série de Taylor centrada em x_1 (BROWN; CHURCHILL, 2015). Assim, pode-se escrever

$$f'(z) = (z - x_1)^{-k_1} \phi(z),$$

ou seja,

$$f'(z) = (z - x_1)^{-k_1} \left[\phi(x_1) + \frac{\phi'(x_1)}{1!} (z - x_1) + \frac{\phi''(x_1)}{2!} (z - x_1)^2 + \dots \right].$$

Logo,

$$f'(z) = \phi(x_1)(z - x_1)^{-k_1} + (z - x_1)^{1-k_1} \psi(z), \quad (112)$$

em que ψ é analítica e, portanto, contínua em toda a vizinhança. Como $1 - k_1 > 0$, uma vez associado o valor zero ao ponto $z = x_1$, então o último termo à direita na equação (112) representa uma função contínua de z em toda a metade superior da vizinhança em que $\text{Im}(z) \geq 0$. Segue-se, então, que a integral

$$\int_{Z_1}^z (s - x_1)^{1-k_1} \psi(s) ds$$

ao longo de um caminho de Z_1 até z , em que Z_1 e o caminho estão na semivizinhança superior, é também uma função contínua de z em $z = x_1$, pela Proposição 4.5. E a integral

$$\int_{Z_1}^z (s - x_1)^{-k_1} ds = \frac{1}{1 - k_1} [(z - x_1)^{1-k_1} - (Z_1 - x_1)^{1-k_1}],$$

ao longo do mesmo caminho, também representa uma função contínua de z em x_1 , se for definido o valor da integral nesse ponto como o limite, quando z tende a x_1 na semivizinhança. Então, a integral da expressão (112), ao longo do caminho mencionado de Z_1 até z , é contínua em $z = x_1$, e o mesmo se aplica à integral (111), pois ela pode ser escrita como uma integral ao longo de um caminho z_0 até Z_1 somada à integral de Z_1 até z . Esse argumento pode ser usado em cada um dos $n - 1$ pontos x_j , tornando F uma função contínua em toda a região $y \geq 0$.

Assim, a função cuja derivada é dada pela equação (94) pode, então, ser escrita como $f(z) = F(z) + B$, em que B é uma constante complexa. A **Transformação de Schwarz-Christoffel** fica, portanto,

$$w = A \int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} \dots (s - x_{n-1})^{-k_{n-1}} ds + B, \quad (113)$$

ou na sua forma compacta,

$$w = A \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^{n-1} (s - x_j)^{-k_j} ds + B. \quad (114)$$

4.5.2 Mapeamento pela Transformação de Schwarz-Christoffel

A transformação de Schwarz-Christoffel, como já argumentado, é contínua em todo o domínio $\text{Im}(z) \geq 0$ e é conforme nesse semiplano com exceção dos pontos x_j . A partir daqui, pode-se completar o que havia ficado em aberto na Seção 4.4, pois o que se havia desenvolvido lá, de forma intuitiva, foi como o eixo real é levado no polígono pela transformação de Schwarz-Christoffel, restando mostrar como o semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$ é levado no interior do polígono.

Se z é um dado ponto do semiplano $\text{Im}(z) > 0$ e se x_0 é um ponto qualquer distinto dos x_j sobre o eixo real, então o ângulo do vetor t para o vetor $z - x_0$ é positivo e menor do que π , como está indicado em um exemplo na Figura 26. Na imagem w_0 de x_0 , o ângulo do vetor τ para a imagem do vetor $z - x_0$ deve ter esse mesmo valor, uma vez que já se tem confirmada a conformidade da função. Assim como acontece para os pontos do domínio, as imagens do semiplano devem também ficar à esquerda dos vetores τ sobre os lados do polígono. E, assim, intuitivamente fica mostrada a transformação de geometrias.

Mas a demonstração matemática que, de fato, comprove a transformação do semiplano $\text{Im}(z) \geq 0$ no polígono e seu interior não é mostrada aqui. Até porque parte-se do pressuposto de que as constantes x_j e k_j sejam tais que os lado do polígono não se cortem, ou seja, que o polígono seja um caminho fechado, como previsto em sua definição em (BARBOSA, 1985). A linha de raciocínio, na qual a demonstração matemática da transformação de Schwarz-Christoffel é realizada, é associada ao *Princípio da Simetria* e não tem semelhança alguma com a abordagem trazida aqui. O *Princípio da Simetria*, sua demonstração e a demonstração formal da fórmula (114) de Schwarz-Christoffel estão muito bem explicadas em (NEHARI, 1952). Inclusive em (NEHARI, 1952), a correspondência biunívoca entre os pontos do semiplano e do interior do polígono já é estabelecida no início da demonstração, enquanto que em (BROWN; CHURCHILL, 2015), o procedimento proposto é mostrar que a função w em questão é injetiva, e sendo injetiva e analítica, pelo Teorema 2.9, ela admite uma única inversa global, chegando à mesma conclusão.

Além do mais, por essas propriedades mencionadas e pela Seção 4.4, à medida que o ponto z percorre o eixo x no sentido positivo, sua imagem w percorre o polígono no sentido sempre anti-horário, sendo a transformação de z em w injetiva entre os pontos do eixo x e os pontos do polígono. É demonstrado em (BROWN; CHURCHILL, 2015) que, para regiões poligonais limitadas, existe a imagem w_n do ponto $z = \infty$ e que $w_n = W_n + B$. Também pela Seção 4.4, w_n que foi definido inicialmente como um dos vértices do polígono, pode

também não ser um vértice, sendo levado então ao primeiro lado do polígono. Nesse caso, todos os pré-vértices x_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) são finitos, ficando a critério o uso de um dos pré-vértices no infinito.

A equação compacta de Schwarz-Christoffel em (114) pode ser reescrita, também para um polígono de n lados, como

$$w = A \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^n (s - x_j)^{-k_j} ds + B. \quad (115)$$

Para mostrar que o uso de um dos pré-vértices no infinito é uma questão de escolha da forma de w , partindo da equação (115), basta que se proponha uma mudança de variável $s = x_n - 1/u$ e, por consequência, $ds = du/u^2$. Assim,

$$w = A \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^n \left(x_n - \frac{1}{u} - x_j \right)^{-k_j} \frac{du}{u^2} + B.$$

Expandindo o produtório,

$$w = A \int_{z_0}^z \left(x_n - \frac{1}{u} - x_1 \right)^{-k_1} \left(x_n - \frac{1}{u} - x_2 \right)^{-k_2} \cdots \left(x_n - \frac{1}{u} - x_n \right)^{-k_n} \frac{du}{u^2} + B.$$

Colocando $1/u$ em evidência em todos os fatores entre parênteses do integrando,

$$w = -A \int_{z_0}^z [u(x_n - x_1) - 1]^{-k_1} [u(x_n - x_2) - 1]^{-k_2} \cdots [u(x_n - x_{n-1}) - 1]^{-k_{n-1}} \left(\frac{1}{u} \right)^{-k_1 - k_2 - \cdots - k_n} \frac{du}{u^2} + B.$$

Usando a relação $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 2$ e isolando a variável u em cada fator entre parênteses, então

$$w = K \int_{z_0}^z \left(u - \frac{1}{x_n - x_1} \right)^{-k_1} \left(u - \frac{1}{x_n - x_2} \right)^{-k_2} \cdots \left(u - \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \right)^{-k_{n-1}} du + B,$$

sendo K a nova constante complexa multiplicativa da integral envolvendo o produto de várias outras constantes complexas, incluindo A . Chamando $1/(x_n - x_1) = a_1$, $1/(x_n - x_2) = a_2$ e assim sucessivamente, tem-se

$$w = K \int_{z_0}^z (u - a_1)^{-k_1} (u - a_2)^{-k_2} \cdots (u - a_{n-1})^{-k_{n-1}} du + B,$$

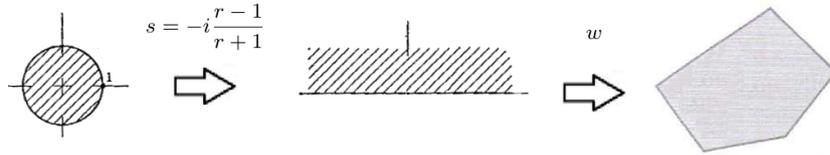
ou seja,

$$w = K \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^{n-1} (u - a_j)^{-k_j} du + B. \quad (116)$$

Conclui-se assim, pela comparação entre as fórmulas (115) e (116), que a escolha de um pré-vértice no infinito acontece por uma simples mudança de variáveis.

O intuito neste ponto é mostrar, como uma outra propriedade da transformação de Schwarz-Christoffel, que a função que leva o círculo unitário em um polígono qualquer, tem a mesma forma que (115), sendo evidentemente todos os pré-vértices finitos e todos os cortes de ramo radiais para fora do círculo unitário. Inicialmente, a composição de funções $w(s(r))$, que pode ser vista também como uma simples troca de variáveis dentro da transformação w da equação (115), leva o círculo unitário em um polígono qualquer, como mostra a Figura 28 para um polígono de 5 lados.

Figura 28 – Composição de funções que leva o círculo unitário em um polígono qualquer, como esse de 5 lados.



Fonte: Adaptação de (CHURCHILL, 1975) e (ZILL; SHANAHAN, 2011).

Propondo, então, pela Figura 28, a troca de variáveis $s = (-i)(r - 1)/(r + 1)$ e seu elemento diferencial $ds = (-2i)dr/(r + 1)^2$ dentro da função $w(s)$, tem-se

$$w = A \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^n \left(-i \frac{r-1}{r+1} - x_j \right)^{-k_j} \frac{-2i}{(r+1)^2} dr + B.$$

Expandindo o produtório,

$$w = A \int_{z_0}^z \left(-i \frac{r-1}{r+1} - x_1 \right)^{-k_1} \left(-i \frac{r-1}{r+1} - x_2 \right)^{-k_2} \cdots \left(-i \frac{r-1}{r+1} - x_n \right)^{-k_n} \frac{-2i}{(r+1)^2} dr + B.$$

Colocando $1/(r + 1)$ em evidência em todos os fatores entre parênteses do integrando e retornando à forma compacta, então

$$w = A \int_{z_0}^z \left\{ \prod_{j=1}^n [-i(r-1) - x_j(r+1)]^{-k_j} \right\} \left(\frac{1}{r+1} \right)^{-k_1-k_2-\cdots-k_n} \frac{-2i}{(r+1)^2} dr + B.$$

Usando a relação $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 2$ e isolando a variável r em cada fator do produtório, então

$$w = P \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^n \left(r - \frac{-x_j + i}{x_j + i} \right)^{-k_j} dr + B,$$

sendo P a nova constante complexa multiplicativa da integral. Chamando $(-x_j + i)/(x_j + i) = b_j$, ($j = 1, 2, \dots, n$), logo

$$w = P \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^n (r - b_j)^{-k_j} dr + B, \quad (117)$$

completamente análoga à equação inicial (115), tendo uma constante multiplicativa distinta e os pré-vértices sobre a circunferência unitária. Dessa forma, falar em transformações de Schwarz-Christoffel é falar de geometrias, como o semiplano superior, o disco unitário, etc, que são levadas em um polígono desejado. Inclusive, (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002) mostra outras variações da transformação de Schwarz-Christoffel, mas essa dissertação foca na geometria do semiplano superior sendo levada no polígono. Mesmo porque é essa transformação que faz a ligação com a solução do problema físico para regiões poligonais com mais de duas condições de contorno de Dirichlet constantes, como está no segundo método da Seção 4.7.

A seguir estão listadas as principais propriedades da transformação de Schwarz-Christoffel descritas ao longo desta seção:

1. é contínua para todo o domínio original;
2. é analítica para todo o domínio original, exceto os pré-vértices do polígono;
3. é injetiva e portanto admite uma inversa global única para a região de analiticidade em que também é conforme (Teorema 2.9);
4. pode levar outras geometrias, distintas do semiplano superior, também em um polígono qualquer, e um exemplo sendo o disco unitário;
5. um dos pré-vértices pode estar ou não no infinito.

4.6 Problema do Parâmetro e sua Abordagem Numérica

Agora que já se conhece as principais propriedades da transformação de Schwarz-Christoffel e já se sabe que ela admite uma inversa única que também é conforme, esta seção traz um método para encontrar os pré-vértices dessa transformação para um polígono dado, uma vez que o problema físico que envolva a equação de Laplace esteja em uma região poligonal. O objetivo desta seção é trazer apenas a ideia do cálculo numérico desses pré-vértices, que é um dos caminhos pelo qual o pacote *SC Toolbox* do MATLAB foi desenvolvido e cujas explicações mais detalhadas encontram-se em (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002).

Retomando a função (115), tem-se

$$w = A \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^n (s - x_j)^{-k_j} ds + B. \quad (118)$$

A primeira observação a se fazer é que, dado um polígono qualquer P , deve-se analisar por essa fórmula (118), quantas constantes devem ser determinadas, de modo a transformar P no eixo x .

O limite inferior de integração z_0 pode ser, a priori, qualquer número complexo, pois

está totalmente associado à constante B . Além disso, inicialmente, pode-se escrever $A = 1$ e $B = 0$, e simplesmente exigir que um certo polígono P^* semelhante a P seja transformado no eixo real. Afinal, o que A e B fazem é apenas ajustar o tamanho, a orientação e a posição de P^* , visto que são coeficientes da função complexa linear e por isso os seus valores não deformam o polígono desejado. E no final, A e B podem ser ajustados, com o intuito de tornar os polígonos idênticos, ou seja, P e P^* de mesmo tamanho e ambos na mesma posição no plano complexo.

O polígono P^* , semelhante ao polígono P , que se quer levar no eixo real, tem os mesmos ângulos internos e externos que o polígono P , ou seja, k_1, k_2, \dots, k_n já são determinados desde o início, independentemente da região poligonal ser limitada ou ilimitada. Além disso, é fundamental que se tenha

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2.$$

Para se ter a função, que ligue o polígono P^* ao eixo real, totalmente equacionada, resta apenas definir os pré-vértices x_1, x_2, \dots, x_n . Mas como foi visto na Seção 4.2, pelo *Teorema de Riemann*, três parâmetros sobre a função w podem ser especificados, a fim de se ter w única. Ou seja, pode-se especificar, por exemplo, $x_l = 0$, $x_{l+1} = 1$ e $x_n = \infty$ ($1 \leq l \leq n - 2$), como proposto em (CHUANG; GUI; HSIUNG, 1993). Pelo fato de se ter fixado $x_n = \infty$, então a fórmula (118) torna-se, como já mostrado na Seção 4.5,

$$w = A \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^{n-1} (s - x_j)^{-k_j} ds + B. \quad (119)$$

Diante disso, independentemente dos três parâmetros escolhidos, resta estabelecer os outros $n - 3$ pré-vértices. E isso é feito por meio de semelhança de polígonos, pois P e P^* são semelhantes e, além disso, os tamanhos dos lados de P são conhecidos. Portanto, o método pode ser resumido como:

Primeiro Escolher um mesmo lado padrão para os polígonos P e P^* para se calcular a razão dos outros lados em relação a esse escolhido. Pode ser adotado, por exemplo, o primeiro lado do polígono, desde que os vértices 1 e 2 sejam finitos.

Segundo Para o polígono semelhante P^* , cujos vértices w_l^* e w_{l+1}^* ($1 \leq l \leq n - 2$) são finitos, o cálculo do tamanho do lado $d_{w_l^* w_{l+1}^*}$ que liga esses dois vértices é feito a partir da fórmula da transformação de Schwarz-Christoffel. Partindo do pressuposto que todos os pré-vértices são finitos e que as constantes A e B ainda não tenham sido definidas, mas que $z_0 = x_0$ como escolha, então

$$d_{w_l^* w_{l+1}^*} = |w_{l+1}^* - w_l^*| = \left| \left[A \int_{x_0}^{x_{l+1}} \prod_{j=1}^n (s - x_j)^{-k_j} ds + B \right] - \left[A \int_{x_0}^{x_l} \prod_{j=1}^n (s - x_j)^{-k_j} ds + B \right] \right|,$$

uma vez que os números complexos são equivalentes a vetores com relação à operação da soma. Pode-se perceber que as duas constantes B se cancelam, ou seja, para efeito desse método, a constante B poderia ser qualquer valor, a priori. Analogamente, as constantes x_0 também se cancelam na subtração das duas integrais de mesmo integrando. É importante frisar também que essas integrais são reais, uma vez que o caminho de integração está sobre o eixo real. Portanto,

$$d_{w_l^* w_{l+1}^*} = |w_{l+1}^* - w_l^*| = |A| \left| \int_{x_l}^{x_{l+1}} \prod_{j=1}^n (s - x_j)^{-k_j} ds \right|. \quad (120)$$

Terceiro O terceiro passo é montar o sistema não linear de $n - 3$ equações e $n - 3$ incógnitas. Para isso, usa-se o conceito de semelhança de polígonos. A razão dos $n - 3$ lados para o lado padrão de P^* é a mesma razão dos $n - 3$ lados para o lado padrão de P . Essa relação é feita, primeiramente, partindo do pressuposto de que a região poligonal é limitada, ou seja, fechada. Assim,

$$\frac{|w_{l+1}^* - w_l^*|}{|w_2^* - w_1^*|} = \frac{|w_{l+1} - w_l|}{|w_2 - w_1|}, \quad l = 2, 3, \dots, n - 2. \quad (121)$$

Substituindo a equação (120) na equação (121), então

$$\frac{\left| \int_{x_l}^{x_{l+1}} \prod_{j=1}^n (s - x_j)^{-k_j} ds \right|}{\left| \int_{x_1}^{x_2} \prod_{j=1}^n (s - x_j)^{-k_j} ds \right|} = \frac{|w_{l+1} - w_l|}{|w_2 - w_1|}, \quad l = 2, 3, \dots, n - 2. \quad (122)$$

Pode-se perceber que, assim como ocorreu com a constante B , a constante A também foi cancelada na divisão, confirmando que esse método independe dos valores dessas constantes. Esse sistema também é montado e demonstrado através de argumentos geométricos, sem usar a semelhança de polígonos, em (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002). Para regiões poligonais ilimitadas, deve-se passar para o próximo passo.

Quarto Se $w_h = \infty$ ($1 < h < n$), duas das condições da equação (122) são descartadas, uma vez que envolvam o vértice no infinito. Mas as outras relações envolvendo os vértices finitos continuam valendo. Além disso, uma relação entre os vértices finitos vizinhos ao vértice no infinito surge e é essencial para o sistema. Segue a nova relação

$$\frac{\int_{x_{h-1}}^{x_{h+1}} \prod_{j=1}^n (s - x_j)^{-k_j} ds}{\left| \int_{x_1}^{x_2} \prod_{j=1}^n (s - x_j)^{-k_j} ds \right|} = \frac{w_{h+1} - w_{h-1}}{|w_2 - w_1|}, \quad (123)$$

que garante que os dois vértices vizinhos ao vértice no infinito estejam posicionados corretamente um em relação ao outro, ou seja, não só em termos de proporcionalidade de distâncias um relação ao outro, como também de direções. Como consequência, deve-se exigir que não haja dois vértices infinitos adjacentes, porque senão a equação (123) ainda é inútil (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002). Para os vértices $h = 1$ ou $h = n$

no infinito, continuam a valer as relações entre os seus vértices vizinhos finitos. Dessa forma, essa equação (123) se desdobra em duas, que são as igualdades das partes real e imaginária. Portanto, o sistema não linear continua sendo de $n - 3$ equações e $n - 3$ incógnitas (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002).

Uma forma diferente de montar esse sistema, dado o mesmo polígono P , é através da forma da transformação de Schwarz-Christoffel que leva o círculo unitário no polígono, proposta pela composição da Figura 28 e equação (117), uma vez que os pré-vértices, nesse caso, estão confinados a uma circunferência unitária, não havendo pré-vértices no infinito e nem muito distantes uns dos outros, para efeito de melhor aplicabilidade de métodos numéricos, com uma maior precisão. (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002) até prefere trabalhar com essa forma da transformação de Schwarz-Christoffel, mas trabalha também com outras formas, inclusive a do semiplano. Já (CHUANG; GUI; HSIUNG, 1993) trabalha apenas com o semiplano, e monta passo a passo o sistema, além de aplicar em exemplos. Independentemente disso, o modo como o sistema é montado é análogo para as duas formas.

O sistema não linear é montado apenas para se encontrar os pré-vértices restantes e esses, por sua vez, influenciam os comprimentos laterais dos polígonos. Esse problema de se determinar os valores corretos para um determinado polígono é o **Problema do Parâmetro** e sua solução é o primeiro passo no uso da fórmula de Schwarz-Christoffel. No Capítulo 5, um problema clássico, para os quais o *Problema do Parâmetro* pode ser resolvido explicitamente, está mostrado. Mas na maioria dos problemas práticos, não há solução analítica para esse sistema dos pré-vértices, que dependem não linearmente dos comprimentos dos lados do polígono. Além disso, o cálculo numérico também é geralmente necessário para avaliar as integrais que fazem parte do sistema (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002).

Diante disso, tanto as integrais quanto o sistema não linear são solucionados computacionalmente em (CHUANG; GUI; HSIUNG, 1993) e (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002). Inclusive o pacote *SC Toolbox* do (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002) no MATLAB, que é usado nessa dissertação, tem como ferramenta para o cálculo das integrais impróprias, a **Quadratura de Gauss-Jacobi**. Já para se solucionar o sistema não linear, é usado o **Método Iterativo de Newton**.

Por fim, resolvendo o sistema, tem-se a transformação de Schwarz-Christoffel montada e por consequência os vértices w_l^* ($l = 1, 2, \dots, n$) do polígono P^* . Então basta que se associe as constantes A e B , a fim de se transformar o polígono P^* no polígono P desejado, através da relação $w_l = Aw_l^* + B$. O pacote *SC Toolbox* já faz isso automaticamente.

4.7 Métodos de Solução da Equação de Laplace em Geometrias Poligonais

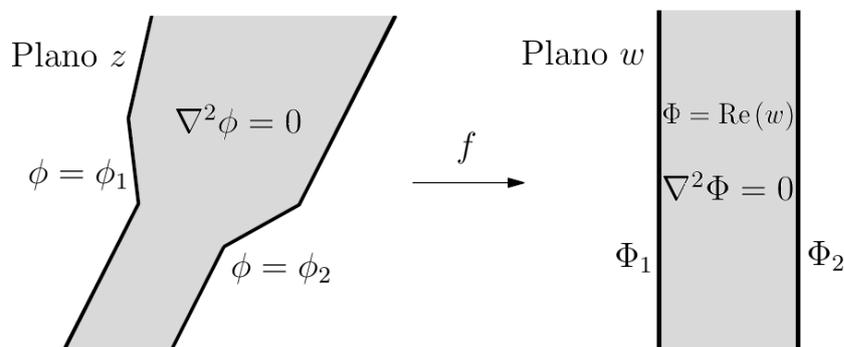
Estabelecido o método para encontrar todos os pré-vértices desconhecidos da transformação de Schwarz-Christoffel, nesta seção, são discutidos dois métodos para encontrar as curvas equipotenciais do problema de valor de contorno relacionada à equação de Laplace na região poligonal escolhida. Esses métodos partem do pressuposto que há apenas um meio de permissividade constante, pois não consideram a geometria de interface entre meios distintos. Desde já, o intuito desta seção não é entrar nos pormenores dos métodos numéricos, mas, sim, mostrar como foram estabelecidos e esquematizados sob os comandos do pacote *SC Toolbox*.

4.7.1 Primeiro Método

O primeiro método não trata o problema físico da equação de Laplace diretamente, mas propõe uma forma nova da transformação de Schwarz-Christoffel que, mesmo sem o fornecimento de potencial no contorno, gera as equipotenciais e linhas de fluxo desejadas.

Essa forma da transformação de Schwarz-Christoffel chama-se **transformação da Faixa** ou **Strip Map**. Ela se aplica a problemas que envolvam a equação de Laplace em regiões poligonais, cujos contornos apresentam exatamente dois vértices em que há “saltos” nas condições de contorno de Dirichlet constantes. Ou seja, o potencial sobre o contorno é modificado somente ao se passar por esses dois vértices. Dessa forma, ao se contornar o polígono, há uma mudança de uma condição de contorno F para a condição G , quando se passa pelo primeiro vértice de transição; logo, no segundo vértice de transição, ocorre a volta da condição G para a F . Portanto, nesse método há exatamente duas condições de contorno de Dirichlet constantes. O procedimento está ilustrado na Figura 29.

Figura 29 – Solucionando a equação de Laplace com duas condições de contorno de Dirichlet constantes pela *transformação da Faixa*.



Fonte: Adaptação de (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002).

Como já mencionado, esse método não se baseia em potenciais fornecidos no contorno, mas na diferença de potencial $|\phi_1 - \phi_2|$ entre uma parte do contorno e o seu restante. Dessa forma, a ideia é levar essa diferença de potencial para a região entre duas “placas” paralelas “infinitas”, onde já se sabe como as equipotenciais e linhas de fluxo se comportam. Pela própria Figura 29, pode-se ver que a nova forma da transformação de Schwarz-Christoffel leva uma geometria poligonal ilimitada na região entre retas verticais. Assim, como a transformação f é conforme, as linhas equipotenciais verticais $\text{Re}(w) = c_1$ e de fluxo horizontais $\text{Im}(w) = c_2$, c_1 e c_2 duas constantes, são levadas pela transformação inversa $z = f^{-1}(w)$, que também é conforme, para a geometria original, mantendo a ortogonalidade das linhas equipotenciais e de fluxo.

Além disso, essa transformação f foca as regiões poligonais ilimitadas *longas* e *estreitas* que não são bem tratadas pela transformação canônica de Schwarz-Christoffel envolvendo o domínio do semiplano superior, pois há um problema de “aglomeração” de pré-vértices sobre o eixo real para tais regiões. Esse problema é minimizado por essa transformação, pois há uma distribuição dos pré-vértices sobre as duas retas da fronteira, e não mais só uma (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002). Inclusive essa *Transformação da Faixa* é uma modificação dessa forma canônica (115) e apresenta a seguinte forma (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002):

$$w = f(z) = A \int_{z_0}^z \exp \left[\frac{\pi}{2} (\alpha_- - \alpha_+) s \right] \prod_{j=1}^n \left[\sinh \frac{\pi}{2} (s - b_j) \right]^{\alpha_j - 1} ds. \quad (124)$$

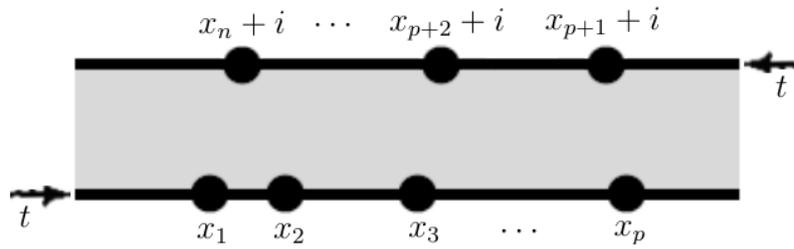
Essa função leva a região entre as retas horizontais $S = \{0 < \text{Im}(z) < 1\}$ na região poligonal ilimitada e leva as fronteiras $\text{Im}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) = 1$ no contorno da região poligonal. Tem-se α_+ e α_- como os ângulos internos relativos dos dois vértices no infinito e chamados **ângulos de divergência** e n a quantidade de pré-vértices finitos sobre as retas superior e inferior. Para o entendimento intuitivo da equação (124), deve-se buscar como as retas inferior e superior são levadas no contorno poligonal. Partindo pelo mesmo caminho construído para se definir a transformação de Schwarz-Christoffel na Seção 4.4, deseja-se mostrar, com a ajuda da Figura 30, como os vetores unitários sobre as retas inferior e superior, representados por t , são levados em vetores sobre o polígono no plano w , representados por τ . Para isso, é necessário retomar a equação (92)

$$\arg \tau = \arg t + \arg f'(z_0), \quad (125)$$

válida sempre para o ponto z_0 onde a transformação é conforme. Tomando a função derivada da equação (124), então

$$f'(z) = A \exp \left[\frac{\pi}{2} (\alpha_- - \alpha_+) z \right] \prod_{j=1}^n \left[\sinh \frac{\pi}{2} (z - b_j) \right]^{\alpha_j - 1}. \quad (126)$$

Figura 30 – Domínio da transformação de Schwarz-Christoffel para o método *Transformação da Faixa* com os pré-vértices sobre o contorno.



Fonte: Arquivo próprio baseado em (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002).

Analisando a Figura 30, é importante destacar que os pré-vértices da reta horizontal inferior têm os cortes de ramo $\beta_j = -\pi/2$ ($j = 1, 2, \dots, p$), ou seja, cada função potência do seno hiperbólico da equação (126) tem o argumento $-\pi/2 < \theta_j < 3\pi/2$ ($j = 1, 2, \dots, p$). Já os pré-vértices da reta horizontal superior têm os cortes de ramo $\beta_j = \pi/2$ ($j = p + 1, p + 2, \dots, n$), ou seja, cada função potência do seno hiperbólico da equação (126) tem o argumento $\pi/2 < \theta_j < 5\pi/2$ ($j = p + 1, p + 2, \dots, n$). Diante disso, seguindo o sentido anti-horário sobre o contorno, o vetor unitário t tem o sentido positivo do eixo real, ou seja, $\arg t = 0$. Para a reta superior, por sua vez, t tem o sentido contrário, ou seja, $\arg t = \pi$.

Buscando o argumento de (126), chega-se em

$$\arg f'(z) = \arg A + \arg \left\{ \exp \left[\frac{\pi}{2} (\alpha_- - \alpha_+) z \right] \right\} + \sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) \arg \left[\sinh \frac{\pi}{2} (z - b_j) \right]. \quad (127)$$

Sendo α_+ e α_- dois números reais, então, por uma propriedade básica das funções exponenciais (CHURCHILL, 1975), a função argumento relacionada à função exponencial contida em (127) é a parte imaginária de

$$\frac{\pi}{2} (\alpha_- - \alpha_+) (x + iy), \quad (128)$$

ou seja, de (127), chega-se em

$$\arg f'(z) = \arg A + \frac{\pi}{2} (\alpha_- - \alpha_+) y + \sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) \arg \left[\sinh \frac{\pi}{2} (z - b_j) \right]. \quad (129)$$

A partir daqui, deve-se aplicar a equação (129) para as retas inferior e superior separadamente, no sentido regido pelo vetor unitário t . Convencionam-se como caminhos 1 e

2, os caminhos sob as retas inferior e superior, respectivamente. Para o caminho 1, tem-se $y = 0$ e $\arg t = 0$, levando a junção das equações (125) e (129) em

$$\arg \tau = \arg A + \sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) \arg \left[\sinh \frac{\pi}{2} (x_0 - b_j) \right], \quad (130)$$

sobre o ponto específico $x = x_0$. Atribuindo os pré-vértices na reta inferior $b_j = x_j$, para $j = 1, 2, 3, \dots, p$, e os pré-vértices na reta superior $b_j = x_j + i$, para $j = p + 1, p + 2, \dots, n$, com x_j real para $j = 1, 2, \dots, n$, então, de (130), obtém-se

$$\begin{aligned} \arg \tau = \arg A + \sum_{j=1}^p (\alpha_j - 1) \arg \left[\sinh \frac{\pi}{2} (x_0 - x_j) \right] + \\ \sum_{j=p+1}^n (\alpha_j - 1) \arg \left[\sinh \frac{\pi}{2} (x_0 - x_j - i) \right]. \end{aligned} \quad (131)$$

Utilizando a propriedade da função complexa seno hiperbólico (CHURCHILL, 1975)

$$\sinh z_0 = -i \operatorname{sen}(iz_0), \quad (132)$$

para dado um número complexo $z_0 = x_0 + iy_0$; e utilizando a propriedade da função complexa seno (CHURCHILL, 1975)

$$\operatorname{sen} z_0 = \operatorname{sen}(x_0 + iy_0) = \operatorname{sen} x_0 \cosh y_0 + i \cos x_0 \operatorname{senh} y_0, \quad (133)$$

então chega-se que os termos do segundo somatório de (131) são todos $(\alpha_j - 1)3\pi/2$ ($j = p + 1, p + 2, \dots, n$), e os termos do primeiro somatório de (131) são $(\alpha_j - 1)\pi$ para $x_0 < x_j$ e são nulos para $x_0 > x_j$ ($j = 1, 2, \dots, p$), considerando a faixa estabelecida para os argumentos das funções potência. Portanto, assumindo um número inteiro q , tal que $1 \leq q < p$, e tomando $x_q < x_0 < x_{q+1}$, ou seja, para um ponto intermediário do caminho 1 entre os pré-vértices, tem-se que

$$\arg \tau = \arg A + \sum_{j=q+1}^p (\alpha_j - 1)\pi + \sum_{j=p+1}^n (\alpha_j - 1)\frac{3\pi}{2}. \quad (134)$$

A equação (134) mostra que $\arg \tau$ é mantido constante, ou seja, o contorno da região da imagem é um segmento de reta ou uma semirreta, quando se percorre a reta inferior entre um pré-vértice e outro. Em uma análise direta, tem-se que, para antes do primeiro pré-vértice, o primeiro somatório da equação (134) vai de $j = 1$ a $j = p$; e, para depois do último pré-vértice, o primeiro somatório da equação (134) é nulo, em ambos os casos $\arg \tau$ permanecendo constante. Além disso, ao se passar por um pré-vértice j ($j = 1, 2, \dots, p$), ocorre uma variação de $-(\alpha_j - 1)\pi$, ou seja, exatamente o ângulo externo ou ângulo de rotação convencionalizado positivo no sentido anti-horário $k_j\pi$, exatamente como acontece

para a transformação canônica de Schwarz-Christoffel do semiplano superior. Assim, para toda a reta inferior, há uma imagem como um conjunto de segmentos de reta e semirretas que podem ser ligados um ao outro por vértices finitos ou vértices no infinito, dependendo do sinal de α_j , ($j = 1, 2, \dots, p$).

De forma análoga para o caminho 2, ou seja, $y = 1$, $\arg t = \pi$ e $z_0 = x_0 + i$, começando pelas fórmulas (125) e (129), chega-se que

$$\arg \tau = \pi + \arg A + \frac{\pi}{2}(\alpha_- - \alpha_+) + \sum_{j=1}^p (\alpha_j - 1) \arg \left[\sinh \frac{\pi}{2}(x_0 + i - x_j) \right] + \sum_{j=p+1}^n (\alpha_j - 1) \arg \left[\sinh \frac{\pi}{2}(x_0 + i - x_j - i) \right]. \quad (135)$$

Assumindo um número inteiro m , tal que $p + 1 \leq m < n$ e $x_{m+1} < x_0 < x_m$, chega-se que

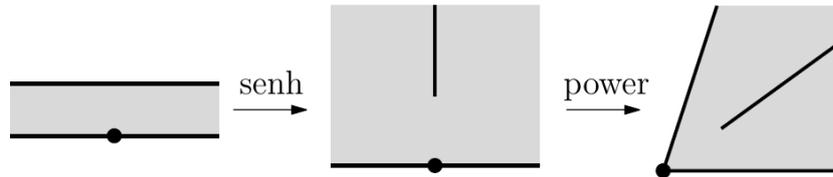
$$\arg \tau = \pi + \arg A + \frac{\pi}{2}(\alpha_- - \alpha_+) + \sum_{j=p+1}^m (\alpha_j - 1)\pi + \sum_{j=m+1}^n (\alpha_j - 1)2\pi + \sum_{j=1}^p (\alpha_j - 1)\frac{\pi}{2}, \quad (136)$$

dessa vez aparecendo os ângulos π e 2π como os argumentos do seno hiperbólico para, respectivamente, $x_0 < x_m$ e $x_0 > x_m$, relacionados aos pré-vértices $x_j + i$ ($j = p + 1, p + 2, \dots, n$), ou seja, relacionado ao segundo somatório da equação (135). Já os ângulos $\pi/2$ são os argumentos do seno hiperbólico para todos os pré-vértices da reta inferior. Todos esses valores de argumentos estão dentro da faixa estabelecida para as funções potência. Pela equação (136), ao passar por cada pré-vértice j ($j = p + 1, p + 2, \dots, n$), uma variação de $-(\alpha_j - 1)\pi = k_j\pi$ acontece novamente, o que já era de se esperar por cada $x_j + i$ ($j = p + 1, p + 2, \dots, n$) ser um pré-vértice do polígono. Além disso, (136) mostra que, para qualquer ponto entre os pré-vértices finitos da reta horizontal superior, $\arg \tau$ não varia e, por isso, a imagem do segmento de reta entre dois pré-vértices apresenta um argumento constante, ou seja, é um segmento de reta, se estiver entre dois vértices finitos, ou uma semirreta no plano w , se estiver entre um vértice finito e um infinito. De forma direta, $\arg \tau$ também é constante para $x_0 < x_n$ e $x_0 > x_{p+1}$ e, portanto, toda a reta horizontal superior é levada em uma fronteira de argumento constante por partes. Assim, fica estabelecida, de uma forma intuitiva, que a imagem dessa transformação tem uma fronteira poligonal.

A função seno hiperbólico $\sinh[\pi/2(z - b_j)]$ atua sobre cada pré-vértice em particular, como mostra a Figura 31, de forma a levar a região entre as retas horizontais em um semiplano (superior ou inferior) com uma fenda, estabelecendo o ângulo interno $-\pi/2$ para os dois vértices no infinito que representam as extremidades da faixa no plano original. Através da análise algébrica da função complexa seno hiperbólico, se o pré-vértice b_j estiver sobre a reta inferior, como é o caso da Figura 31, então essa função seno hiperbólico mantém essa reta horizontal inferior na mesma posição com esse pré-vértice sobre ela, e leva a reta horizontal superior na fenda vertical no semiplano superior. Se o pré-vértice b_j

estiver sobre a reta superior, então a função seno hiperbólico leva essa reta para a posição da reta inicialmente inferior com o pré-vértice acompanhando esse deslocamento e leva a reta inferior para a fenda vertical localizada no semiplano inferior.

Figura 31 – Transformação de Schwarz-Christoffel na forma de *Transformação da Faixa*, levando a faixa infinita em uma região poligonal ilimitada.

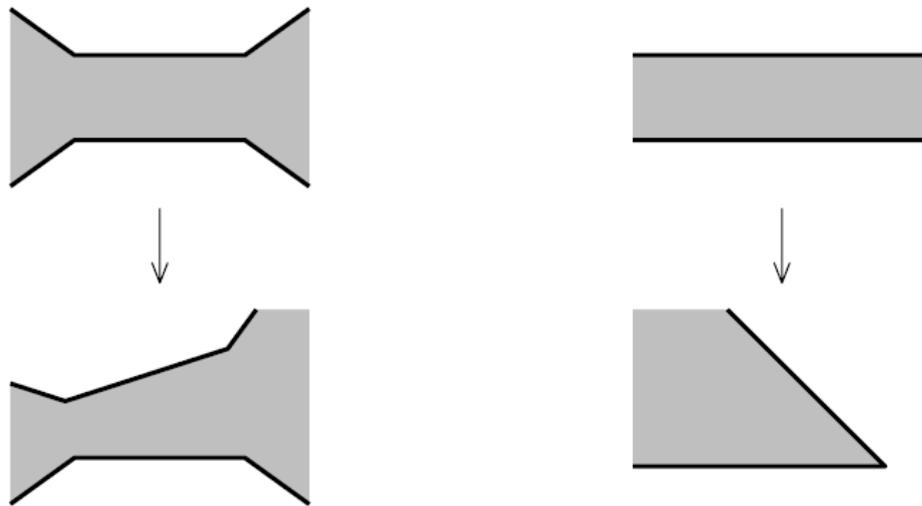


Fonte: (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002).

Por sua vez, a função “power” ou função “potência” $\alpha_j - 1$, rotaciona a imagem da região entre faixas em relação ao vértice b_j , gerando uma “fatia” com “fenda”, como mostra a Figura 31, de modo que $-(\alpha_j - 1) = k_j$ continua representando o ângulo relativo externo que representa a mudança de direção de τ ao se passar por b_j , como já estabelecido anteriormente. Também é notável que os ângulos internos dos vértices no infinito, que representam o fim de faixa, continuam iguais entre si, ou seja, a simetria em relação à fenda continua.

Por fim, a função exponencial é proposta com o objetivo de gerar ângulos internos distintos para os vértices no infinito, que são imagens das extremidades da faixa infinita. Pela equação (126), a função exponencial só atua para ângulos de divergência distintos, uma vez que o seu argumento envolve a diferença desses ângulos. O papel dessa função é estabelecer as posições relativas entre os contornos de potenciais distintos. Nesse sentido, essa função pode proporcionar até mesmo uma interseção dos contornos inicialmente representados por retas horizontais paralelas, ou seja, um dos vértices do infinito que representa a extremidade da faixa pode se tornar finito, como é o exemplo da direita da Figura 32 (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002). Esse objetivo é alcançado, rotacionando a “placa” superior em relação à “placa” inferior fixa. O exemplo da esquerda da Figura 32 mostra bem esse efeito. Comparando as equações (134) e (136), pode-se notar que a imagem da “placa” superior apresenta, no argumento de τ , o termo $(\pi/2)(\alpha_- - \alpha_+)$ derivado da função exponencial, enquanto que a “placa” inferior não apresenta esse termo. E pela relação entre ângulo interno e externo, esse fator pode ser escrito como $(\pi/2)(k_+ - k_-)$, ou seja, a diferença entre os ângulos de rotação para os dois vértices no infinito gera a inclinação desejada entre as partes do polígono com potenciais distintos.

Figura 32 – A função exponencial proporcionando a rotação da “placa” superior em relação à “placa” inferior mantida fixa.



Fonte: (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002).

Esse método apenas fornece a família das linhas equipotenciais e das linhas de fluxo, sem associar cada equipotencial ao seu respectivo potencial. As regiões poligonais fechadas também podem ser tratadas pela *Transformação da Faixa*, desde que haja apenas dois “saltos” de potenciais de Dirichlet constantes sobre a fronteira, como já estabelecido. De forma análoga ao que é feito para a forma canônica de Schwarz-Christoffel do semiplano superior na Seção 4.6, o *Problema do Parâmetro* também é montado para a *Transformação da Faixa*, sendo o sistema não linear montado com os pré-vértices finitos sobre as duas “placas”. Os comandos do pacote *SC Toolbox* que realizam essa transformação, fornecendo as curvas desejadas, são aplicados no Capítulo 5. Para o uso desse comando, basicamente usa-se como entrada o polígono desejado e os dois vértices nos quais há a mudança de potencial.

4.7.2 Segundo Método

O segundo método a ser tratado nesta seção é baseado na forma canônica da transformação de Schwarz-Christoffel do semiplano superior no polígono. Primeiramente, mapeia-se o semiplano superior na região poligonal desejada, por meio da transformação (114), com a escolha de associar o último vértice do polígono ao pré-vértice no infinito. Este passo fornece pontos $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < \infty$, através da solução do *Problema do Parâmetro* (Seção 4.6). Dadas n condições de Dirichlet constantes $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$,

procura-se a função real $\phi(z)$, harmônica no semiplano superior, tal que

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1, & -\infty < x < x_1 \\ \phi_2, & x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \\ \phi_{n-1}, & x_{n-2} < x < x_{n-1} \\ \phi_n, & x_{n-1} < x < \infty \end{cases}. \quad (137)$$

A solução desse problema de valor de contorno no plano z é (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002)

$$\phi(z) = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{i}{\pi} \left[\phi_1 \operatorname{Log}(z - x_1) + \phi_2 \operatorname{Log} \left(\frac{z - x_2}{z - x_1} \right) + \dots + \phi_{n-1} \operatorname{Log} \left(\frac{z - x_{n-1}}{z - x_{n-2}} \right) - \phi_n \operatorname{Log}(x_{n-1} - z) \right] \right\}. \quad (138)$$

Pode-se perceber que, ao percorrer o eixo real ($z = x$) e desenvolver as expressões logarítmicas em (138), aplicando a propriedade básica $x - x_h = |x - x_h| \exp[i \arg(x - x_h)]$, $h = 1, 2, \dots, n - 1$, então

$$\phi(x) = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{i}{\pi} \left[\phi_1 \operatorname{Log} |x - x_1| + i\phi_1 \arg(x - x_1) + \phi_2 \operatorname{Log} \left| \frac{x - x_2}{x - x_1} \right| + i\phi_2 \arg \left(\frac{x - x_2}{x - x_1} \right) + \dots + \phi_{n-1} \operatorname{Log} \left| \frac{x - x_{n-1}}{x - x_{n-2}} \right| + i\phi_{n-1} \arg \left(\frac{x - x_{n-1}}{x - x_{n-2}} \right) - \phi_n \operatorname{Log} |x_{n-1} - x| - i\phi_n \arg(x_{n-1} - x) \right] \right\}. \quad (139)$$

Desenvolvendo (139), tem-se

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \left[\phi_1 \arg(x - x_1) + \phi_2 \arg \left(\frac{x - x_2}{x - x_1} \right) + \dots + \phi_{n-1} \arg \left(\frac{x - x_{n-1}}{x - x_{n-2}} \right) - \phi_n \arg(x_{n-1} - x) \right]. \quad (140)$$

Por fim, usando a propriedade da divisão da função \arg , de (140), conclui-se que

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} [\phi_1 \arg(x - x_1) + \phi_2 \arg(x - x_2) - \phi_2 \arg(x - x_1) + \dots + \phi_{n-1} \arg(x - x_{n-1}) - \phi_{n-1} \arg(x - x_{n-2}) - \phi_n \arg(x_{n-1} - x)]. \quad (141)$$

É bem direta a análise que mostra que $\phi(z)$ satisfaz as condições de contorno estabelecidas, partindo da equação (141). Isso porque, por exemplo, para $z = x < x_1$, $\arg(x - x_1) = \arg(x - x_2) = \dots = \arg(x - x_{n-1}) = \pi$ e $\arg(x_{n-1} - x) = 0$, ou seja, $\phi(x) = \phi_1$. De forma análoga pode ser feito para todos os intervalos da reta real, sendo $0 \leq \arg(z - x_h) \leq \pi$, $h = 1, 2, \dots, n - 1$, e $-\pi \leq \arg(x_{n-1} - z) \leq 0$.

Como mostra a equação (138), $\phi(z)$ é a parte real da função analítica que está dentro das chaves e que aqui é chamada $f(z)$. A derivada de $f(z)$ é equacionada, partindo de (138) e utilizando a regra de derivada da função logarítmica complexa, por (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002)

$$\frac{df}{dz} = -\frac{i}{\pi} \left[\frac{\phi_1}{z-x_1} + \frac{\phi_2(x_2-x_1)}{(z-x_1)(z-x_2)} + \dots + \frac{\phi_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})}{(z-x_{n-2})(z-x_{n-1})} - \frac{\phi_n}{z-x_{n-1}} \right]. \quad (142)$$

Estabelecendo um denominador comum para os termos que estão dentro dos colchetes em (142), então chega-se que

$$\frac{df}{dz} = i \frac{p(z)}{(z-x_1)(z-x_2)\dots(z-x_{n-1})}, \quad (143)$$

sendo

$$\begin{aligned} p(z)(-\pi) = & \phi_1(z-x_2)(z-x_3)\dots(z-x_{n-1}) + \\ & \phi_2(x_2-x_1)(z-x_3)(z-x_4)\dots(z-x_{n-1}) + \\ & \phi_3(x_3-x_2)(z-x_1)(z-x_4)(z-x_5)\dots(z-x_{n-1}) + \dots \\ & \phi_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})(z-x_1)(z-x_2)\dots(z-x_{n-3}) - \\ & \phi_n(z-x_1)(z-x_2)\dots(z-x_{n-2}), \end{aligned} \quad (144)$$

em que $p(z)$ é um polinômio real de grau máximo $n-2$. Comparando a estrutura algébrica dessa função f' (143) com a função derivada da transformação de Schwarz-Christoffel do semiplano (94), chega-se à conclusão de que essa função f é também uma nova forma da transformação de Schwarz-Christoffel. Assim, (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002) propõe a nova forma

$$\phi(z) = \phi_1 + \operatorname{Re} \left[i \int_{x_1}^z p(s) \prod_{j=1}^{n-1} (s-x_j)^{-1} ds \right], \quad (145)$$

como a única função harmônica do semiplano superior satisfazendo as condições de contorno (137). Um exame de (143) e (144) revela que, se x_j é uma raiz de $p(z)$, então $\phi_j = \phi_{j+1}$. Em outras palavras, um fator comum entre o denominador e o numerador de (143) ocorre se, e somente se, dois valores de contorno adjacentes forem iguais. O mais importante desse resultado é que a solução genérica para a equação de Laplace no semiplano superior com condições de Dirichlet constantes está estabelecida através de uma forma especial da transformação de Schwarz-Christoffel. Mais detalhes sobre essa transformação e sua equação (145) encontram-se em (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002). Com a transformação de Schwarz-Christoffel que leva essa solução genérica do semiplano superior para a região poligonal desejada, a solução desejada é encontrada, ou seja,

obtendo os pré-vértices pelo *Problema do Parâmetro*, duas formas de Schwarz-Christoffel em sequência resolvem o problema na região poligonal.

Em resumo, segue o procedimento da solução para a equação de Laplace com condições de Dirichlet constantes sobre a fronteira de uma região poligonal:

Primeiro passo Encontrar uma transformação de Schwarz-Christoffel que leve o polígono no semiplano superior, resolvendo o sistema não linear dos parâmetros, ou seja, o *Problema do Parâmetro*;

Segundo passo Encontrar uma segunda transformação de Schwarz-Christoffel cujo integrando envolva os pré-vértices encontrados no Primeiro passo, vezes um polinômio que pode ser deduzido desses parâmetros e das condições de contorno;

Terceiro passo Tomar a parte real da transformação composta envolvendo as duas funções do Primeiro e Segundo passos.

O pacote *SC Toolbox* executa esses três passos com poucos comandos, fornecendo a função harmônica para a região poligonal, e traçando a superfície $\phi(x, y)$ em três dimensões. Basta que sejam fornecidos o polígono e as condições de contorno constantes sobre os seus lados. Com pequenos incrementos no código, consegue-se as curvas equipotenciais e de fluxo. O uso desse pacote, assim como suas limitações, são discutidos no Capítulo 5.

Capítulo 5

Aplicações das Transformações de Schwarz-Christoffel

5.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentados alguns problemas de valor de contorno envolvendo a equação de Laplace, assim como no Capítulo 3. Sendo assim, todos os pressupostos levantados com relação ao problema físico na Seção 3.2 são mantidos aqui. Porém, há duas diferenças fundamentais: a primeira delas é que, neste capítulo, o foco está em abordar os problemas através das transformações de Schwarz-Christoffel, ou seja, tratar problemas envolvendo geometrias poligonais; a segunda diferença é que todos os problemas deste capítulo apresentam apenas um meio dielétrico de permissividade constante e apenas as condições de Dirichlet constantes, pois os métodos apresentados na Seção 4.7, que estão no pacote *SC Toolbox*, não consideram a geometria de interface entre meios distintos e nem as condições de Neumann nulas. Antes da abordagem dos problemas, é proposto um método prático para encontrar os ângulos internos de vértices no infinito na Seção 5.2.

5.2 Ângulos Internos de Vértices no Infinito

Sendo α_j e k_j , $j = 1, 2, \dots, n$, respectivamente, os ângulos internos relativos e os ângulos externos relativos, as equações (146), (147) e (148), válidas para as regiões poligonais limitadas, valem também para as regiões poligonais ilimitadas, como definidas em (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002).

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = n - 2, \quad (146)$$

$$\sum_{j=1}^n k_j = 2, \quad (147)$$

$$\alpha_j + k_j = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (148)$$

Como já afirmado na Seção 4.3, se o vértice é finito, então seu ângulo interno é $0 < \alpha\pi \leq 2\pi$. Quando $\alpha\pi = 2\pi$, então o vértice é a ponta de uma fenda. Por outro lado, se o vértice é infinito, então seu ângulo interno é $-2\pi \leq \alpha\pi \leq 0$, ou seja, é negativo ou nulo. O questionamento que fica é: como garantir que as equações (146), (147) e (148) continuem valendo para polígonos com vértices no infinito, ou seja, com ângulos internos relativos negativos? E como encontrar tais ângulos para um dado polígono ilimitado?

As respostas para essas duas perguntas são trazidas aqui de forma intuitiva, sendo que, formalmente, (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002) traz os polígonos ilimitados com os seus vértices no infinito por definição. A ideia central é entender a região poligonal ilimitada como uma região poligonal fechada com alguns vértices, e, por sua vez, lados, no infinito. Nesse sentido, deve-se encontrar uma região poligonal fechada, tal que, ao se levar pelo menos dois dos seus vértices finitos no infinito, mantendo todos os ângulos internos fixos, essa região se transforme na região poligonal ilimitada desejada. Com esse entendimento, é de se esperar que as equações (146), (147) e (148) continuem a valer para regiões poligonais ilimitadas.

O procedimento para encontrar os ângulos internos dos vértices no infinito é:

- Etapa 1** Fazer analogia com um polígono fechado de N vértices, em que pelo menos dois de seus vértices adjacentes (um lado) é levado ao infinito sem se alterar nenhum ângulo interno;
- Etapa 2** Fazer a união de vértices adjacentes no infinito em um único vértice no infinito para representá-los. É feita uma união por cada grupo de vértices adjacentes no infinito;
- Etapa 3** Contabilizar quantos vértices foram perdidos em cada união, com o intuito de calcular a soma dos ângulos internos do polígono ilimitado desejado. Assim é feito o “desconto” no cálculo do ângulo do vértice resultante no infinito, gerando valor negativo ou nulo para tal ângulo;
- Etapa 4** Por fim, deve-se chegar no somatório de ângulos internos relativos do polígono ilimitado igual a $n - 2$, n sendo a quantidade total de vértices após a união feita na etapa 2.

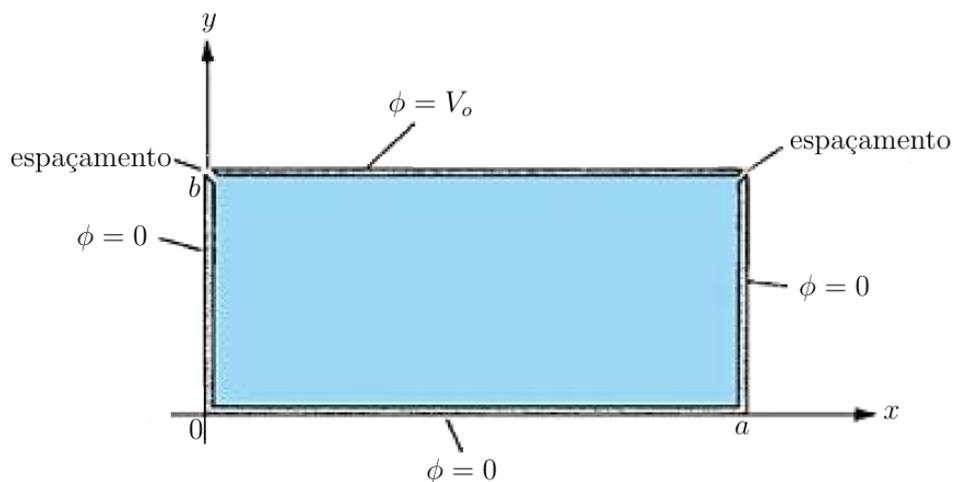
Esse método intuitivo funciona, uma vez que o polígono de N lados no infinito, antes da junção dos vértices na etapa 2, deve apresentar um somatório de ângulos internos relativos igual a $N - 2$, mas após a junção deve apresentar um somatório igual $n - 2$. E a diferença entre esses dois somatórios é exatamente $N - n$, ou seja, a quantidade de vértices que foram perdidos nas junções da etapa 2. Os problemas B e C são resolvidos com o auxílio desse método para o cálculo dos ângulos dos vértices no infinito das regiões poligonais ilimitadas propostas.

Esse método prático e intuitivo proposto não aparece como tal na bibliografia disponível, pois foi encontrado somente a definição dos ângulos de vértices no infinito; sendo, portanto, esse método uma contribuição interessante e talvez original.

5.3 Problema A

Este primeiro Problema A envolve uma geometria bastante simples, a fim de iniciar o uso do pacote *SC Toolbox*. Trata-se da geometria retangular, cuja solução analítica é conhecida. Dessa forma, o objetivo em questão é basicamente encontrar as curvas equipotenciais no interior desse retângulo cujos lados apresentam condições de contorno de Dirichlet constantes. Esse problema de valor de contorno encontra-se representado na Figura 33.

Figura 33 – Domínio relacionado ao Problema A.



Fonte: Adaptação de (SADIKU, 2012).

Esse problema envolve um polígono limitado, mais especificamente um retângulo de comprimento a , altura b , três lados com condições de contorno de Dirichlet nulas e um lado com condição de Dirichlet V_0 . Por não envolver vértices no infinito, o método escolhido nesse problema é o Segundo Método da Seção 4.7, que basicamente leva essa região

retangular para o semiplano superior, onde já se tem uma solução analítica pronta. Mas a *Transformação da Faixa* também poderia ser aplicado nesse caso, visto que há apenas dois vértices que representam os “saltos” de potencial de Dirichlet constantes.

O retângulo desse problema apresenta, como pode-se ver pela Figura 33, os vértices $w_1 = 0$, $w_2 = a$, $w_3 = a + bi$ e $w_4 = bi$, cada um com o seu ângulo interno e respectivo ângulo externo de $\pi/2$. De posse da localização dos vértices e seus respectivos ângulos internos, resta usar a sequência de códigos abaixo, através do *SC Toolbox*, para gerar o polígono e encontrar os pré-vértices no plano z .

Primeiro Usar o comando $p = \text{polygon}(vert, alpha)$, sendo os vetores $vert$ e $alpha$ de entrada com, respectivamente, a localização dos vértices no sentido anti-horário e os ângulos internos relativos na mesma ordem;

Segundo Usar o comando $\text{plot}(p, 'r')$, para se plotar o polígono p , que nesse caso é um retângulo, com os seus vértices marcados;

Terceiro Usar o comando $\text{hplmap}(p)$, para se resolver o *Problema do Parâmetro* para o domínio do semiplano superior. E nesse caso, trata-se de encontrar um único pré-vértice, visto que três já são pré-fixados pelo Teorema 4.1 do *Mapeamento de Riemann* da fórmula de Schwarz-Christoffel, com os valores $x_1 = -1, x_{n-1} = 1$ e $x_n = \infty$ fixados nesse pacote para o domínio do semiplano superior.

Quarto Usar o comando $\text{lapsolve}(p, phi)$, sendo p o polígono criado e phi o vetor com as condições de contorno de Dirichlet constantes no sentido anti-horário para cada lado do polígono, iniciando a primeira posição para o lado entre os vértices 1 e 2 e, assim, sucessivamente. Esse comando fornece o potencial, dado qualquer ponto no interior da geometria original.

Montando o sistema não linear para resolver o *Problema do Parâmetro*, nesse caso um sistema de uma equação e uma incógnita com os pré-vértices $x_1 = -1, x_3 = 1$ e $x_4 = \infty$ fixados, chega-se na relação

$$\frac{\left| \int_{x_2}^{x_3} \prod_{j=1}^3 (s - x_j)^{-k_j} ds \right|}{\left| \int_{x_1}^{x_2} \prod_{j=1}^3 (s - x_j)^{-k_j} ds \right|} = \frac{|w_3 - w_2|}{|w_2 - w_1|} = \frac{b}{a},$$

que é a equação (122) para $l = 2$ e $n = 4$. Logo,

$$\frac{\left| \int_{x_2}^1 (s + 1)^{-1/2} (s - x_2)^{-1/2} (s - 1)^{-1/2} ds \right|}{\left| \int_{-1}^{x_2} (s + 1)^{-1/2} (s - x_2)^{-1/2} (s - 1)^{-1/2} ds \right|} = \frac{b}{a}, \quad (149)$$

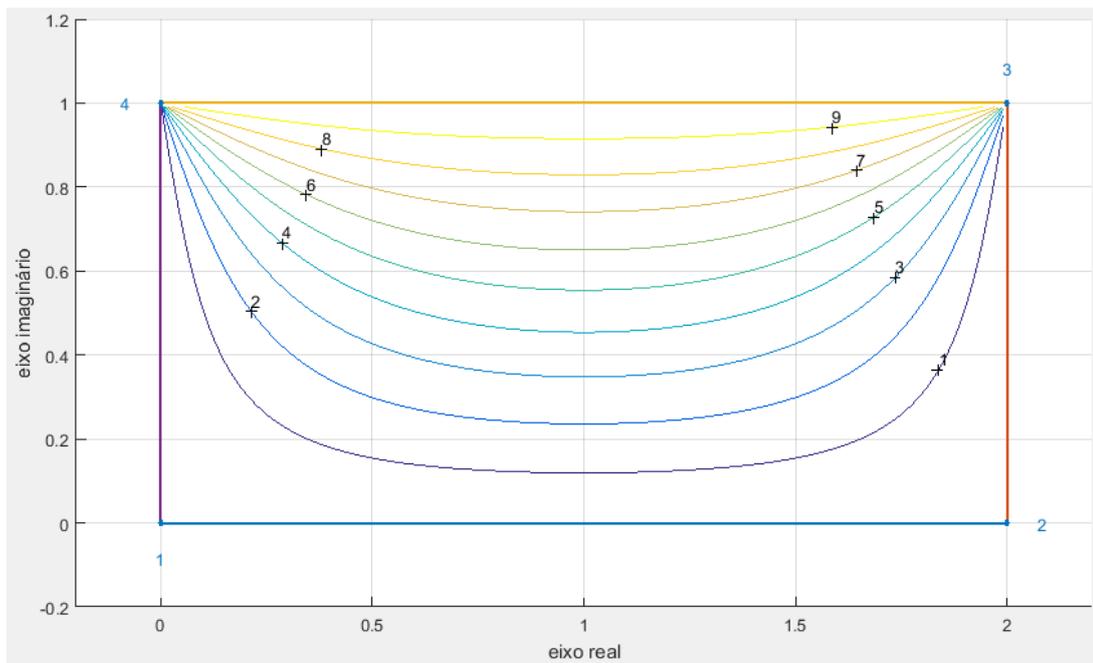
restando descobrir numericamente o valor de x_2 , dadas as dimensões a e b do retângulo.

Esse problema apresenta solução analítica pelo *Método da Separação de Variáveis* em (SADIKU, 2012), cuja expressão é

$$\phi(x, y) = \frac{4V_o}{\pi} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{j\pi x}{a} \sinh \frac{j\pi y}{a}}{j \sinh \frac{j\pi b}{a}}. \quad (150)$$

Assumindo as condições do problema $a = 2$, $b = 1$ e $V_o = 10$, truncando a série da equação (150) nos 300 primeiros termos e seguindo o código proposto para se solucionar via Schwarz-Christoffel, as soluções analítica e numérica são plotadas em um mesmo gráfico na Figura 34, apresentando diferença de valores na ordem de 10^{-5} uma com relação a outra.

Figura 34 – Equipotenciais encontradas numericamente e analiticamente sobrepostas para o Problema A com os seus respectivos potenciais indicados.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

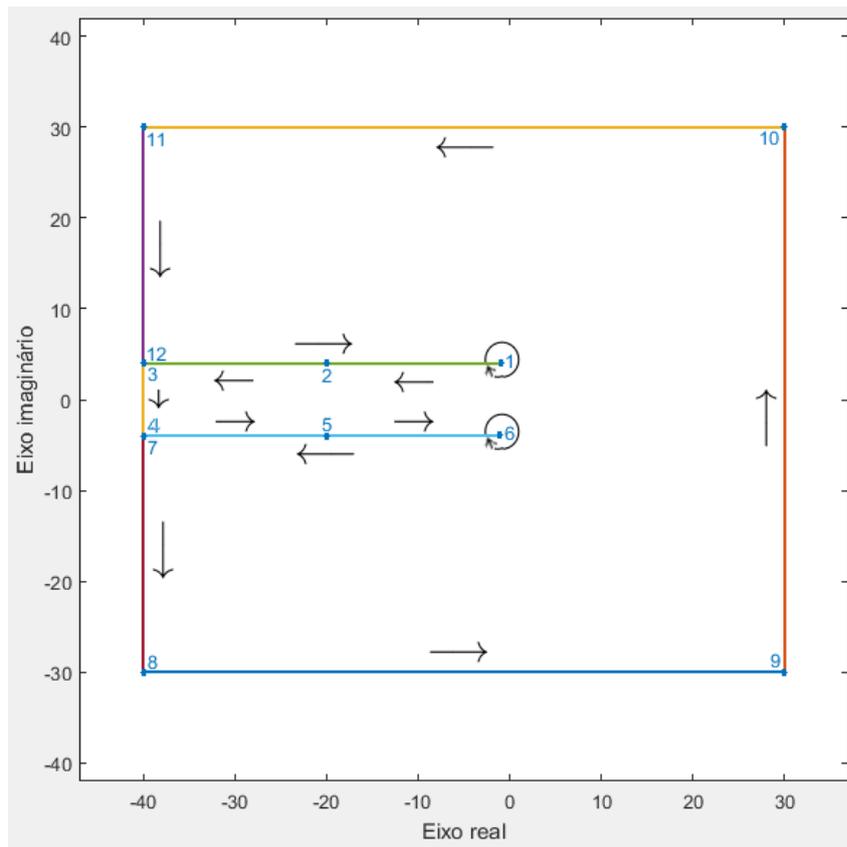
Pela Figura 34, pode-se notar também o contorno da geometria com os quatro vértices numerados no sentido anti-horário e os valores do potencial para cada uma das nove equipotenciais geradas. O potencial vai aumentando à medida que as curvas aproximam-se do lado entre os vértices 3 e 4, como é de se esperar, visto que é o único lado de potencial $V_o > 0$, sendo o potencial sobre os demais lados nulos.

5.4 Problema B

O Problema B é o mesmo Problema 1 da Seção 3.3 envolvendo o capacitor de placas paralelas de dimensões finitas. O que se quer mostrar é que a solução numérica obtida aqui via Schwarz-Christoffel coincide, com elevada exatidão, com a solução analítica obtida na Seção 3.3.

Logo, o primeiro desafio é enxergar a Figura 7, que representa o corte de uma das bordas desse capacitor de dimensões finitas, como uma região poligonal, que, nesse caso, só pode ser ilimitada. Para isso, aplica-se o método descrito na Seção 5.2, cuja etapa 1 é encontrar um polígono fechado em que alguns de seus vértices são levados ao infinito para se chegar ao polígono ilimitado desejado. O polígono fechado proposto encontra-se na Figura 35.

Figura 35 – Polígono fechado sugerido para se construir a região poligonal ilimitada relacionada ao Problema B .



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

O polígono fechado da Figura 35 apresenta $N = 12$ vértices e portanto 12 lados. Os vértices 2 e 5 apresentam ângulos internos relativos iguais a um, os vértices 1 e 6 com ângulos internos relativos iguais a dois e os demais vértices com ângulos internos relativos retos. Os lados que ligam os vértices 1 e 2 e os vértices 2 e 3 equivalem a um mesmo lado,

uma vez que o ângulo externo, ou de rotação, do vértice 2 é nulo. Mais do que isso, esses dois lados juntos se sobrepõem ao lado que liga os vértices 12 e 1, pois trata-se de uma fenda com a ponta no vértice 1. Essa mesma analogia pode ser feita para os vértices 4, 5, 6 e 7, de modo que há outra fenda com a ponta no vértice 6.

Como proposto na Seção 4.5, o sentido em que os vértices estão no polígono é sempre aquele cuja área poligonal fica sempre à esquerda, então essa é a razão que justifica o posicionamento das setas da Figura 35. Levando os vértices 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 para o infinito, de modo a manter todos os ângulos internos do polígono fixos, chega-se no polígono ilimitado com os lados entre os vértices 3 e 4, 7 e 8, 8 e 9, 9 e 10, 10 e 11, 11 e 12 inteiramente no infinito.

A etapa 2 proposta na Seção 5.2 é unir os vértices que estão adjacentes no infinito em um único vértice para representá-los. Há dois grupos de vértices adjacentes no infinito: os vértices 3 e 4 formam um grupo que representa a região interna do capacitor longe das bordas; e os vértices 7, 8, 9, 10, 11 e 12 formam o outro grupo que representa a área externa ao capacitor que se estende para todos os lados.

A etapa 3 descrita na Seção 5.2 é contabilizar a perda de vértices em cada união da etapa 2 e calcular o respectivo ângulo interno no infinito do vértice resultante. Para o grupo dos vértices 3 e 4, há a perda de um vértice. Observando a Figura 35, os vértices 3 e 4 unidos somam o ângulo interno relativo $\alpha_3 + \alpha_4 = 1$. Com a perda de um vértice, o ângulo interno relativo do vértice resultante é, portanto, nulo. Para o grupo dos vértices 7, 8, 9, 10, 11 e 12 há a perda de cinco vértices. Como $\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12} = 3$, então o ângulo interno relativo do vértice resultante é, portanto, $3 - 5 = -2$. Esses descontos acontecem na proporção do número de vértices perdidos nas uniões, pois a soma interna final de todos os ângulos deve continuar respeitando a equação (146), para a quantidade de vértices após a redução.

A etapa 4 descrita na Seção 5.2 é somar todos os ângulos internos do polígono após a união dos vértices no infinito. Os ângulos internos relativos dos vértices finitos 1, 2, 5 e 6 somam $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 = 6$, e os dois ângulos internos relativos dos vértices resultantes no infinito somam -2 . Dessa forma, a soma total dos ângulos internos do polígono ilimitado é igual a 4. De fato, após a união dos vértices no infinito, o polígono ilimitado totalizou $n = 6$ vértices, dois no infinito e quatro finitos, e a equação (146) é respeitada, resultando no valor $6 - 2 = 4$, já esperado para a soma dos ângulos internos.

Para gerar uma região poligonal limitada no *SC Toolbox*, basta que se forneça um vetor com os vértices desse polígono em sequência, ou seja, o vértice da posição 1 do vetor está ligado ao vértice da posição 2 e assim sucessivamente. Se a região poligonal for ilimitada, deve-se fornecer também um vetor com os ângulos internos relativos de cada vértice, na

mesma sequência estipulada pelas posições dos vértices. Esse ângulos fornecidos devem ser relativos, pois os seus valores são divididos por π . A Tabela 1 abaixo mostra a nova disposição dos vértices e seus respectivos ângulos internos relativos após a união dos dois grupos de vértices no infinito.

Tabela 1 – Dados do polígono do Problema B.

Vértice	Localização no plano w	Ângulo interno relativo α ($/\pi$)
1	$-1 + 4i$	2
2	$-20 + 4i$	1
3	inf	0
4	$-20 - 4i$	1
5	$-1 - 4i$	2
6	inf	-2
		$\sum = 6 - 2 = 4$

Fonte: Arquivo próprio.

Pela Tabela 1, pode-se notar que os vértices 3 e 6, que estão no infinito, têm ângulos internos relativos na faixa $-2 \leq \alpha_j \leq 0$, confirmando, assim, a Seção 4.3. Os ângulos internos finitos também estão na faixa $0 < \alpha_j \leq 2$. Novamente, o somatório dos ângulos internos relativos deu o esperado, sendo $n - 2$, n o número de vértices após a união da etapa 2.

Agora que já se tem os vetores com a localização dos vértices e seus respectivos ângulos internos, resta usar a sequência de códigos abaixo, através do *SC Toolbox*, para gerar o polígono e encontrar os pré-vértices no plano z .

Primeiro passo Usar o comando $p = \text{polygon}(vert, alpha)$, sendo os vetores *vert* e *alpha* de entrada com, respectivamente, a localização dos vértices em ordem e os ângulos internos relativos na mesma ordem;

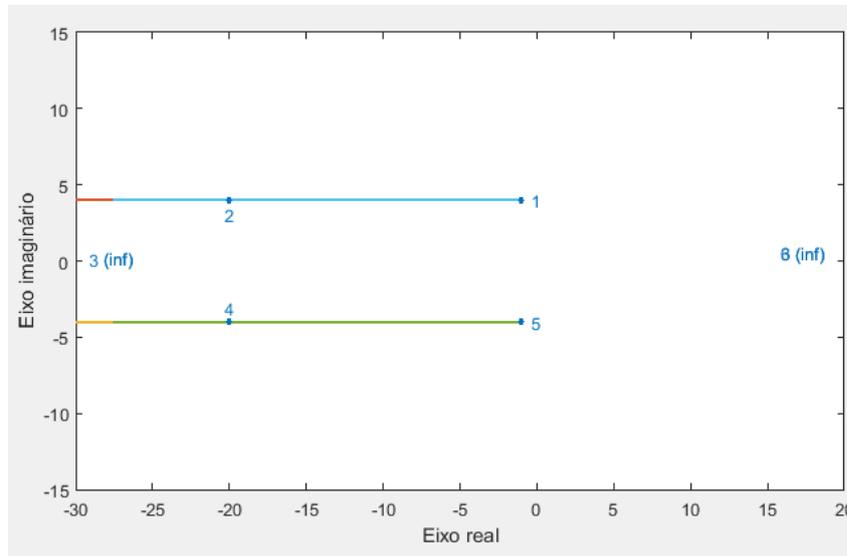
Segundo passo Usar o comando $\text{plot}(p, 'r')$, para se plotar o polígono p com os seus vértices marcados;

Terceiro passo Usar o comando $\text{stripmap}(p)$, para que o MATLAB forneça os pré-vértices da fórmula de Schwarz-Christoffel para a faixa. Esse pacote fixa os três pré-vértices (graus de liberdade), do Teorema 4.1 do *Mapeamento de Riemann* da fórmula de Schwarz-Christoffel, com os valores $z_l = -\infty$ (fim de faixa esquerdo), $z_{l+1} = 0$ e $z_h = \infty$ (fim de faixa direito), $1 \leq l \leq n$ e $1 \leq h \leq n$ para o domínio da faixa.

Aplicando esses três passos, chega-se nos pré-vértices $z_1 \approx 2.5341 + i$, $z_2 \approx -4.5921 \cdot 10^{-10} + i$, $z_3 = -\infty$, $z_4 = 0$, $z_5 \approx 2.5341$ e $z_6 = \infty$, e a Figura 36 é gerada. O segundo e

terceiro passos não são necessários para encontrar as curvas equipotenciais e as linhas de fluxo do problema de valor de contorno associado.

Figura 36 – Região poligonal ilimitada que representa uma das bordas do capacitor de placas paralelas que é o Problema B .



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

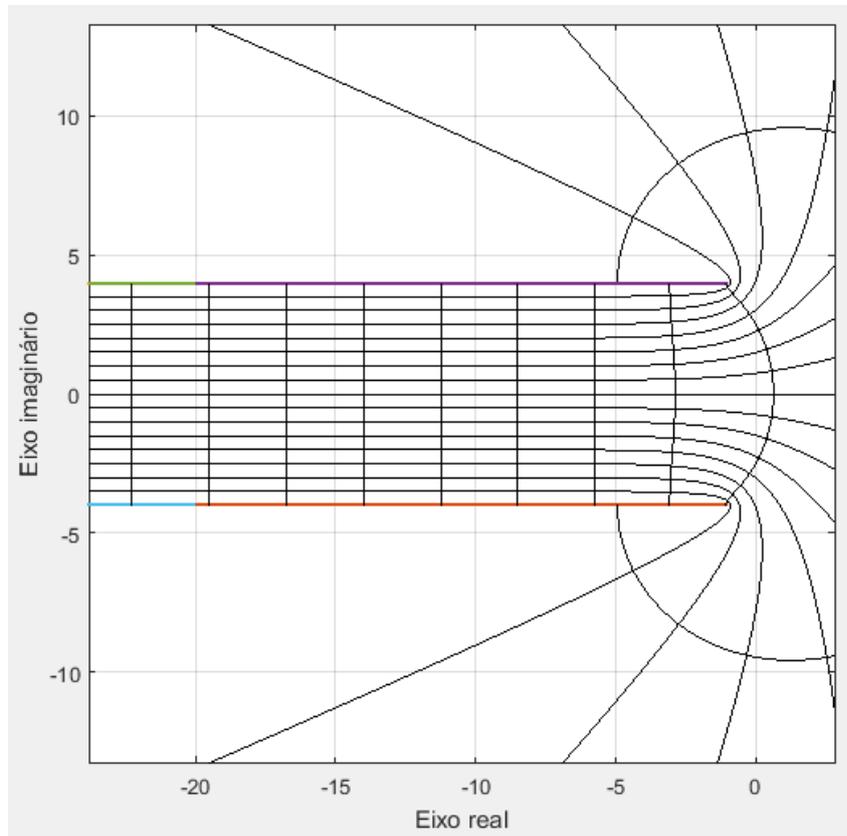
Por fim, para que se encontre tais curvas, partindo do pressuposto de que os potenciais nas placas superior e inferior são distintos, o método usado nesse Problema B é o Primeiro Método descrito na Seção 4.7 e que é baseado na *Transformação da Faixa*. Esse método não utiliza o valor das condições de contorno, mas exige que haja apenas dois “saltos” de condições de contorno distintas para todo o polígono dado. Portanto, o que resta fornecer são os dois vértices em que há o “salto” de potencial. Pela Figura 36, pode-se concluir que são os vértices 3 e 6, que estão no infinito, em que se dá a transição. Além disso, com relação à plotagem das curvas, deve-se escolher quantas curvas equipotenciais equidistantes se deseja entre as duas condições de contorno de Dirichlet constantes e distintas. E quantas linhas de fluxo. Logo, partindo dos três passos iniciais já descritos:

Quarto passo Usar o comando $f = \text{stripmap}(p, [3 \ 6])$ cujos argumentos são o polígono p gerado no primeiro passo e o vetor com os dois vértices em que há a transição de potencial;

Quinto passo Usar o comando $\text{plot}(f, 10, 15)$ em que os números 10 e 15 são as escolhas de plotar, respectivamente, 10 linhas de fluxo e 15 curvas equipotenciais. Especificamente essas curvas equipotenciais são plotadas de forma equidistantes em relação às placas superior e inferior e entre elas próprias.

Com o quarto e quinto passos, aliado ao primeiro passo que gera a região poligonal ilimitada, chega-se na Figura 37.

Figura 37 – Curvas equipotenciais e linhas de fluxo geradas para o Problema *B*.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

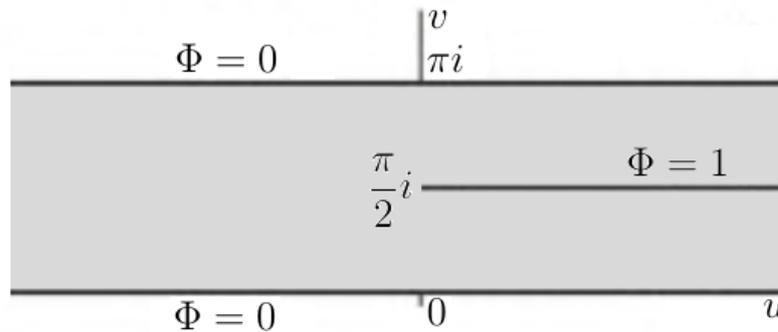
O Problema 1, que está na Seção 3.3, é o mesmo capacitor que foi resolvido analiticamente, gerando também 15 curvas equipotenciais entre as placas superior e inferior, como pode-se ver pela Figura 10. E ao se plotar ambas as soluções em um mesmo gráfico, nota-se uma sobreposição das curvas com o erro absoluto máximo na faixa de 10^{-3} , confirmando a solução numérica da transformação de Schwarz-Christoffel, o que já se previa pela solução analítica através de uma composição de funções complexas elementares da Seção 3.3.

5.5 Problema *C*

O Problema *C* é também uma região ilimitada entre duas placas paralelas, mas dessa vez ambas as placas são de dimensões “infinitas”, que podem ser tomadas com grandes dimensões e um olhar para a região longe das bordas, de modo que as bordas possam ser desconsideradas no domínio do problema. E uma terceira placa semi-infinita é incluída entre essas duas, como pode-se ver pela seção transversal das três placas na Figura 38.

O sistema de coordenadas e a unidade de comprimento são escolhidos de modo que as placas se situem nos planos $v = 0$, $v = \pi$ e $v = \pi/2$.

Figura 38 – Domínio relacionado ao Problema C.



Fonte: Adaptação de (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Deseja-se encontrar a função potencial $\Phi(u, v)$ na região entre essas placas, dadas as condições de contorno iguais a 0 para as placas externas e igual a 1 para a placa interna. Primeiramente, esse problema é solucionado analiticamente, partindo do próprio conceito de transformação de Schwarz-Christoffel. Em seguida, esse mesmo problema é solucionado numericamente pela transformação de Schwarz-Christoffel através do pacote *SC Toolbox* do MATLAB. Esse problema encontra-se em (BROWN; CHURCHILL, 2015).

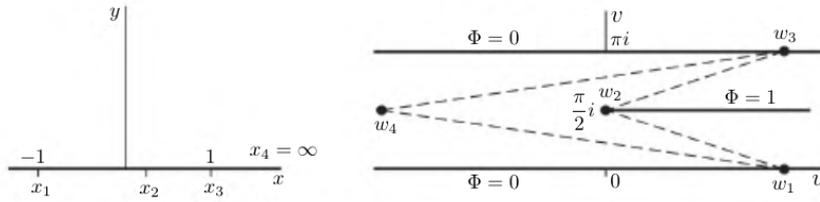
5.5.1 Solução Analítica via Transformação de Schwarz-Christoffel

Pela Figura 38, tem-se novamente uma região poligonal ilimitada. Para tratar essas regiões de forma analítica, (BROWN; CHURCHILL, 2015) trabalha com o conceito de *caso limite*, ou seja, toma-se uma região poligonal fechada e vai-se levando alguns de seus vértices em direção ao infinito. Dessa forma, no limite, os vértices estão no infinito e a região poligonal torna-se ilimitada.

Um ponto a ser verificado com a solução analítica desse problema é que a transformação de Schwarz-Christoffel, representada por uma integral, pode resultar em uma função elementar, mesmo que na maioria dos problemas não haja solução analítica.

Para equacionar a transformação de Schwarz-Christoffel, trabalha-se com um quadrilátero no plano w cujo caso limite encontra-se na Figura 39. Além disso, nessa mesma figura, encontra-se o plano z em que o semiplano superior apresenta, ao longo do eixo real, quatro pré-vértices. Como, pelo Teorema 4.1, pode-se escolher três pré-vértices do eixo real, então opta-se por $x_1 = -1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = \infty$, ou seja, os mesmos parâmetros fixados no pacote *SC Toolbox*. Dessa forma, o *Problema do Parâmetro* de Schwarz-Christoffel está relacionado a se determinar o valor de x_2 .

Figura 39 – Domínio e imagem do Problema C , sendo a região poligonal ilimitada representada pelo caso limite do polígono fechado de linha tracejada.



Fonte: Adaptação de (BROWN; CHURCHILL, 2015).

O polígono ilimitado que representa a região entre as três placas é considerado o caso limite do quadrilátero fechado tracejado da Figura 39, quando os pontos w_1 e w_3 se movem para a direita e o ponto w_4 para a esquerda. Dessa forma, ao se ir afastando w_1 , w_3 e w_4 , percebe-se que os valores limites para os ângulos internos do polígono são

$$\pi\alpha_1 = 0, \quad \pi\alpha_2 = 2\pi, \quad \pi\alpha_3 = 0, \quad \pi\alpha_4 = 0.$$

Portanto, o somatório desses quatro ângulos é 2π , confirmando a relação $(n - 2)\pi$, n o número de lados do polígono, da Proposição 4.2. De posse dos valores dos ângulos internos relativos e com a relação $\alpha_j + k_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, 4$), tem-se os seguintes ângulos externos relativos

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 1.$$

Assim, utilizando a transformação de Schwarz-Christoffel (114), então

$$w = A \int_{z_0}^z (s + 1)^{-1} (s - x_2) (s - 1)^{-1} ds + B. \quad (151)$$

De (151), utilizando frações parciais, tem-se

$$w = A \int_{z_0}^z \frac{s - x_2}{s^2 - 1} ds + B = \frac{A}{2} \int_{z_0}^z \left(\frac{1 + x_2}{s + 1} + \frac{1 - x_2}{s - 1} \right) ds + B. \quad (152)$$

A integral em (152), após se tirar as frações parciais, tem o ramo principal da função logarítmica como primitiva de cada uma das frações. Uma vez que o limite inferior de integração z_0 e a constante B estão diretamente associados, pode-se resolver a integral em um só passo, chegando em

$$w = \frac{A}{2} [(1 + x_2) \text{Log}(z + 1) + (1 - x_2) \text{Log}(z - 1)] + B. \quad (153)$$

Assim, deve-se encontrar os valores de A , B e x_2 para se ter a função de mapeamento. Sejam A_1 , A_2 e B_1 , B_2 as partes reais e imaginárias de A e B . Quando $z = x$, o ponto w

está sobre a fronteira do polígono ilimitado, ou seja, sobre uma das três placas infinitas. Expandindo a equação (153) para $z = x$, então

$$u + iv = \frac{1}{2}(A_1 + iA_2)\{(1 + x_2)[\text{Log } |x + 1| + i \arg(x + 1)] + (1 - x_2)[\text{Log } |x - 1| + i \arg(x - 1)]\} + B_1 + iB_2. \quad (154)$$

Para determinar as constantes em (154), o primeiro ponto a ser observado é que à medida que se vai caminhando ao longo do eixo real, com $x < -1$, vai-se caminhando ao longo da placa inferior $u = 0$, pois a parte $x > 1$ é a placa superior que une w_3 e w_4 . Além disso, ambos os segmentos de reta $-1 < x < x_2$ e $x_2 < x < 1$ são levados na placa do meio e isso não compromete o caráter de injeção da função, pois ocorre somente no contorno, ou seja, para o limite do polígono fechado tracejado da Figura 39. Para qualquer ponto entre as três placas, por mais próximo que esteja de alguma das placas, a função é injetiva.

Assim, quando $v = 0$ e u tende para o infinito por valores positivos, a pré-imagem x tende para o ponto $z = -1$ pela esquerda. Daí, tira-se

$$\arg(x + 1) = \pi, \quad \arg(x - 1) = \pi, \quad \text{Log } |x + 1| \longrightarrow -\infty,$$

e como $-1 < x_2 < 1$, a parte real dentro das chaves da equação (154) tende a infinito. Assim, como a placa inferior está em $v = 0$, logo $A_2 = 0$ para se evitar que a parte imaginária do lado direito da equação (154) tenda a infinito. Diante disso, igualando as partes imaginárias nos dois lados, tem-se

$$0 = \frac{1}{2}A_1[(1 + x_2)\pi + (1 - x_2)\pi] + B_2.$$

Daí, tira-se que

$$B_2 = -\pi A_1, \quad A_2 = 0. \quad (155)$$

Fazendo uma análise análoga, os pontos onde $-1 < x \leq x_2$ são levados na semirreta $v = \pi/2$, $u \geq 0$. Portanto, para essa faixa do eixo real no plano z , tem-se

$$\arg(x + 1) = 0, \quad \arg(x - 1) = \pi.$$

Identificando as partes imaginárias dos dois membros da equação (154) para esses pontos, chega-se a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{A_1}{2}(1 - x_2)\pi + B_2. \quad (156)$$

Na busca de mais informações para se descobrir todos os parâmetros, para $x > 1$ sobre o eixo real do plano z , tem-se as imagens sobre a placa superior $v = \pi i$, ou seja, a

ligação dos vértices w_3 e w_4 na posição limite. Identificando as partes imaginárias em (154) para esses pontos e usando

$$\arg(x + 1) = 0, \quad \arg(x - 1) = 0,$$

conclui-se que

$$B_2 = \pi.$$

Usando o valor de B_2 em (155), tira-se

$$A_1 = -1.$$

E usando os valores de B_2 e A_1 em (156), conclui-se que

$$x_2 = 0.$$

Dessa forma, quando $x = 0$, então $w = \pi i/2$. Considerando essa transformação do ponto $x = 0$ em $w = \pi i/2$ e levando os quatro parâmetros encontrados em (154), então, ao se identificar as partes reais dessa equação, chega-se que

$$0 = -\frac{1}{2}(\text{Log}|1| + \text{Log}|-1|) + B_1,$$

ou seja, $B_1 = 0$. Portanto, de posse dos parâmetros desejados, a transformação (153) torna-se

$$w = -\frac{1}{2}[\text{Log}(z + 1) + \text{Log}(z - 1)] + \pi i. \quad (157)$$

Exponenciando dos dois lados, chega-se em

$$z^2 = 1 + \exp(-2w). \quad (158)$$

Sob essa transformação, a função harmônica procurada $\Phi(u, v)$ torna-se uma função harmônica de x e y no semiplano superior, que já tem uma solução genérica para condições de contorno de Dirichlet constantes, estabelecida na Seção 4.7, pela equação (138). Aplicando, assim, a equação (138) para o semiplano superior deste problema, então

$$\phi(z) = \text{Re} \left\{ -\frac{i}{\pi} \left[\phi_1 \text{Log}(z - x_1) + \phi_2 \text{Log} \left(\frac{z - x_2}{z - x_1} \right) + \phi_3 \text{Log} \left(\frac{z - x_3}{z - x_2} \right) - \phi_4 \text{Log}(x_3 - z) \right] \right\}. \quad (159)$$

Pelas relações já estabelecidas entre os contornos dos planos z e w , então é direto que

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1 = 0, & -\infty < x < -1 \\ \phi_2 = 1, & -1 < x < 0 \\ \phi_3 = 1, & 0 < x < 1 \\ \phi_4 = 0, & 1 < x < \infty \end{cases}. \quad (160)$$

Aplicando (160) em (159),

$$\phi(z) = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{i}{\pi} \left[\operatorname{Log} \left(\frac{z}{z+1} \right) + \operatorname{Log} \left(\frac{z-1}{z} \right) \right] \right\}. \quad (161)$$

Usando as propriedades do ramo principal do logaritmo em (161),

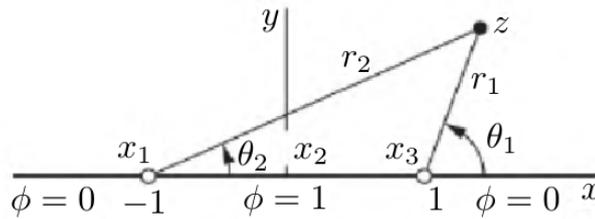
$$\phi(z) = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{i}{\pi} \left[\operatorname{Log} \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + i \arg \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right] \right\}. \quad (162)$$

Por fim, desenvolvendo a equação (162), chega-se em

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} \arg \left(\frac{z-1}{z+1} \right). \quad (163)$$

A equação (163) representa a função potencial no semiplano superior, e ela ainda pode ser mais trabalhada geometricamente, a fim de se extrair mais informações. Para isso, denomina-se o módulo do “vetor” função $z-1$ de r_1 e o argumento de θ_1 ; do mesmo modo o módulo do “vetor” função $z+1$ de r_2 e o argumento de θ_2 . Com base nessas atribuições, a Figura 40 é elaborada.

Figura 40 – Problema de valor de contorno C transferido para o semiplano superior.



Fonte: Adaptação de (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Pela Figura 40, é necessário que $0 < \theta_1 < \pi$ e $0 < \theta_2 < \pi$. Com base nessa figura e tomando a equação (163), logo

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} (\theta_1 - \theta_2). \quad (164)$$

De (164),

$$\operatorname{tg}(\pi\phi) = \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2). \quad (165)$$

Considerando algumas identidades trigonométricas complexas,

$$\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{cos}(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{cos}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{cos}\theta_1}{\operatorname{cos}\theta_1 \operatorname{cos}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2}. \quad (166)$$

Pela Figura 40, tem-se $\operatorname{sen}\theta_1 = y/r_1$, $\operatorname{sen}\theta_2 = y/r_2$, $\operatorname{cos}\theta_1 = (x-1)/r_1$ e $\operatorname{cos}\theta_2 = (x+1)/r_2$. Substituindo esses valores em (166), chega-se em

$$\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}. \quad (167)$$

Substituindo (167) em (165), logo

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right). \quad (168)$$

Essa equação (168), assim como (163), representa o potencial para o semiplano superior, com a diferença que (168) já está em função das variáveis x e y separadamente.

O que resta, por fim, é relacionar as coordenadas x e y em função de u e v , para se encontrar $\Phi(u, v)$. Partindo da equação (158) que relaciona z a w , substituindo $z = x + iy$ e $w = u + iv$ e igualando as partes reais de cada lado chega-se em

$$x^2 - y^2 = 1 + \exp(-2u) \cos(2v), \quad (169)$$

Sendo u real, então $\exp(-2u) = e^{-2u}$. Partindo novamente da equação (158), igualando os módulos ao quadrado de $z^2 - 1$ e $\exp(-2w)$, e substituindo novamente $z = x + iy$ e $w = u + iv$, resulta em

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) - 1 + e^{-4u}. \quad (170)$$

Substituindo (169) no lado direito de (170), então

$$x^2 + y^2 = \sqrt{1 + 2e^{-2u} \cos(2v) + e^{-4u}}. \quad (171)$$

A fim de simplificar o tratamento algébrico daqui para frente, utiliza-se uma variável intermediária q , tal que, pela fórmula (171),

$$q = x^2 + y^2 - 1 = \sqrt{1 + 2e^{-2u} \cos(2v) + e^{-4u}} - 1. \quad (172)$$

Partindo de

$$2[(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)] = 4y^2, \quad (173)$$

e usando as fórmulas (169) e (172) em (173), logo

$$4y^2 = 2q - 2e^{-2u} \cos(2v). \quad (174)$$

Como no plano z , $y > 0$ pela transformação, então de (174), resulta-se

$$2y = \sqrt{2q - 2e^{-2u} \cos(2v)}. \quad (175)$$

Fazendo um último ajuste algébrico, toma-se (172), resultando em

$$(q + 1)^2 = 1 + 2e^{-2u} \cos(2v) + e^{-4u},$$

ou seja,

$$2q - 2e^{-2u} \cos(2v) = e^{-4u} - q^2. \quad (176)$$

Substituindo (176) em (175), então

$$2y = \sqrt{e^{-4u} - q^2}. \quad (177)$$

Por fim, substituindo (177) e (172) em (168), tem-se

$$\Phi(u, q) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{e^{-4u} - q^2}}{q} \right), \quad (178)$$

com $q = \sqrt{1 + 2e^{-2u} \cos(2v) + e^{-4u}} - 1$. As funções harmônicas ϕ e Φ encontradas são equivalentes às funções de (BROWN; CHURCHILL, 2015).

Com a equação fechada (178) para o potencial na região poligonal ilimitada, então as curvas equipotenciais $\Phi = c$, c uma constante variando entre as condições de contorno 0 e 1, podem ser desenhadas no MATLAB através do comando *contour* que desenha as curvas de nível da função dada. Essas curvas estão desenhadas na Figura 42, juntamente com a solução numérica apresentada a seguir.

5.5.2 Solução Numérica pelo Pacote *SC Toolbox*

Para o desenvolvimento da solução numérica, através do pacote *SC Toolbox*, deve-se, primeiramente, traçar o polígono cuja região poligonal seja a do problema em questão. Mas o polígono tracejado da Figura 39, quando levado para a região limite, apresenta w_3 , w_4 e w_1 no infinito, ou seja, três vértices consecutivos (sentido anti-horário) no infinito. E dois vértices ou mais seguidos no infinito não é permitido pelo *SC Toolbox*, apresentando uma mensagem na janela de comandos do MATLAB. Isso acontece porque fica comprometida a montagem do sistema não linear relacionado ao *Problema do Parâmetro*, como descrito na Seção 4.6.

Mas basta que se coloque dois vértices finitos no corte da placa superior $w = u + i\pi$ e dois finitos no corte da placa inferior $w = u$. Os vértices escolhidos, e seus respectivos ângulos internos relativos encontram-se na Tabela 2, que foi desenvolvida analogamente ao que foi feito para a solução numérica do Problema *B* na Seção 5.4. Isto é, através da extensão de um polígono fechado, usando o método intuitivo da Seção 5.2.

Tabela 2 – Dados do polígono do Problema *C*.

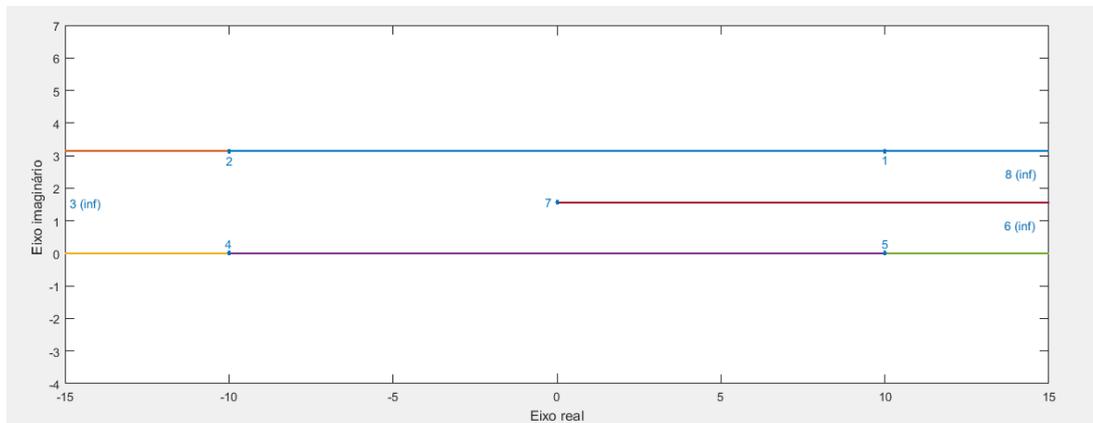
Vértice	Localização no plano w	Ângulo interno relativo α ($/\pi$)
1	$10 + i\pi$	1
2	$-10 + i\pi$	1
3	inf	0
4	-10	1
5	10	1
6	inf	0
7	$i\pi/2$	2
8	inf	0

$\sum = 8 - 2 = 6$

Fonte: Arquivo próprio.

Pela Tabela 2, pode-se notar que o somatório dos ângulos internos obedece à fórmula geral $(n - 2)\pi$, sendo n o número de vértices totais do polígono. Através dessa tabela, os vetores com os vértices e com os respectivos ângulos internos relativos são criados e o polígono é desenvolvido pelo pacote *SC Toolbox* no MATLAB, resultando na Figura 41.

Figura 41 – Polígono do Problema *C* cuja região ilimitada representa a seção transversal da região entre as três placas.

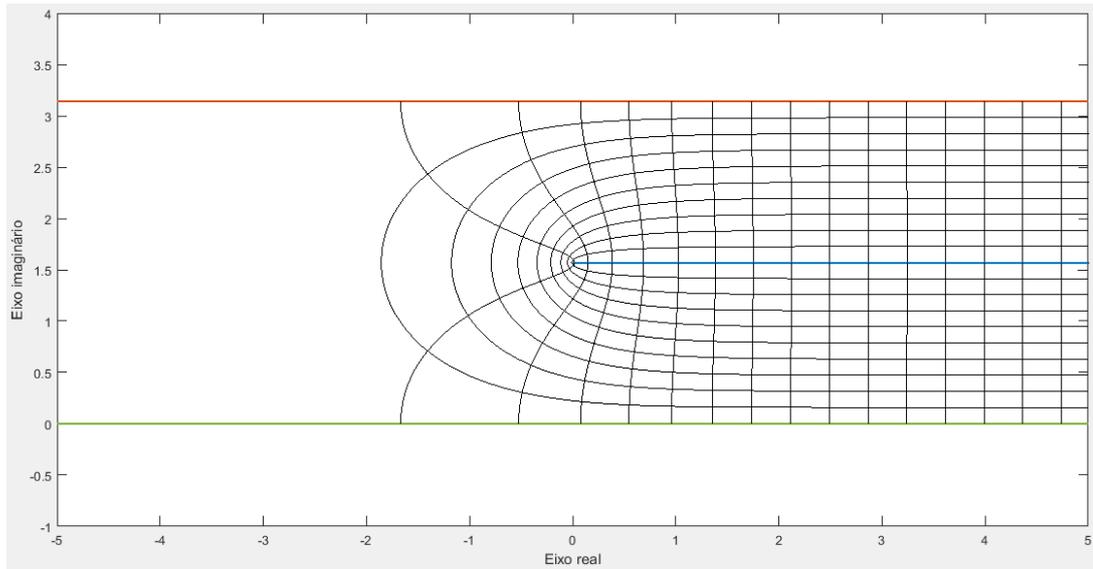


Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

Nesse problema de valor de contorno, assim como no problema *B*, há apenas dois vértices que são transições de potenciais distintos, o que permite novamente o uso do Primeiro Método da Seção 4.7 que é baseado na *Transformação da Faixa*. Sendo a placa superior e inferior de mesmo potencial nulo e a placa intermediária de potencial 1, então os dois vértices em que há o “salto” de potencial são o 6 e o 8. Dessa forma, utilizando os mesmos passos realizados na Seção 5.4, nove curvas equipotenciais e sessenta linhas de fluxo foram geradas no MATLAB.

A Figura 42 foi criada pelo uso dos métodos analítico e numérico dessa seção no que tange às curvas equipotenciais. No método analítico, exigiu-se as curvas equipotenciais de valores 0.1 a 0.9 em intervalos de 0.1, ou seja, nove curvas no total. E no método numérico, exigiu-se nove curvas equipotenciais equidistantes entre si e entre os três contornos do problema. Ou seja, trata-se das mesmas curvas equipotenciais.

Figura 42 – Curvas equipotenciais e linhas de fluxo geradas para o Problema *C*.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

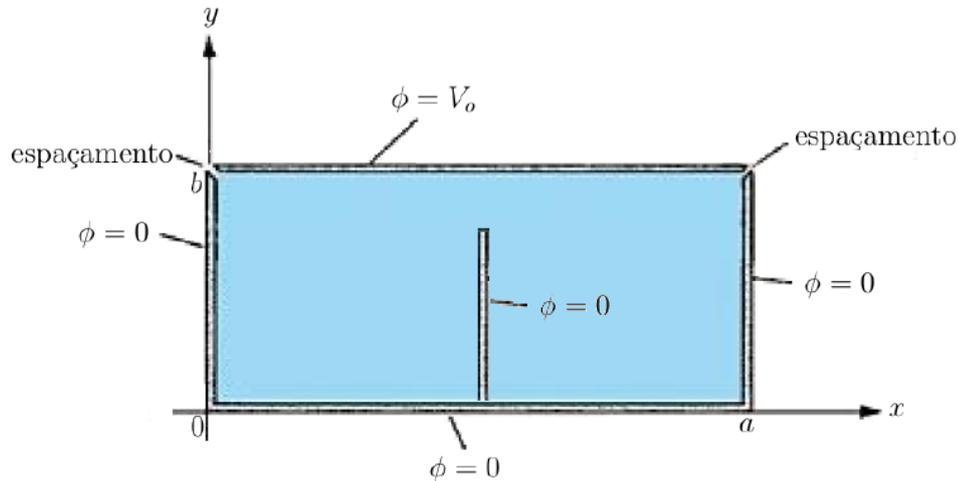
A Figura 42 apresenta trinta linhas de fluxo, das sessenta geradas, devido ao zoom que foi dado na região próxima à ponta da fenda, sendo quinze entre a placa intermediária e a placa superior e as outras quinze são simétricas em relação à placa intermediária. Essas linhas de fluxo foram geradas apenas numericamente. As curvas equipotenciais numéricas estão sobrepostas, na escala da Figura 42, com as curvas geradas analiticamente, apresentando os erros absolutos na ordem de 10^{-4} com relação à solução analítica.

5.6 Problema *D*

Este Problema *D* envolve a geometria do retângulo com uma fenda no seu interior, como é notado na Figura 43. A fenda encontra-se na posição $x = 0.5a$ e tem o comprimento de $0.75b$, sendo a e b , respectivamente, a largura e a altura do retângulo. O lado superior horizontal do retângulo apresenta a condição de contorno de Dirichlet constante no valor de V_0 e apresenta a condição de Dirichlet constante nula no restante da fronteira, inclusive a própria fenda. O objetivo proposto é encontrar a família de curvas equipotenciais desse problema utilizando o Segundo Método da Seção 4.7 através do pacote *SC Toolbox* e

comparar com o resultado encontrado pelo *método de Elementos Finitos* do pacote *PDE Toolbox*.

Figura 43 – Domínio relacionado ao Problema *D*.



Fonte: Adaptação de (SADIKU, 2012).

O retângulo com fenda da Figura 43 pode ser visto como um polígono de 7 vértices, cujas localizações e respectivos ângulos internos relativos estão na Tabela 3, para $a = 2$ e $b = 1$.

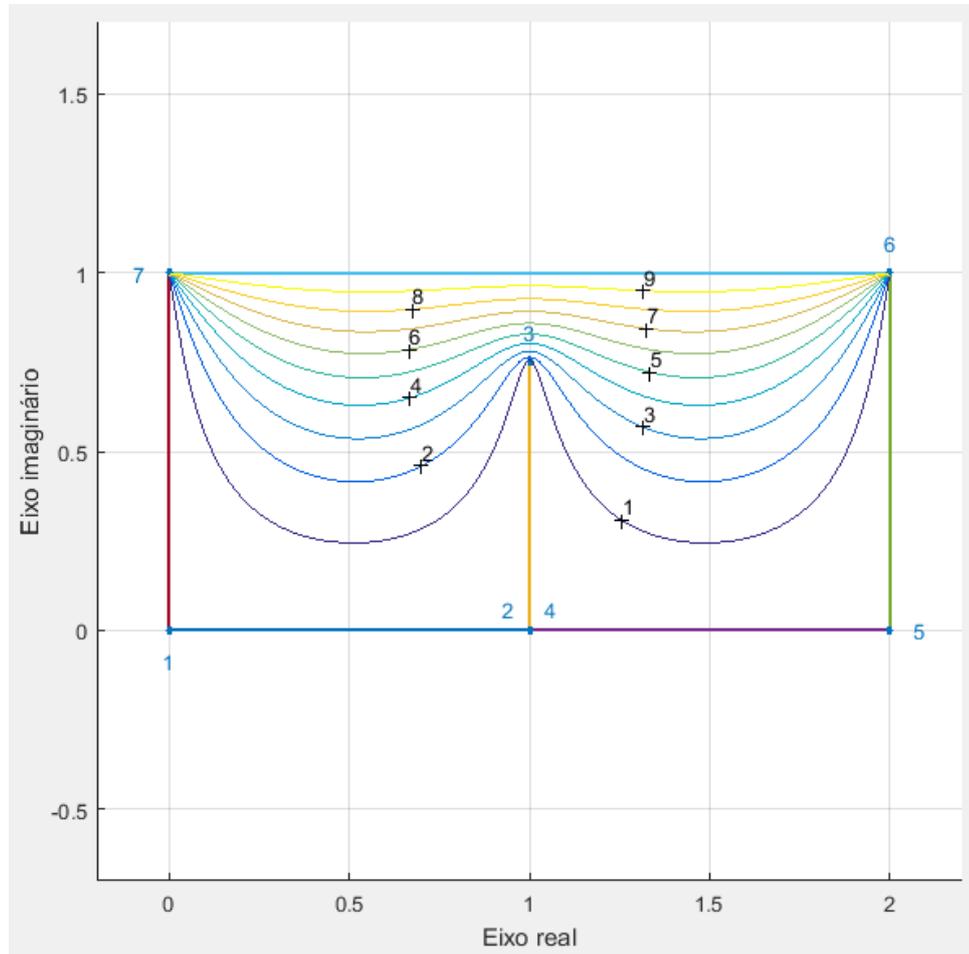
Tabela 3 – Dados do polígono do Problema *D*.

Vértice	Localização no plano w	Ângulo interno relativo α ($/\pi$)
1	0	1/2
2	1	1/2
3	$1 + 0.75i$	2
4	1	1/2
5	2	1/2
6	$2 + i$	1/2
7	i	1/2
		$\sum = 7 - 2 = 5$

Fonte: Arquivo próprio.

Por não envolver vértices no infinito, o método a ser aplicado nesse problema é o segundo método da Seção 4.7, que basicamente leva essa região retangular para o semiplano superior, onde já se tem uma solução analítica pronta. E a forma como se leva essa solução pronta de volta para a geometria original é através de uma transformação de Schwarz-Christoffel modificada, como encontra-se na Seção 4.7. Utilizando a mesma sequência de comandos propostos para o Problema *A* com $V_0 = 10$, a solução encontra-se na Figura 44.

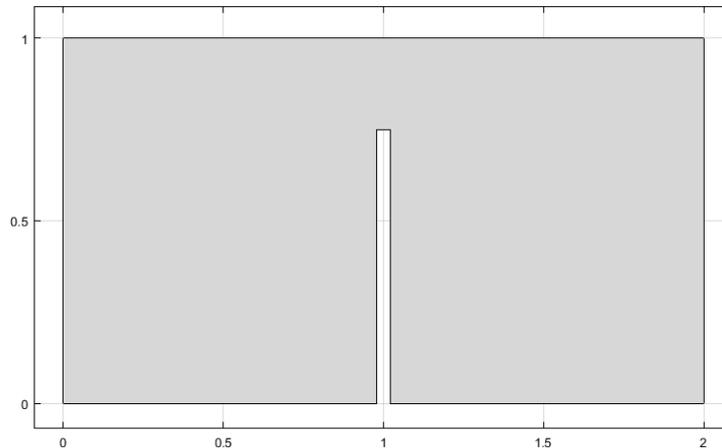
Figura 44 – Curvas equipotenciais geradas para o Problema *D*.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

Esse mesmo problema foi solucionado utilizando o *método de Elementos Finitos* do *PDE Toolbox* do MATLAB. Mas no *PDE Toolbox* não é possível desenhar fendas na fronteira. Para resolver esse empecilho, foi adotado um contorno retangular de espessura no valor de 0.001, resultando em um polígono semelhante ao da Figura 45. No interior desse polígono aproximado, foi gerada uma malha com 271872 elementos triangulares e 136577 nós, resultando nas mesmas curvas equipotenciais da Figura 44 com o erro absoluto na ordem de 10^{-4} em relação à solução via Schwarz-Christoffel.

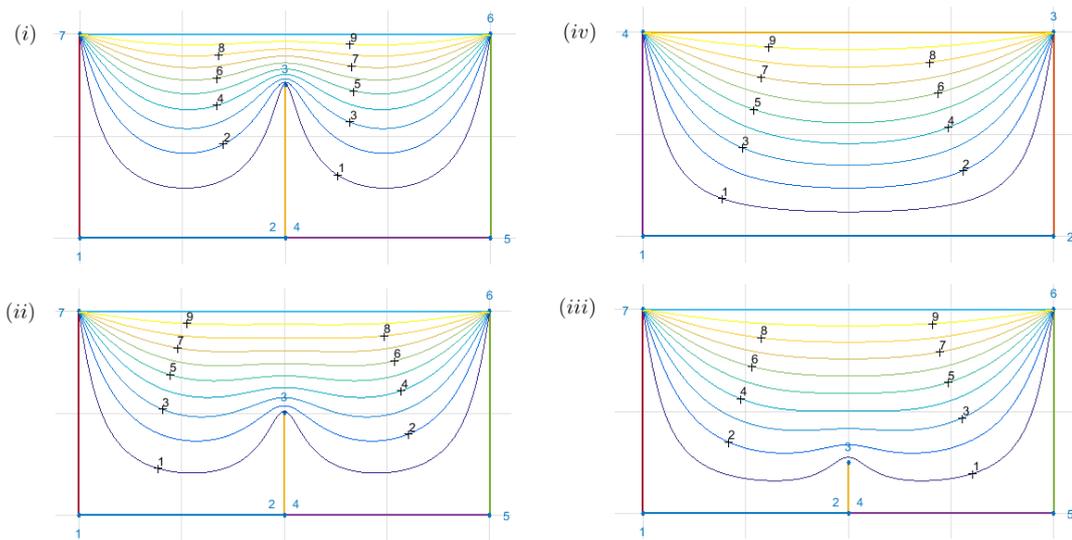
Figura 45 – Polígono aproximado para representar um retângulo com uma fenda no interior.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

Outro ponto importante a ser observado é que à medida que a fenda vai diminuindo o seu comprimento, as curvas equipotenciais vão se aproximando das curvas do Problema *A*, que é o caso do retângulo sem fenda. De fato, a Figura 46 mostra as curvas equipotenciais para as fendas de tamanhos 0.75, 0.50 e 0.25, além do retângulo sem fenda. Para todos esses tamanhos, foi utilizado o pacote *SC Toolbox*, confirmando, mais uma vez, a excelente aplicabilidade das transformações de Schwarz-Christoffel para polígonos com fenda.

Figura 46 – Curvas equipotenciais do Problema *D* com o tamanho da fenda (i) 0.75, (ii) 0.50, (iii) 0.25 e (iv) nulo.



Fonte: Arquivo próprio gerado pelo software MATLAB.

Os problemas *A*, *B*, *C* e *D* desse capítulo envolvem condições de contorno de Dirichlet constantes e os resultados foram todos bem sucedidos, mas o pacote *SC Toolbox* também

resolve problemas com condições de contorno de Neumann nulas. Nesse capítulo não há problemas que envolvam essas condições de contorno, visto que o método que embasa tal aplicabilidade nesse pacote envolve teorias mais avançadas de Variáveis Complexas, e esse tópico fica como proposta de continuidade desse trabalho.

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Resultados Alcançados

O objetivo geral dessa dissertação foi atingido, visto que o uso das transformações conformes e de Schwarz-Christoffel, como método de abordagem de problemas bidimensionais envolvendo a equação de Laplace, foi bem sucedido tanto com soluções analíticas, quanto numéricas pelo uso do pacote *SC Toolbox* do MATLAB. Foi usado também o *método de Elementos Finitos* do pacote *PDE Toolbox* do MATLAB para comparar os resultados de alguns problemas, pelo fato de ser um método bastante robusto e difundido comercialmente. Os principais resultados matemáticos, retirados do referencial teórico e contidos nos Capítulos 2 e 4, que embasam o uso dessas transformações, são:

1. As funções complexas analíticas satisfazem as equações de Cauchy-Rieman;
2. Uma função complexa analítica representa uma transformação conforme sobre o domínio em que tem derivada não nula;
3. A transformação de Schwarz-Christoffel é conforme para o seu domínio, exceto para alguns pontos sobre o contorno do problema (pré-vértices do polígono);
4. As condições de contorno de Dirichlet constantes e de Neumann nulas permanecem inalteradas ao passarem por uma transformação conforme;
5. A equação de Laplace permanece inalterada ao passar por uma transformação conforme;
6. Toda transformação conforme e injetiva admite uma transformação inversa única que também é conforme.

Foram trabalhados seis problemas no Capítulo 3 com o uso de transformações conformes tabeladas e quatro problemas no Capítulo 5 com o uso de transformações de Schwarz-Christoffel, sendo um dos problemas repetido em ambos os capítulos. Para o uso das transformações de Schwarz-Christoffel, foi necessário definir polígono de uma forma mais ampla, trazendo o conceito de região poligonal ilimitada, ou seja, com pelo menos um

vértice no infinito. As vantagens das transformações de Schwarz-Christoffel em relação às transformações conformes quaisquer é que elas podem ser montadas, partindo da região poligonal desejada, através do *Problema do Parâmetro* e, então, são facilmente resolvidas computacionalmente. Já para o uso de uma transformação conforme qualquer, deve-se obter ou montar uma biblioteca de mapeamentos conformes para o uso de uma composição possível que atenda ao objetivo de facilitador do problema.

Todos os problemas tratados pelas transformações de Schwarz-Christoffel apresentam domínios simplesmente conexos, ou seja, não são dotados de “buracos” em seus domínios, diferentemente do que acontece para problemas tratados por transformações conformes, como o Problema 3 do Capítulo 3. Isso se deve ao fato das demonstrações da forma canônica de Schwarz-Christoffel do semiplano superior em (NEHARI, 1952) e (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002) partirem do pressuposto de uma região poligonal sem “buracos”. O modo de como adaptar essas transformações a domínios que não sejam simplesmente conexos é uma proposta de continuidade dessa dissertação.

6.2 Propostas de Continuidade

Os resultados obtidos neste trabalho proporcionam a abertura para diversas atividades posteriores. Nesse sentido, as propostas de continuidade são:

1. Abordar problemas que envolvam a Equação de Laplace com pelo menos uma condição de contorno de Neumann nula. Pelo viés de Schwarz-Christoffel através do *SC Toolbox* proposto em (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002), é necessário o aprofundamento em outros conhecimentos da teoria das Variáveis Complexas, como, por exemplo, “Prolongamento Analítico”, “Superfícies de Riemann”;
2. Adaptar os métodos relacionados às transformações de Schwarz-Christoffel visando aos problemas na eletrostática que envolvam a equação de Laplace com mais de um meio dielétrico homogêneo e que apresentem “buracos no domínio”, inclusive para a melhoria do pacote *SC Toolbox* do MATLAB;
3. Pesquisar, equacionar, implementar e simular outras formas possíveis da transformação de Schwarz-Christoffel, como, por exemplo, a fórmula que leva o disco unitário ou semiplano superior na região exterior ao polígono, e não mais interior. Além disso, há também a forma de Schwarz-Christoffel que leva polígonos em retângulos de diferentes razões entre os seus lados, razão essa que pode ter vários sentidos físicos, como a resistência elétrica de um resistor. Outra forma muito importante também é a forma de Schwarz-Christoffel que leva o semiplano superior ou disco unitário em um conjunto de arcos conectados em suas extremidades. E inclusive (DRISCOLL; TREFETHEN, 2002) estende o conceito de polígono, para incluir esse conjunto, mas não prevê em seu pacote *SC Toolbox* do MATLAB a implementação dessa última

forma sugerida;

4. Pesquisar sobre a utilização das transformações conformes e de Schwarz-Christoffel como auxílio a métodos numéricos já existentes que visem à solução de problemas de valor de contorno que envolvam as equações de Poisson e de Helmholtz em duas dimensões, e não mais a equação de Laplace;
5. Pesquisar sobre a utilização das transformações conformes e de Schwarz-Christoffel como auxílio a métodos numéricos já existentes que visem à solução de problemas de valor de contorno que envolvam equações com termos transientes e que abarquem modelos de maior complexidade.

A intenção desta dissertação, com as transformações conformes e de Schwarz-Christoffel, em nenhum momento foi competir com os métodos numéricos já difundidos comercialmente, como, por exemplo, o *método de Elementos Finitos*, pois a robustez desses métodos é muito grande, inclusive em problemas de três dimensões assimétricos. Pelo contrário, a terceira proposta de continuidade sugerida vem para unir esses dois campos, até mesmo em termos de algoritmo, extraindo o que há de melhor em cada um.

A sugestão de continuidade pelas equações de Poisson e da onda, de Helmholtz, vem do fato delas se manterem como tais ao passarem por uma transformação conforme, ainda que com um fator multiplicativo relacionado à função transformadora. Esse fator está relacionado ao Teorema 2.10 e, principalmente, à equação (29) da Seção 2.6. (BROWN; CHURCHILL, 2015) traz essa relação para a Equação de Poisson e (RECK; THOMSEN; HANSEN, 2011) para a Equação de Helmholtz. (RECK; THOMSEN; HANSEN, 2011) resolve a equação de Helmholtz em uma região poligonal ilimitada através de uma composição de duas transformações de Schwarz-Christoffel para se levar a solução analítica do domínio retangular, através de uma série infinita de equações de Poisson, usando séries bidimensionais de Fourier, para o domínio original. Mas, como consta nesse artigo, encontrar soluções analíticas é bastante complexo, ainda mais com o fator multiplicativo relacionado à função, o que sugere, muito naturalmente, o uso dos métodos numéricos como solucionadores do problema na geometria mais “adequada” de tratamento.

Referências

ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações**. [S.l.]: LTC, 2008. ISBN 8521612176. Citado 11 vezes nas páginas 12, 13, 15, 22, 30, 31, 32, 33, 39, 46 e 56.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 67.

BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. **Variáveis Complexas e Aplicações**. [S.l.]: Mc Graw Hill, 2015. ISBN 8580555175. Citado 21 vezes nas páginas 2, 9, 15, 17, 18, 19, 23, 25, 30, 55, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 94, 95, 98, 100 e 109.

CHUANG, J. M.; GUI, Q. Y.; HSIUNG, C. C. Numerical computation of Schwarz–Christoffel transformation for simply connected unbounded domain. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier Science, v. 105, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 73.

CHURCHILL, R. V. **Variáveis Complexas e suas aplicações**. [S.l.]: Mc Graw Hill, 1975. Citado 21 vezes nas páginas 7, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 19, 21, 24, 30, 31, 32, 38, 39, 59, 60, 63, 69, 76 e 77.

DRISCOLL, T. A.; TREFETHEN, L. N. **Schwarz-Christoffel Mapping (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics)**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0521807263. Citado 20 vezes nas páginas 1, 2, 3, 4, 58, 59, 62, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 79, 80, 81, 82, 84, 85 e 108.

FLOREA, O. A novel approach of the conformal mappings with applications in biotribology. **Analele Universitatii “Ovidius” Constanta - Seria Matematica**, Walter de Gruyter GmbH, v. 23, n. 1, p. 99–114, jan 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1515/auom-2015-0008>>. Citado na página 2.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics; 4th ed.** Boston, MA: Pearson, 2013. Re-published by Cambridge University Press in 2017. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/1492149>>. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 29 e 30.

GUIDORIZZI, H. L. **Curso de Cálculo, Um - Vol.2**. [S.l.]: LTC, 2001. ISBN 852161280X. Citado na página 14.

KAPLAN, W. **Advanced Calculus (5th Edition)**. [S.l.]: Pearson, 2002. ISBN 0201799375. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 12.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. [S.l.]: Copyright©, 1991. Citado na página 58.

NEHARI, Z. **Conformal Mapping**. [S.l.]: Mc Graw Hill, 1952. Citado 5 vezes nas páginas 55, 56, 57, 67 e 108.

PAUL, C. R. **Eletromagnetismo Para Engenheiros: Com Aplicações**. [S.l.]: LTC, 2006. ISBN 8521614179. Citado na página 28.

RECK, K.; THOMSEN, E. V.; HANSEN, O. Solving the Helmholtz equation in conformal mapped arrow structures using homotopy perturbation method. **Opt. Express**, OSA, v. 19, n. 3, p. 1808–1823, Jan 2011. Disponível em: <<http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-19-3-1808>>. Citado na página 109.

SADIKU, M. N. **Elementos de Eletromagnetismo**. [S.l.]: Bookman, 2012. ISBN 8540701502. Citado 11 vezes nas páginas 2, 3, 28, 29, 30, 34, 43, 49, 86, 88 e 103.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo - Vol.2**. [S.l.]: Pearson, 2012. ISBN 8581430872. Citado na página 24.

WANG, Y.; REN, S.; DONG, F. A transformation-domain image reconstruction method for open electrical impedance tomography based on conformal mapping. **IEEE Sensors Journal**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), p. 1–1, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/jsen.2018.2884760>>. Citado na página 2.

XU, S.; WANG, B.; LIU, J. On the use of Schwarz–Christoffel conformal mappings to the grid generation for global ocean models. **Geoscientific Model Development Discussions**, v. 8, 02 2015. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/scimag/index.php?s=10.5194/gmdd-8-1337-2015>>. Citado na página 2.

YANG, F.; MEI, Z. L.; CUI, T. J. Design and experiment of perfect relay lens based on the Schwarz–Christoffel mapping. **Applied Physics Letters**, American Institute of Physics, v. 104, 02 2014. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/scimag/index.php?s=10.1063/1.4866284>>. Citado na página 2.

YARIV, E.; SHERWOOD, J. D. Application of Schwarz–Christoffel mapping to the analysis of conduction through a slot. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science**, The Royal Society, v. 471, n. 2181, p. 20150292, aug 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0292>>. Citado na página 2.

YU, Y.-C. et al. Phase estimation in bispectral domain based on conformal mapping and applications in seismic wavelet estimation. **Applied Geophysics**, Springer Nature, v. 8, n. 1, p. 36–47, mar 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11770-011-0269-1>>. Citado na página 2.

ZAUDERER, E. **Partial Differential Equations of Applied Mathematics**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2006. ISBN 0471690732. Citado na página 5.

ZILL, D. G.; SHANAHAN, P. D. **Curso Introdutório à Análise Complexa com Aplicações**. [S.l.]: LTC, 2011. ISBN 8521618093. Citado 12 vezes nas páginas 8, 12, 30, 37, 41, 42, 45, 46, 57, 58, 59 e 69.

ZUMBRUM, M. E.; EDWARDS, D. A. Conformal mapping in optical biosensor applications. **Journal of Mathematical Biology**, Springer Nature, v. 71, n. 3, p. 533–550, sep 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00285-014-0827-2>>. Citado na página 2.