



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODEGEM MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL

**ESTUDO DA ESTABILIDADE DE RESERVATÓRIOS DE ÁGUA EM
SISTEMAS DE ABASTECIMENTO URBANO**

ROMEU MANUEL DE CARVALHO

Orientador: Prof. Dr. Thiago Gomes de Mattos

BELO HORIZONTE

OUTUBRO DE 2019

ROMEU MANUEL DE CARVALHO

**ESTUDO DA ESTABILIDADE DE RESERVATÓRIOS DE ÁGUA EM
SISTEMAS DE ABASTECIMENTO URBANO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

BELO HORIZONTE

OUTUBRO DE 2019

C331e Carvalho, Romeu Manuel de
Estudo da estabilidade de reservatórios de água em sistemas de abastecimento urbano. / Romeu Manuel de Carvalho. -- Belo Horizonte, 2019.
xi, 39 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Gomes de Mattos

Bibliografia

1. Modelos Matemáticos. 2. Logística. 3. Equações de Volterra. I. Mattos, Thiago Gomes de. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título

CDD 511.8

FOLHA DE APROVAÇÃO



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

“ESTUDO DA ESTABILIDADE DE RESERVATÓRIOS DE ÁGUA EM SISTEMAS DE ABASTECIMENTO URBANO”

Dissertação de Mestrado apresentada por **Romeu Manuel de Carvalho**, em 30 de agosto de 2019, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Thiago Gomes de Mattos (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Luis Argel Poveda Calviño
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Albeus Aiman Picardi Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática e Computacional

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Thiago Gomes de Mattos, por me acolher como seu orientando, entendendo a proposta da pesquisa, acreditando no seu potencial e acompanhando o desenvolvimento de todo o trabalho. Por se colocar sempre à disposição com profissionalismo, determinação e acima de tudo, respeito. Um excelente orientador.

À minha família, por entenderem as minhas ausências em decorrência da dedicação ao mestrado. Ao meu pai José Faustino de Carvalho (em memória) e à minha mãe Maria da Glória de Carvalho (em memória) que Deus não permitiu ficar entre nós até o fim desta caminhada.

A todos vocês, os meus sinceros agradecimentos. Muito obrigado por tudo!

RESUMO

A escassez dos recursos hídricos gerada pelos baixos índices pluviométricos entre os anos de 2014 e 2017 no Brasil, especialmente nas regiões Norte, Nordeste e Sudeste, geraram incertezas sobre a recuperação dos volumes dos reservatórios que abastecem a região metropolitana de Belo Horizonte. Neste trabalho propomos um modelo matemático baseado em equações diferenciais para estudar a estabilidade de reservatórios de água em sistemas de abastecimento urbano. O modelo é capaz de descrever o diagrama de fase e a estabilidade para o reservatório, a partir dos pontos de estabilidade do sistema de equações diferenciais. A construção do modelo é feita através da relação entre o volume do reservatório e da estação de tratamento de água sugerindo níveis estáveis na correlação. O foco principal é o sistema Rio Manso, por ser essencial no abastecimento de água da região metropolitana de Belo Horizonte. Através das equações de Lotka-Volterra com crescimento logístico e de métodos de análise de estabilidade, o modelo possibilitou o levantamento do diagrama de fase para o sistema Rio Manso. O resultado obtido para o principal ponto de estabilidade do sistema foi um foco hiperbólico instável. O modelo não apresentou ponto de estabilidade estável para o sistema Rio Manso dentro do domínio desejado.

Palavras-chave: Equação Logística. Estabilidade. Recurso Hídrico.

ABSTRACT

The scarcity of water resources generated by the low rainfall rates between 2014 and 2017 in Brazil, especially in the North, Northeast and Southeast regions, generated uncertainties about the recovery of the volumes of the reservoirs that supply the metropolitan area of Belo Horizonte. In this work we propose a mathematical model based on differential equations to study the stability of water reservoirs in urban supply systems. The model is able to describe the phase diagram and the stability of the reservoir, from the stability points of the system of differential equations. The construction of the model is done through the relation between the volume of the reservoir and the water treatment plant suggesting stable levels in the correlation. The main focus is the Rio Manso system, as it is essential in the water supply of the metropolitan area of Belo Horizonte. Through the Lotka-Volterra equations with logistic growth and methods of stability analysis, the model made it possible to survey the phase diagram for the Rio Manso system. The result obtained for the system's main stability point was an unstable hyperbolic focus. The model did not present stability point stable for the Rio Manso system within the desired domain.

Keywords: Logistics Equation. Stability. Water Resource.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Gráfico Volume do Reservatório, Sistema Rio Manso.	20
Figura 2: Fluxograma de Abastecimento de Água Potável RMBH.	21
Figura 3: Diagrama de Fase em Torno do Ponto do P_1	32
Figura 4: Gráfico de V_R e V_E em Relação ao Tempo para o Ponto P_2	33
Figura 5: Diagrama de Fase em Torno do Ponto P_3	34
Figura 6: Diagrama de Fase em Torno do Ponto P_1 , no Primeiro Quadrante do Plano.	36

LISTAS DE TABELAS

Tabela 1: Dados Estatísticos.	20
------------------------------------	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

COPASA	Companhia de Saneamento Básico de Minas Gerais;
ETA	Estação de Tratamento de Água;
EAT	Elevação de Água Tratada;
OMS	Organização Mundial da Saúde;
ONU	Organizações das Nações Unidas;
RMBH	Região Metropolitana de Belo Horizonte;
SRM	Sistema Rio Manso;
TEL	Teoria da Estabilidade de Lyapunov.

LISTA DE SÍMBOLOS

P_1	Primeiro ponto de equilíbrio;
P_2	Segundo ponto de equilíbrio;
P_3	Terceiro ponto de equilíbrio;
\bar{V}_R	Média das variações dos volumes do reservatório;
V_R	Volume do reservatório;
\bar{V}_E	Média das variações dos volumes da estação de tratamento de água;
V_E	Volume da estação de tratamento de água;
r_1	Taxa de crescimento do nível do reservatório;
r_2	Taxa de crescimento do nível da estação de tratamento de água;
N	Número de indivíduos em uma população;
K	Capacidade de suporte de um meio.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos.....	2
1.1.1 Objetivo Geral.....	2
1.1.2 Objetivos Específicos.....	2
2 – CONCEITOS BÁSICOS	3
2.1 Crescimento Logístico.....	3
2.2 Equações de Lotka-Volterra.....	5
2.3 Equações de Lotka-Volterra com Crescimento Logístico.....	8
2.4 Estabilidade em Sistemas de Equações Diferenciais.....	12
2.5 Estabilidade em Sistemas não Lineares.....	13
2.5.1 Teorema da Linearização.....	15
2.5.2 Teorema da Estabilidade.....	16
2.5.3 Teorema Primeiro Método de Lyapunov.....	16
2.6 Linearização das Equações de Lotka-Volterra com Crescimento Logístico.	16
3 – METODOLOGIA	19
3.1 Unidades de Medidas.....	19
3.2 Coletas de Dados e Características do Sistema Rio Manso.....	19
3.2.1 Sobre o Reservatório.....	19
3.2.2 Sobre a Estação de Tratamento de Água.....	20
3.3 Técnicas Utilizadas.....	21
3.3.1 Na Ausência da ETA.....	21
3.3.2 Introduzindo o Modelo Logístico na Primeira Equação.....	21
3.3.3 Introduzindo a Presença da ETA.....	22
3.3.4 Na Ausência do Reservatório.....	23
3.3.5 Introduzindo o Modelo Logístico na Segunda Equação.....	23
3.3.6 Introduzindo a Presença do Reservatório.....	23
3.3.7 Na Coexistência do Reservatório e da ETA.....	24
4 – RESULTADOS E DISCUSSÕES	25
4.1 Definindo as Variáveis para as Equações do Sistema.....	25
4.1.1 Definição das Variáveis para a Primeira Equação do Sistema.....	25

4.1.2 Definição das Variáveis para a Segunda Equação do Sistema.....	26
4.2 Pontos de Estabilidades do Sistema.....	28
4.3 Linearização do Sistema.....	30
4.4 Dinâmica e Estabilidade dos Pontos.....	31
4.4.1 Estabilidade na Vizinhança do Primeiro Ponto.....	31
4.4.2 Dinâmica do Sistema para o Segundo Ponto.....	32
4.4.3 Estabilidade na Vizinhança do Terceiro Ponto.....	33
5 – CONCLUSÃO.....	35
REFERÊNCIAS.....	38

1 – INTRODUÇÃO

A água é um recurso natural essencial para a manutenção da vida na Terra. No organismo humano, ela representa 70% da massa corporal. As mais diversas formas de higienização, construção civil, atividades industriais, explorações minerais, combate a incêndios, produção de energia elétrica, geração de vapor e refrigeração, dependem da água. Porém, dentre todas as atividades, a agricultura é a que mais consome água. Cerca de 70% de toda a água consumida no planeta é utilizada na agricultura (BRASIL. MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE, 2005).

A ameaça da falta de água gerada pelos efeitos na qualidade e na quantidade de água disponível, relacionados com o rápido crescimento da população mundial e com a concentração dessa população em megalópoles, é evidente em várias partes do mundo. Dados do Fundo das Nações Unidas para a Infância (Unicef) e da Organização Mundial da Saúde (OMS) revelam que 33,77% da população mundial, 2,6 bilhões de pessoas, não possui serviço de saneamento básico e que uma em cada seis pessoas, cerca de 1,1 bilhão de pessoas, ainda não possuem sistema de abastecimento de água adequado (BRASIL. MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE, 2005). Projeções das Organizações das Nações Unidas (ONU) indicam que se a tendência continuar, no ano de 2050, mais de 45% da população mundial estará vivendo em países que não poderão garantir a cota diária mínima de 50 litros por indivíduo (BRASIL. MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE, 2005).

O Brasil, apesar de dispor do recurso hídrico em abundância, não está livre da ameaça de uma crise. Com uma vasta extensão territorial, a distribuição varia muito de uma região para a outra, e o crescente aumento do consumo, o desperdício e a poluição, fazem nossas reservas de água diminuir. No Manual de Educação para o Consumo Sustentável, discute-se a importância da boa utilização dos recursos hídricos e quais as ações necessárias para o consumo sustentável (BRASIL. MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE, 2005).

Desenvolveremos, neste trabalho, um modelo matemático para analisar a estabilidade em sistemas de abastecimento urbano, fundamentado em teorias científicas. Através do modelo, buscaremos correlacionar o volume do reservatório com o volume da estação de tratamento de água, procurando elucidar, caso exista, a estabilidade entre os respectivos níveis do sistema de abastecimento. Para tanto,

iremos estabelecer sistemas de equações diferenciais com crescimento logístico, a fim de encontrar possíveis pontos de estabilidade e analisar o diagrama de fase gerado.

Para o estudo do modelo proposto, abrangemos questões relacionadas:

- a sistema de abastecimento urbano. Abastecimento de água na região metropolitana de Belo Horizonte, Sistema Rio Manso;
- a programação computacional: para a determinação dos pontos de estabilidade e esboçar os respectivos diagrama de fase.
- a sistemas de equações diferenciais: para o desenvolvimento do modelo será utilizado as equações de Lotka-Volterra com crescimento logístico, teorias matemáticas para estudo da estabilidade dos pontos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver um modelo a partir das equações de Lotka-Volterra com crescimento logístico, que seja capaz de descrever a estabilidade e o diagrama de fase do principal sistema de abastecimento de água da região metropolitana de Belo Horizonte.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver o modelo a partir das equações de Lotka-Volterra com crescimento logístico;
- determinar os pontos de estabilidade do sistema modelado;
- classificar os pontos de estabilidade conforme os métodos e teorias para o estudo da estabilidade;
- correlacionar o volume do reservatório e da estação de tratamento de água e esboçar o diagrama de fase;
- caracterizar a estabilidade do principal sistema de abastecimento de água da região metropolitana de Belo Horizonte, Sistema Rio Manso.

2 – CONCEITOS BÁSICOS

2.1 Crescimento Logístico

Os modelos de dinâmica populacional para uma única espécie são importantes no sentido de se conhecer quais são os aspectos mais relevantes que interferem na sua dinâmica. Começaremos com um modelo de uma população cuja variação acontece apenas em função do tempo $N(t)$, (KOT, 2001).

$$\frac{dN}{dt} = n - m. \quad (1)$$

Considerando-se que a taxa de variação em função do tempo contempla somente os nascidos n , menos os mortos m , desconsiderando demais fatores, como migração. A equação pode ser escrita da seguinte maneira:

Para uma população N_0 no tempo inicial, $t = 0$ (KOT, 2001).

$$\frac{dN}{dt} = N(n - m) \quad (2)$$

$$\frac{dN}{N} = (n - m)dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int (n - m)dt$$

$$\ln N = (n - m)t + c$$

$$N = e^{(n - m)t + c}$$

$$N = e^c e^{(n - m)t}.$$

Para $t = 0$, $N = N_0$, tem-se que $e^c = N_0$.

$$N(t) = N_0 e^{(n - m)t}. \quad (3)$$

Em que n e m são constantes positivas. Para $n > m$ temos um crescimento exponencial da população, mas para $n < m$, a população irá à zero. Este foi o modelo proposto por *Malthus* em 1798 (Malthus 1978).

Uma população não pode crescer indefinidamente, em certo momento, o esgotamento dos recursos limitará o crescimento da população. O matemático *Pierre-François Verhulst* apresentou um modelo matemático, uma generalização do modelo de Malthus que levava em consideração as restrições ambientais, chamado o modelo logístico (KOT, 2001). O modelo reflete melhor a dinâmica populacional. No método foi inserido o conceito de competição entre indivíduos da mesma espécie. Inicialmente, a população apresenta um crescimento exponencial, mas à medida que o número de indivíduos aumenta, surge uma competição intraespecífica em busca dos recursos para sobrevivência, levando a população ao equilíbrio (KOT, 2001). Essa competição é gerada por uma capacidade de suporte, barreira que restringe o crescimento exponencial, provocada pelas limitações de recursos essenciais a sobrevivência da população. Esta capacidade de suporte precisa ser estimada e será representada por **K**.

O modelo proposto por *Verhulst* considerando o limite de suporte do meio é apresentado por KOT (2001) a seguir:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (4)$$

$$\int \frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K} \right)} = \int r dt .$$

Usando de frações parciais para resolver a integral no primeiro membro da igualdade teremos:

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{N}{K}} \right) dN = \int r dt$$

$$\ln | N | - \ln \left| 1 - \frac{N}{K} \right| = rt + c$$

$$\ln \left| \frac{N}{1 - \frac{N}{K}} \right| = rt + c . \quad (5)$$

Para a condição inicial $\mathbf{N(0) = N_0}$, podemos determinar a constante de integração **c** em que

$$c = \ln \left| \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{K}} \right| = \ln \left| \frac{N_0 K}{K - N_0} \right|$$

fazendo a substituição em (5) teremos,

$$\ln \left| \frac{N}{1 - \frac{N}{K}} \right| = rt + \ln \left| \frac{N_0 K}{K - N_0} \right|$$

$$\ln \left| \frac{N}{1 - \frac{N}{K}} \right| - \ln \left| \frac{N_0 K}{K - N_0} \right| = rt$$

$$\ln \left| \left(\frac{N(K - N_0)}{N_0(K - N)} \right) \right| = rt$$

$$\frac{N}{K - N} = \frac{N_0}{K - N_0} e^{rt}$$

isolando N no primeiro membro da igualdade teremos,

$$N(t) = \frac{N_0 K}{(K - N_0)e^{-rt} + N_0} \quad (6)$$

Observem que $N(t) \rightarrow K$ quando $t \rightarrow \infty$ (KOT, 2001).

2.2 Equações de Lotka–Volterra

Foram propostas independentemente por Vito Volterra e por Alfred J. Lotka. As equações de V. Volterra foram desenvolvidas em 1925, ao tomar conhecimento do trabalho do zoologista Umberto d'Ancona, que analisou o crescimento da população de tubarões e o decréscimo da população dos demais peixes em um mar da Itália (MAY, 1974). As equações de A. J. Lotka foram desenvolvidas no mesmo ano de 1925 quando estudou a interação predador-presa e publicou um livro chamado "*Elements of Physical Biology*" apresentando a mesma modelagem (MAY, 1974). Como ambos publicaram a mesma equação, o modelo foi chamado de Equações de Lotka-Volterra. Foi o primeiro modelo a tentar compreender a relação entre duas espécies (MAY, 1974). Neste modelo, Presa-Predador como ficou conhecido, pode ocorrer as seguintes situações: extinção dos predadores; extinção das presas; coexistência das duas espécies. Para considerar as possibilidades, foram definidos:

- N_1 é o número de indivíduos pertencentes à população dos Predadores;

- N_2 é o número de indivíduos pertencentes à população de Presas;
- t representa o tempo.

Caso os predadores sejam extintos, a população de presas crescerá a uma taxa proporcional à população atual, ou seja, exponencialmente. Neste caso, α representará esta proporcionalidade (MAY, 1974).

- Para $N_1 = 0$ e $\alpha > 0$ teremos:

$$\frac{dN_2}{dt} = \alpha N_2. \quad (7)$$

Caso as presas sejam extintas, levando em consideração ser a única alimentação dos predadores, os predadores se extinguirão a uma taxa proporcional à sua população atual, decrescendo exponencialmente. Neste caso, γ será esta constante de proporcionalidade (MAY, 1974).

- Para $N_2 = 0$ e $\gamma > 0$ teremos:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\gamma N_1. \quad (8)$$

Caso as duas populações coexistam, a probabilidade do encontro entre presa e predador é proporcional ao produto entre os tamanhos das duas populações. No modelo há duas constantes de proporcionalidades positivas envolvidas no produto, β representando a taxa de predação e δ representando a taxa de conservação da presa (MAY, 1974).

- A população das presas que sofre redução é dada pelo produto da variação proporcional direta entre as espécies N_1 e N_2 .
- $N_2 N_1 \beta$.
- A população dos predadores que sofre aumento é dada pelo produto da variação proporcional direta entre as espécies N_2 e N_1 .
 $N_2 N_1 \delta$.

Considerando as três hipóteses, extinção dos predadores, extinção das presas, coexistência das duas espécies, A. J. Lotka e V. Volterra desenvolveram as equações (MAY, 1974).

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(\alpha - \beta N_1) \quad (9)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(\delta N_2 - \gamma). \quad (10)$$

Em que α , β , γ , δ , são parâmetros que representam a interação entre as duas espécies. Procurando analisar o comportamento entre as espécies N_1 e N_2 , as equações (9) e (10) foram relacionadas da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{N_2(\alpha - \beta N_1)} &= dt \\ \frac{dN_1}{N_1(\delta N_2 - \gamma)} &= dt \\ \frac{dN_2}{N_2(\alpha - \beta N_1)} &= \frac{dN_1}{N_1(\delta N_2 - \gamma)} \\ \frac{dN_1}{dN_2} &= \frac{N_1(\delta N_2 - \gamma)}{N_2(\alpha - \beta N_1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Agrupando os termos semelhantes e integrando os dois lados da igualdade na equação (11), obteve – se:

$$\int \left(\frac{\alpha - \beta N_1}{N_1} \right) dN_1 = \int \left(\frac{\delta N_2 - \gamma}{N_2} \right) dN_2$$

que tem como solução a equação geral:

$$\alpha \ln(N_1) - \beta(N_1) + C_1 = -\gamma \ln(N_2) + \delta(N_2) + C_2. \quad (12)$$

Isolando as constantes de integração, C_1 e C_2 , no segundo membro da igualdade, as duas espécies podem ser relacionadas através de um diagrama de fase N_2 em função N_1 gerado a partir da solução da equação (MAY, 1974):

$$\alpha \ln(N_1) - \beta(N_1) + \gamma \ln(N_2) - \delta(N_2) = C_2 - C_1.$$

$$\alpha \ln(N_1) - \beta(N_1) + \gamma \ln(N_2) - \delta(N_2) = C. \quad (13)$$

Onde **C** é resultante das constantes de integração.

2.3 Equações de Lotka–Volterra com Crescimento Logístico

Quando duas espécies distintas interagem e a interação afeta a dinâmica da população, pelo modelo Predador-Presa, podemos dizer que existem N_1 presas e N_2 predadores tal que o crescimento das espécies é afetado em função da interação do tipo predação. O modelo de Lotka-Volterra com crescimento logístico considera a interação entre as espécies assim como os recursos oferecidos pelo meio, que são na sua maioria limitados (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Em um mesmo habitat, em que haja interação entre as duas espécies, as equações de Lotka-Volterra são descritas como se seguem:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right) \end{cases} \quad (14)$$

Em que r_1 , r_2 , K_1 , K_2 , b_{12} , b_{21} , são parâmetros positivos. Uma vez que r_1 e r_2 são as respectivas taxas de crescimento, K_1 e K_2 são as respectivas capacidades de suportes do meio (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

O parâmetro b_{12} mede o quanto a espécie 1 é capaz de neutralizar a espécie 2, onde $N_1 = b_{12}N_2$, é a variação proporcional direta entre as espécies N_1 e N_2 . O parâmetro b_{21} mede o quanto a espécie 2 é capaz de neutralizar a espécie 1, onde $N_2 = b_{21}N_1$, é a variação proporcional direta entre as espécies N_2 e N_1 (EDELSTEIN-KESHET, 1988). Para b_{12} e b_{21} temos as seguintes considerações:

- Se $b_{12} < 1$ e $b_{21} > 1$, então a espécie um elimina a espécie dois;
- Se $b_{12} > 1$ e $b_{21} < 1$, então a espécie dois elimina a espécie um;
- Se $b_{12} < 1$ e $b_{21} < 1$, cada respectiva espécie tem o controle sobre o seu próprio crescimento. Conforme (EDLSTEIN-KESHET, 1988), temos neste

caso uma competição fraca, podendo haver coexistência entre as duas espécies;

- Se $b_{12} > 1$ e $b_{21} > 1$, existe a possibilidade de extinção entre as espécies. Sendo neste caso uma competição forte, a espécie mais apta elimina a menos apta (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Em *Edelstein-Keshet* (1988), as equações de Lotka-Volterra com crescimento logístico é um sistema de primeira ordem composto por um par de equações diferenciais, contínuas no tempo, não lineares duas vezes diferenciáveis, que favorece o estudo da dinâmica entre as espécies. O estado de equilíbrio ou estado estacionário, ocorre quando não há mais variação nas variáveis dependentes, $dN_1/dt = 0$ e $dN_2/dt = 0$ e os pontos de estabilidades do sistema, de acordo com *Edelstein-Keshet* (1988), são obtidos pelas soluções das equações diferenciais, como veremos a seguir:

Dado o sistema $dx/dt = f(x, y)$ e (x_o, y_o) o ponto de equilíbrio do sistema correspondente tal que $f(x_o, y_o) = 0$.

Para a primeira equação do sistema (14), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_1}{dt} &= 0 \\ r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1 - b_{12} N_2}{K_1} \right) &= 0 \\ N_1 \left(\frac{r_1 K_1 - r_1 N_1 - r_1 b_{12} N_2}{K_1} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

De forma análoga, para a segunda equação do sistema (14), obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right) \\ N_2 \left(\frac{r_2 K_2 - r_2 N_2 - r_2 b_{21} N_1}{K_2} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Das equações (15) e (16), teremos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} N_1 \left(\frac{r_1 k_1 - r_1 N_1 - r_1 b_{12} N_2}{K_1} \right) = 0 \\ N_2 \left(\frac{r_2 k_2 - r_2 N_2 - r_2 b_{21} N_1}{K_2} \right) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

O primeiro ponto de estabilidade $X_1 = (0, 0)$ surge ao isolar as variáveis N_1 e N_2 no primeiro membro da igualdade nas respectivas equações em (17) (EDELSTEIN-KESHET, 1988). E ao isolar no primeiro membro da igualdade as expressões destacadas entre parêntese em (17), tem-se para o sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{r_1 k_1 - r_1 N_1 - r_1 b_{12} N_2}{K_1} \right) = 0 \\ \left(\frac{r_2 k_2 - r_2 N_2 - r_2 b_{21} N_1}{K_2} \right) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

O segundo ponto de estabilidade $X_2 = (K_1, 0)$ surge ao fazer $N_2 = 0$ na primeira equação do sistema (18), caso onde ocorre a extinção dos predadores (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_1 k_1 - r_1 N_1 - r_1 b_{12} N_2}{K_1} \right) &= 0 \\ \frac{r_1 K_1 - r_1 N_1}{K_1} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Isolando N_1 no primeiro membro da igualdade na equação (19), obteremos:

$$N_1 = K_1.$$

O terceiro ponto de estabilidade $X_3 = (0, K_2)$ surge ao fazer $N_1 = 0$ na segunda equação do sistema (18), caso onde ocorre a extinção das presas (EDLSTEIN-KESHET, 1988).

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_2 k_2 - r_2 N_2 - r_2 b_{21} N_1}{K_2} \right) &= 0 \\ \frac{r_2 K_2 - r_2 N_2}{K_2} &= 0 \\ N_2 &= K_2. \end{aligned}$$

O quarto ponto de estabilidade $X_4 = \left(\frac{b_{12}K_2 - K_1}{b_{12}b_{21} - 1}, \frac{b_{21}K_1 - K_2}{b_{12}b_{21} - 1} \right)$ será obtido a partir da resolução do sistema (18), ao isolar as constantes, no segundo membro da igualdade.

$$\begin{cases} r_1 N_1 + r_1 b_{12} N_2 = r_1 k_1 \\ r_2 b_{21} N_1 + r_2 N_2 = r_2 k_2 \end{cases} \quad (20)$$

Utilizando o método da adição para a resolução de sistemas lineares com duas equações a duas variáveis, ao multiplicarmos a primeira e a segunda equação do sistema (20) pelas respectivas constantes $r_2 b_{21}$ e $-r_1$ teremos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} r_1 r_2 b_{21} N_1 + r_1 r_2 b_{12} b_{21} N_2 = r_1 r_2 b_{21} K_1 \\ -r_1 r_2 b_{21} N_1 - r_1 r_2 N_2 = -r_1 r_2 K_2 \end{cases} \\ \hline r_1 r_2 N_2 (b_{12} b_{21} - 1) = r_1 r_2 (b_{21} K_1 - K_2) \end{array}$$

Onde N_2 surge ao ser isolado no primeiro membro da igualdade.

$$r_1 r_2 N_2 (b_{12} b_{21} - 1) = r_1 r_2 (b_{21} K_1 - K_2)$$

$$N_2 = \frac{b_{21} K_1 - K_2}{b_{12} b_{21} - 1}.$$

Substituindo N_2 na segunda equação do sistema (20) e isolando N_1 no primeiro membro da igualdade teremos:

$$r_2 b_{21} N_1 + r_2 \left(\frac{b_{21} K_1 - K_2}{b_{12} b_{21} - 1} \right) = r_2 K_2$$

$$r_2 b_{21} N_1 = r_2 K_2 - r_2 \left(\frac{b_{21} K_1 - K_2}{b_{12} b_{21} - 1} \right)$$

Tirando o mínimo múltiplo comum no segundo membro da igualdade e colocando os termos comuns em evidencia obteremos:

$$N_1 = \frac{r_2 b_{21} (K_2 b_{12} - K_1)}{r_2 b_{21} (b_{12} b_{21} - 1)}$$

$$N_1 = \frac{K_2 b_{12} - K_1}{b_{12} b_{21} - 1}.$$

Onde para o ponto X_4 só interessa valores não negativos, $N_1 > 0$ e $N_2 > 0$ (EDLSTEIN-KESHET, 1988).

2.4 Estabilidades em Sistemas de Equações Diferenciais

Determinadas equações diferenciais não podem ser resolvidas analiticamente (HALE, 1991). É possível obter informações relevantes das equações diferenciais sem necessariamente resolvê-las (HALE, 1991). Vejamos o tipo mais simples, o sistema de equações diferenciais lineares, constituído por duas equações com duas variáveis, onde \mathbf{A} , é uma matriz quadrada de ordem dois, formada pelos coeficientes das equações do sistema, e $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2)$, uma matriz coluna do tipo 2×1 , formada pelas variáveis do sistema.

$$\frac{dx}{dt} = A\gamma \quad (21)$$

A solução para o sistema (21) é dada por $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{c}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 e^{\lambda_2 t}$, em que λ_1 e λ_2 são os autovalores de \mathbf{A} , $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ são os autovetores associado a \mathbf{A} , t o tempo e \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 constantes, (HALE, 1991).

Os autovalores são as soluções da equação polinomial:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

os autovetores associados a \mathbf{A} são determinados por:

$$(A - \lambda I) \boldsymbol{\varepsilon} = 0.$$

Sendo I a matriz identidade de ordem dois e \det o determinante de $(\mathbf{A} - \lambda I)$, (HALE, 1991).

As soluções de equilíbrio são definidas pelos pontos onde temos $\mathbf{A}\gamma = \mathbf{0}$. Considerando \mathbf{A} uma matriz invertível, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, o único ponto de equilíbrio do sistema neste caso será $\gamma = \mathbf{0}$, solução trivial para o sistema (HALE, 1991).

As soluções para o sistema (21) podem ser analisadas como uma representação paramétrica de uma curva no plano $\gamma_1\gamma_2$. Esta curva é vista como uma trajetória ou um caminho percorrido por um objeto cuja velocidade $\frac{d\gamma}{dt}$ é determinada pela equação diferencial. O plano $\gamma_1\gamma_2$ recebe o nome de diagrama de fase e o conjunto das respectivas trajetórias é chamado retrato de fase (HALE, 1991).

Para analisar o sistema (21), devemos considerar as soluções encontradas para os autovalores de A (HALE, 1991), podendo chegar aos seguintes casos:

seja λ_1 e λ_2 os autovalores solução da equação polinomial $\det(A - \lambda I) = 0$;

- para λ_1 e λ_2 diferentes de zero, pertencentes ao conjunto dos números reais tal que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onde o produto entre os autovalores seja $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) > 0$. Caso $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, teremos então, um ponto denominado nó hiperbólico assintoticamente estável. Caso tenhamos $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ para as mesmas condições acima citadas, o um ponto será denominado nó hiperbólico instável (HALE, 1991);
- para λ_1 e λ_2 diferentes de zero, pertencentes ao conjunto dos números reais tal que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onde o produto entre os autovalores sejam $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) < 0$. Neste caso, teremos um ponto denominado sela hiperbólica instável (HALE, 1991);
- para λ_1 e λ_2 diferentes de zero, pertencentes ao conjunto dos números reais tal que $(\lambda_1 = \lambda_2) > 0$, teremos então, um ponto em espiral instável. Caso $(\lambda_1 = \lambda_2) < 0$, o ponto será uma espiral assintoticamente estável (HALE, 1991);
- para λ_1 e λ_2 diferentes de zero, pertencentes ao conjunto dos números complexos tal que λ_1 e λ_2 são conjugados complexos com parte real positiva. Neste caso terá um ponto denominado foco hiperbólico instável. Caso tenhamos conjugados complexos com parte real negativa, teremos então, um ponto denominado foco hiperbólico assintoticamente estável (HALE, 1991);
- para λ_1 e λ_2 diferentes de zero, pertencentes ao conjunto dos números complexos tal que λ_1 e λ_2 são conjugados complexos com parte real nula. Teremos um ponto denominado centro elíptico estável, mas não assintoticamente (HALE, 1991).

2.5 Estabilidade em Sistemas não Lineares

O estudo da estabilidade de um sistema não linear é feito em grande parte, relacionando o sistema não linear ao sistema linear associado. O procedimento é conhecido como método da linearização (BOYCE; DIPRIMA, 2006). O sistema não linear é aproximado por truncamento, utilizando a série de Taylor, em torno do ponto de equilíbrio e a sua estabilidade, é estudada através dos autovalores do sistema linear associado (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Seja o sistema de equações não lineares, em forma de sistema bidimensional, dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \quad (22)$$

Conforme (HALE, 1991), busca-se determinar o vetor solução (x_0, y_0) , raiz das equações do sistema (22) tal que:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Seja (x_0, y_0) uma boa aproximação para a solução do sistema (23), (MURRAY, 2002). Expandindo $f(x, y)$ e $g(x, y)$ por série de Taylor em torno do ponto (x_0, y_0) até a derivada primeira teremos:

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) + n_1(x, y) \\ g(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) + n_2(x, y) \end{cases} \quad (24)$$

Onde $n_1(x, y)$ e $n_2(x, y)$ são os respectivos termos de segunda ordem e quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, teremos:

$$\frac{n_1(x, y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \rightarrow 0 \quad (25)$$

Razão entre a parte não linear $n_1(x, y)$ e a distância entre os pontos (x, y) e (x_0, y_0) , (HALE, 1991). De forma análoga, para $n_2(x, y)$, tem-se que o sistema atende as condições necessárias para a linearização.

Sendo $f(x, y) = \frac{dx}{dt}$ e $g(x, y) = \frac{dy}{dt}$, temos nas proximidades de (x_0, y_0) que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x_0)}{dt} \text{ e } \frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y_0)}{dt}. \text{ Note que } f(x_0, y_0) = 0 \text{ assim como } g(x_0, y_0) = 0. \text{ O}$$

sistema (22) pode ser escrito na forma matricial como se segue (MURRAY, 2002):

$$\begin{pmatrix} \frac{d(x - x_0)}{dt} \\ \frac{d(y - y_0)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1(x, y) \\ n_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Conforme Hale (1991), este resultado tem duas consequências:

- se as funções $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ do sistema (22) forem duas vezes diferenciáveis, então o sistema (26) é uma boa aproximação para o sistema (22) e não é necessário usar a prova do limite conforme em (25);
- o sistema linear associado ao sistema não linear (22), nas vizinhanças de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ que fornece uma boa aproximação para a solução do sistema (22), é dado pela parte linear da equação (26) e pode ser escrita como se segue:

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Onde as variáveis do sistema linear (27) associado ao sistema (22) podem ser dadas por $u_1 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ e $u_2 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$, e que:

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ é a matriz Jacobiana relativa ao sistema (22).}$$

2.5.1 Teorema da Linearização

Linearização (HALE, 1991): o sistema linear correspondente (27) será uma boa aproximação para o sistema não linear (22), em uma vizinhança do ponto de equilíbrio $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, sempre que as equações $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ em (22) forem duas vezes diferenciáveis e de classe C^1 (HALE, 1991).

Definição de função de classe C^1 : diz-se que uma função $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, pertencente a um conjunto aberto A , é de classe C^1 se todas as derivadas parciais existirem e forem contínuas em A , para todo m e n maiores que zero, (MURRAY, 2002).

2.5.2 Teorema da Estabilidade

Estabilidade (HALE, 1991): seja (x_0, y_0) o ponto de equilíbrio do sistema não linear (22), seja o sistema linear correspondente (27) onde $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são de classe C^1 . Desta forma:

- se todos os autovalores da matriz jacobiana $J(x_0, y_0)$ tiverem partes reais negativas, então o ponto de equilíbrio (x_0, y_0) do sistema (22) é assintoticamente estável;
- se algum dos autovalores da matriz jacobiana $J(x_0, y_0)$ tiver parte real positiva, então o ponto de equilíbrio (x_0, y_0) do sistema (22) é instável.

2.5.3 Teorema Primeiro Método de Lyapunov

Primeiro Método de Lyapunov, linearização (HALE, 1991): Seja (x'_0, y'_0) um ponto de equilíbrio do sistema linear correspondente (27), e (x_0, y_0) um ponto de equilíbrio do sistema não linear (22). Então:

- se (x'_0, y'_0) é um ponto assintoticamente estável do sistema linear correspondente (27), então (x_0, y_0) é um ponto assintoticamente estável do sistema não linear (22);
- se (x'_0, y'_0) é um ponto instável do sistema linear correspondente (27), então (x_0, y_0) é um ponto instável do sistema não linear (22).

2.6 Linearização das Equações de Lotka–Volterra com Crescimento

Logístico

Edelstein-Keshet (1988) em “*Mathematical Models in Biology*” diz que o sistema (14) é linearizado pela expansão da série de Taylor entorno do ponto de estabilidade, raiz do sistema. E a linearização é dada pelo sistema (27) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = f(N_1, N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} = g(N_1, N_2) \end{cases} \quad (28)$$

Fazendo $f(N_1, N_2) = 0$ e $g(N_1, N_2) = 0$, tomado o desenvolvimento do sistema (14), a partir de (17), obtém-se (EDELSTEIN-KESHET, 1988):

$$\begin{cases} r_1 k_1 N_1 - r_1 N_1^2 - r_1 b_{12} N_1 N_2 = 0 \\ r_2 k_2 N_2 - r_2 N_2^2 - r_2 b_{21} N_1 N_2 = 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(N_1, N_2)}{\partial N_1} & \frac{\partial f(N_1, N_2)}{\partial N_2} \\ \frac{\partial g(N_1, N_2)}{\partial N_1} & \frac{\partial g(N_1, N_2)}{\partial N_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 k_1 - 2r_1 N_1 - r_1 b_{12} N_2 & -r_1 b_{12} N_1 \\ -r_2 b_{21} N_2 & r_2 k_2 - 2r_2 N_2 - r_2 b_{21} N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Para o ponto de equilíbrio do sistema (14), $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, substituído em (30), temos o seguinte sistema linear equivalente associado (EDELSTEIN-KESHET, 1988);

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 k_1 & 0 \\ 0 & r_2 k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Para o ponto de equilíbrio do sistema (14), $\mathbf{X}_2 = (\mathbf{K}_1, \mathbf{0})$, substituído em (30), temos o sistema linear equivalente (EDELSTEIN-KESHET, 1988);

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 k_1 - 2r_1 K_1 & -r_1 b_{12} K_1 \\ 0 & r_2 k_2 - r_2 b_{21} K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Para o ponto de equilíbrio do sistema (14), $\mathbf{X}_3 = (\mathbf{0}, \mathbf{K}_2)$, substituído em (30), temos o sistema linear equivalente (EDELSTEIN-KESHET, 1988);

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 k_1 - r_1 b_{12} K_2 & 0 \\ -r_2 b_{21} K_2 & r_2 k_2 - 2r_2 K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

E para o ponto de equilíbrio do sistema (14), $\mathbf{X}_4 = \left(\frac{b_{12} K_2 - K_1}{b_{12} b_{21} - 1}, \frac{b_{21} K_1 - K_2}{b_{12} b_{21} - 1} \right)$, substituído em (30), temos o sistema linear equivalente (EDELSTEIN-KESHET, 1988);

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \left(\frac{K_1 - K_2 b_{12}}{b_{12} b_{21} - 1} \right) & r_1 \left(b_{12} \left(\frac{K_1 - K_2 b_{12}}{b_{12} b_{21} - 1} \right) \right) \\ r_2 \left(b_{21} \left(\frac{K_2 - K_1 b_{21}}{b_{12} b_{21} - 1} \right) \right) & r_2 \left(\frac{K_2 - K_1 b_{21}}{b_{12} b_{21} - 1} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

E a estabilidade do sistema (14), nas proximidades dos seus pontos de equilíbrios \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 , \mathbf{X}_3 e \mathbf{X}_4 , será determinada pelos autovalores obtidos a partir dos polinômios característicos dos sistemas lineares equivalentes, observados de (31) a (34). Os diagramas de fase para cada um dos sistemas lineares equivalentes será obtido pela solução geral de cada respectivo sistema, ou a partir da equação de transição (13), gerada para cada um dos sistemas lineares equivalentes (MAY, 1974).

3 – METODOLOGIA

Os dados e técnicas utilizados para o desenvolvimento da pesquisa que versa a estabilidade do reservatório do principal sistema de abastecimento de água potável da Região Metropolitana de Belo Horizonte (RMBH), o Sistema Rio Manso (SRM), serão apresentados nestas seções.

3.1 Unidades de medidas

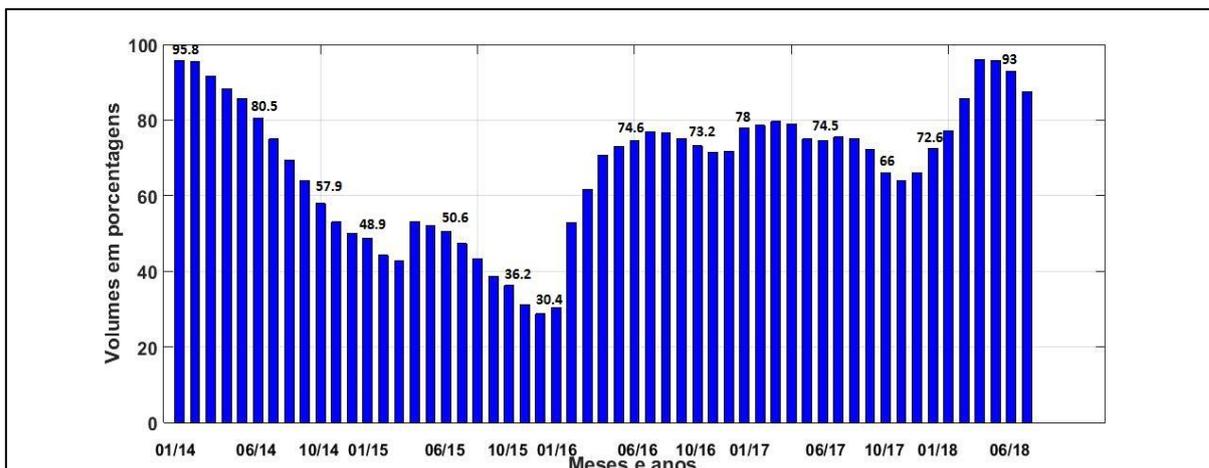
Tamamha as proporções volumétricas, as referidas grandezas serão apresentadas em porcentagens, onde 100% será a capacidade máxima de armazenamento do reservatório de água. Para efeito de cálculo a taxa percentual será substituída pela taxa unitária, resultante da divisão por cem, a qual é transformada em um número decimal equivalente, onde a capacidade máxima do reservatório 100%, para efeito de cálculo será $100/100 = 1$ (FARIA, 2007).

As vazões volumétricas foram apresentadas em metros cúbicos por segundo, em conformidade com sistema internacional de medidas, que para efeito de cálculo, foram transformadas em volumes cúbicos.

3.2 Coletas de Dados e Características do Sistema Rio Manso

3.2.1 Sobre o Reservatório

Com uma capacidade de armazenamento de $149.061.317,55 \text{ m}^3$ de água (AGÊNCIA REGULADORA DE ÁGUA E ESGOTO DE MINAS GERAIS, 2018), os volumes do reservatório são aferidos e disponibilizados mensalmente pela Companhia de Saneamento Básico de Minas Gerais (2018). A coleta dos dados compreende o período de janeiro de 2014 a Julho de 2018 e as variações podem ser observadas na figura 1.

Figura 1: Gráfico dos Volumes do Reservatório, Sistema Rio Manso.

As características dos volumes do reservatório podem ser vistas na tabela 1.

Tabela 1: Dados Estatísticos.

Variável	Média	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose
Volumes (%)	67, 71	18, 02	-0, 43	-0, 69

Onde 67,71% correspondem a um volume médio (\bar{V}_R) de 100.925.840,64 m³ de água.

O reservatório possui uma capacidade de regularização, vazão de entrada, de 8,24 m³/s de água, que representa um volume de 21.358.080 m³ (AGÊNCIA REGULADORA DE ÁGUA E ESGOTO DE MINAS GERAIS, 2018; WIKIPÉDIA, 2018). Possui uma vazão de saída de 4,95 m³/s, correspondente a um volume de 12.830.400 m³, que abastecem uma estação de tratamento de água (AGÊNCIA REGULADORA DE ÁGUA E ESGOTO DE MINAS GERAIS, 2018; WIKIPÉDIA, 2018).

3.2.2 Sobre a Estação de Tratamento de Água

Ligado ao reservatório encontra-se uma Estação de Tratamento de Água (ETA), com capacidade de armazenamento de 15.033.600 m³, opera com um volume médio (\bar{V}_E) 14.515.200 m³ (AGÊNCIA REGULADORA DE ÁGUA E ESGOTO DE MINAS GERAIS, 2018; WIKIPÉDIA, 2018). Recebe do reservatório, um volume de 12.830.400 m³, com uma descarga de abastecimento de 3,703 m³/s que representam um volume de 9.598.020,48 m³ (AGÊNCIA REGULADORA DE ÁGUA

E ESGOTO DE MINAS GERAIS, 2018; WIKIPÉDIA, 2018). Juntos, reservatório e ETA formam o sistema objeto deste estudo. A figura 2 representa um fluxograma simplificado do sistema.

Figura 2: Fluxograma de Abastecimento de Água Potável RMBH.

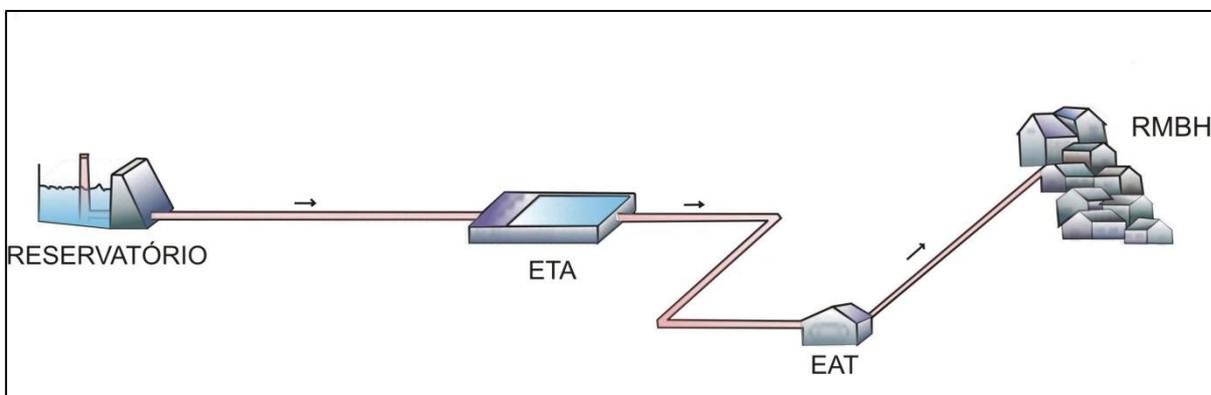


Figura extraída do Relatório de Fiscalização, Sistema Integrados de Abastecimento de Água da RMBH. EAT (Elevação de Água Tratada).

3.3 Técnicas Utilizadas

A modelagem seguirá os princípios teóricos adotados nos **Conceitos Básicos**, a partir da página 3 deste trabalho, considerando as seguintes situações, ausência da ETA, ausência do reservatório e a coexistência do reservatório e da ETA.

3.3.1 Na ausência da ETA

Considere que volume do reservatório $V_R(t)$, aumente a uma taxa (r_1) proporcional ao seu volume em certo instante de tempo e que esse aumento, seja livre de qualquer interferência. A taxa de aumento do volume do reservatório será expressa por:

$$\frac{dV_R}{dt} = r_1 V_R \quad (35)$$

3.3.2 Introduzindo o modelo logístico na primeira equação

Seja considerada a capacidade de suporte do reservatório (K_R) um fator de interferência no aumento do seu volume, limitando o crescimento indefinido de V_R .

Esta limitação será estimada acrescentando a equação (35) o modelo de *Pierre-François Verhulst*, conhecido como modelo logístico (KOT, 2001).

$$\left(1 - \frac{V_R}{K_R}\right)$$

Tal que:

$$\frac{dV_R}{dt} = r_1 V_R \left(1 - \frac{V_R}{K_R}\right) \quad (36)$$

Em que para V_R muito pequeno em relação a K_R , a razão V_R/K_R aproxima de zero e $dV_R/dt \approx r_1 V_R$.

Para $V_R = K_R$, tem-se $dV_R/dt = 0$. Neste caso há uma estagnação no aumento do volume do reservatório, denota-se que o reservatório atingiu o estado de equilíbrio ou estado estacionário, caso que ocorre quando não há variação da variável dependente (MAY, 1974).

Para $V_R > K_R$, o volume do reservatório decrescerá atingindo a sua capacidade de suporte, neste caso, $dV_R/dt < 0$.

3.3.3 Introduzindo a presença da ETA

Ligado ao reservatório encontra-se uma estação de tratamento de água (ETA), que é alimentada única e exclusivamente pelo reservatório, um fator que limita o aumento do volume do reservatório. O modelo considera que a interação entre o reservatório e a ETA varia na proporção direta, $V_R = b_{12} V_E$, e esta interação é estimada pelo produto entre o volume do reservatório e da ETA, sendo o volume do reservatório limitado pela sua capacidade de suporte, conforme conceitos básicos página 8 deste trabalho (EDELSTEIN-KESHET, 1988). Este efeito introduz a equação (36), um novo termo:

$$b_{12} \frac{V_R V_E}{K_R} \quad (37)$$

A equação (36) é diminuída do termo (37), podendo ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dV_R}{dt} = r_1 V_R \left(1 - \frac{V_R}{K_R}\right) - b_{12} \frac{V_R V_E}{K_R} \quad (38)$$

Colocando os termos comuns em evidência, tem-se para a equação (38):

$$\frac{dV_R}{dt} = V_R \left(r_1 - r_1 \frac{V_R}{K_R} - b_{12} \frac{V_E}{K_R} \right) \quad (39)$$

3.3.4 Na ausência do reservatório

Considere que volume da ETA $V_E(t)$, diminua a uma taxa (r_2) proporcional ao seu volume em certo instante de tempo e que esse decrescimento, seja livre de qualquer interferência. A taxa de decrescimento do volume da ETA será expressa por:

$$\frac{dV_E}{dt} = -r_2 V_E \quad (40)$$

3.3.5 Introduzindo o modelo logístico na segunda equação

Seja considerada a capacidade de suporte da ETA (K_E) um fator de interferência no aumento do seu volume, limitando o crescimento indefinido de V_E , no caso onde ocorra a presença de um fator, que promova o aumento do seu volume. Esta limitação será estimada acrescentando a equação (40) o modelo de *Pierre-François Verhulst*, conhecido como modelo logístico (KOT, 2001). A equação (40) será escrita da seguinte forma:

$$\frac{dV_E}{dt} = -r_2 V_E \left(1 - \frac{V_E}{K_E} \right) \quad (41)$$

Em que para V_E muito pequeno em relação à K_E , a razão V_E/K_E aproxima de zero e $dV_E/dt \approx -r_2 V_E$.

Para $V_E = K_E$, tem-se $dV_E/dt = 0$. Neste caso há uma estagnação no aumento do volume da ETA, denota-se que a ETA atingiu o estado de equilíbrio ou estado estacionário, caso que ocorre quando não há variação da variável dependente (MAY, 1974).

Para $V_E > K_E$, o volume da ETA crescerá atingindo a sua capacidade de suporte, neste caso, $dV_E/dt > 0$.

3.3.6 Introduzindo a presença do reservatório

Ligado a ETA encontra-se um reservatório de água, que alimenta única e exclusivamente a ETA, um fator que promove o aumento do volume da ETA. O

modelo considera que a interação entre a ETA e o reservatório, varia na proporção direta, $V_E = b_{21}V_R$, e esta interação é estimada pelo produto entre o volume do reservatório e da ETA, sendo o volume da ETA limitado pela sua capacidade de suporte, conforme conceitos básicos página 8 deste trabalho (EDELSTEIN-KESHET, 1988). Este efeito introduz a equação (41), um novo termo:

$$b_{21} \frac{V_R V_E}{K_E} \quad (42)$$

A equação (41) é somada ao termo (42), podendo ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dV_E}{dt} = -r_2 V_E \left(1 - \frac{V_E}{K_E} \right) + b_{21} \frac{V_R V_E}{K_E} \quad (43)$$

Colocando os termos comuns em evidência, tem-se para a equação (43):

$$\frac{dV_E}{dt} = V_E \left(-r_2 + r_2 \frac{V_E}{K_E} + b_{21} \frac{V_R}{K_E} \right) \quad (44)$$

3.3.7 Na coexistência do reservatório e da ETA

Na coexistência supracitada, o modelo que representa o problema proposto, é formado pela conjunção das equações (39) e (44), originando o sistema de equações diferenciais a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dV_R}{dt} = V_R \left(r_1 - r_1 \frac{V_R}{K_R} - b_{12} \frac{V_E}{K_R} \right) \\ \frac{dV_E}{dt} = V_E \left(-r_2 + r_2 \frac{V_E}{K_E} + b_{21} \frac{V_R}{K_E} \right) \end{cases} \quad (45)$$

4 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Definindo as variáveis para as equações do sistema

4.1.1 Definição das Variáveis para a Primeira Equação do Sistema

Para a primeira equação do sistema (45) foi estabelecido os seguintes parâmetros:

$$\frac{dV_R}{dt} = V_R \left(r_1 - r_1 \frac{V_R}{K_R} - b_{12} \frac{V_E}{K_R} \right) \quad (46)$$

V_R e V_E são as variáveis que representam as respectivas flutuações nos volumes do reservatório e da ETA. Conforme *Kot em (Elements of Mathematical Ecology)*, a fim de determinar os coeficientes para as equações do sistema (45) faz-se necessário, dentre as flutuações de V_R e V_E , conhecer ao menos um valor concernente a cada variável. Em decorrência das flutuações dos volumes de V_R e V_E ao longo do período analisado e da considerada relevância de todos os índices, os valores adotados serão as médias aritméticas (HURST, 1951).

$$\begin{aligned} \bar{V}_R &= 100.925.840,64 \text{ m}^3 \\ \bar{V}_E &= 14.515.200 \text{ m}^3 \end{aligned} \quad (47)$$

Conforme a Agência Reguladora de Água e Esgoto de Minas Gerais (2018), a capacidade máxima do reservatório é de 149.061.317,55 m³. Este volume representa 100% da sua capacidade, que para efeito de cálculo será transformado em taxa unitária, tal que 100/100 = 1 (FARIA, 2007). K_R representará a capacidade de suporte do reservatório e por definição:

$$K_R = 1. \quad (48)$$

r_1 é taxa de aumento do nível do reservatório. Esta taxa será obtida pela razão do volume acumulado no reservatório e o Volume existente (HURST, 1951).

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{21.358.080,00 \text{ m}^3}{100.929.418,11 \text{ m}^3} \\ r_1 &= 0.2116 \end{aligned} \quad (49)$$

O parâmetro b_{12} refere-se à variação proporcional direta entre o volume médio do reservatório e da ETA, $\overline{V}_R = b_{12} \cdot \overline{V}_E$, conforme os conceitos básicos página 8 deste trabalho. Desta forma é possível obter b_{12} , fazendo:

$$b_{12} = \frac{\overline{V}_R}{\overline{V}_E}$$

$$b_{12} = \frac{100.925.840,64 \text{ m}^3}{14.515.200,00 \text{ m}^3}$$

$$b_{12} = 6,9531. \quad (50)$$

Fazendo a substituição dos parâmetros (48), (49) e (50) na primeira equação do sistema (46), obteremos:

$$\frac{dV_R}{dt} = V_R \left(0,2116 - 0,2116 \frac{V_R}{I} - 6,9531 \frac{V_E}{I} \right)$$

$$\frac{dV_R}{dt} = V_R (0,2116 - 0,2116 V_R - 6,9531 V_E) \quad (51)$$

4.1.2 Definição das Variáveis para a Segunda Equação do Sistema

Os parâmetros para a segunda equação de sistema (45) foram estabelecidos de forma análoga à primeira equação do sistema e com base nos mesmos conceitos técnicos:

$$\frac{dV_E}{dt} = V_E \left(-r_2 + r_2 \frac{V_E}{K_E} + b_{21} \frac{V_R}{K_E} \right) \quad (52)$$

Conforme a Agência Reguladora de Água e Esgoto de Minas Gerais (2018), a capacidade máxima da ETA é de 15.033.600 m³. Este volume representa 10,09% da capacidade do reservatório, que para efeito de cálculo será transformado em taxa unitária, tal que 10,09/100 = 0,1009 (FARIA, 2007). K_E representará a capacidade de suporte da ETA e por definição:

$$K_E = 0,1009 \quad (53)$$

r_2 é a taxa de decréscimo do nível da ETA e será obtida pela razão entre o volume que sai da ETA e o volume existente (HURST, 1951). O volume de saída é

9.598.020,48 m³ (AGÊNCIA REGULADORA DE ÁGUA E ESGOTO DE MINAS GERAIS, 2018; WIKIPÉDIA, 2018).

$$r_2 = \frac{9.598.020,48 \text{ m}^3}{14.515.200,00 \text{ m}^3}$$

$$r_2 = 0,6612. \quad (54)$$

O parâmetro b_{21} refere-se à variação proporcional direta entre o volume médio da ETA e do reservatório, $\overline{V_E} = b_{21} \cdot \overline{V_R}$, conforme conceitos básicos página 8 deste trabalho. Desta forma é possível obter b_{21} , fazendo:

$$b_{21} = \frac{\overline{V_E}}{\overline{V_R}}$$

$$b_{21} = \frac{14.515.200,00 \text{ m}^3}{100.925.840,64 \text{ m}^3}$$

$$b_{21} = 0,1438. \quad (55)$$

Substituindo os parâmetros (53), (54) e (55) na segunda equação do sistema (52), obteremos:

$$\frac{dV_E}{dt} = V_E \left(-0,6612 + 0,6612 \frac{V_E}{0,1009} + 0,1438 \frac{V_R}{0,1009} \right)$$

$$\frac{dV_E}{dt} = V_E (-0,6612 + 6,5530V_E + 1,4252V_R) \quad (56)$$

O sistema (45) pode ser descrito com base nos parâmetros analisados e obtidos a partir das equações (51) e (56), definindo assim o modelo objeto deste estudo.

$$\begin{cases} \frac{dV_R}{dt} = V_R(0,2116 - 0,2116 V_R - 6,9531V_E) \\ \frac{dV_E}{dt} = V_E(-0,6612 + 6,5530V_E + 1,4252V_R) \end{cases} \quad (57)$$

4.2 Pontos de Estabilidades do Sistema

O estado de equilíbrio ou estado estacionário, ocorre quando não há mais variação nas variáveis dependentes, $dV_R/dt = 0$ e $dV_E/dt = 0$, e os pontos de estabilidades do sistema (57) serão obtidos pelas soluções das equações diferenciais como veremos a seguir (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Seja:

$$\begin{aligned}\frac{dV_R}{dt} &= f(V_R, V_E) \\ \frac{dV_E}{dt} &= g(V_R, V_E).\end{aligned}$$

Fazendo $f(V_R, V_E) = 0$ e $g(V_R, V_E) = 0$, nas equações do sistema (57) tem-se:

$$\begin{cases} V_R(0,2116 - 0,2116 V_R - 6,9531V_E) = 0 \\ V_E(-0,6612 + 6,5530V_E + 1,4252V_R) = 0 \end{cases} \quad (58)$$

O primeiro ponto de estabilidade, P_1 , surge ao isolar as variáveis V_R e V_E no primeiro membro da igualdade, nas respectivas equações em (58) (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

$$\begin{cases} V_R = \frac{0}{(0,2116 - 0,2116V_R - 6,9531V_E)} \\ V_E = \frac{0}{(-0,6612 + 6,5530V_E + 1,4252V_R)} \end{cases} \quad (59)$$

$$V_R = 0$$

$$V_E = 0.$$

Tem-se para o primeiro ponto de estabilidade, $P_1 = (0; 0)$.

Ao passar V_R e V_E para o segundo membro da igualdade, teremos para o sistema (58) (EDELSTEIN-KESHET, 1988):

$$\begin{cases} (0,2116 - 0,2116 V_R - 6,9531V_E) = \frac{0}{V_R} \\ (-0,6612 + 6,5530V_E + 1,4252V_R) = \frac{0}{V_E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,2116 - 0,2116 V_R - 6,9531V_E = 0 \\ -0,6612 + 6,5530V_E + 1,4252V_R = 0 \end{cases} \quad (60)$$

O segundo ponto de estabilidade, P_2 , surge ao fazer $V_E = 0$ na primeira equação do sistema (60) (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

$$0,2116 - 0,2116 V_R - 6,9531(0) = 0$$

$$0,2116 - 0,2116V_R = 0$$

$$-0,2116V_R = -0,2116$$

$$V_R = \frac{-0,2116}{-0,2116}$$

$$V_R = 1.$$

Para o segundo ponto de estabilidade tem-se $P_2 = (1; 0)$.

O ponto P_3 será obtido a partir da resolução do sistema (60), ao isolar os termos independentes no segundo membro da igualdade, podendo ser descrito como veremos a seguir (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

$$\begin{cases} -0,2116V_R - 6,9531V_E = -0,2116 \\ 1,4252V_R + 6,5530V_E = 0,6612 \end{cases} \quad (61)$$

O sistema (61) será resolvido pelo método da matriz inversa.

Seja o sistema (61) escrito na forma matricial, tal que:

$$\begin{pmatrix} -0,2116 & -6,9531 \\ 1,4252 & 6,5530 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_R \\ V_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2116 \\ 0,6612 \end{pmatrix} \quad (62)$$

onde teremos:

$$A = \begin{pmatrix} -0,2116 & -6,9531 \\ 1,4252 & 6,5530 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} V_R \\ V_E \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} -0,2116 \\ 0,6612 \end{pmatrix} \quad (63)$$

De (62) e (63) tem-se: $A \cdot V = b$.

Ao multiplicarmos os dois lados da igualdade pela matriz inversa da \mathbf{A} , a matriz \mathbf{A}^{-1} , observa-se que:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (64)$$

E $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade que substituída em (64) estabelece a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \cdot \mathbf{V} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{V} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (65)$$

A matriz inversa \mathbf{A}^{-1} , foi desenvolvida com recursos do Matlab versão R 2015_win 32.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,7688 & 0,8158 \\ -0,1672 & -0,0248 \end{pmatrix}$$

A equação (65) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} V_R \\ V_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7688 & 0,8158 \\ -0,1672 & -0,0248 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,2116 \\ 0,6612 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_R \\ V_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3767 \\ 0,0190 \end{pmatrix}$$

Tem-se para o terceiro ponto de estabilidade $\mathbf{P}_3 = (0,3767; 0,0190)$.

Para o ponto $\mathbf{P}_3 = (V_R, V_E)$, segundo *Edelstein-Keshet* (1988), só interessa valores não negativos, $V_R > 0$ e $V_E > 0$. Desta maneira, tem-se para V_R o correspondente a 37,67% da capacidade do reservatório, onde $V_R = 56.151.398,30 \text{ m}^3$. Tem-se para V_E o correspondente 1,90% da capacidade da **ETA**, tal que $V_E = 285.638,40 \text{ m}^3$.

4.3 Linearização do Sistema

Para *Edelstein-Keshet* (1988), as equações de Lotka-Volterra com crescimento logístico determina um sistema de primeira ordem caracterizado por um par de equações diferenciais, contínuas no tempo, não lineares duas vezes diferenciáveis e apresenta métodos matemáticos para a linearização do sistema, que podem ser vistos de (28) a (34). Para Hale (1991) a partir de (26), sendo as funções do sistema

(57) duas vezes diferenciáveis então o sistema linear associado a (57), pode ser obtido a partir da matriz jacobiana, e elucidada apresentando o teorema 2.5.1 (HALE, 1991).

Com base nestas informações o sistema linear associado a (57) será determinado da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(V_R, V_E)}{\partial V_R} & \frac{\partial f(V_R, V_E)}{\partial V_E} \\ \frac{\partial g(V_R, V_E)}{\partial V_R} & \frac{\partial g(V_R, V_E)}{\partial V_E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Onde f e g são as respectivas funções do sistema (57) e o sistema linear associado é determinado por:

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2116 - 0,4232V_R - 6,9533V_E & -6,9533V_R \\ 1,4252V_E & -0,6612 + 13,1060V_E + 1,4252V_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (67)$$

Onde $\begin{pmatrix} 0,2116 - 0,4232V_R - 6,9533V_E & -6,9533V_R \\ 1,4252V_E & -0,6612 + 13,1060V_E + 1,4252V_R \end{pmatrix}$ é a matriz

jacobiana relativa ao sistema (57).

4.4 Dinâmica e Estabilidade dos Pontos

Foi analisada através dos autovalores do sistema equivalente (67), obtido a partir da linearização do sistema modelado (57), em torno dos seus respectivos pontos de estabilidade, em conformidade com Edelstein-Keshet (1988).

Os autovalores foram obtidos com recursos do Matlab versão R 2015_win 32.

4.4.1 Estabilidade na Vizinhança do Primeiro Ponto, $P_1 = (0; 0)$

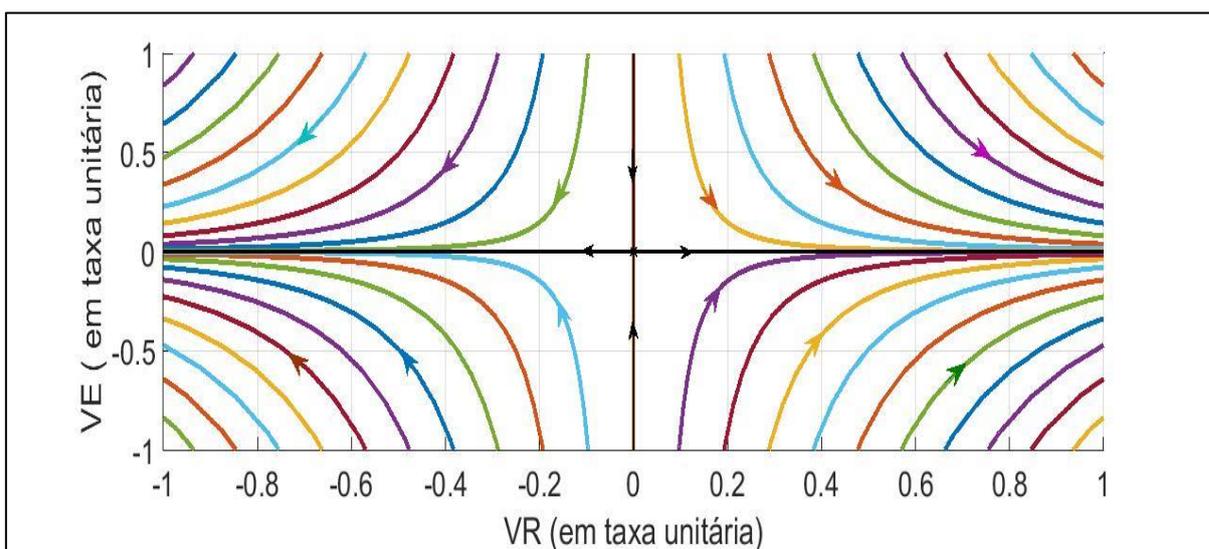
Fazendo a substituição de P_1 em (67), teremos a seguir, o sistema linear equivalente em torno de P_1 .

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2116 & 0 \\ 0 & -0,6612 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (68)$$

Que tem como autovalores $\lambda_1 = 0,2116$ e $\lambda_2 = -0,6612$.

E para λ_1 e λ_2 diferentes de zero, pertencentes ao conjunto dos números reais tal que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onde o produto entre os autovalores sejam $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) < 0$, P_1 é um ponto de sela para o sistema (68) (HALE, 1991), assim como para o sistema não linear (57), conforme os teoremas 2.5.2 e 2.5.3 página 16 deste trabalho (HALE, 1991). O diagrama de fase para a estabilidade em torno do ponto P_1 é apresentado a seguir na figura 3.

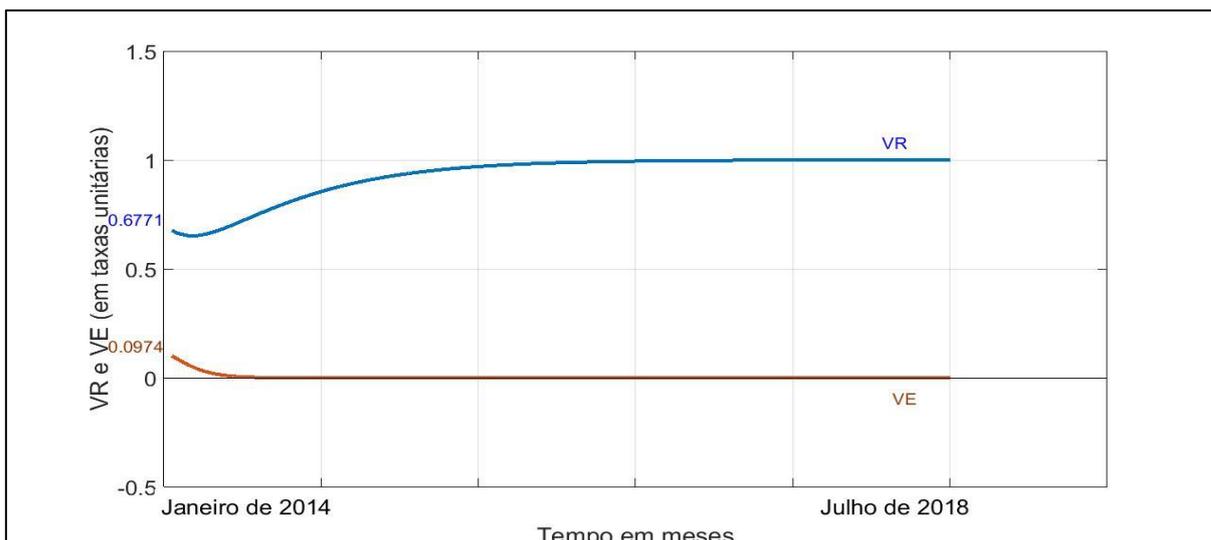
Figura 3: Diagrama de fase em torno do ponto P_1 .



4.4.2 Dinâmica do Sistema para o Segundo Ponto, $P_2 = (1; 0)$

Em *Edelstein-Keshet* (1988), para uma taxa de aumento nula no volume da ETA ao decorrer do tempo, sendo mantida a taxa de aumento no volume do reservatório no mesmo período, conforme (49), o volume da ETA irá à zero assim como o volume do reservatório atingirá a capacidade de suporte. Esta dinâmica pode ser observada na figura 4, que esboça o gráfico do volume do reservatório (V_R) e da ETA (V_E) em decorrência do tempo t .

Figura 4: Gráfico de V_R e V_E em Relação ao Tempo para o Ponto P_2 .



O volume do reservatório representa 67,71% da sua capacidade máxima e o volume da ETA, representa 9,74% da capacidade.

4.4.3 Estabilidade na Vizinhança do Terceiro Ponto, $P_3 = (0,3767; 0,0190)$

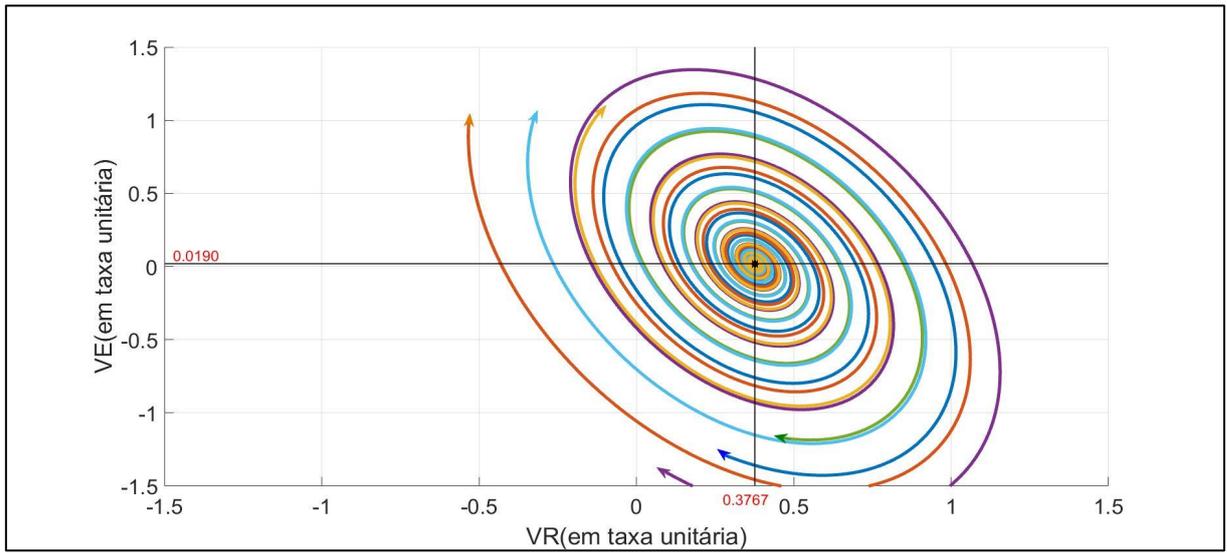
Sendo P_3 o principal ponto de interesse do estudo, apresenta-se nesta seção a estabilidade em sua vizinhança.

Fazendo a substituição de P_3 em (67), teremos como se segue, o sistema linear equivalente em torno de P_3 .

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0799 & -2,6193 \\ 0,0271 & 0,1246 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (69)$$

Que tem como autovalores $\lambda_1 = 0,0224 + 0,2459i$ e $\lambda_2 = 0,0224 - 0,2459i$.

Para λ_1 e λ_2 diferentes de zero, pertencentes ao conjunto dos números complexos tal que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, conjugados complexos com parte real positiva. Neste caso, P_3 é um ponto denominado foco hiperbólico instável para o sistema (69) (HALE, 1991), assim como para o sistema não linear (57), conforme os teoremas 2.5.2 e 2.5.3 página 16 deste trabalho (HALE, 1991), e o seu diagrama de fase, é representado a seguir e pode ser visto na figura 5 (EDLSTEIN-KESHET, 1988)

Figura 5: Diagrama de fase em torno de P_3 .

O volume do reservatório representa 37,67% da sua capacidade máxima e o volume da ETA, representa 1,90% da capacidade.

5 – CONCLUSÃO

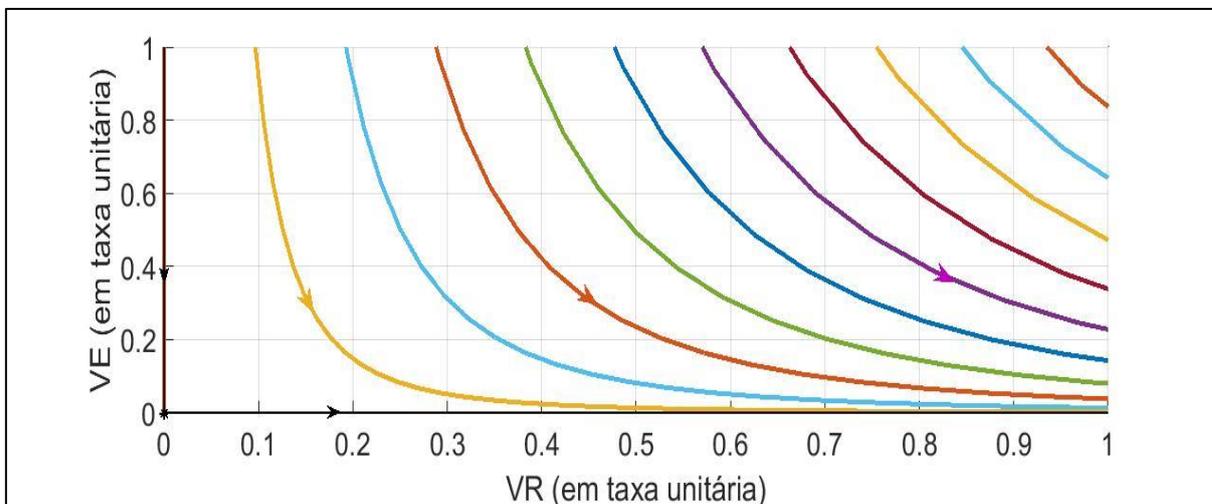
Muitos sistemas de abastecimentos de água potável para conglomerados urbanos são constituídos por um reservatório e uma estação de tratamento de água, e até o momento, não foi observado nenhum estudo que determinasse a estabilidade de um sistema desta natureza, com base nos volumes do reservatório e da estação de tratamento de água. É com este objetivo que o trabalho foi desenvolvido, estudar a estabilidade do principal sistema de abastecimento de água da Região Metropolitana de Belo Horizonte, correlacionando o volume do reservatório e o volume da estação de tratamento de água, a partir de elementos matemáticos e teorias existentes para o estudo da estabilidade e conseqüentemente, ressaltar tais elementos e teorias matemáticas, bem como, a possibilidade de se aferir a estabilidade de empreendimentos desta natureza. Os dados foram obtidos com recursos da internet, em sites que disponibilizaram informações fundamentais aos objetivos propostos. Alguns índices importantes, mas que não inviabilizaram a pesquisa, não foram considerados por restrições ao acesso as informações e as instalações do sistema objeto de pesquisa, como os índices de evaporação e precipitações na região onde concentraram os trabalhos.

Os dados estatísticos para os índices volumétricos do reservatório de água apresentam uma distribuição platicúrtica um pouco acima da média. O modelo matemático utilizado nos trabalhos, Equações de Lotka-Volterra com crescimento logístico, mostrou-se eficaz por abordar coeficientes preponderantes para os trabalhos, como taxas de aumentos, efeitos do reservatório sobre a estação de tratamento de água e vice-versa, e as respectivas capacidades de suportes dos meios. O sistema (57), modelo fundamental para o estudo da estabilidade, foi obtido e desenvolvido a partir de informações e teorias encontradas nas literaturas referenciadas, como podem ser vistas nos Conceitos Básicos página 3 e na Metodologia página 19 deste trabalho.

A figura 3, diagrama de fase em torno do ponto de estabilidade $P_1 = (0; 0)$, de acordo com Hale (1991), tem-se uma sela hiperbólica instável para o sistema (57). Desta forma, como pode ser observado na figura 6, Diagrama de fase em torno do ponto P_1 nas proximidades do zero, que representa o primeiro quadrante da figura 3,

para $(V_R \text{ e } V_E) \geq 0$, pontos de interesse do estudo, para o volume da ETA tendendo a zero, o volume do reservatório tenderá a capacidade de suporte.

Figura 6: Diagrama de fase em torno do ponto P_1 , no primeiro quadrante do plano.



Esta tendência também pode ser observada na figura 4, na dinâmica do sistema para o segundo ponto de estabilidade, $P_2 = (1,0)$, que corroboram os cálculos realizados a partir das equações de Lotka-Volterra, em conformidade com *Edelstein-Keshet* (1988) em “*Mathematical Models in Biology*”, que prevê uma variável do sistema, V_R , atingindo a capacidade de suporte na extinção da outra variável, V_E , evidenciando, o funcionamento conciso do sistema (57) para as técnicas literárias aplicadas.

O principal ponto de interesse do estudo, $P_3 = (0,3767; 0,0190)$, que determina a estabilidade desejável para o volume do reservatório (V_R) correlacionado com o volume da estação de tratamento de água (V_E), demonstrou ser instável, um foco hiperbólico instável, para $V_R = 56.151.398,30 \text{ m}^3$, que corresponde a 37,67% da capacidade do reservatório e $V_E = 285.638,40 \text{ m}^3$, que corresponde a 1,90% da capacidade da ETA. Os respectivos volumes do reservatório e da ETA demonstram a tendência de afastarem do ponto P_3 , quando em sua proximidade, alternando de forma cíclica suas grandezas volumétricas. O sistema Rio Manso não apresentou, neste estudo, ponto de estabilidade estável.

Entendendo a complexidade e a relevância para o tema, abastecimento de água potável em conglomerados urbanos, o estudo vislumbra a possibilidade de desenvolver no meio acadêmico, princípios e fundamentos para o estudo da

estabilidade em sistemas de abastecimentos urbanos, constituídos por reservatório e estação de tratamento de água, trabalhando integrados. Espera-se desenvolver uma consciência coletiva para o consumo sustentável da água.

REFERÊNCIAS

AGÊNCIA REGULADORA DE ÁGUA E ESGOTO DE MINAS GERAIS (Brasil). Relatório de Fiscalização. *In*: AGÊNCIA REGULADORA DE ÁGUA E ESGOTO DE MINAS GERAIS (Brasil). **Sistema Integrado de Abastecimento de Água da Região Metropolitana de Belo Horizonte Minas Gerais**. [Belo Horizonte, MG]: Agência Reguladora de Água e Esgoto de Minas Gerais 2013. Disponível em: http://www.arsae.mg.gov.br/images/documentos/rf_tec_op_saa_sistema_bacia_para_opeba.pdf. Acessado em: 7 de Agosto de 2018.

BOCCARA, Nino. **Modeling Complex Systems**. 2^a ed. New York: Springer, 2010.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno**. 8^a ed. São Paulo: S. A., 2006.

COMPANHIA DE SANEAMENTO BÁSICO DE MINAS GERAIS (Brasil). Abastecimento de Água. *In*: COMPANHIA DE SANEAMENTO BÁSICO DE MINAS GERAIS (Brasil). **Níveis dos reservatórios**. [Belo Horizonte, MG]: Companhia de Saneamento Básico de Minas Gerais 2018. Disponível em: <http://www.copasa.com.br/wps/portal/internet/abastecimento-de-agua/nivel-dosreservatorios>. Acessado em: 18 de Julho de 2018.

EDELSTEIN-KESHET, Leah. **Mathematical Models in Biology**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988.

FARIA, Rogério Gomes. **Matemática Comercial e Financeira**. São Paulo: Ática, 2007.

HALE, Jack Kenneth. **Dynamics and Bifurcations**. New York: Springer Verlag, 1991.

HURST, Harold Edwin. **Long-Term Storage Capacity of Reservoirs**. 1^a Ed. Reston: American Society of Civil Engineers, 1951.

KOT, Mark. **Elements of Mathematical Ecology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

MALTHUS, Thomas Robert. **An Essay on the Population Principle**. London: Johnson, 1798.

MAY, Robert. **Stability and complexity in model Ecosystems**. 2^a Ed. New Jersey: Princeton University press, 1974.

MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE (Brasil). Água Um Recurso Cada Vez mais Ameaçado. *In*: MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE (Brasil). **Manual de Educação para o Consumo Sustentável**. [Brasília, DF]: Ministério do Meio Ambiente 2005.

Disponível em: <https://idec.org.br/publicacao/manual-de-educacao-para-o-consumo-sustentavel-2a-ed-2005>. Acessado em: 20 de Julho de 2018.

WIKIPÉDIA A ENCICLOPÉDIA LIVRE (EUA). Abastecimento de água na região metropolitana de Belo Horizonte. *In*: WIKIPÉDIA A ENCICLOPÉDIA LIVRE (EUA). Sistema Rio Manso. [Belo Horizonte, MG]: Wikipédia a Enciclopédia Livre 2001. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Abastecimentode_%C3%A1gua_na_Regi%C3%A3oMetropolitan_a_de_Belo_Horizonte. Acessado em: 2 de Agosto de 2018.