

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL

GREICY KELY CARLA DOS SANTOS

**ESTUDO DA DINÂMICA DE PREÇOS DO MERCADO FINANCEIRO POR
MEIO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS.**

Belo Horizonte

2020

GREICY KELY CARLA DOS SANTOS

**ESTUDO DA DINÂMICA DE PREÇOS DO MERCADO FINANCEIRO POR
MEIO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - PPGMMC/CEFET-MG, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Modelagem Matemática e Computacional.

Linha de Pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados.

Orientador: Leonardo dos Santos Lima

Belo Horizonte

2020

Santos, Greicy Kely Carla dos
S237e Estudo da dinâmica de preços do mercado financeiro por meio de equações diferenciais estocásticas / Greicy Kely Carla dos Santos. – 2020. 89 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Leonardo dos Santos Lima.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Processo estocástico – Modelos matemáticos – Teses. 2. Mercado financeiro – Teses. 3. Física estatística – Teses. 4. Probabilidades – Teses. I. Lima, Leonardo dos Santos. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 519.21

GREICY KELY CARLA DOS SANTOS

**ESTUDO DA DINÂMICA DE PREÇOS DO MERCADO FINANCEIRO POR
MEIO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS.**

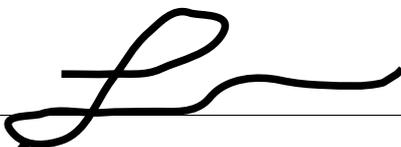
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - PPGMMC/CEFET-MG, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Modelagem Matemática e Computacional.

APROVADA em 27 / 02 / 2020.

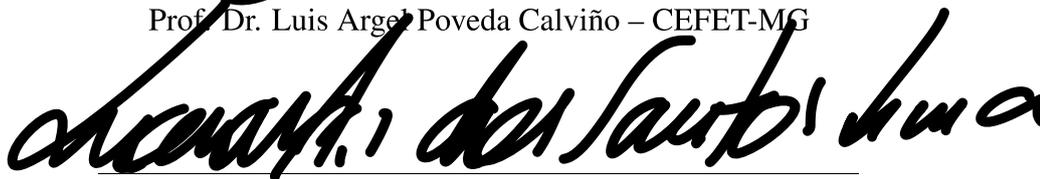
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Arthur Rodrigo Boschi de Magalhães – CEFET-MG



Prof. Dr. Luis Argel Poveda Calviño – CEFET-MG



Prof. Dr. Leonardo dos Santos Lima – CEFET-MG

À Manoel e Ana, meus maiores mestres.

AGRADECIMENTO

A Deus, por ter me dado forças ao longo dessa trajetória, para superar os obstáculos com determinação e perseverança. Por orientar-me nas minhas escolhas e tomadas de decisões, por guiar meus estudos e guardar meus passos até aqui. Pela oportunidade de começar e recomeçar todos os dias. Por me fazer compreender que há um tempo certo para todas as coisas.

A minha extensa e divertida família e aos meus amigos, pelos momentos de alegria, por escutarem tantas vezes meus lamentos, me darem ânimo e incentivo para continuar estudando.

Ao professor Leonardo dos Santos Lima, pela orientação, paciência e por me confiar a realização desse trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo financiamento de projetos dos quais participei e que muito contribuíram com meu desempenho acadêmico e crescimento pessoal.

Aos professores e colegas, que tive a oportunidade de conviver durante esses anos de estudos e pesquisas, contribuindo de algum modo para o meu aprendizado.

Finalmente, a todos que passaram por mim deixando algo de bom, acompanhando minha luta, encorajando-me e torcendo pelo meu sucesso, muito obrigada!

“A vida é estocástica”.

John Martin Charnes.

RESUMO

Sabe-se que comportamento do mercado financeiro produz grandes impactos na economia e que estes refletem em diversos setores da sociedade. A sua importância e complexidade o torna um atrativo campo de estudos para pesquisadores de diversas áreas, tais como, Economia, Análise de Sistemas, Matemática e Física. É interessante também, para áreas interdisciplinares, como a Econofísica, que relaciona elementos da Economia e da Física no estudo de sistemas financeiros. A modelagem desses sistemas, especificamente a dinâmica de preços, depende fortemente da Mecânica Estatística. Métodos matemáticos da Física Estatística na descrição de sistemas econômicos, têm sido aplicados às séries temporais para investigar o comportamento dos mercados financeiros em diferentes escalas. Entre as ferramentas utilizados para tal, estão as medidas de dispersão central, distribuição de probabilidade, dinâmica estocástica e métodos para estimar as correlações. Instrumentos financeiros como, ativos, opções e índices de bolsas de valores flutuam ao longo do tempo, por isso, podem ser modelados via processos estocásticos. Dessa forma, este estudo pretende verificar se uma equação diferencial estocástica (formalizada por um potencial quártico mais um ruído ambiente), atende a um dado fato estilizado do mercado. Mais especificamente, se a cauda pesada da distribuição dos retornos absolutos gerados pela equação proposta, segue uma empírica lei de potência. Além disso, estimamos o expoente de Hurst através da Análise R/S e do DFA para verificar a dependência de longo alcance, ou memória longa da série temporal obtida. Como o termo de ruído que compõe a equação é não diferenciável, introduzimos o cálculo estocástico para obter analiticamente a solução desta.

Palavras-chave: Processos estocásticos. Mercado financeiro. Potencial quártico. Física estatística. Distribuição de probabilidades.

ABSTRACT

It is known that the behavior of the financial market produces major impacts on the economy and that these reflect on various sectors of society. Its importance and complexity make it a field of study for researchers in various fields, such as Economics, Systems Analysis, Mathematics and Physics. It is also interesting for interdisciplinary areas, such as Econophysics, which relate Economic and Physical elements in the study of financial systems. The modeling of these systems, specifically price dynamics, depends heavily on statistical mechanics. Mathematical methods of Statistical physics in the description of economic systems have been applied to time series to investigate the behavior of financial markets at different scales. Among the tools used for this are measures of central dispersion, probability distribution, stochastic dynamics and methods to estimate correlations. Financial market instruments such as assets, options and stock market indexes, fluctuate over time, so they can be modeled using stochastic processes. Thus, this study aims to verify whether a stochastic differential equation (formalized by a quartic potential plus ambient noise), meets a given stylized fact of the market. More specifically, if the heavy tail of the distribution of the absolute returns generated by the equation follows an empirical power law. In addition, we estimate Hurst's exponent through analysis R/S and DFA to verify the long-range dependency, or long memory, of the obtained time series. Since the noise term present in the equation is non-differentiable, we introduce the stochastic calculation to obtain its solution analytically.

Keywords: Stochastic processes. Financial Market. Quartic potential. Statistical physics. Probability distribution.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Classificação da função de distribuição de probabilidade em relação à curtose	18
2.2	Distribuição Gaussiana	19
2.3	Esquema de Reservatório - Estatística de Hurst	32
2.4	Movimento Browniano fracionário e série não correlacionada . . .	33
2.5	Trajetória do movimento Browniano	37
2.6	Ruído branco	43
3.1	Potencial de poço duplo	50
3.2	Série temporal do preço	50
4.1	Ilustração da distribuição acumulada da volatilidade	60
4.2	Gráfico ilustrativo de $\text{Log}(x)$ com $x \in [0, 1]$	61
5.1	Estimativa de expoente de Hurst com parâmetros nulos para o potencial quártico	67
5.2	Série temporal de retornos	68
5.3	Distribuição de probabilidade acumulada da volatilidade	69
5.4	Análise R/S da série temporal do retorno	71
5.5	Estatística R/S da volatilidade	72
5.6	Expoente de Hurst da série temporal de retorno via DFA	73
5.7	Expoente de Hurst da volatilidade via DFA	74

LISTA DE ABREVIATURAS

ARFIMA - modelo auto-regressivo fracionariamente integrado de médias móveis.

EDE - equação diferencial estocástica.

EDEs - equações diferenciais estocásticas.

EDP - equação diferencial parcial.

Eq. - equação.

DFA - análise de flutuações sem tendência (detrended fluctuation analysis).

DJIA - Dow Jones Industrial Average.

FDA - função de distribuição acumulada.

FDP - função de densidade de probabilidade.

Fig. - figura.

IBOV - Índice Bovespa.

IEI - integral estocástica de Itô.

H - expoente de Hurst.

M&FBovespa - Bolsa de valores, Mercadorias e Futuros.

MB - movimento Browniano.

MBF - movimento Browniano fracionário.

MBG - movimento Browniano geométrico.

MBP - movimento Browniano padrão.

MF - modelo Mike-Farmer.

ML - memória longa.

MMQ - método mínimos quadrados.

NYSE - New York Stock Exchange.

PE - processos estocásticos.

RGF- ruído Gaussiano fracionário.

R/S - método do alcance reescalado (Recaled Range).

S&P500 - Standard & Poor's 500.

VA - variável aleatória.

Var - variância.

VAC - variável aleatória contínua.

VAD- variável aleatória discreta.

VAE - variável aleatória estocástica.

VIX - Volatility Index (Índice de volatilidade).

LISTA DE SÍMBOLOS

\approx -Aproximadamente.

\simeq -Aproximado.

\mapsto - Associação de elementos.

\mathbb{R} - Conjunto dos Números reais.

\emptyset - Conjunto vazio.

ρ - Densidade

σ - Desvio padrão.

\neq - Diferente.

\equiv - Equivalente.

Ω -Espaço amostral.

$E[\]$ - Esperança, valor esperado, média.

exp - Exponencial

$=$ - Igual.

\Rightarrow - Implicação; então.

∞ - Infinito.

\int - Integral.

\cap - Interseção.

log - Logaritmo

\ln - Logaritmo natural.

$>$ - Maior.

\geq - Maior ou igual.

μ - Média, valor esperado.

MQ - Média quadrática.

$<$ - Menor.

\leq - Menor ou igual.

$\stackrel{d}{=}$ - Mesma distribuição.

ϑ - Ordem.

\forall - Para todo.

\in - Pertence.

\therefore - Portanto.

\propto - Proporcional.

$\sqrt{\quad}$ - Raiz quadrada.

\Leftrightarrow - Se e somente se.

\sim - Semelhante.

Σ - Somatório.

t - Tempo.

\rightarrow - Tende à; então.

\cup - União.

σ^2 - Variância.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação e Justificativa	1
1.2 Objetivos	5
1.3 Divisão Estrutural do Trabalho	6
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	9
2.1 Mercado Financeiro e sua Relação com Conceitos da Física Estatística	9
2.2 Noções de Probabilidade e Estatística	14
2.2.1 Valor Esperado, Variância e Momentos	16
2.2.2 Probabilidade Condicional, Distribuição Conjunta e Covariância	19
2.3 Processos Estocásticos	21
2.3.1 Martingale	24
2.3.2 Séries Temporais	26
2.3.3 Um Breve Histórico da Memória Longa	29
2.4 Introdução ao Cálculo Estocástico	35
2.4.1 Movimento Browniano	36
2.4.2 Movimento Browniano e a Caminhada Aleatória	38
2.4.3 Processo de Wiener e o Ruído Branco	39
2.4.4 Equações Diferenciais Estocásticas	42
2.4.5 Cálculo de Itô	45
3 DESCRIÇÃO DO MODELO	49
4 METODOLOGIA DA PESQUISA	55
4.1 Aspectos Metodológicos	56
4.1.1 Classificação da Pesquisa	56
4.1.2 Tratamento e Análise dos Dados	57
4.2 Distribuição Acumulada da Volatilidade e o Expoente da Cauda Pesada	58
4.3 Análise R/S e a Estimativa do Expoente de Hurst	60
4.4 Análise de Flutuação sem Tendência-DFA	64
5 RESULTADOS NUMÉRICOS	67
5.1 Comportamento da Distribuição de Probabilidade Acumulada da Volatilidade	67
5.2 Resultados Numéricos Obtidos pela Análise R/S	70
5.3 Resultados Numéricos Obtidos pelo DFA	70

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	75
REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e Justificativa

Os movimentos imprevisíveis ou aleatórios fazem parte essencial da dinâmica microscópica e macroscópica, quando superpostos aos movimentos previsíveis constituem as flutuações aleatórias e a Física Estatística é a disciplina que estuda os sistemas afetados por estas flutuações, às vezes chamada de ruído [1]. Um sistema afetado por essas flutuações é o mercado financeiro.

De um modo geral, o mercado financeiro é um sistema dinâmico [2], onde eventos extremos ocorrem com muita frequência exibindo comportamentos complexos [3, 4]. Ele tem sido um grande campo de interesse para a aplicação de conceitos e métodos matemáticos da Física Teórica, usados para tratar sistemas complexos [5, 6, 7].

Entre as razões para esse interesse, está o desafio científico de entender a dinâmica de um sistema complexo fortemente flutuante, com uma grande quantidade de elementos em interação. Além disso, é possível que a experiência adquirida com o estudo de sistemas físicos complexos possa produzir novos resultados em Economia [2].

Os mercados financeiros proporcionam o comércio de grandes quantias de dinheiro, ativos e bens em um ambiente global competitivo [8], direcionando os recursos excedentes da economia (poupança) para o financiamento dos agentes econômicos (investimentos) tais como empresas, novos projetos e Estado. Este é outro fator relevante no interesse pelo estudo dos fenômenos dos mercados financeiros, uma vez que estes, assumem um papel real e importante no desenvolvimento socioeconômico.

Dentre os fatores que corroboram com o desenvolvimento socioeconômico estão a conduta econômica voltada para aquisição de bens e serviços e o preço a que estes são comprados ou vendidos, definido como preço de mercado. Os preços estão ligados à lei de procura e oferta podendo aumentar ou diminuir caso tenham muitos ou poucos compradores respectivamente.

Desde a segunda metade do século XX, mudanças significativas ocorreram no mundo das finanças. As moedas começaram a ser negociadas nos mercados financeiros e seus valores determinados pelo mercado de câmbio, um mercado financeiro ativo durante

todo o dia e em todo o mundo [8].

Evoluções como essas impulsionaram as investigações sobre a dinâmica de preços do mercado, que tem sido estudada desde a década de 60 por Black e Scholes [9] com a famosa equação para a dinâmica de preços do mercado europeu. Este foi um dos primeiros resultados fundamentais nesse campo, tendo inspirado muitos pesquisadores, tanto que, nas últimas décadas, houve uma grande quantidade de artigos sobre este assunto [8].

O mercado de ações é um exemplo de mercado que vem despertando muito interesse, não só pelos agentes econômicos como por pesquisadores interessados pela modelagem de sistemas complexos. O interesse das empresas pelas captações via emissão de ativos está aumentando, por outro lado, investidores de renda fixa estão migrando para aplicações de renda variável. A maior previsibilidade da economia garantida pela estabilidade financeira, a mudança de hábito dos agentes econômicos e a mentalidade dos mesmos ao aplicarem suas reservas, são algumas das causas do crescimento da demanda por ações [10, 11].

Já a quantidade enorme de dados financeiros eletronicamente armazenados e prontamente disponível têm corroborado para o grande interesse dos pesquisadores pela modelagem de sistemas econômicos. Esses dados são caracterizados pela propriedade de serem de alta frequência [8].

Na literatura, encontramos modelos matemáticos que empregam conceitos da Física Estatística para estudar e simular a dinâmica de preços, incluindo modelos empíricos e comportamentais [12] e modelagem de mercados de ações através de equações diferenciais ordinárias lineares [13]. A Econofísica é outra área interdisciplinar que tem contribuindo bastante no desenvolvimento de modelos para sistemas financeiros [14], onde conceitos e técnicas de análise na descrição de sistemas físicos são usados para investigar os problemas relacionados à economia.

Conforme consta em [2], talvez os desafios mais intrigantes no estudo de um sistema como o mercado financeiro são a origem desconhecida das interações entre os diferentes elementos que o compõem e a maneira pela qual fatores externos o afetam. Assim, um ponto de partida é recorrer a estudos empíricos para ajudar a descobrir as regularidades ou leis empíricas que podem governar os mercados financeiros. Tais interações

geram muitos observáveis, como o preço da transação, o volume de ações negociadas, a frequência de negociação e os valores dos índices de mercado.

Um outro fator muito observado em finanças e que segue uma lei empírica é o retorno (de ativos, por exemplo). Com a finalidade de investigar a natureza do processo estocástico subjacente a ele, vários estudos observaram as séries temporais de retornos em escalas de tempo Δt variadas [2, 8, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Para pequenas escalas de tempo, o retorno é a variação entre o preço futuro de um ativo e o seu preço atual. Estes estudos também indicaram que a curva da distribuição de probabilidade acumulada dos retornos absolutos possui caudas pesadas (ou gordas) [8], que estas decaem segundo a uma lei de potência [22] e que isto é corroborado com praticamente todos os tipos de dados financeiros e mercados [23, 24].

Estas constatações e outros estudos semelhantes [16, 25] contrariam a teoria que até então considerava que as caudas da distribuição dos retornos eram normais [26]. Muitos resultados foram produzidos com base nessa teoria inclusive o modelo de Black e Scholes [9]. Ela é um dos suportes que sustentam a hipótese de mercado eficiente [27, 28], onde a série temporal de retornos é um processo aleatório não correlacionado com distribuição independente e identicamente distribuída. Em outras palavras, o retorno de amanhã não é influenciado pelo retorno de ontem, o que é válido por exemplo, para o retorno de 1 dia.

Divergindo dessa teoria, muitos estudos indicam que os retornos de ativos financeiros possam estar sujeitos a existência de correlações de longo alcance [8, 12, 29, 30, 31]. Há resultados que indicam inclusive, que as distribuições de caudas pesadas dos retornos surgem principalmente da correlação da volatilidade, e que as distribuições de caudas pesadas podem ter origem a partir da correlação de longo alcance no valor absoluto de qualquer série temporal [14].

A volatilidade pode ser definida como o valor absoluto do retorno, [3, 18, 19, 20, 29, 30, 32, 33]. O caráter flutuante da volatilidade em mercados financeiros tem sido considerado como o principal responsável pela mudança da dinâmica dos preços [22, 25]. Além disso, o estudo da volatilidade em séries temporais não é apenas crucial para revelar o mecanismo subjacente da dinâmica do mercado financeiro, mas útil também

para investidores, porque pode ajudá-los a estimar o risco e otimizar o portfólio [21]. Isso pode ser feito através da quantificação da correlação, que caracteriza o comportamento de persistência ou não dos mercados.

Quando uma série temporal financeira apresenta comportamento persistente, dizemos que ela possui “memória longa” (ML). O recurso de memória longa é um fato bem documentado há algum tempo em algumas ciências físicas, tendo sido aplicado em Economia desde 1980 [34].

Um processo de ML indica que eventos passados têm efeito decadente em eventos futuros. Também se relaciona com uma lei de potência cujo expoente é o que caracteriza a correlação de uma série temporal. Alguns estudos empíricos envolvendo ML se dedicam a apresentar métodos e técnicas para estimar este expoente, chamado expoente de Hurst [35, 36, 37], grande parte com base na análise R/S [31, 34, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47] e a análise de flutuações destendenciadas (DFA) desde o fim dos anos 90 [31, 48, 49, 50] até recentemente [3, 13, 29, 32].

Talvez o sucesso empírico mais dramático dos processos de ML tenha sido em trabalhos recentes, modelando a volatilidade dos preços e o poder de transformações dos retornos [34]. Nesse contexto, a abordagem gerou regularidades empíricas até então desconhecidas, e estas, geraram possíveis novos insights sobre a compreensão do comportamento do mercado e dinâmica dos preços.

De maneira geral, não é muito claro como o preço de um mercado é definido [51], mas sabe-se que estes variam em função do tempo e por isso podemos considerá-lo uma variável estocástica. Além disso, séries temporais financeiras parecem imprevisíveis e seus valores futuros são essencialmente impossíveis de prever [8].

Entretanto, seguindo a teoria que assume que o comportamento passado do preço (de um título por exemplo) tem efeito sobre seu comportamento futuro [12], onde padrões históricos se repetem, se for possível desenvolver uma compreensão dessas regularidades através de uma análise gráfica cuidadosa, isso poderá ser usado para prever o comportamento futuro dos preços. Aliás, esse argumento tem sido uma das motivações para estudos de modelos para a dinâmica de preços do mercado para além da hipótese de independência de séries temporais financeiras, e grande parte desses modelos são obtidos a

partir de equações diferenciais estocásticas (EDEs) [52, 53, 54].

1.2 Objetivos

Nesta pesquisa, a quantidade de interesse é a mudança de preço ou retorno. Esta pesquisa consiste no estudo mais completo de um artigo que publicamos [55] com algumas premissas sobre o assunto. Nosso principal objetivo é estudar o modelo de dinâmica dos preços dado por uma equação diferencial estocástica (EDE), com um ruído e um potencial de interação polinomial não linear do tipo ϕ^4 , com intuito de verificar se ela compete como um modelo econofísico. Para tanto, utilizamos recursos computacionais para desenvolvermos a metodologia empregada. As ferramentas para resolver analiticamente a equação provém do cálculo estocástico.

Modelos com ruído aditivo para a dinâmica de preço do mercado financeiro foram considerados recentemente [56, 57], por isso, daremos maior ênfase ao caso com ruído multiplicativo. Em geral, o preço das ações é governado por EDEs com uma interação linear. Neste trabalho, estudamos o caso com uma não linearidade do tipo ϕ^4 incluída.

Equações diferenciais estocásticas não lineares têm sido propostas por exemplo, em modelo de flutuações e falhas do mercado de ações [58], onde o caso linear representa o “caso de risco neutro”. Seguindo a ideia desse modelo, termos do tipo ϕ^4 incluídos podem representar instabilidades do mercado, com um exponencial crescente ou decrescente do valor das ações, correspondendo à chamada bolha especulativa¹.

Neste trabalho, também almejamos os seguintes objetivos específicos:

- 1) Obter a série temporal de retorno a partir da EDE e analisar o seu comportamento;
- 2) Verificar se os parâmetros da equação influenciam o comportamento da série;
- 3) Analisar o comportamento da distribuição de cauda pesada da volatilidade e verificar se ela obedece ao comportamento de uma lei de potência observada em mercados financeiros;

¹Bolha especulativa pode ser considerada como uma circunstância na qual o valor de uma ação ou ativo, se afasta muito do valor intrínseco correspondente dessa mesma ação [59], pode também ser descrita como uma ocasião em que os preços parecem basear-se em uma especulação não coerente sobre o futuro, sendo que a bolha “estoura” quando o preço cai bruscamente.

- 4) Fazer uma revisão bibliográfica sobre o assunto, apresentando alguns conceitos da Física Estatística importantes para o estudo de mercado financeiro;
- 5) Introduzir o cálculo estocástico;
- 6) Descrever o modelo e apresentar a solução para a EDE associada;
- 7) Estimar o expoente de Hurst através da análise R/S e Análise de Flutuação sem tendência (DFA), e comparar os resultados.

1.3 Divisão Estrutural do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 foi realizada uma revisão bibliográfica sobre a temática, buscando suporte teórico para o seu desenvolvimento. As seções e subseções deste capítulo englobam considerações sobre o mercado financeiro, conceitos da teoria da probabilidade, Física Estatística e processos estocásticos, relevantes para sustentar este estudo e atingir os objetivos, além de uma introdução ao cálculo estocástico necessário para compreensão do modelo.

O modelo proposto a partir de uma equação diferencial estocástica para a dinâmica de preços, aspecto chave deste trabalho, está descrito no capítulo 3, assim como algumas considerações sobre o mesmo. Os recursos e métodos utilizados estão escritos detalhadamente no capítulo 4.

Os resultados numéricos obtidos são discutidos no capítulo 5 e no capítulo 6 apresentamos nossas considerações finais e expectativas futuras.

Entre os resultados e impactos esperados obtivemos uma influência do potencial ϕ^4 sobre o preço médio, como tem sido obtido em outros modelos com outros tipos de potencial [60]. O comportamento da distribuição de volatilidades e da série temporal de retornos foram verificados.

Esses resultados foram obtidos através de métodos analíticos e numéricos usando recursos computacionais. Geralmente, pesquisas na área de fenômenos complexos carecem de altos investimentos e recursos. A simulação computacional, além de ser uma opção econômica, é capaz de gerar previsões e resultados muitas vezes não alcançados

quando, por exemplo, o estudo é feito apenas analiticamente através de equações diferenciais.

Modelos matemáticos permitem aos pesquisadores investigarem como sistemas complexos estão conectados, por outro lado, simulações computacionais ajudam os pesquisadores a analisarem sistematicamente as perturbações destes sistemas, a desenvolver hipóteses para orientar o projeto de novos testes experimentais e, por fim, avaliar a adequação do modelo [61].

Finalmente, aos pesquisadores em Econofísica, Matemática, Finanças, Probabilidade e Estatística e a quem mais possa se interessar, o modelo em estudo é uma tentativa pioneira no que diz respeito à modelagem da dinâmica de preços através da equação proposta e não paramos por aqui. Pretendemos ampliar os estudos, pois o modelo precisa de ajustes, novos testes e comparação com mercados reais para uma descrição mais próxima da realidade da dinâmica de preço do mercado financeiro.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Geralmente, é possível investigar sistemas econômicos em diferentes escalas. Mas muitas vezes é impossível escrever a equação microscópica para todas as entidades econômicas que interagem dentro de um determinado sistema [8].

Conceitos da Física Estatística, tais como dinâmica estocástica, correlações de curto e longo alcance e escala permitem uma compreensão do comportamento global dos sistemas econômicos sem ter que elaborar primeiro uma descrição microscópica detalhada do mesmo sistema [8].

Dessa forma, para nortear o estudo do modelo proposto neste trabalho para a dinâmica de preços do mercado financeiro, e para compreender um pouco sobre este sistema complexo, descreveremos neste capítulo alguns conceitos físicos estatísticos importantes e como estes estão relacionados com alguns instrumentos do mercado financeiro, especialmente com a dinâmica de preços do mercado de capital.

Como o modelo investigado nesse trabalho é descrito por uma equação diferencial estocástica, este capítulo também apresenta uma introdução ao cálculo estocástico, relevante para estudar equações desse tipo. Além disso, definimos alguns conceitos da teoria da probabilidade, imprescindíveis principalmente na aplicação dos métodos utilizados. Estes conceitos, além de comporem muitos estudos embasados por teorias financeiras, estão associados à teoria de processos estocásticos, outro assunto tratado neste capítulo.

2.1 Mercado Financeiro e sua Relação com Conceitos da Física Estatística

Mercados financeiros são sistemas complexos notavelmente bem definidos e monitorados continuamente até em microescalas. Além disso, praticamente todas as transações econômicas são computadas, e uma fração crescente do número total de dados econômicos registrados está cada vez mais acessível [8]. Estes fatores tornam o mercado financeiro extremamente atraente para pesquisadores interessados em desenvolver uma compreensão de modelagem de sistemas complexos.

Para ter uma ideia da complexidade do mercado financeiro em relação à quantidade de informações, pode-se tomar como exemplo alguns conceitos do mercado de

capital, uma de suas subdivisões, onde se negocia parte fracionada das empresas através de títulos ou ações.

Um comprador de um ativo de uma empresa torna-se um acionista (espécie de sócio) e passa a ter direitos sobre parte do lucro dessa empresa, mas também pode perder dinheiro dependendo dos resultados administrativos da mesma. Sendo assim, investir em ações é uma tomada de decisão de risco dos agentes econômicos.

As formas como estas ações são negociadas constituem o mercado de opções em que ocorrem os famosos *strikes*. Conforme consta em [62], um *strike* corresponde ao preço de exercício da opção, isto é, uma opção de compra (call) de um ativo por determinado preço, poderá ser exercida quando ele chegar a este valor e neste caso o dono da deverá vendê-lo (put). As opções podem ser do tipo europeias, em que são exercidas somente em um dia predeterminado ou do tipo americanas, em que, desde que valor de *strike* seja atingido, podem ser exercidas em qualquer momento da compra até o vencimento.

Essas ações são negociadas nas tão faladas *bolsas de valores*, tais como a bolsa de Nova York (New York Stock Exchange (NYSE)) e a Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros (M&FBovespa) de São Paulo, atualmente nominada B3. Os preços na bolsa de valores são cotados na lista financeira da bolsa de valores [63] e as movimentações são captadas através dos chamados índices de mercado.

Estes índices funcionam como referência para análise do comportamento dos preços de determinadas ações, as quais de modo geral, obedecem a movimentação do mercado fielmente retratado por estes índices [64]. Entre os principais índices, podemos citar o Dow Jones Industrial Average (DJIA), Standard & Poor's 500 (S&P500) ambos da Bolsa de Nova York e o Índice Bovespa (IBOV) da Bolsa de São Paulo.

A divulgação monitorada desses índices mostra as oscilações dos preços das ações. Geralmente há horários de pré-abertura, abertura, fechamento e pós-fechamento dos preços para que os investidores realizem operações (compra e venda) financeiras. Durante este período, os preços podem variar entre um valor mínimo e máximo, podendo também se estabilizar. Entre os fatores que corroboram com as flutuações dos preços impactando a economia estão a situação política e socioeconômica de cada país, a reputação das empresas, as forças do mercado (demanda e oferta) [63] e desastres ambientais.

Nesse sentido, os índices também são verdadeiros medidores das expectativas sentidas pelos traders (negociantes de ativos ou investidores) em relação ao comportamento futuro da economia. São fiéis ferramentas para estimar de maneira quantificada as alterações particulares do ânimo dos investidores, sendo que as intensidades das flutuações funcionam como parâmetro indispensável para análise de risco [65], a estas dá-se o nome de volatilidade.

Os índices revelam tanto a volatilidade de um determinado ativo como também a volatilidade das opções de venda e compra. O índice VIX (Volatility Index) por exemplo, mensura a volatilidade das opções sobre ações do *S&P500* [62] além de estimar a incerteza nas decisões dos investidores mediante a queda do mercado financeiro dos Estados Unidos.

A volatilidade pode mensurar em que e quanto a velocidade dos preços oscilam e também as condições que interferem diretamente no retorno dos investimentos. Se chamarmos de $S(t)$ o preço de uma ação em função do tempo a distribuição de retorno dessas ações é uma série temporal dada por $r(t) \equiv \ln S(t + \Delta t) - \ln S(t)$, que varia conforme a escolha do Δt [8].

Além disso, os comportamentos das séries temporais econômicas no mercado financeiro costumam apresentar períodos de decaimento e crescimento, ou seja, ciclos. Este comportamento é o que a Física Estatística define como autocorrelação que é a correlação de valores de uma mesma variável ordenada no tempo ou no espaço.

Conforme introduzimos, estudos indicam que a volatilidade dos retornos apresenta correlações de longo alcance e sua distribuição acumulada de probabilidade possui cauda pesada que persiste por vários meses [8, 15], caracterizada por um decaimento muito lento segundo uma lei de potência.

Leis de potência ocorrem em muitas situações de interesse científico e têm significantes consequências para a nossa compreensão dos fenômenos naturais e artificiais [66]. Estão presentes em mercados financeiros diversos, por exemplo, no tamanho das flutuações de preços, frequência relativa dos índices de maiores empresas cotadas nas bolsas de valores e número de transações diárias de ações.

Uma lei de potência pode ser expressa por uma função do tipo $y(x) = kx^\beta$ onde x e y são escalares e a constante de proporcionalidade k e o expoente β são parâmetros [67]. Linearizando essa equação, a igualdade pode ser representada por uma reta em um gráfico log-log, onde β corresponde à inclinação da reta.

Estatisticamente, conforme consta em [66], uma quantidade x obedece a uma lei de potência se for extraída de uma distribuição de probabilidade $p(x)$ proporcional a $x^{-\alpha}$. Poucos fenômenos empíricos obedecem às leis de potência para todos os valores de x praticamente. Ela se aplica com mais frequência apenas a valores superiores a alguns valores mínimos de x . Nesses casos, diz-se que a cauda da distribuição segue uma lei de potência e grandes flutuações podem ocorrer na cauda da distribuição.

A distribuição da lei de potência também é representada em gráfico log-log e normalmente o expoente α assume valores entre 2 e 3, embora haja exceções ocasionais [66]. Em relação à distribuição de probabilidade da volatilidade, seu comportamento obedece a lei de potência se α tiver um valor próximo de 3. Nesse caso, α corresponde ao expoente da cauda pesada e este é um fato estilizado das séries temporais de retorno [8, 17, 31].

No mercado financeiro o amplo comportamento da lei de potência exibido por grandes mudanças de preços, resultam das observações das leis de escala, assim, considerando função de potência $y(x) = kx^\beta$, k é também chamado de constante de normalização e β é o expoente de escala.

Como é possível constatar através dessa pequena revisão teórica, porém suficiente para entender um pouco da complexidade de uma parte do mercado financeiro, existem conceitos da Física e da Estatística relevantes para estudo da dinâmica de preços. O que torna o mercado financeiro um ótimo campo para aplicabilidade desses conceitos. Além disso, fornecem em alta frequência uma grande quantidade de dados que possibilita a criação de modelos matemáticos para análise do seu comportamento.

Mike e Farmer [12], por exemplo, construíram um modelo comportamental muito realista para minimizar o processo dinâmico de formação de preços de ações com base nas regularidades empíricas de colocação e cancelamento de pedidos, que pode reproduzir com sucesso toda a distribuição de retornos e não apenas as conhecidas caudas pesadas, mas também vários outros importantes fatos estilizados. Um dos principais ingredientes

do modelo Mike-Farmer (MF) é a longa memória de sinais de ordem caracterizada pelo índice de Hurst [68].

Em seguida Gu e Zou [29], melhoraram o modelo MF introduzindo memória longa na ordem de agressividade de pedidos recebidos, que é um novo fato estilizado identificado com dados de ultra-alta frequência de 23 ações chinesas líquidas negociadas na bolsa de valores de Shenzhen em 2003 [69].

Existe modelo baseado em autômatos celulares para analisar a complexidade do mercado de ações e o comportamento dos agentes econômicos [70], utilizando também o recurso de correlação de longo alcance.

Outro importante modelo que tem sido usado para a modelagem do mercado financeiro é o modelo bidimensional de Ising e suas extensões [51, 68, 71, 72, 73, 74]. Este é um modelo simples muito empregado em mecânica estatística que incorpora uma variável binária, o que o torna atraente para pesquisadores de outros ramos da ciência, incluindo a economia [51].

Grande parte da modelagem de mercados financeiros envolve a estimativa do retorno e da probabilidade de perdas ou fracasso de um dado investimento, que na teoria de finanças é denominada de risco [75].

O risco está associado a eventos aleatórios como crises e fatores políticos, por isso, conceitos da teoria da probabilidade são fundamentais para quantificá-lo. Por outro lado, os valores de mecanismos financeiros, como preço e retorno de ações, variam de forma aleatória com o tempo. Por esse motivo, processos estocásticos são bastante relevantes na modelagem desses mecanismos, sendo que o poder descritivo ou preditivo dos modelos se torna mais realista com a inclusão de um termo aleatório de rigor físico, chamado “ruído branco” [63].

Dessa forma, uma vez que explanamos sobre alguns conceitos da teoria das finanças e de alguns fatores que promovem sua aproximação com a Física, podemos passar à discussão dos principais instrumentos estatísticos e matemáticos, fundamentais para modelagem de sistemas financeiros, retomando ao longo do desenvolvimento deste capítulo, alguns conceitos citados nessa seção.

2.2 Noções de Probabilidade e Estatística

A teoria das probabilidades permite construir modelos matemáticos que explicam um grande número de fenômenos coletivos e fornecem estratégias para a tomada de decisões [76]. No mercado financeiro há ocorrências de fenômenos coletivos com tomadas de decisões como investimentos em ações, por exemplo, em que os resultados podem ser aleatórios.

Fenômenos incertos ou imprevisíveis como o preço futuro de um ativo são tratados no campo da probabilidade e cada experimento aleatório está associado o resultado obtido [77]. Os resultados são expressos em um espaço (Ω, \mathcal{F}, P) , onde, Ω é o espaço amostral, isto é, um conjunto arbitrário de todos os resultados possíveis da experiência aleatória, P é uma medida de probabilidade com valores reais e a classe \mathcal{F} de subconjuntos de Ω , em certas condições, é uma σ -álgebra [53, 78, 79].

Definição 2.2.1. Uma σ -álgebra é uma coleção ou família \mathcal{F} de subconjuntos de Ω [78] se $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$, for fechado por complementação, isto é, se $B \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{B} = \Omega - B \in \mathcal{F}$ e se

$$B_1, B_2, \dots, \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}.$$

Dizemos que B é um evento ou subconjunto do espaço amostral que contém todos os resultados que disponham de alguma semelhança entre si [75], \bar{B} é o seu complemento, \emptyset é o conjunto vazio e $B \in \mathcal{F}$ é \mathcal{F} -*mensurável*. Nesse sentido, o par (Ω, \mathcal{F}) é chamado *espaço mensurável* [54].

Definição 2.2.2. Seja \mathcal{F} uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω , P é uma *medida de probabilidade* em um espaço mensurável [78, 54] se $P(\emptyset) = 0$, $0 \leq P(B) \leq 1$ para $B \in \mathcal{F}$, e se $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$ e B_1, B_2, \dots são conjuntos disjuntos em \mathcal{F} , então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i).$$

Vale lembrar que os conjuntos são disjuntos quando a interseção entre eles é o conjunto vazio, ou seja, não possuem elementos em comum [79]. $P(B)$ denota a probabilidade do evento B [78]. O evento pode ser um único elemento do espaço amostral (ponto

amostral) ou uma reunião deles [77]. Em relação a trinca (Ω, \mathcal{F}, P) podemos defini-la como *espaço de probabilidade* se \mathcal{F} for uma σ -álgebra em Ω e P uma medição em \mathcal{F} [78]. E uma σ -álgebra \mathcal{A} tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ é definida como *sub- σ -álgebra*.

Geralmente, um experimento ou fenômeno aleatório pode ser representado por uma variável quantitativa X definida como *variável aleatória* (VA), que se refere a uma medição ou observação que não pode ser conhecida por antecipação [80]. Em outras abordagens, X é uma variável aleatória se for mensurável em relação à \mathcal{F} [75].

Seja X uma variável aleatória sobre o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , que assume diferentes valores em um conjunto enumerável, em que, cada valor x_i de X esteja associado a um número real $P(x_i)$ positivo. Neste caso, X é considerado uma *variável aleatória discreta* (VAE) e $P(X = x_i)$ é a sua *função de distribuição de probabilidade*, que satisfaz a seguinte condição de normalização [77]

$$\sum P(x_i) = 1.$$

Por outro lado, se X assumir qualquer valor sobre um intervalo da reta real, ou seja, infinitos valores não enumeráveis, então trata-se de uma *variável aleatória contínua* (VAC). E nesse caso, $\rho(x)$ é a *função de densidade de probabilidade* (FDP) de X , que deve satisfazer as seguintes propriedades [1]

$$\rho(x) \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1.$$

Dessa forma, sejam c, d dois números reais tais que $c \leq d$, então a probabilidade de que X assumira valores no intervalo $[c, d]$ é

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \rho(x) dx, \quad (2.1)$$

que corresponde à área sob o gráfico de $\rho(x)$ entre os pontos $x = c$ e $x = d$, por isso que para variáveis contínuas só faz sentido falar em probabilidade em intervalos da reta.

A partir da FDP, é possível obter a função de *distribuição acumulada de probabilidade* (FDA) $F(x)$ de uma variável aleatória, isto é, a probabilidade que ela assumira um

valor igual ou inferior a um determinado número real x . Define-se $F(x)$ da seguinte forma [79]

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \rho(x) dx. \quad (2.2)$$

Note que $F'(x) = \rho(x)$ e que quando $x \rightarrow \infty$, $F(x)$ tende a 1, já que $\rho(x)$ está normalizada. Além disso, a FDA também pode ser utilizada para representar a distribuição de probabilidade de variáveis aleatórias discretas.

Assim, nos resta nessa seção, apresentarmos alguns conceitos básicos da teoria da probabilidade e propriedades estatísticas às quais estão sujeitas as variáveis aleatórias e consequentemente as distribuições e densidades de probabilidade.

2.2.1 Valor Esperado, Variância e Momentos

Definição 2.2.3. Seja X uma variável aleatória, o *valor esperado* ou *esperança matemática* $E[X]$ da VA X é dado por:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i), \text{ se } X \text{ é uma VAD [77], ou}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx, \text{ se } X \text{ é uma VAC [1].}$$

Em termos de probabilidade, é comum também tratar o valor esperado como sendo a *média* μ da distribuição ou da densidade de probabilidade.

Definição 2.2.4. Se o valor médio esperado de uma variável aleatória é $E[X] = \mu$, então a sua *variância* ($Var(X) = \sigma^2$), ou seja, sua dispersão em torno da média é dada por:

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^n P(x_i)(x_i - \mu)^2, \text{ no caso discreto [77], ou}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \rho(x) dx, \text{ no caso contínuo [1].}$$

Manipulando algebricamente as equações da definição acima, é possível verificar que a variância pode ser calculada por $\sigma^2 = E[x^2] - (E[X])^2$, no primeiro caso e por $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} E[X^2] dx - (E[X])^2$, no segundo.

A raiz quadrada da variância é o *desvio padrão* (σ) da variável aleatória X em ambos os casos. Um baixo desvio padrão indica o quanto os valores dos quais se extraiu

a média estão próximos da própria média. Por outro lado, um alto desvio padrão significa que estes valores estão distantes da média ou um dos outros. Além disso, σ pode ser usado como uma medida de precisão em medições repetidas no mesmo objeto usando a mesma escala. Um valor muito pequeno de σ indica que a escala é muito precisa e um valor grande indica que a escala é imprecisa [81].

Outra forma de determinar a variância se dá através do cálculo dos momentos de uma distribuição, que são uma classe genérica do valor esperado da variável aleatória X . Usa-se os momentos para caracterizar medidas de tendência central e dispersão de uma distribuição, sendo que o primeiro e segundo momento se relacionam com a média e variância de uma distribuição, respectivamente [79].

Definição 2.2.5. Seja $E[X] = \mu$ o valor esperado de X , os *momentos* $E[X^n] = \mu_n$ de uma distribuição de probabilidade e de uma função de densidade de probabilidade são calculados respectivamente por

$$E[X^n] = \mu_n = \sum_x x^n P(x), \quad [77] \text{ e}$$

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \rho(x) dx, \quad [1].$$

Dessa forma, para $n = 1$ e $n = 2$, isto é, tomando o primeiro e segundo momento respectivamente, a variância pode ser determinada por $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$ [1, 77, 79], para ambos os casos.

Embora o primeiro e o segundo momentos sejam as medidas estatísticas mais frequentemente utilizadas, as vezes é importante considerar os momentos de ordem superior de uma função de densidade de probabilidade. Através da relação $\mu_n = E(x - \mu)^n$, também é possível definir qualquer momento em torno da média [79].

O terceiro e quarto momentos por exemplo, são normalmente utilizados no estudo da forma de uma probabilidade, em particular, da ausência de simetria (assimetria) A e curtose K , que caracteriza a elevação ou achatamento da curva da função de distribuição [82] ou busca indicar o grau de concentração de valores da distribuição em torno do valor esperado desta distribuição. A assimetria e a curtose são mensuradas por $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ e $K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} + (-3)$, respectivamente.

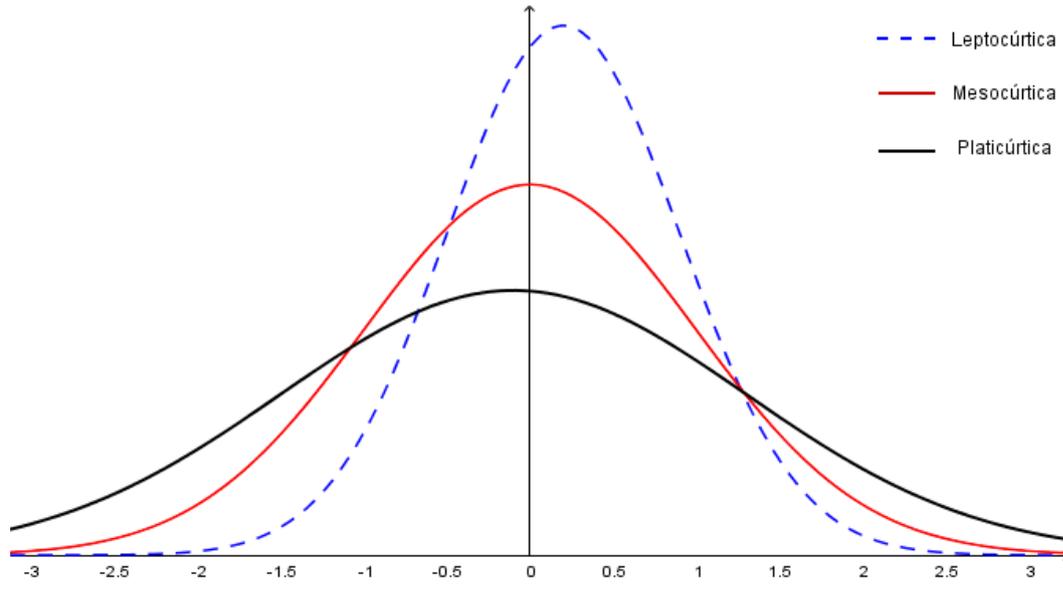


Figura 2.1: Classificação da função de distribuição de probabilidade em relação à curtose.

Em relação à curtose, há três situações como apresentado na Fig. 2.1. Valores de curtose menores que 3 indicam que as FDP são platicúrticas, ou seja, possuem curvas mais achatadas ou de caudas curtas. Valores maiores que 3 indicam que as curvas apresentam picos mais afunilados, são mais concentradas ou de caudas pesadas e estas recebem o nome de leptocúrticas. Quando $K = 3$, a FDP é conhecida como mesocúrtica [82], e desta última, o principal exemplo é a distribuição Gaussiana, ou seja, apresenta achatamento e picos normais. Em [82] é mostrado de forma sucinta, como as medidas de assimetria e curtose podem ser combinadas para determinar se uma variável aleatória segue essa distribuição.

Definição 2.2.6. A distribuição Gaussiana ou normal ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) de uma Var X tem sua FDP dada por

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}. \quad (2.3)$$

Então,

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\left(\frac{-(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dk \quad (2.4)$$

é a sua distribuição cumulativa de probabilidade, $\forall k \in \mathbb{R}$.

A distribuição Gaussiana de uma variável X tem valor esperado $E[X] = \mu$ e variância $Var(X) = \sigma^2$ [1]. Ela está representada na Fig. 2.2 bem como sua respectiva distri-

buição acumulada de probabilidade. Suas propriedades e demonstrações dos cálculos de média e variância podem ser verificadas em [77]. Uma dessas propriedades diz que, se a distribuição definida acima possui $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, então ela é chamada de *distribuição normal padrão*. Esta distribuição é bastante utilizada em diversas áreas, incluindo estudo do mercado financeiro [26].

Outros exemplos importantes de distribuições e densidades de probabilidade podem ser verificados em diversos livros sobre probabilidade e estatística, entre eles sugerimos [79, 77].

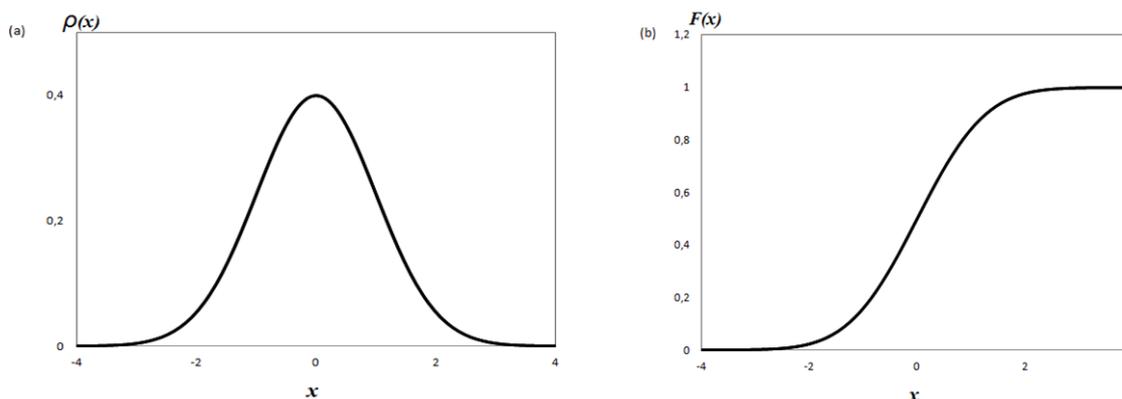


Figura 2.2: (a) Gráfico da densidade de probabilidade da distribuição normal $\rho(x)$ com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. (b) Correspondente distribuição acumulada $F(x)$.

2.2.2 Probabilidade Condicional, Distribuição Conjunta e Covariância

Sejam X e Y variáveis aleatórias associadas a dois eventos ou experimentos aleatórios distintos contidos no mesmo espaço amostral Ω . A *probabilidade condicional* [79] de X ocorrer sabendo que Y ocorre e $P(Y) \neq 0$ é dada por

$$P(X/Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)},$$

e de forma análoga para Y dado que X ocorre e se $P(X) \neq 0$, então,

$$P(Y/X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(X)}.$$

Se X assume valores x_1, x_2, \dots, x_n e Y os valores y_1, y_2, \dots, y_m , ou seja, se X e Y são variáveis aleatórias discretas, a *distribuição conjunta de probabilidades* (X, Y) é tal

que

$$P(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) = 1.$$

Onde $P(X, Y)$ é a função de probabilidade conjunta que associa a cada par (x_i, y_j) , a probabilidade $p(x_i, y_j)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$ [77].

A probabilidade condicional $P(X/Y)$ está relacionada com a probabilidade conjunta $P(X, Y)$ por $P(X, Y) = P(X/Y)P(Y) = P(Y/X)P(X)$ [83].

Por outro lado, se X e Y são variáveis aleatórias contínuas, $\rho(X, Y)$ é a densidade conjunta de probabilidade de X e de Y , que possui as seguintes propriedades [1]:

$$\rho(X = x, Y = y) \geq 0,$$

$$\int \int \rho(x, y) dx dy = 1.$$

Dessa forma, a probabilidade que X assumira valores no intervalo $[a, b]$ e Y no intervalo $[c, d]$ é tal que,

$$P(a \leq X = x \leq b, c \leq Y = y \leq d) = \int_a^b \int_c^d \rho(x, y) dx dy.$$

Para medirmos o grau de dependência entre as variáveis aleatórias X e Y sejam discretas ou contínuas, calculamos a *correlação* (c) ou *covariância* (cov) dada por [77]

$$c(X, Y) = cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Além disso, a força dessa dependência é medida pela padronização da covariância, através do *coeficiente de correlação* $\rho(X, Y)$ calculado da seguinte forma

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{(\text{var}(X)\text{Var}(Y))^{\frac{1}{2}}}.$$

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes entre si [79], isto é, se $P(X = x, Y = y) = P(x)P(y)$ no caso discreto e $\rho(X = x, Y = y) = \rho(x)\rho(y)$ no caso contínuo, então $c = 0$, ou seja, a correlação é nula [1].

Há fenômenos e experiências em que uma variável evolui aleatoriamente ao longo do tempo, nesse caso ela é chamada de variável aleatória estocástica (VAE). A correlação é uma ferramenta estatística bastante útil no estudo de fenômenos que envolvem esse tipo

de variável, principalmente os que se baseiam nos valores históricos da variável, para prever e modelar seu comportamento ao longo do tempo.

Como exemplo de um fenômeno que evolui ao longo do tempo, suponha que a cotação de uma certa empresa na bolsa de valores em cada instante de tempo t entre t_0 e t_n é aleatória, com $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ medido em horas. Em particular, vamos supor que é representada por uma variável aleatória X_t , com $t_0 \leq t \leq t_n$ e o preço no tempo t é o resultado de uma realização dessa variável, dado por $X_t(\omega)$. Dessa forma, conforme consta em [84], para prever em t_n o preço da ação em t_{n+1} , ou seja, $X_{t_{n+1}}(\omega)$, é razoável levar em conta a variação de valores que o ativo tinha na hora anterior. Um modelo matemático para descrever este tipo de situação é um processo estocástico, assunto da próxima seção.

2.3 Processos Estocásticos

Até agora vimos algumas considerações sobre fenômenos ou experiências em que a variável aleatória contínua ou discreta, poderia não depender do parâmetro t . Quando ocorre essa dependência, a VA é chamada de função aleatória ou, se t significa o tempo, então é chamada de variável aleatória estocástica (VAE) e o fenômeno aleatório é um processo estocástico (PE) [1].

Como em finanças, processos estocásticos também são comuns em Física, Biologia e Meteorologia. De fato, processos estocásticos ocorrem sempre que sistemas dinâmicos experimentam influências aleatórias [85].

Definição 2.3.1. Um *processo estocástico* é uma coleção infinita arbitrária de variáveis aleatórias $\{X_t : t \in \tau\}$ ou $\{X_t\}_{t \in \tau}$, definida em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , parametrizada por um conjunto τ chamado *espaço parâmetral* e com valores em um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, chamado *espaço de estados*.

Isso pode ser compreendido da seguinte maneira: suponha que as variáveis aleatórias possam ser indexadas pela variável t , interpretada como tempo, X_t é o estado do sistema no tempo t . O sistema pode ser qualquer fenômeno ou experiência que evolui aleatoriamente ao longo do tempo. Já o estado do sistema, é uma observação ou medição de

uma certa variável de interesse. Dessa forma, assumindo que existe um espaço amostral de probabilidade, no qual as variáveis aleatórias podem ser definidas, então, um processo estocástico é um modelo que serve para representar matematicamente um fenômeno aleatório ao longo do tempo.

Se o parâmetro t toma valores enumeráveis no conjunto τ , ou seja, $t \in \tau = \{1, 2, \dots\}$, o PE é discreto. Se $t \in \tau = [0, \infty)$ então o PE é contínuo. Em ambos os casos, sendo a variável estocástica uma variável aleatória, também se aplicam conceitos estatísticos de média, covariância, variância e desvio padrão.

Além disso, um conjunto particular de valores que as variáveis podem assumir é representado por uma trajetória. Em outras palavras, para cada $\omega \in \Omega$ fixo, existe uma função $t \mapsto X_t(\omega)$, com $t \in \tau$. Por outro lado, fixando $t \in \tau$, existe uma variável aleatória $\omega \mapsto X_t(\omega)$, com $\omega \mapsto \Omega$ [54].

Dessa forma, o valor esperado de um PE é uma função ao redor da qual se concentram as trajetórias do processo, a variância mede a dispersão das trajetórias ao redor da média e a covariância mede a dependência do processo [84].

Existem distintos tipos de processos estocásticos, que são obtidos ao considerar, diferentes espaços parâmetros, espaços de estados, características das trajetórias e por fim, diferentes relações de dependência estocástica entre as variáveis que formam o processo. Quanto a este último caso podemos destacar alguns exemplos.

Exemplo 2.3.1. Suponhamos que $\tau = \{1, 2, \dots\}$ e $X_t \in S \subseteq \mathbb{R}$, se as variáveis aleatórias $\{X_1, X_2, \dots\}$ são independentes, dizemos que $\{X_t\}_{t \in \tau}$ é um processo estocástico de ensaios independentes.

Exemplo 2.3.2. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é um processo estocástico com incrementos independentes [84] se as variáveis aleatórias $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ são independentes, para quaisquer tempos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Exemplo 2.3.3. Suponhamos que $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$, para quaisquer tempos $t_1, \dots, t_n, h \geq 0$, então $\{X_t\}_{t \geq 0}$, em sentido estrito, é um PE estacionário [8]. Isso significa que estes vetores aleatórios têm a mesma distribuição. É possível transladar no tempo, o vetor do lado esquerdo como indica o vetor do lado direito, sem que mude sua

distribuição de probabilidade [84].

Em outras palavras, um processo estocástico é estritamente estacionário se além da média e variância todos os outros momentos da distribuição de probabilidade são invariantes ao longo do tempo.

De modo geral, em um processo estocástico estacionário em sentido amplo e suficiente em muitas situações, chamado de processo estocástico fracamente estacionário, a média e variância permanecem constantes ao longo do tempo e o valor da covariância entre os dois períodos de tempo depende apenas da distância, da defasagem ou do intervalo entre os dois períodos e não o tempo real ao qual a covariância é computada [82].

Exemplo 2.3.4. Se $X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}$, para quaisquer tempos $0 \leq s < t$, $h \geq 0$, então $\{X_t\}_{t \geq 0}$, é um processo estocástico com incrementos estacionários [84].

Exemplo 2.3.5. $\{X_t : t \geq 0\}$ é um processo Gaussiano [52], se $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ tem uma distribuição normal, para quaisquer tempos t_1, \dots, t_n .

Exemplo 2.3.6. Suponha que X_t assuma valores inteiros a tempo discretizado. Um PE pode ser definido até o instante n , pela probabilidade conjunta $P_n(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ de X_t assumir, no instante $t = 0$, o valor x_0 , no instante $t = 1$ o valor x_1 , no instante $t = 2$ o valor x_2, \dots , e no instante $t = n$ o valor x_n [1]. Se a probabilidade condicional de X_t assumir o valor x_{n+1} no instante $t = n + 1$, dado que tenha assumido o valor x_0 no instante $t = 0$, o valor x_1 no instante $t = 1, \dots$, e o valor x_n no instante $t = n$, for igual a probabilidade condicional de X_t assumir o valor x_{n+1} no instante $t = n + 1$, dado que no instante $t = n$ tenha assumido o valor x_n , então o processo estocástico é um processo de Markov [53].

Em outros termos, um processo Markoviano $\{X_t : t = 0, 1, \dots\}$ onde $X_t \in S$ é discreto, é aquele que para x_0, x_1, \dots, x_{n+1} em S , cumpre a seguinte propriedade [1]

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \quad (2.5)$$

Isso indica que a informação histórica do processo até o tempo $n - 1$ é irrelevante quando se conhece o estado do processo ao tempo n .

Existem processos estocásticos que cumprem ao mesmo tempo várias dessas características de dependência estocástica, como por exemplo, o *movimento Browniano*

(MB), um fenômeno muito importante descrito mais adiante. Ele é um processo Gaussiano com incrementos estacionários e independentes. Além disso, pode-se verificar em [52] que o MB também cumpre a propriedade de Markov e é um Martingale.

Este último processo estocástico citado acima, é bastante utilizado em estudos que envolvem equações estocásticas, muito deles em econofísica e finanças [8, 54, 52, 78, 62, 75, 86]. Por isso, descreveremos a seguir sua definição, a relação de dependência entre suas variáveis estocásticas e sua implicação no mercado financeiro.

2.3.1 Martingale

O termo Martingale foi aparentemente usado pela primeira vez por Jean Ville [8, 87], que atribuiu o nome a uma estratégia de apostas [52]. A estratégia consiste basicamente em dobrar a aposta a cada derrota até que recupere as perdas logo na primeira vitória mais um lucro igual ao valor inicialmente apostado. Isso parece justo, mas teoricamente não é, já que realisticamente o apostador dispõe de uma quantia finita de dinheiro e o número de apostas tende a crescer exponencialmente, podendo fazer os apostadores perderem todo o dinheiro eventualmente.

Para definirmos Martingale, precisamos antes descrever dois conceitos que permitem a inclusão do parâmetro temporal dentro da teoria de processos estocásticos [75].

Definição 2.3.2. Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade, uma *filtração* ou filtragem sobre esse espaço é uma família ou sequência crescente $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} , de modo que, para todo $h < t$ temos $\mathcal{F}_h \subset \mathcal{F}_t$ [78]. O espaço (Ω, \mathcal{F}, P) que contém a filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ é chamado *espaço filtrado*.

Este conceito é muito importante quando se deseja fazer previsões acerca de fenômenos que evoluem com o tempo, uma vez que a filtração contém as informações do processo até o tempo t [52]. Através da definição de filtração, temos que as informações dos processos estocásticos associadas a cada instante, estão inseridas na σ -álgebra associadas ao instante imediatamente posterior, resultando no ordenamento no tempo das informações carregadas pelos processos. Isso mostra que a informação em um tempo específico depende da informação do tempo imediatamente anterior, isto é, os processos são

dependentes entre si [75].

Definição 2.3.3. Seja um espaço filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ e $X_{t \geq 0}$ um processo estocástico, dizemos que o processo é *adaptado* à filtração se para todo $t \geq 0$, X_t é \mathcal{F}_t -mensurável [52, 78].

A definição acima indica que se X é adaptado, então o valor $X_t(\omega)$ é conhecido no instante t .

Definição 2.3.4. Seja o processo estocástico X_t uma adaptação à filtração \mathcal{F}_t associada ao espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) tal que $E[X_t] < \infty$, para todo t (previsões incondicionais são finitas) [52], nesse caso para $0 \leq h \leq t$, X_t é chamado [8, 75, 78, 52]

- *Martingale*, se $E[X_t | \mathcal{F}_h] = X_h$;
- *Supermartingale*, se $E[X_t | \mathcal{F}_h] \leq X_h$;
- *Submartingale*, se $E[X_t | \mathcal{F}_h] \geq X_h$.

Por essa definição, entende-se que processo estocástico a tempo discreto é um Martingale se o valor esperado futuro de uma variável aleatória estocástica X dado os estados pelos quais o processo passou, é o último valor esperado observado. Isso significa que em média o processo permanece constante. Aqui, admite-se que todos os valores esperados são assumidos em relação à medida de probabilidade P , assim, um Martingale é definido em relação a uma determinada medida de filtragem e probabilidade [8].

Tecnicamente, existem outras propriedades contidas no estudo de Martingales, que são muito relevantes no desenvolvimento do cálculo estocástico [52]. Aqui, descrevemos o suficiente para uma compreensão básica do que se trata e da relação de dependência estocástica deste tipo de processo. Embora apresentamos uma definição a tempo discreto, o estudo de Martingales também pode ser estendido para tempo contínuo, como pode ser verificado em [78].

A essência de um Martingale é ser um processo estocástico de desvio-zero (zero-drift) [8], um conceito fundamental nas teorias de risco neutro em finanças. Por exemplo, em um investimento livre de em taxas de juros e sem oportunidades de arbitragem, existe

uma medida equivalente única de Martingale sob a qual o preço de qualquer título que não gera renda é igual ao seu preço futuro esperado [8, 86]. Em [52] pode-se verificar muitas aplicações de Martingales no mercado financeiro.

Em algumas abordagens a sequência $\{X_t\}_{t \in \tau}$ é chamada de série temporal, um processo estocástico muito relevante descrito a seguir. Séries de tempo representam por exemplo, as medições diárias da temperatura de um paciente em um hospital, as medições semanais de um determinado contaminante em uma zona de um rio e os preços a cada hora de um ativo financeiro [84].

2.3.2 Séries Temporais

De modo geral, séries temporais podem ser interpretadas como realizações de processos estocásticos, isto é, uma sequência de observações de uma variável ao longo do tempo [88, 89, 90]. Na realidade o que chamamos de série temporal é uma parte de uma trajetória, dentre muitas que poderiam ser observadas [40].

Além do tempo e da ordem cronológica das observações, outra característica importante de séries temporais é a frequência em que os dados são coletados. Em finanças, as frequências mais comuns são diárias, semanais, mensais, trimestrais e anuais. Os preços das ações por exemplo, são registrados em intervalos diários (excluindo sábado e domingo) [88].

Quanto à classificação, séries temporais podem ser estacionárias ou não. Em resumo, como já vimos em processo estocásticos, não importa em que ponto forem mensuradas, se uma série temporal for estacionária, a média, variância e autocovariâncias (em diferentes defasagens) não variam no tempo. A série tenderá a retornar para a sua média, o que na literatura sobre séries temporais chamam de reversão da média, ou série convergente, e de modo geral, as flutuações em torno dessa média, medida por sua variância, terão uma amplitude constante [82].

Em outros termos, uma série temporal estacionária não se desviará muito de seu valor esperado em virtude da variância finita, o que não ocorre em uma série temporal não estacionária ou divergente, uma vez que a média e ou a variância variam com o

tempo. A distribuição normal é exemplo de série temporal estacionária, já que é definida pela constância dos dois primeiros momentos. Um exemplo de não estacionaridade é o *passeio aleatório*, um processo estocástico que veremos um pouco adiante.

Contudo, uma série de tempo pode ser estacionária em períodos muito curtos, e em períodos muito longos pode sofrer variações das medidas de dispersão central, tornando-se não estacionária. Também há possibilidade de transformar uma série não estacionária em estacionária. A maneira mais comum consiste em tomar as diferenças sucessivas da série original, até obter a série estacionária. Em condições normais, é suficiente tomar até duas diferenças. Em relação às séries financeiras talvez seja necessário aplicar antes à série original, alguma transformação não linear, como a logarítmica [40].

Uma série temporal pode ser decomposta basicamente em três componentes, tendência, sazonalidade e uma componente aleatória [40]. Há modelos que também incluem os ciclos na decomposição de séries de tempo [91].

A tendência pode ser determinística ou estocástica, captando elementos de longo prazo relacionados com a série temporal mostrando mudanças graduais na série causadas por diversos fatores que afetam a variável observada a longo prazo.

Os ciclos se repetem com periodicidade geralmente com duração superior a um ano, captando as flutuações nos valores da variável a longo prazo. As variações cíclicas são caracterizadas por longas ondas, suaves e repetitivas, em torno de uma linha de tendência. Em séries financeiras o interesse pelos ciclos geralmente visa determinar períodos prósperos ou de recessão.

Diferentemente dos ciclos, a sazonalidade ou variações sazonais mostra as oscilações da variável, geralmente com durabilidade inferior a um ano, mas que se repetem todos os anos, captando padrões regulares da série temporal.

A componente aleatória ou variações irregulares (resíduo ou ruído), captam as flutuações de curto período com movimentos ascendentes e descendentes imprevisíveis, resultado de eventos aleatórios inesperados como por exemplo, oscilações climáticas e desastres naturais. Em outras palavras, esta componente residual também chamada de componente de erro, é responsável pelo comportamento aleatório da série captando os

efeitos que não foram detectados pelas outras três componentes descritas anteriormente.

Geralmente utilizam-se séries temporais para investigar os mecanismos que as geraram, fazer previsões a curto e longo prazo de seus valores futuros, descrever apenas o comportamento da série a partir de gráficos para verificar a existência de ciclos, tendências, sazonalidades, e detectar periodicidades relevantes nos dados através da análise espectral, por exemplo [40].

Porém, é importante salientar que uma série temporal nem sempre irá apresentar todas estas componentes, podendo as vezes apresentar só uma delas, como apenas a componente aleatória por exemplo, em que a série não apresenta tendências, flutuações periódicas ou sazonais. Mesmo assim, sejam quaisquer combinações possíveis das componentes, a decomposição da série temporal possibilita obter informações, padrões, índices e equações para realizar previsões futuras relacionadas à série.

Tendência e sazonalidade por exemplo, são características de séries financeiras, além de pontos atípicos e não linearidade (devido aos choques, como queda de índices de bolsas de valores, por exemplo). As séries de retornos, porém, apresentam características mais peculiares, os chamados fatos estilizados que incluem agrupamentos de volatilidade ao longo do tempo, distribuição com caudas mais pesadas que uma distribuição normal e embora seja aproximadamente simétrica, a distribuição de retornos, em geral, é leptocúrtica [40].

Neste trabalho, a série temporal de retornos é nosso objeto de estudo, dessa forma, voltaremos a falar da distribuição de retornos na descrição da metodologia. Contudo, precisamos citar uma característica da distribuição de retornos comum a muitas séries temporais que é a volatilidade.

Conforme consta em [89], a volatilidade das séries temporais é mais comum em problemas de previsão em pequenas escalas, visto que a série pode sofrer interferências significativas da frequência das observações, alterando dessa forma, os resultados da análise. Além disso, a volatilidade refere-se a modelos de séries temporais com grandes erros padrão. Em séries econômicas e financeiras, por exemplo, a volatilidade das mudanças no preço dos ativos é uma medida que quantifica as flutuações do mercado. Ela interessa principalmente os investidores, pois quantifica o risco [92] e é o principal insumo de muitos

modelos de precificação de opções, incluindo o modelo clássico de Black e Scholes [9].

Assim, sem uma estimativa eficiente da volatilidade, seria difícil para os investidores e negociantes identificar situações em que as opções parecem estar com preço insuficiente [31]. Duas propriedades estatísticas básicas podem ajudar a estimar a volatilidade, a distribuição acumulada de probabilidade e função de autocorrelação, que se relacionam com uma lei de potência.

Estudos recentes [17, 93] mostram que a amplitude das mudanças de preço (ou retorno) apresentam correlações da lei de potência com persistência de longo alcance até vários meses, e esta pode ser modelada através da volatilidade. [31].

A persistência de longo alcance em séries temporais desempenha uma função significativa em diversos campos, com implicações nas variações de baixa frequência e tendências. Determina o comportamento e a previsibilidade dos sistemas, como clima, hidrologia, finanças, redes e sequenciamento de DNA. Assim, testar se um processo exibe essa persistência é importante, pois isso afeta a precisão e a confiança com as quais se pode prever eventos futuros com base em uma pequena quantidade de dados históricos [45].

Dependência de longo alcance, forte dependência, dependência global ou processo de memória longa, são outras formas de se referir à persistência de longo alcance [31]. Se séries temporais possuem este tipo de persistência, então existe uma dependência não negligenciável entre observações separadas por um longo intervalo de tempo [40].

Usaremos o termo memória longa (ML) e faremos a seguir, uma breve abordagem sobre a sua história, principalmente no âmbito de trabalhos sobre séries financeiras, incluindo alguns métodos utilizados para quantificar as correlações da lei de potência.

2.3.3 Um Breve Histórico da Memória Longa

Poucos artigos sobre memória longa cobrem a história em muitos detalhes. A maioria introduz o conceito com referência passageira ao seu significado histórico. Até livros sobre dependência de longo alcance apresentam apenas uma breve história [45].

A presença de memória longa pode ser definida a partir de uma abordagem em-

pírica orientada a dados em termos da persistência das autocorrelações observadas [34]. Em um processo de ML a função de autocorrelação $\rho(k)$ com defasagem k , decresce suavemente para zero [40], isto é,

$$\rho(k) = Ck^{2d-1}, \quad k \rightarrow \infty,$$

onde $C > 0$ e $d \in (0, 0.5)$.

Se uma série temporal estocástica possui autocorrelação $\rho(k)$, formalmente dizemos que ela possui dependência de longo alcance se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |\rho(k)|,$$

é não-finita [40].

O fenômeno de memória longa foi notado inicialmente pelo hidrologista Harold Edwin Hurst [35, 36, 37], que inspirou os trabalhos de Benoit Mandelbrot e James Wallis [39] e Angus McLeod e Keith Hipel [46] também relacionados com problemas na área de hidrologia.

Os estudos pioneiros de Hurst com evidência de ML incluem fluxos de maré e entradas nos reservatórios, originalmente documentado por ele [36]. Seus artigos [36, 37] analisam 690 séries temporais geofísicas e foram parcialmente motivados pelo desejo de entender a persistência dos dados de fluxo e o projeto de reservatórios [34].

Hurst passou um longo tempo no Egito trabalhando no departamento de Física. Uma de suas responsabilidades consistiu em estudar as propriedades hidrológicas e elaborar junto ao seu departamento, um método de controle de água da bacia do Nilo [45].

Ao trabalhar na construção de um reservatório ideal, que nunca transbordasse ou esvaziasse, Hurst supôs que uma parte do sistema deveria ser aleatória, no caso a influência das chuvas. Testando essa hipótese, criou um método estatístico detalhado por ele mesmo em seus artigos [35, 36], usando-o para analisar uma estatística específica dos fluxos cumulativos de rios ao longo do tempo [38].

O método inventado por Hurst tem grande aplicabilidade na análise de séries temporais, principalmente as relacionadas aos fenômenos naturais, com o propósito de testar

a existência de uma dependência de longo alcance [40]. Podendo ainda classificá-las, diferenciando a série temporal aleatória de uma não aleatória.

Este método recebe diferentes nomes na literatura, *estatística R/S*, *análise R/S*, *amplitude ajustada reescalada* e *estatística de faixa ajustada reescalada*, todos originados do termo ‘rescaled range’ [40]. Faremos uma descrição da análise *R/S* no capítulo destinado a metodologia, por enquanto, atentaremos apenas à uma breve explicação das observações e análises de Hurst e os resultados obtidos por ele.

Basicamente o que fez Hurst foi tomar o fluxo cumulativo de rios ao longo do tempo designados por “adjusted range” R (faixa ajustada, ou intervalo ajustado) [35]. Em seguida o normalizou pelo desvio padrão S da amostra que ele considerou, criando a razão sem dimensão $\frac{R}{S}$, obtendo a chamada análise *R/S*. Em seus artigos [36, 37], Hurst usa a razão $\frac{R}{S}$. A Fig. 2.3 mostra uma representação do esquema de reservatório baseado na ideia de Hurst, mais detalhes podem ser vistos em [44].

Conforme consta em [45], as séries temporais examinada por Hurst cobriram 75 fenômenos geofísicos diferentes, abrangendo quantidades variadas como níveis de rios, precipitação, temperatura, pressão atmosférica, anéis de árvores, espessura de sedimentos de lama e manchas solares. Ao estudar o regime das inundações do rio Nilo e examinar registros e observações do nível das cheias anuais, ele notou um comportamento persistente na tendência das cheias, isto é, um ano de grande elevação no nível do rio ser seguido por outro ano de grande inundação e um ano de seca ser seguido por outro ano de seca. Caso fosse observado que ano de muita inundação fosse seguido por um ano de seca, tal comportamento seria classificado como anti-persistente [94].

Para cada série analisada por Hurst, a estimativa *R/S* pode ser comparada empiricamente com uma lei de potência tal que

$$\frac{R}{S} = kn^H, \quad (2.6)$$

onde n é o número de pontos ou intervalo de observações da série temporal, k é uma constante e o expoente da lei de potência H é o chamado o expoente de Hurst, que fornece informações concretas sobre correlação e persistência das séries [38].

Ao linearizar a equação acima, o expoente de Hurst corresponderá à inclinação da

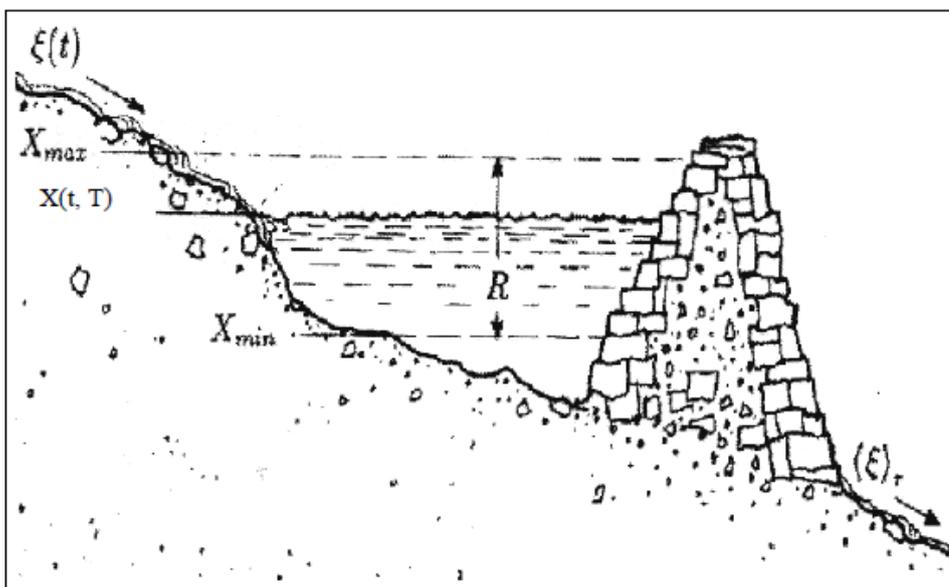


Figura 2.3: Exemplo de um esquema de reservatório obtido de [44]. Nesse esquema, $\xi(t)$ é o fluxo aleatório de água que o lago (nas observações de Hurst foram registradas medidas anuais de descargas do lago Albert) recebe ao longo do ano t . $\langle \xi \rangle_\tau$ representa o valor médio de descargas do reservatório em um período de τ anos, que deve ser liberado para que em condições ideais, mantenha uma quantidade armazenada de água. $X(t, \tau)$ corresponde às descargas acumuladas, onde os níveis máximo e mínimo da quantidade de água contida no reservatório são X_{max} e X_{min} , respectivamente. Finalmente, R (range) é a diferença entre os dois níveis. Em outros termos, R é a capacidade de armazenamento necessária para que o reservatório nunca fique vazio ou transborde, mantendo assim, a descarga média no período.

reta no gráfico log-log de R/S . E a relação entre correlação e H é dada por

$$c = 2^{2H-1} - 1, \quad (2.7)$$

onde c é tomada como medida da correlação [95].

O expoente H varia entre 0 e 1 e conforme pesquisamos em [38], se $c > 0$, então $0.5 < H < 1$, a série temporal apresenta um comportamento de persistência, isto é, períodos de crescimento tendem a ser seguidos por períodos de crescimento com o passar do tempo e o mesmo deverá ocorrer para decaimentos. Por outro lado, se $c < 0$, implica $0 < H < 0.5$, caracterizando um comportamento antipersistente, em outras palavras,

decaimentos tenderão a ser seguidos por aumentos ou vice-versa.

Esses dois casos indicam que o sistema apresenta uma dependência de longo alcance com componentes aleatórios, em que, eventos passados têm efeitos sobre os eventos futuros. Sistemas com essa dinâmica são governados por um processo chamado *movimento Browniano fracionário* (MBF) [39, 96]. O caso em que $c = 0$ e $H = 0.5$, indica que não há correlação, tratando-se de um movimento Browniano padrão ou passeio aleatório, os quais serão definidos na próxima seção. Na Fig. 2.4 é mostrado um exemplo de séries temporais para esses três casos. Voltando às análises de Hurst, era esperado que

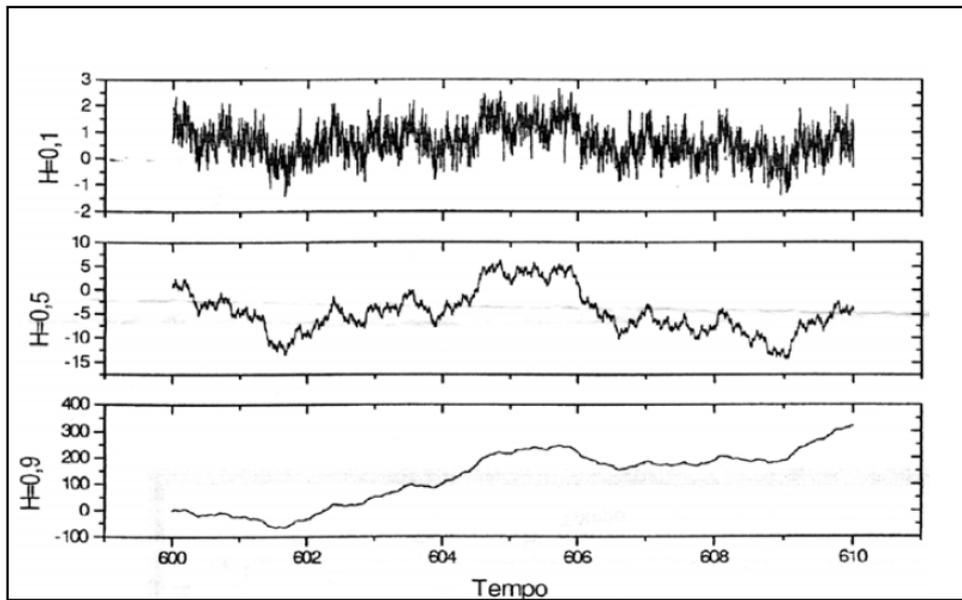


Figura 2.4: Exemplo retirado de [38], onde a série temporal do meio é não correlacionada, correspondendo ao movimento Browniano, enquanto as outras duas apresentam correlações ao longo prazo e correspondem ao movimento Browniano fracionário.

a extensão das flutuações nos reservatórios variasse dependendo do comprimento do intervalo de tempo usado. Se as séries temporais seguissem o movimento Browniano [35], a extensão aumentaria com a raiz quadrada do parâmetro tempo, isto é, \sqrt{T} [38]. Entretanto, para a maioria das séries observadas, Hurst encontrou valores maiores que 0.5 para H . Com isso, ele mostrou que as evidências empíricas contrariavam fundamentalmente os modelos hidrológicos contemporâneos. Essa discrepância entre a teoria e a prática ficou conhecida como o *fenômeno Hurst* [45].

Os resultados de Hurst foram provados e expandidos [43], promovendo uma evolução do debate na comunidade científica sobre as suas descobertas, para o debate sobre existência de memória longa [96], que inicialmente interessava à comunidade hidrológica, passando a ser de interesse também de outras áreas da ciência, como Matemática e Geofísica.

Mandrebroit foi um dos precursores desse debate, publicando artigos sobre ML em diferentes campos, incluindo os três citados no parágrafo anterior. Durante a década de 1960, ele trabalhou na teoria dos processos estocásticos exibindo caudas pesadas e memória longa, sendo o primeiro a diferenciar esses efeitos [45].

Embora o fascínio de Mandrebroit fosse pela geometria fractal, ele trabalhou intensamente com o problema de modelar quantidades financeiras, sendo um dos primeiros a considerar a existência de comportamento de memória longa no retorno de ativos [47]. Até então o ponto central deste assunto era a hipótese de “passeio aleatório” [45], que previa modelos de distribuição Gaussiana para explicar a eficiência de mercados. Mandelbrot propôs abandonar esta hipótese, assumindo que a distribuição dos preços possuía caudas mais pesadas que a normal [23].

Outra contribuição de Mandelbrot que ajudou a dar credibilidade ao crescente estudo de distribuições de cauda pesada, processos estocásticos e memória longa, foi introduzir dois modelos paradigmáticos nesses campos [96], o movimento Browniano fracionário (MBF) auto-semelhante e seus incrementos e o modelo de ruído Gaussiano fracionário (RGF) com dependência de longo alcance. Além disso, demonstrou que estes modelos poderiam fornecer uma explicação para o fenômeno Hurst [45].

Outros modelos incorporando ML foram surgindo após a introdução principalmente do RGF, entre eles o modelo *auto-regressivo fracionariamente integrado de médias móveis* (ARFIMA). Interessados em saber mais sobre esses e outros modelos relacionados, podem consultar [34, 45].

Outra técnica muito empregada atualmente para abordagens nesse sentido é o método de análise de flutuações destendenciadas - DFA (Detrended Fluctuation Analysis) [47], baseado na ideia de que uma série temporal correlacionada pode ser mapeada para um processo auto semelhante por integração [42, 49]. Portanto, medindo o recurso

auto-semelhante pode obter informações sobre as propriedades de correlação de séries de tempo [31].

O DFA tem sido utilizado em Física Estatística na detecção de correlações de longo alcance em ruídos de séries temporais econômicas, como pode ser verificado em [3, 29]. Também tem sido aplicado com sucesso a biologia, para detectar ML em séries temporais de batimentos cardíacos altamente complexos [49] e outros sinais fisiológicos [50], por exemplo.

Pelo DFA, um expoente similar ao expoente de Hurst é obtido. Porém o uso do DFA é mais vantajoso, pois ele também pode ser aplicado às séries temporais não estacionárias [31].

O método DFA calcula a função de flutuação da série temporal dividida em janelas, blocos ou intervalos de determinado número de pontos ou observações, após remover uma tendência linear em cada intervalo [3]. A estimativa do expoente de Hurst através do DFA é realizada seguindo alguns passos e assim como para a análise R/S , esses passos estão detalhados na metodologia desta pesquisa. Antes disso, como séries temporais podem ser resultados ou observações de processos estocásticos, enunciaremos a seguir algumas ferramentas fundamentais para tratarmos matematicamente estes processos.

2.4 Introdução ao Cálculo Estocástico

Processos estocásticos têm uma extensa variedade de aplicações em, por exemplo, Matemática, Física, Engenharia, Ecologia e Economia. Na verdade, é difícil conceber uma disciplina quantitativa na qual eles não se caracterizem [97].

A teoria dos processos estocásticos foi um dos mais importantes desenvolvimentos matemáticos do século XX. Intuitivamente, visa modelar a interação do acaso com o tempo [97]. Modelos matemáticos de tais processos podem ser desenvolvidos a partir de equações diferenciais estocásticas.

Para solucionarmos essas equações, devemos usar métodos diferentes daqueles usados no cálculo de equações diferenciais comuns, uma vez que, em relação à diferenciação e integração, os termos estocásticos impõem regras que diferem do cálculo

infinitesimal usual.

Por isso, na seção seguinte, além de introduzirmos aspectos básicos da dinâmica estocástica, muito importantes em estudos de diversos sistemas dinâmicos, apresentaremos as ferramentas necessárias para resolvermos a EDE proposta como modelo para dinâmica de preços de mercado financeiro.

2.4.1 Movimento Browniano

Ao observar e descrever o tipo de movimento irregular aleatório de partículas do grão de pólen suspenso em água em 1827, o botânico Robert Brown [98] contribuiu com a pedra angular para o desenvolvimento do cálculo estocástico.

Nessa época, a comunidade científica acreditava que se tratavam de seres vivos as partículas dentro do pólen observado por R. Brown, o que explicaria o movimento [99]. Entretanto, o botânico mostrou que tal movimento não poderia ser atribuído a sistemas vivos, mas sim a partículas inanimadas sofrendo choques com as partículas da substância em que estas estão imersas [98]. Devido às suas observações pioneiras, o fenômeno físico do deslocamento aleatório de partículas microscópicas imersas em fluido, é chamado de movimento Browniano (MB), (ver Fig. 2.5) [97]. Alguns cientistas se dedicaram a tentar melhorar o modelo de Brown e formalizar o MB, investigando experimentalmente a dependência de alguns parâmetros físicos, tais como, diâmetro e a densidade das partículas suspensas, a viscosidade e temperatura do fluido e a velocidade do movimento [99].

Em 1905, Albert Einstein usou o resultado de Brown como base de sua tese de doutorado [100]. Além de verificar que o movimento individual das partículas se deve de fato aos impactos das moléculas do líquido, Einstein observou que entre os instantes de observação havia uma variação sem parar de velocidade. Em um de seus trabalhos produzidos [101], propôs um modelo de deslocamento de rede entre dois tempos de observação, relacionando modelo físico do MB com um coeficiente de interesse, o coeficiente de difusão térmica, permitindo a sua estimação [102].

Cinco anos antes, o francês Louis Bachelier [26, 38], empregou o modelo físico do MB para modelar o mercado de opções e ações. Em sua tese de doutorado, *Teoria da*

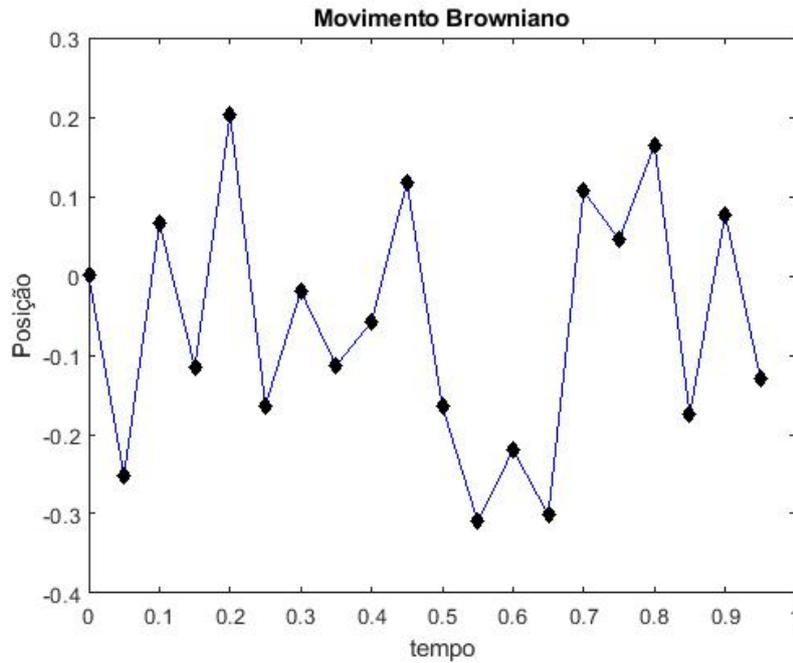


Figura 2.5: Exemplo de trajetória de um movimento Browniano considerando um intervalo de tempo $[0, 1]$, dividido em N (aqui $N=20$) subintervalos de longitude $dt=1/N$.

Especulação, ele deduziu a equação diferencial parcial (EDP) que satisfaz a densidade de transição dos preços, ou seja, propôs modelar os preços das opções como processo de Markov e demonstrou que era também um processo Gaussiano. Além disso, obteve a lei do máximo de um MB, isto é, a probabilidade de que este supere um determinado limiar. Finalmente, usou este resultado para determinar o preço de ações [8].

Embora L. Bachelier e Einstein tenham sido os primeiros a abordar quantitativamente o estudo do movimento molecular de partículas imersas, foi o matemático norte-americano Norbert Wiener, motivado pelo fenômeno físico do MB, quem estudou e formalizou o modelo matemático para descrever rigorosamente tal fenômeno [103, 104].

Existem diferentes maneiras de formalizar matematicamente o MB, a que apresentaremos a seguir o define como processo estocástico em uma componente.

Definição 2.4.1. Um movimento Browniano unidimensional de parâmetro σ^2 é um processo estocástico $B_t : t \geq 0$ com valores reais, onde B_t é a posição de uma partícula no momento t que cumpre as seguintes condições [84, 54]:

- $B_0 = 0$ (embora possa ser definido a partir de $B_0 = a$).
- Tem incrementos independentes estacionários. Ou seja, $B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ são variáveis aleatórias independentes para $n > 1$ e $0 < t_1 < \dots < t_n$.
- As trajetórias são contínuas.

2.4.2 Movimento Browniano e a Caminhada Aleatória

Em outras abordagens o movimento Browniano é considerado como limite de uma caminhada aleatória [53]. Para melhor compreensão disso, veja a seção 5.1 do capítulo 20 em [84].

Uma caminhada aleatória ou passeio aleatório (tradução de *Random Walk* [105]) como o próprio termo sugere, descreve uma caminhada com passos aleatórios sucessivos, caracterizando um processo não estacionário, apesar das suas primeiras diferenças ou série integrada serem estacionárias.

Estes termos são muitas vezes comparados, por exemplo, com a caminhada de um bêbado que se move em uma direção numa distância aleatória x_t no tempo t , e, continuando a caminhar indefinidamente, eventualmente se desviará cada vez mais do ponto de saída [82]. Outra forma é considerar o movimento linear de uma partícula. Começando pela origem, a cada intervalo de tempo a partícula se move para esquerda ou direita com probabilidade p ou $1 - p$ respectivamente [1].

Na teoria econômica e financeira, alguns analistas usam técnicas de passeio aleatório para modelar o comportamento dos preços dos ativos, em particular os preços de ativos, as taxas de câmbio e os preços das commodities [63]. Assim, nessa abordagem, os preços dos instrumentos financeiros são considerados não estacionários [82].

Essa prática tem sua base na presunção de que os investidores agem racionalmente e sem viés, e que a qualquer momento eles estimam o valor de um ativo com base em expectativas futuras. Sob essas condições, todas as informações existentes afetam o preço, que só muda quando novas informações são divulgadas. Por definição, novas informações aparecem eventualmente e influenciam o preço do ativo aleatoriamente [63].

Uma característica importante de um modelo de caminhada aleatória é a persistência de choques aleatórios, tal que, os efeitos desses choques não desaparecem. Por isso, dizem que o passeio aleatório tem memória infinita, pois lembra-se para sempre desses choques [82]. Entretanto, processos caracterizados por passeios aleatórios são independentemente distribuídos, ou seja, são não correlacionados.

Como nesta pesquisa um dos interesses é investigar se processo estocástico descrito pelo modelo apresenta correlações de longo alcance, usaremos a definição matemática do movimento Browniano como processo de Wiener com base nas suas propriedades.

2.4.3 Processo de Wiener e o Ruído Branco

Em 1923, Wiener demonstrou a existência de um processo estocástico que cumpre as características do MB [103]. Por este motivo, o modelo matemático do movimento Browniano é conhecido também como processo de Wiener $W(t)$.

Além disso, Wiener também constatou que se $W_0 = \mu$ e se para todo t , $W_t \simeq N(\mu, \sigma^2 t)$, nessas condições o MB é um processo Gaussiano com média centrado em μ e variância $\sigma^2 t$. Particularmente, se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = t - t_0$ para $t_0 \leq t$, $W(t)$ é chamado movimento Browniano padrão (MBP).

Partindo dessa definição, deduzimos as seguintes proposições básicas para um processo MB padrão unidimensional.

Propriedade 2.4.1. $E[W_t] = 0$ e $\sigma^2(W_t) = E[W_t^2] = t$.

Como a variância aumenta com o tempo, a trajetória desse processo se afasta do eixo horizontal quando t aumenta [106].

Propriedade 2.4.2. $E[W_t - W_s] = t - s$, $0 \leq s < t$.

Essas duas primeiras proposições seguem diretamente da definição.

Propriedade 2.4.3. *Pela lei dos grandes números pode-se provar que $\frac{W_t}{t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ [106].*

A lei dos grandes números diz que [1]

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \rightarrow E[X_i], N \rightarrow \infty, \quad (2.8)$$

em que N é uma sequência de variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_N , com mesma distribuição de probabilidades, isto é, independentes e identicamente distribuídas. A única condição para a validade desse enunciado é que a média exista [1].

Propriedade 2.4.4. *A função de autocorrelação de W_t é dada por*

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = s \wedge t,$$

ou seja, a covariância do MB padrão é o mínimo entre s e t .

Demonstração. Suponhamos que $s < t$, então o mínimo entre s e t é s . Por definição,

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = E[W_s W_t] - E[W_s]E[W_t].$$

Como o valor esperado de W_t é zero, então,

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = E[W_s W_t] = E[W_s(W_t - W_s)] + E[W_s^2].$$

Pela propriedade de incrementos independentes segue que,

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = E[W_s]E[W_t - W_s] + E[W_s^2] = E[W_s^2].$$

Portanto,

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = s = s \wedge t$$

□

Propriedade 2.4.5. *A trajetória de W_t , mesmo que seja contínua, varia de maneira muito irregular, o que a torna não diferenciável.*

Heuristicamente, esse resultado vem da largura da distribuição para o incremento de Wiener, $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ ser proporcional a $\sqrt{\Delta t}$. Este resultado é frequentemente chamado de propriedade oscilante de Levy [106].

Além disso, essa propriedade confere a $W(t)$ características muito importantes, como por exemplo, ser definido pelos matemáticos por suas propriedades e não como integral de um componente estocástico comumente chamado ruído branco, definido a seguir.

Uma vez que $W(t)$ não tem derivada, a definição dada como integral de tal componente é considerada pelo seu rigor físico no contexto dos processos estocásticos. [83].

Um processo de ruído branco é definido como aquele que gera dados que parecem ser independente e identicamente distribuídos [90]. A designação “branco” tem origem no fato de que nenhuma frequência ou padrão específico domina uma análise espectral das observações, semelhante à luz branca, ou o ruído da estática emitida por um rádio AM que não está sintonizado em uma estação [107].

Um processo puramente aleatório com média zero, variância constante σ^2 e seriamente não correlacionado, é outra forma de definir o ruído branco [82] (ver Fig. 2.6).

O ruído branco é um dos principais processos estocásticos encontrados na natureza, na verdade, na natureza não existe ruído rigorosamente branco, pois todo PE tem um tempo de correlação finito e o tempo de correlação do ruído branco é zero [83]. Entretanto, há circunstâncias em que o tempo de correlação de um determinado PE é tão curto que tratá-lo como ruído branco é uma boa aproximação, de acordo com a escala de tempo de interesse.

A relação entre processo de Wiener e ruído branco é dada por [83]

$$W(t) = \int_0^t \xi(t') dt'. \quad (2.9)$$

A equação acima nos permite uma definição para o processo de Wiener além da que enunciamos a partir de suas propriedades e caracterizar melhor o ruído branco ξ_t , como uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas identicamente distribuídas com média zero e variância finita para $t = 1, \dots, T$.

Partindo dessa definição, é de se esperar que a derivada do processo de Wiener fosse o ruído branco, porém, ξ_t não é um processo matematicamente bem definido. Pela proposição 2.4.5, o desvio padrão do incremento de Wiener pode ser escrito como $\sigma W_t = \sqrt{\Delta t}$, além disso, a derivada de W_t não é ξ_t , pois derivando o processo de Wiener na forma usual teríamos

$$\dot{W}_t \equiv \frac{dW_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_t(\Delta t)}{\Delta t} \sim \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Esta constatação parece contradizer a Eq. 2.9, entretanto, como ressaltamos anteriormente, mesmo sem rigor matemático, a definição dada por esta equação é comumente

usada devido à sua importância física.

Dessa forma, conforme consta em [83], o que se entende pela Eq. 2.10 é que \dot{W}_t representa o processo estocástico cujas realizações são derivadas das realizações do PE W_t , e este portanto, não é uma função, no sentido usual.

Como citado, o desvio padrão em curto intervalo de tempo do processo de Wiener normalmente distribuído é $\Delta X = \sqrt{\Delta t}$. Da alteração no valor de X durante um período de tempo relativamente longo T , resulta em um desvio padrão igual a \sqrt{T} , uma vez que essa alteração, denotada por $X(T) - X(0)$, pode ser considerada como a soma das mudanças de X em N pequenos intervalos de tempo de tamanho Δt onde $N = \frac{T}{\Delta t}$ [100].

Quanto ao ruído branco, embora $E[\xi_t] = 0$ (que segue diretamente da definição do PE W_t), a distribuição de probabilidade de ξ_t não é necessariamente normal, mas se for, o processo é dito ser ruído branco Gaussiano [107], conforme apresentado na Fig. 2.6. Como veremos a seguir, a generalização do processo de Wiener em termo de ruído pode ser obtida através de equações diferenciais estocásticas.

2.4.4 Equações Diferenciais Estocásticas

Em geral, o objetivo das EDEs é fornecer um modelo para sistemas perturbados por um ruído aleatório [78]. Geralmente, para modelar a evolução de um sistema físico, usa-se uma equação diferencial ordinária da forma

$$dy = f dt. \quad (2.11)$$

Se houver perturbações aleatórias no sistema adicionando um ruído tipicamente da forma ΦdW , a equação anterior deixa de ser determinística e passa a ser uma equação diferencial estocástica da seguinte forma

$$dy = f dt + \Phi dW, \quad (2.12)$$

tal que, dW denota um MB [108] ou um incremento de Wiener.

O uso do movimento Browniano é justificado por sua propriedade de independência de incrementos, correspondente ao fato de que as perturbações aleatórias que afetam intervalos de tempo disjuntos são consideradas independentes [78]. O termo $f dt$ implica

Ruído Branco

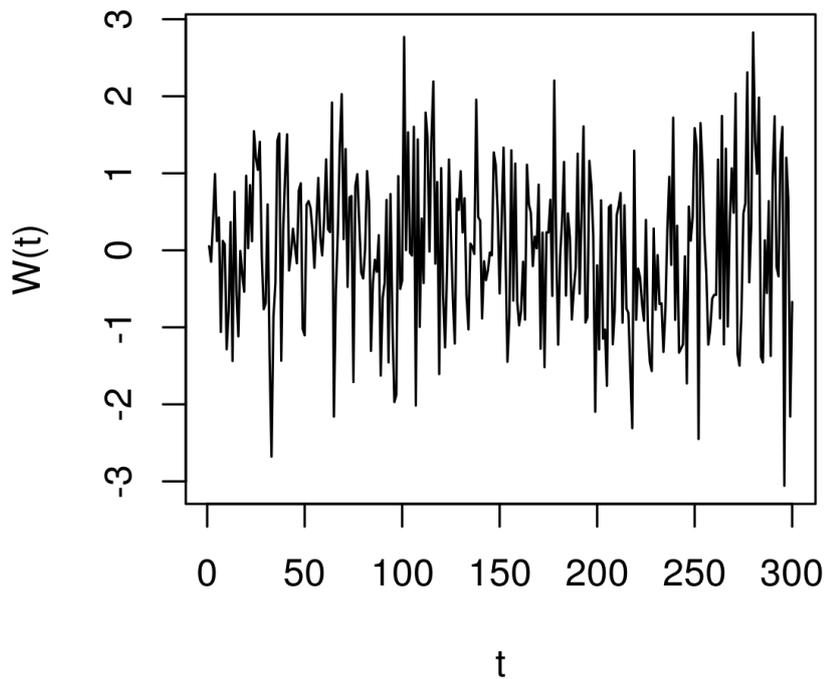


Figura 2.6: Ruído branco, com média 0, variância 1 e tempo variando de 0 a 300.

que a taxa de desvio médio de y é f por unidade de tempo. Isso indica que, em um período de tempo T , a variável y aumenta em uma quantidade fT [62].

O termo ΦdW pode ser considerado como adição de ruído [78] ou variabilidade ao caminho seguido pela variável y . A quantidade desse ruído ou variabilidade é Φ vezes um processo de Wiener e normalmente, o processo de Wiener possui uma taxa de variação por tempo unitário de 1,0, disso resulta que ΦdW tem uma taxa de variação por unidade de tempo equivalente à Φ^2 [62].

Generalizando a Eq. 2.12, permitindo que f e Φ dependam tanto de y como parâmetro de tempo t , podemos reescrevê-la como uma EDE da forma

$$dy_t = f(y_t, t)dt + \Phi(y_t, t)dW_t. \quad (2.13)$$

Ou na forma integral,

$$y_t = y_0 + \int_0^t f(y_s, s) ds + \int_0^t \Phi(y_s, s) dW_s. \quad (2.14)$$

As EDEs podem ser lineares ou não lineares e ambas são utilizadas na modelagem de sistemas econômicos e financeiros. Geralmente a primeiro fator do lado direito de uma EDE da forma da Eq. 2.11 está associado ao valor esperado e o segundo associado à variância [40].

Exemplos de modelos de EDEs são dados em [52, 54, 78, 108, 62] incluindo uma EDE muito considerada, usada no famoso modelo de Black-Scholes [9] para a dinâmica de preços de opções com base na Eq. 2.13, que para $\Phi > 0$ e $f \in \mathbb{R}$, corresponde ao chamado *movimento Browniano geométrico* (MBG) [78] com parâmetros Φ e f .

A Eq. 2.13 representa por exemplo, a equação de Langevin [1, 58, 83]. Ela descreve o movimento aleatório (randômico ou Browniano) de uma partícula de massa m , sujeito a uma força dissipativa e outra aleatória, devido às colisões da partícula com as moléculas do meio. Essa força aleatória é representada pelo ruído branco $\xi(t)$ com intensidade α . Admitindo uma força F derivada da equação de potencial de poço duplo a equação de movimento da partícula é dado por

$$m\dot{X} = F - \gamma v + \alpha \xi(t), \quad (2.15)$$

em que $\dot{X} = \frac{dv}{dt}$ e $v = \frac{dx}{dt}$ é a velocidade e x a posição da partícula. Dividindo ambos os lados da equação acima por m , a equação de Langevin adquire a forma

$$\dot{X} = \frac{F}{m} - \frac{\gamma v}{m} + \frac{\alpha \xi(t)}{m}. \quad (2.16)$$

Para incluir situações mais gerais em que a intensidade do ruído e das outras forças dependam de $X(t)$ e t e fazendo mudanças de variáveis, escrevemos a equação estocástica na forma

$$\dot{X}(t) = G(X(t), t) + H(X(t), t) \xi(t). \quad (2.17)$$

Em que $G = \frac{F}{m} - \frac{\gamma v}{m}$ e $H = \frac{\alpha}{m}$. Em equações desse tipo, $\xi(t)$ é considerado um ruído aditivo se H for constante, ou ruído multiplicativo se H depende de X [83].

Integrando a Eq. 2.17 de t a $t + \Delta t$ considerando o ruído multiplicativo, tem-se

$$\int_t^{t+\Delta t} dX(t') = \int_t^{t+\Delta t} G(X(t'), t') dt' + \int_t^{t+\Delta t} H(X(t'), t') \xi(t') dt'. \quad (2.18)$$

Tomando o limite infinitesimal $\Delta t \rightarrow dt$, conforme consta em [83], é possível substituir $G(X(t'), t')$ por $G(X(t), t) = G\left(\frac{X(t)+X(t+\Delta t)}{2}\right)$, uma vez que o erro que se comete nessa substituição é desprezível, podendo ser desconsiderados os termos de ordem maior que dt^1 . O mesmo não pode ser aplicado na segunda parte da integral, pois o erro cometido na substituição por $H(X(t), t)dW(t)$ pode ser maior que Odt , já que $dW \sim \sqrt{dt}$ e dessa forma dX também poderia conter o termo $O\sqrt{dt}$.

Determinar a solução de uma EDE implica em resolver sua respectiva integral estocástica. Assim, devido à contestação no parágrafo anterior, integrais com ruído multiplicativo só podem ser tratadas por meio do cálculo estocástico, como o desenvolvido pelo matemático Kiyoshi Itô, por exemplo.

Itô definiu integral estocástica pela primeira vez em 1949 e por isso ela ficou conhecida como *integral estocástica de Itô* [108] (IEI). As teorias provenientes do cálculo de Itô são fundamentais para o estudo das EDEs e são muito aplicadas em teorias financeiras. Dessa forma, escolhemos este cálculo para melhor entender o conceito de integral estocástica.

É importante ressaltar que não será feita aqui, uma abordagem detalhada do cálculo de Itô. Uma abordagem completa desse assunto é feita em [52, 54, 108] e envolve propriedades de Martingale que não foram minuciosamente descritas neste trabalho. Na sequência, apresentaremos apenas alguns conceitos necessários para um bom entendimento, citando as referências onde podem ser verificadas as demonstrações, mais extensas.

2.4.5 Cálculo de Itô

As propriedades e conceitos que serão abordados aqui para uma boa compreensão do cálculo integral e diferencial estocástico foram resumidos do capítulo 7 de [83], do quarto capítulo de [53] e dos capítulos 3 e 4 de [85]. Começamos pelo conceito de *convergência em média quadrática*.

Definição 2.4.2. Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n , uma sequência de variáveis aleatórias. Y_n converge

em média quadrática (MQ) para Y se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(Y_n - Y)^2] = 0. \quad (2.19)$$

Assim, escreve-se $MQ\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$, para dizer que o limite em média quadrática de Y_n é Y .

Se a sequência de variáveis aleatórias depende do tempo, isto é, são funções de um PE, então $E[(Y_n - Y)^2]$ é o valor esperado sobre realizações de um processo estocástico, ou seja,

$$E[(Y_n - Y)^2] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_{n,k}(t) - y_k(t))^2.$$

tal que, $y_{n,k}(t)$ é o valor que y_n adquire na realização k de Y no momento t .

A convergência em média quadrática de variáveis estocásticas está diretamente ligada ao conceito de uma integral estocástica de Itô.

Definição 2.4.3. Seja $Y(t)$ um processo estocástico que depende de $W(t)$. E seja $F(Y(t), t)$ uma função contínua que depende de $Y(t)$ e de t . Considerando o intervalo $[t_0, t]$, a integral de Itô de $F(Y(t), t)$ é dada por

$$I = \int_{t_0}^t F(Y(t'), t') dW(t') = MQ\text{-}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} F(Y(t_n), t_n) \Delta W(t_n), \quad (2.20)$$

em que, $\Delta t = \frac{(t-t_0)}{N}$, $t_n = t_0 + n\Delta t$ e $\Delta W(t_n)$ é o incremento de Wiener, isto é, $\Delta W(t_n) = W(t_{n+1}) - W(t_n)$. Assim, fica claro que $Y(t_n)$ só depende de $W(t')$ quando $t_0 < t' < t$.

Dentre as características de uma integral de Itô, destacam-se as seguintes:

1. Como mencionado, as técnicas de integração, em geral, diferem das técnicas de integração cálculo usual.
2. Sejam $I(F)$ e $I(G)$ duas integrais estocásticas de Itô e b uma constante. Então,

$$I(F + G) = I(F) + I(G), \quad e \quad I(bG) = bI(G).$$

- 3.

$$E \left[\int_{t_0}^t F(Y(t'), t') dW(t') \right] = 0. \quad (2.21)$$

Demonstração. Sabe-se que se as variáveis são independentes o valor esperado do produto é o produto das médias. Logo como $\Delta W(t_n)$ não depende de $Y(t_n)$ e como $E[\Delta W(t_n)] = 0$ segue que a média sobre as realizações da integral é zero. \square

4. O resultado acima pode ser usado para mostrar que variância de uma integral estocástica pode ser escrita como

$$E[I(F(t))]^2 = E \int_{t_0}^t [F(t)]^2 dt = \int_{t_0}^t E[F(t)]^2 dt$$

5. Para $k \in \mathbb{Z}$ $(W(t))^k$ são potências de $W(t)$, cujas integrais tem solução conhecida:

$$\int_{t_0}^t (W(t'))^k dW(t') = \frac{1}{k+1} (W(t'))^{k+1} \Big|_{t_0}^t - \frac{k}{2} \int_{t_0}^t (W(t'))^{k-1} dt'.$$

Para $k = 1$,

$$\int_{t_0}^t W(t') dW(t') = \frac{1}{2} W(t')^2 \Big|_{t_0}^t - \frac{1}{2} t' \Big|_{t_0}^t.$$

Logo,

$$\int_{t_0}^t W(t') dW(t') = \frac{1}{2} [W(t)^2 - W(t_0)^2 - (t - t_0)].$$

Estes resultados estão demonstrados com mais detalhes em [53].

6. A integral de Itô está definida para potências do incremento de Wiener como medida de integração, isto é, para $k \in \mathbb{Z}$,

$$I = \int_{t_0}^t F(Y(t'), t') (dW(t'))^k = MQ\text{-}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} F(Y(t_n), t_n) \Delta(W(t_n))^k. \quad (2.22)$$

particularmente, é possível verificar em [53, 109] que,

$$I = \int_{t_0}^t F(Y(t'), t') (dW(t'))^k = 0, \text{ se } k > 2, \text{ e}$$

$$I = \int_{t_0}^t F(Y(t'), t') (dW(t'))^k = \int_{t_0}^t F(Y(t'), t') dt', \text{ se } k = 2.$$

7. Também é possível verificar nessas mesmas referências que,

$$\int_{t_0}^t F(Y(t'), t') dW(t') dt = 0.$$

Dos resultados anteriores obtém-se as importantes relações abaixo:

$$\text{para } k > 2, (dW(t))^k = 0, \quad (2.23)$$

$$(dW(t))^2 = dt, \quad (2.24)$$

$$dW(t)dt = 0. \quad (2.25)$$

8. Usando a Eq. 2.24, é possível concluir que a correlação entre $\int_{t_0}^t F(Y(t'), t') dW(t')$ e $\int_{t_0}^t G(Y(t'), t') dW(t')$ é dada por,

$$E \left[\int_{t_0}^t F(Y(t'), t') dW(t') \int_{t_0}^t G(Y(t'), t') dW(t') \right] = \int_{t_0}^t E[F(Y(t'), t') G(Y(t'), t')] dt. \quad (2.26)$$

Estas características das integrais estocásticas ditam as propriedades de uma EDE além de serem relevantes para obtenção da solução desta. Algumas propriedades de EDE como existência, unicidade e continuidade de solução, entres outras, estão demonstradas e comentadas em [85].

Para a solução exata de uma certa EDE recorreremos à *diferencial de Itô*, que obtém a diferencial de função arbitraria $G(W(t), t)$, com dependência de t através do processo de Wiener (podendo também depender de t explicitamente). Supondo que a dependência de G de W seja diferenciável, é feita uma aproximação de Taylor, expandindo $dG(t)$ até a segunda ordem em $dW(t)$:

$$dG(t) = G(t + dt) - G(t) = \frac{\partial G}{\partial W} dW(t) + \frac{\partial G}{\partial W} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial W^2} (dW(t))^2 + \dots$$

Aplicando a 2.24, a diferencial ou simplesmente *fórmula de Itô* é definida como.

$$dG(t) = \frac{\partial G}{\partial W} dW(t) + \left(\frac{\partial G}{\partial W} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial W^2} \right) dt. \quad (2.27)$$

Essa diferencial será usada no capítulo seguinte, para resolver uma equação semelhante a Eq. 2.13, também chamada de *equação diferencial estocástica de Itô*. Nosso foco foi direcionado ao estudo dessa equação considerando o caso não linear. Consideramos também os dois casos do ruído, mas principalmente o multiplicativo, já que utilizaremos a Eq. 2.27 no processo da resolução analítica da equação. Portanto, tendo revisado os conceitos necessários, podemos prosseguir com a descrição e estudo do modelo.

3 DESCRIÇÃO DO MODELO

A construção do modelo, foi pensada com base na equação de Langevin, considerando o movimento unidimensional de uma partícula de massa m em um poço de potencial com dois mínimos, em presença de ruído multiplicativo. Este potencial é do tipo ϕ^4 ou potencial quártico e está representado na figura 3.1, sendo chamado de *potencial de poço duplo* (quártico) descrito analiticamente da seguinte forma [110]

$$V(x) = bx^4 - ax^2, \quad (3.1)$$

Essa partícula está sob ação de uma força dada por

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} = -4bx^3 + 2ax. \quad (3.2)$$

Considerando ainda uma força dissipativa $-c\dot{x}$, sendo c uma constante de amortecimento, mais um ruído estocástico do ambiente $\xi(t)$, com intensidade γ^δ , sendo $\xi(t) = dW(t)$, o incremento de Wiener, a equação de movimento da partícula pode ser escrita como

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - 4bx^3 + 2ax + \gamma^\delta \xi(t), \quad (3.3)$$

O movimento de uma partícula (no caso o preço) em um potencial de poço duplo na presença de ruído multiplicativo está ilustrada no gráfico da fig. 3.2. Podemos tomar o limite do termo de inércia insignificante ($m \simeq 0$) e de forma mais geral tomar a intensidade do ruído dependendo de X e t assim como as demais forças. Além disso, escolhendo $-4b = \kappa$, $2a = \eta$ e $c = 1$, obtemos o modelo em estudo descrito pela seguinte EDE com um ruído branco multiplicativo e $\delta \in [0, 1]$,

$$dX(t) = [\eta X(t) - \kappa(X(t))^3]dt + \gamma(X(t))^\delta dW(t). \quad (3.4)$$

A densidade de probabilidade é Gaussiana para o modelo acima quando $\kappa = 0$, possibilitando um bom ajuste para opções de preços cruzando diferentes strikes (preços de exercício das opções) em uma única data de vencimento [52]. Nesse caso, $\gamma(X(t))^{\delta-1}$ pode ser interpretada como a volatilidade, que é uma função decrescente do preço das ações [52, 55]. Quando se deseja contabilizar as diferentes volatilidades implicadas pelas opções que expiram em datas diferentes, bem como os diferentes strikes é necessário

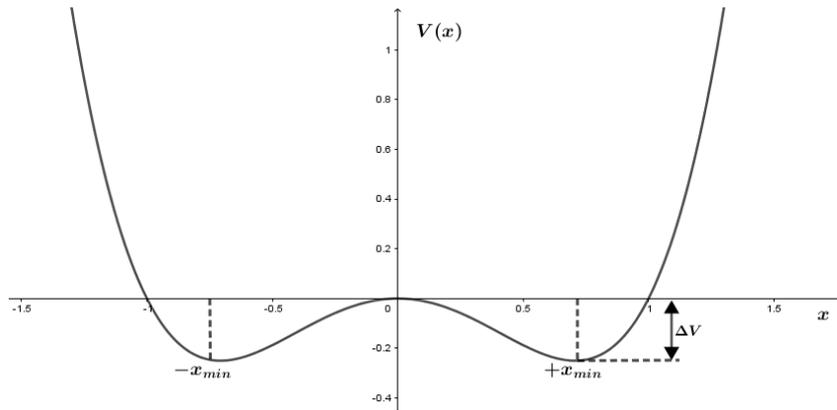


Figura 3.1: Potencial de poço duplo dado por $V(x) = bx^4 - ax^2$, com $b = 1$ e $a = 1$. Os mínimos estão localizados em $-x_{min}$ e $+x_{min}$, sendo $x_{min} = \sqrt{\frac{a}{2b}}$. Estes mínimos estão separados por uma barreira de potencial de altura ΔV que alcança o topo em $x = 0$.

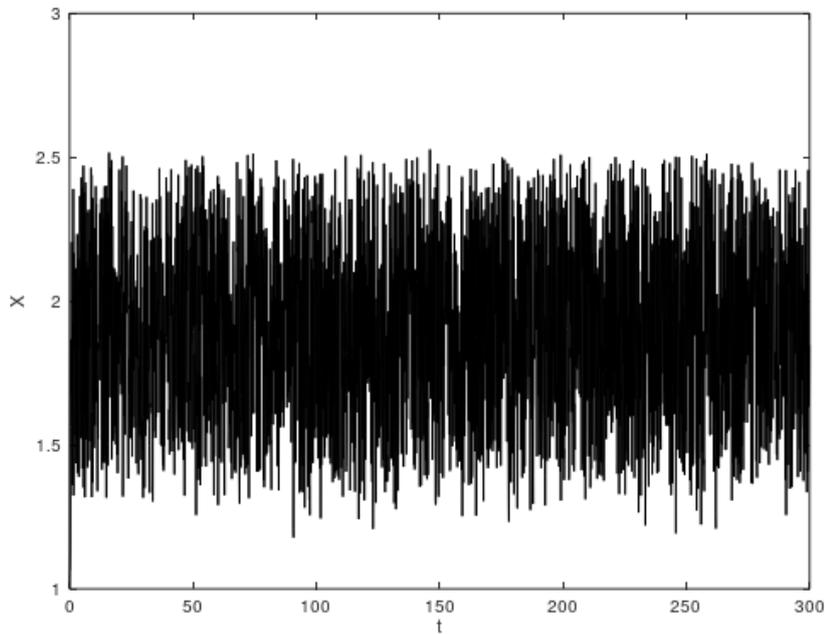


Figura 3.2: Série temporal do preço $X(t)$ movimentando oscilatóriamente como uma partícula em potencial de poço duplo com ruído multiplicativo para os parâmetros $\eta = \kappa = 1.0$, $\delta = 0.25$ e $\gamma = 1.0$.

permitir que γ dependa de t quanto de X . Nesse caso, a função $\gamma(X(t), t)$ é chamada de superfície de volatilidade [52].

O potencial do tipo ϕ^4 estabelece a solução de densidade de probabilidade do estado estacionário em uma forma não Gaussiana para $\kappa \neq 0$, sendo que a densidade de probabilidade da Eq. 3.4 é dada pela seguinte equação de Fokker-Planck [1]

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial [(\eta x - \kappa x^3)P(x, t)]}{\partial x} + \frac{\gamma \partial^2 [x^\delta P(x, t)]}{2 \partial t^2}. \quad (3.5)$$

O caso $\delta = 0$ foi considerado em [58], no modelo Bouchaud-Cont Langevin para flutuações e falhas do mercado de ações. No caso do nosso modelo, pensamos em representar um mercado financeiro em diferentes condições extremas no processo, onde o preço tende a dois mínimos representados pelo poço duplo [55].

Geralmente, os analistas do mercado acionário e investidores usam entre diversas técnicas as linhas gráficas de tendência para entender o movimento do mercado, fazer previsões a curto e longo prazo e realizar operações financeiras. As linhas que saem de um ponto máximo e de um mínimo correspondem às linhas de resistência e suporte, respectivamente [111]. Dessa forma, as altas no preço estariam niveladas numa zona de resistência, por outro lado, as baixas estariam niveladas na região de suporte. Essas regiões funcionam como barreiras para que as várias quedas e altas que o preço possa sofrer não superem essas linhas.

Como o mercado é imprevisível entretanto, pode haver situações por exemplo, em que uma determinada ação esteja com potencial muito forte de valorização, de forma que a subida do preço provoque uma ruptura na linha de resistência, e essa, passaria a ser uma nova linha suporte. Assim, o preço poderia atingir um dos dois mínimos quando estiver caindo ou até mesmo sofrer uma queda muito brusca.

Retomando a Eq. 3.4, dividindo-a por $X(t)$ [54], segue que,

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\eta - \kappa X_t^2)dt + \gamma X_t^{\delta-1}dW(t). \quad (3.6)$$

Aplicando o diferencial de Itô na função $\ln(X)$ obtém-se,

$$d(\ln X_t) = \frac{1}{X_t}dX_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X_t^2} \right) (dX_t)^2. \quad (3.7)$$

Escrevendo $\Lambda = \eta X_t - \kappa X_t^3$ e tomando o quadrado da Eq. 3.4 implica,

$$(dX_t)^2 = \Lambda^2 dt^2 + 2\lambda \gamma(X_t)^\delta dt dW_t + (\gamma(X_t)^\delta)^2 dW_t^2.$$

Tomando $dt^2 \rightarrow 0$ e substituindo na equação acima os resultados $dW_t dt = 0$ e $dW_t^2 = dt$ referentes respectivamente as equações 2.25 e 2.24 obtidas pelas propriedades de integral estocástica, conclui-se que,

$$(dX_t)^2 = \gamma(X_t)^\delta)^2 dt.$$

Logo,

$$d(\ln X_t) = \left(\eta - \kappa X_t^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 X_t^{2\delta-2} \right) dt + \gamma X_t^{\delta-1} dW_t.$$

Portanto

$$X(t) = X(0) e^{\left[(\eta - \kappa \int_0^t (X(t'))^2 dt' - \frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^t (X(t'))^{2\delta-2} dt') + \gamma \int_0^t (X(t'))^{\delta-1} W(t') dt' \right]}. \quad (3.8)$$

Onde no limite $dt \rightarrow 0$, podemos substituir $X(t') \rightarrow X(t)$ nas duas primeiras integrais na equação acima. Contudo, o mesmo procedimento não pode ser feito no último termo por causa do processo estocástico dW , que torna cada ponto do integrando não correlacionado entre si. Em vez disso, fazemos a substituição

$$X(t) \rightarrow \frac{X(t) + X(t+dt)}{2}, \quad (3.9)$$

e usando o resultado $X(t+dt) = dX(t) + X(t)$, encontramos

$$X(t) = X(0) e^{\left[(\eta - \kappa (X(t))^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 (X(t))^{2\delta-2}) + \gamma \left(X(t) + \frac{dX_t}{2} \right)^{\delta-1} W(t) \right]}. \quad (3.10)$$

Usando o fato que uma série binomial pode ser escrita como $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots$, para todo $n \in \mathbb{R}$ e $(1+x)^n = 1 + nx + \dots + x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então no limite $dX \rightarrow 0$, temos

$$\left(X(t) + \frac{dX_t}{2} \right)^{\delta-1} \approx X(t)^{\delta-1} + \vartheta(\dots).$$

Portanto,

$$X(t) = X(0) e^{\left[(\eta - \kappa (X(t))^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 (X(t))^{2\delta-2}) + \gamma (X(t))^{\delta-1} W(t) \right]}. \quad (3.11)$$

Para $\kappa = 0$ e $\delta = 1.0$ a solução da Eq.3.4 é dada como

$$X(t) = X(0) \exp \left[\left(\eta - \frac{1}{2} \gamma^2 \right) t + \gamma W(t) \right]. \quad (3.12)$$

Assim, finalizamos a descrição do modelo e a partir dele obtém-se a série temporal que será utilizada para os fins deste trabalho.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, serão apresentados os métodos e materiais usados para verificar se a Eq. 3.4 corresponde aos fatos estilizados do mercado financeiro. Em termos gerais, a metodologia desse trabalho segue os seguintes passos

1. Exposição da teoria.
2. Especificação do modelo matemático.
3. Obtenção dos dados.
4. Determinação das variáveis e parâmetros.
5. Simulações e testes para validar ou não o modelo.

Os dois primeiros itens foram apresentados nos capítulos 3 e 4, respectivamente. Após realizarmos uma pesquisa bibliográfica, buscando na literatura científica o suporte teórico para este trabalho e especificar o modelo, implementamos o algoritmo de poço duplo com ruído aditivo descrito em [83], ajustando-o para o modelo estocástico com ruído multiplicativo para obtenção dos dados.

Lembrando que o termo $dW(t)$ da Eq. 3.4 é um processo estocástico aleatório de largura $\sigma = \sqrt{dt}$, seguimos a sugestão em [83] de que a cada passo de integração deve-se sortear o incremento de Wiener e normalizar apropriadamente o resultado. Dessa forma, utilizamos um número randômico R_G com distribuição normal. No software SCILAB temos $R_G = rand$ e com esta conversão podemos escrever $dW(t) = \sqrt{dt}R_G$.

Pequenos erros de integração no termo em dt são cometidos, mas não alteram significativamente a solução, pois o incremento de Wiener, por ser da ordem de $dt^{\frac{1}{2}}$, é geralmente o termo dominante da Eq. 3.4. Dessa forma, para tratar a equação seguimos a orientação dada em [83], utilizando o algoritmo de Euler, que é o algoritmo mais usado no tratamento de integrais estocásticas.

Pelo procedimento de Euler obtemos o vetor $t = (0, dt, 2dt, \dots, t_{max})$ dividindo o intervalo de integração $[0, t_{max}]$ em intervalos de tamanho dt , assim $N = \frac{t_{max}}{dt}$, onde N é o número de intervalos. Sorteamos os $dW(t)$ todos de uma vez para maior eficiência,

escrevendo no SCILAB $dW = \text{sqrt}(dt) * \text{rand}(1, N)$. E obtemos

$$X(j+1) = X(j) + (\eta * X(j) - \kappa * (X(j))^3) * dt + \gamma * ((X(j))^\delta) * dW(j),$$

onde $X(j+1)$ corresponde ao preço no j^{mo} passo de integração.

Assim, geramos a série temporal aleatória dos preços mostrada na Fig. 3.2, e a partir dela é gerado a série temporal de retornos, que fornece os dados para analisar seu comportamento ao longo do tempo e da distribuição acumulada da cauda pesada das volatilidades dos retornos. Para verificar se as séries possuem memória longa, utilizamos a análise R/S e o DFA, com a finalidade também de comparar os resultados obtidos por estes métodos.

Estes procedimentos são passos importantes para tratamento e análise dos dados, nesse sentido, é conveniente descrever alguns aspectos principais da metodologia que incluem a classificação dos tipos da pesquisa, análise e tratamento dos dados, uma vez que a obtenção destes já foi mencionada.

4.1 Aspectos Metodológicos

Uma pesquisa pode ser classificada conforme sua finalidade, abordagens e ou procedimentos utilizados para seu desenvolvimento e coleta dos dados ou informações. Dessa forma, nessa seção será feita uma abordagem da classificação desta pesquisa e de outros dois aspectos importantes citados anteriormente.

4.1.1 Classificação da Pesquisa

Esta pesquisa pode ser classificada em diferentes tipos. Quanto aos fins, vai além de uma pesquisa básica teórica, pois mesmo sendo de caráter empírico, aplica métodos matemáticos e estatísticos visando aprofundamento de um assunto e a produção de um conhecimento que possa ser efetivamente aplicado num contexto real. Ela é mais que descritiva, pois não se limita apenas à descrição e análise dos dados, mas busca também explicar e racionalizar o objeto de estudo. Nesse sentido, pode ser considerada como pesquisa explicativa, que pode chamar atenção da comunidade científica para algo ainda não conhecido ou pouco explorado e que poderá ser alvo de pesquisas futuras.

Em relação à abordagem, ela é quantitativa, pois as informações são coletadas por meio de equações e sustentadas por teorias matemáticas. Também por utilizar técnicas e ferramentas estatísticas como meio de análise dos dados, além de obter resultados quantificáveis expressos graficamente.

Sobre o procedimento para coleta de informações, é mais que uma pesquisa bibliográfica que dá embasamento para o desenvolvimento dos assuntos abordados, é uma pesquisa experimental, que utiliza recursos computacionais pra fazer simulações que deverão ser analisadas a fim de obter regularidades e validar ou refutar o modelo.

4.1.2 Tratamento e Análise dos Dados

Como mencionado, a quantidade de interesse aqui é a série temporal de retornos e seus valores absolutos, obtidos da série original através da Eq. 3.4. O número de dados depende da escolha de t_{max} e dt , quanto menor o valor da amplitude dt do intervalo, maior a quantidade de dados gerados. A fim de evitar uma amostragem pequena, tomamos $t_{max} \geq 100$ e $dt = 0.01$ para as simulações, com t percorrendo ao longo da unidade escolhida, podendo escalar em segundos, minutos, dias ou anos, dependendo do sistema que esteja modelando.

A investigação empírica do comportamento da série temporal de retornos é feita com base em dois objetivos, determinar o expoente de cauda pesada da distribuição cumulativa dos retornos absolutos e estimar o expoente de memória longa. Nesse sentido, a primeira parte dessa investigação implica a análise quantitativa da estatística da volatilidade, isto é, na sua distribuição acumulada de probabilidade. A segunda parte consiste na descrição das estatísticas do cálculo dos expoentes de Hurst, na análise quantitativa e comparativa dos expoentes obtidos, uma vez que podem indicar diferentes comportamentos em relação à memória tanto da série temporal de retornos quanto das volatilidades.

Dessa forma, as três seguintes seções deste capítulo descrevem os procedimentos matemáticos e estatísticos para esses fins sendo os dois últimos destinados à descrição do cálculo do expoente de Hurst. Ressaltamos que para realizar estes procedimentos utilizamos os softwares SCILAB e Excel.

4.2 Distribuição Acumulada da Volatilidade e o Expoente da Cauda Pesada

Considere $X(t)$ o preço de algum ativo negociado em t (momento em que o item é comprado) e $X(t + \Delta t)$ o seu valor futuro podendo ser também o preço de venda. O retorno é a perda ou lucro obtido na compra deste ativo, mantendo-o por algum período ou vendendo no momento $t + \Delta t$, onde Δt é o intervalo de tempo da amostra.

No limite de pequenas mudanças em $X(t)$ o retorno corresponde aproximadamente à mudança relativa, definida por

$$r(t) = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)}.$$

Entretanto, a maneira que escolhemos para calcular o retorno, usada na maior parte da literatura sobre economia e finanças, [15, 31] e que produz resultados semelhantes aos da equação anterior, é mudança de preço dada por

$$r(t) = \log X(t + \Delta t) - \log X(t). \quad (4.1)$$

Dessa forma, usando os valores gerados pela Eq. 3.4 e métodos computacionais, obtém-se a série temporal de retornos mostrada na Fig. 5.2. Em um estudo em 1963 sobre os preços do algodão, Mandelbrot mostrou que os retornos logarítmicos de preços estão longe da distribuição normal [23].

Existem muitos estudos desde então, a maioria dos quais indica que a distribuição acumulada de variações logarítmicas de preços tem caudas que escalam assintoticamente para grandes retornos absolutos como uma lei de potência da forma $|r|^{-\alpha}$ [16, 25, 33].

A Eq. 2.2 define a distribuição acumulada de probabilidades para o caso contínuo. Podemos discretizá-la considerando a volatilidade dos retornos como variável discreta, tal que,

$$P(|r|) = \int_0^r \rho(|r'|) dr' \approx \sum_{r(t_i)} p(|r(t_i)|).$$

Como $|r| > 0$,

$$P(|r|) = \int_0^r \rho(|r'|) dr' \approx \sum_{r(t_i)} p(r(t_i)) = \sum_{r(t_i)=r(t_0)}^{r(t_i)=r(t)} p(r(t_i)).$$

Usamos o módulo do retorno, pois ele expressa a volatilidade. Como $p(r(t_i))$ estatisticamente deve ser um valor entre 0 e 1, fazemos

$$p(r(t_i)) = \frac{|r(t_i)|}{\sum_{t_i=0}^t |r(t_i)|},$$

logo,

$$P(|r|) = \sum_{r(t_i)=r(t_0)}^{r(t_i)=r(t)} \frac{|r(t_i)|}{\sum_{t_i=0}^t |r(t_i)|}.$$

Onde $t_i = \frac{t}{n}$, sendo n é o número de intervalos (ou janelas) em que a série dos retornos positivos foi dividida e t_i é o comprimento do intervalo de tempo t . Assim, $|r(t_i)|$ é a volatilidade em um determinado intervalo.

Dessa forma, no limite de longos valores de t_i e conseqüentemente $r(t_i)$, devemos ter $P(|r|) \sim \frac{1}{|r|^\alpha}$.

Aplicando as propriedades do logaritmo teremos,

$$\log P(|r|) = \log \left(\frac{1}{|r|^\alpha} \right) = \log(1) - \log|r|^\alpha,$$

logo

$$\log P(|r|) = -\alpha \log|r|.$$

Para verificamos se as volatilidades podem ser descritas por uma lei de potência, devemos obter $2 < \alpha < 4$ [12]. Nesse caso, o parâmetro α corresponde à inclinação da reta do gráfico $\log P(|r|)$ vs. $\log|r|$ e é chamado expoente da cauda. É importante porque caracteriza o risco de movimentos extremos dos preços e corresponde ao limiar acima do qual os momentos da distribuição tornam-se infinitos [12].

Como a distribuição acumulada de probabilidade $P(|r|) \in [0, 1]$, obtemos o eixo $\log P(|r|)$ com valores negativos como ilustra a Fig. 4.1, pois o logaritmo de valores entre 0 e 1 é negativo, como é mostrado no gráfico ilustrativo da Fig. 4.2.

Dessa maneira, fizemos a regressão linear pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) para obter a reta que melhor ajusta os pontos $\log P(|r|)$ e $\log|r|$ em seguida mudamos os eixos ($P(|r|), |r|$) para escala logarítmica, obtendo os gráficos plotados no capítulo seguinte.

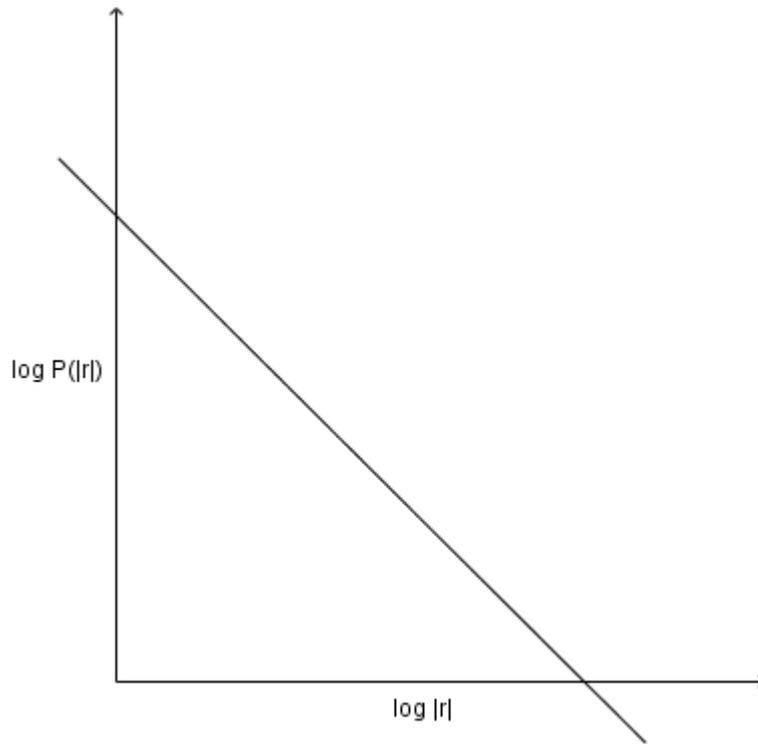


Figura 4.1: Ilustração da distribuição acumulada da volatilidade, com declive negativo pois $\log P(|r|)$ é negativo.

Passamos agora a investigar se a série temporal de retornos, bem como os tamanhos das flutuações destes, isto é, as volatilidades, apresentam correlação de longo alcance. Uma maneira de se fazer isso é estimando o expoente de Hurst. Na subsecção sobre séries temporais foi feita uma pequena abordagem histórica sobre memória longa, onde foram citados o *R/S* e o *DFA*, dois métodos usados para estimar esse expoente, principalmente em séries financeiras. Assim, nas duas próximas seções desse capítulo, estes métodos serão descritos passo a passo e como estes também se relacionam com uma lei de potência.

4.3 Análise R/S e a Estimativa do Expoente de Hurst

Como apresentado, o expoente de Hurst foi inicialmente deduzido para resolver problemas ligados a hidrologia [35] em meados do século XX, e a partir daí começou a ser usado também na investigação de problemas em outros campos, sendo introduzido ao final da década de 60 para determinação de dimensão fractal [96] e alguns anos mais tarde

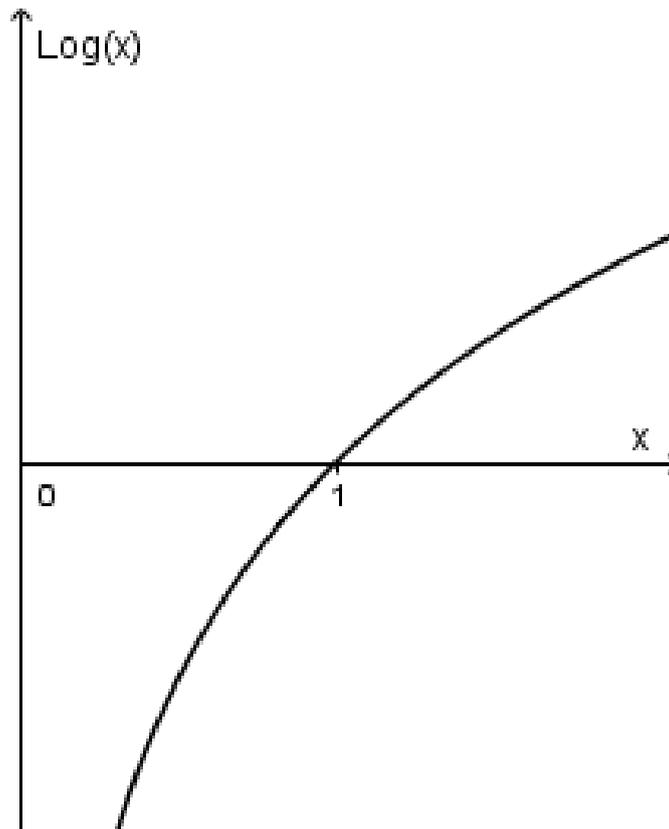


Figura 4.2: Gráfico ilustrativo de $\text{Log}(x)$ com $x \in [0, 1]$.

em séries financeiras e análise de fenômenos econômicos [44].

Existem vários métodos para estimar o expoente de Hurst e quantificar a memória longa, nesta pesquisa será usado o método clássico, a análise R/S (do original, Rescaled Range).

Assim, considerando $X(t)$ a série obtida pela equação estudada e $r(t)$ o retorno dessa série de tamanho total N , dividida em n blocos ou intervalos de observação com τ observações numeradas com $1 \leq i \leq n$. Para estimar o expoente de Hurst, é realizada a estatística R/S em cada bloco com τ observações, sendo $\tau \leq N$. Dessa forma, os elementos $r(t,i)$ são numerados com $1 \leq t \leq \tau$ em cada intervalo i e conforme descrito em [38, 112, 113] calcula-se a estatística R/S associada ao intervalo de tamanho t da seguinte forma:

- A partir da série temporal de retorno obtida pela Eq. 4.1 calculam-se os desvios médios Y em cada bloco i , ou seja, para valores inteiros de t no intervalo $[1, \tau]$,

deve-se calcular

$$Y_i = \sum_{k=1}^t (r_{k,i} - E[r_i]),$$

onde $E[r_i]$ é o valor esperado de cada bloco, dado por

$$E[r_i] = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} r_{t,i}.$$

- Calcula-se o alcance ou distância R em cada bloco fazendo a diferença entre o valor máximo e mínimo desses desvios, dado por

$$R_i = \max_{1 \leq t \leq \tau} (Y_i) - \min_{1 \leq t \leq \tau} (Y_i).$$

- Calcula-se o desvio padrão S_i em cada bloco:

$$S_i = \frac{1}{\tau} \sqrt{\sum_{t=1}^{\tau} (r_{t,i} - E[r_i])^2}.$$

- A estatística $(R/S)_i = \frac{R_i}{S_i}$ é realizada em cada bloco i .
- O intervalo médio de redimensionamento é calculado para cada i e se associa ao tamanho de bloco τ :

$$E[(R/S)_\tau] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R/S)_i.$$

Por simplicidade usa-se apenas (R/S) para se referir à média do reescalonamento.

- Terminados os cálculos do reescalonamento para diversas observações de tamanho τ , obtém-se o expoente de Hurst H , através da relação semelhante a Eq. 2.3

$$(R/S)_\tau = C\tau^H.$$

- Linearizando a equação acima obtemos $\log[(R/S)_\tau] = H\log(\tau) + \log(C)$. Logo, H é o coeficiente de inclinação da reta do gráfico log-log dos pares $\log(\tau)$ e $\log(R/S)$ obtidos.

Relembrando a Eq. 2.7, o expoente H se relaciona com a correlação c da seguinte forma [95]

$$c = 2^{2H-1} - 1,$$

onde os valores que c e H podem assumir, bem como os significados desses valores, foram escritos na subseção sobre séries temporais.

Para a estimar o expoente de Hurst e conseqüentemente a memória longa da série de volatilidades, utiliza-se o mesmo procedimento, porém com o valor absoluto de $r(t)$ como aproximação para a volatilidade instantânea em t .

Escolhemos a análise R/S , porque em se tratando de verificar a ML de séries financeiras, ela é considerada uma técnica consistente e o expoente H é estimado em um intervalo de confiança de 95% [113].

Outro ponto forte do uso deste método é a sua superioridade em relação às técnicas mais convencionais, como a análise de autocorrelações, razões de variância e análise espectral [114, 115]. Além disso, esta técnica pode identificar a dependência de longo alcance em séries temporais bem longe da normalidade, com grande assimetria e curtose como consta em [112] e converge quase certamente para processos estocásticos com variância infinita, com vantagem evidente sobre autocorrelações e razões de variância [113, 115, 116]. E mesmo que esses pontos favoráveis à análise R/S sejam contestados, é reconhecido que esta metodologia pode identificar memória longa de um sistema [114].

Por outro lado, esta técnica também detecta memória curta, sem distingui-la da memória longa no caso de H for bem próximo de 0.5 dentro do intervalo de confiança, sendo as vezes necessário aplicar algum filtro para se extrair dos elementos da série a parcela devida a ocorrência de memória curta e a variação das volatilidades dos retornos [113]. Para contornar esse problema de não distinção entre o tipo de memória, uma análise R/S modificada [114] foi proposta, mas também apresenta algumas limitações.

Outra desvantagem em relação ao uso deste método é que ele está sujeito a erro, pelas estimativas, regressão por mínimos quadrados e principalmente porque ele é assintótico, sendo pouco ou nada confiável para pequenas amostragens. Ou seja, quanto menor for o tamanho da amostra maior será o erro. Como a análise R/S clássica não prevê correção para a estatística R/S no caso de amostras pequenas [113] sugere-se que ele seja aplicado para amostras com mais de 2500 observações [44].

Além disso essa metodologia é mais indicada para análise de séries temporais

estacionárias, dessa forma apresentaremos a seguir o DFA, que é um método alternativo à análise R/S clássica e também com a finalidade de comparação de resultados. Além de ser mais robusto quanto à detecção de falsas correlações de origem não estacionárias.

4.4 Análise de Flutuação sem Tendência-DFA

A técnica de analisar flutuações destendenciadas foi validada em séries temporais que apresentam correlações de longo alcance com a superposição de uma tendência externa não estacionária [49]. Tem sido usada para detectar processos de memória longa em séries financeiras [3, 29, 31]. E nesse sentido, para o nosso caso, ainda considerando a série temporal de retornos, conforme descrito em [31] o expoente de Hurst é estimado pelo DFA através dos passos indicados a seguir.

Primeiro é feito o cálculo da série integrada ou soma acumulada $y(t')$ das séries temporais $r(i)$ de tamanho total N

$$y(t') = \sum_{i=1}^{t'} (r(i) - E[r(i)]), \quad (4.2)$$

Onde $t'=1, \dots, N$ e tal como na análise R/S, $E[r(i)]$ corresponde à média da série de retornos.

O segundo passo é dividir a série temporal integrada em caixas, blocos, janelas ou intervalos de tempos iguais não sobrepostos de comprimento n , onde em cada bloco realiza-se um ajuste linear dos dados mínimos quadrados, representado por um polinômio de tendência local $y_n(t')$.

Assim a série integrada é destendenciada, subtraindo da série a tendência local em cada bloco. E a partir da raiz do valor quadrático médio da série temporal integrada e destendenciada obtém-se a seguinte função de flutuação média (ou desvio padrão da função de flutuação),

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t'=1}^N [y(t') - y_n(t')]^2}. \quad (4.3)$$

Para obter uma relação entre $F(n)$ e n este cálculo é repetido em todos os tamanhos do intervalo (escalas de tempo). Ne caso deste trabalho, a série temporal integrada foi dividida em 10 janelas, obtendo assim 10 pontos de coordenadas $(F(n), n)$.

Vale ressaltar que se o tamanho da janela for muito grande, próximo do comprimento total da série, será obtida uma quantidade pequena de janelas. Em contrapartida, poucos pontos serão ajustados se o comprimento das janelas for muito pequeno. Para evitar esses extremos desinteressantes, a recomendação dada em [117], sugere que $n_{max} \leq 0.1N$, tal que n_{max} , é o tamanho máximo da janela. Além disso, recomenda-se que a menor janela tenha mais que seis dados.

A flutuação média tende a aumentar com o tamanho da janela [49], quando isso ocorre, é possível aplicar a seguinte relação

$$F(n) \sim n^\alpha. \quad (4.4)$$

Nesse caso, o expoente de escala α é a generalização do expoente de Hurst e coeficiente angular de uma reta $\log n$ versus $\log F(n)$. Assim, aplicando esta análise tanto para os retornos como para os valores absolutos destes, pode-se obter α variando de 0 a 1, de tal forma que

- Se $\alpha < \frac{1}{2}$, a série possui correlação negativa e comportamento antipersistente.
- Se $\alpha = \frac{1}{2}$, a série é não correlacionada, indicando que não há dependência de longo alcance.
- Se $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, a série possui correlação positiva e comportamento persistente.

É possível obter também $\alpha > 1$, nesse caso existem correlações, mas deixam de ter uma forma de lei potência [31]. O expoente de Hurst também pode ser visto como um indicador da ‘aspereza’ da série temporal original, quanto maior for o seu valor, mais suave será a série temporal [49], por isso muitos estudos sobre dimensão fractal tem aplicado essa metodologia.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo descreveremos os resultados numéricos obtidos em nosso estudo, aplicando os métodos R/S clássico e DFA e simulações computacionais para alguns valores dos parâmetros da Eq. 3.4. Tomamos cuidado para não escolher valores que corroborassem com a não convergência da série e valores que anulem o poço duplo. Por exemplo, tomando todos os parâmetros igual a zero e apenas $\gamma = 1$, anula-se o potencial quártico do sistema, restando apenas o ruído de caráter aditivo, com expoente de Hurst muito próximo de 0.5, como mostra a Fig. 5.1.

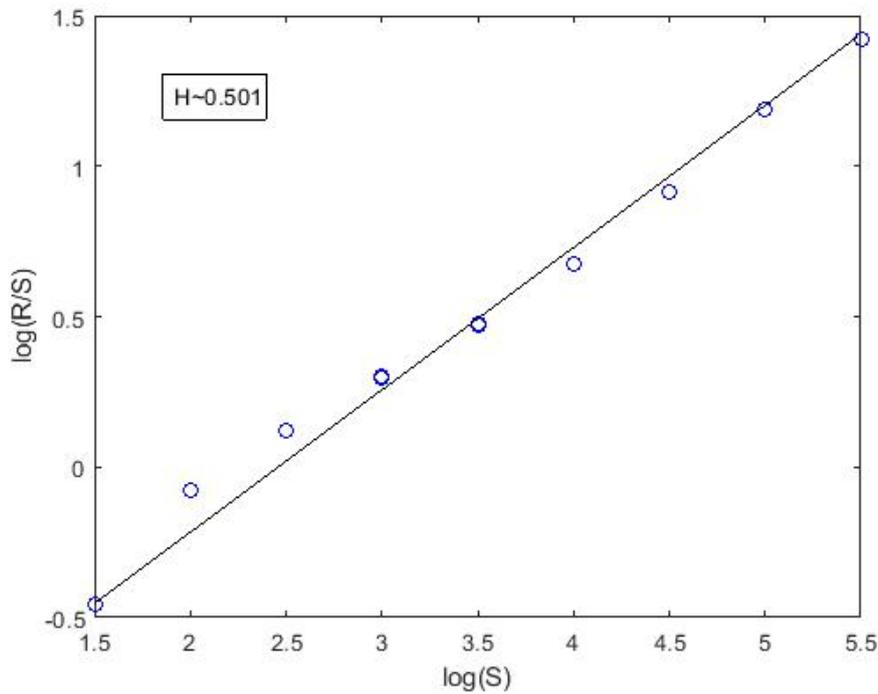


Figura 5.1: Expoente de Hurst estimado para a volatilidade, usando os valores $\eta = \kappa = \delta = 0.0$ e $\gamma = 1.0$

Por outro lado, se $\gamma = 0$, o incremento de Wiener seria anulado da equação, e não teríamos uma equação estocástica, o modelo seria determinístico.

5.1 Comportamento da Distribuição de Probabilidade Acumulada da Volatilidade

Resolvemos numericamente a solução da Eq. 3.4 tomando $\sigma_\omega = \sqrt{\Delta t}$ e a escrevemos como $\gamma dW(t) \sim \gamma \sqrt{dt} R_G$ onde R_G é um número aleatório gerado com uma distribui-

ção Gaussiana com média 0 e variância 1.

A série temporal de retorno $r(t)$ esta apresentada na Fig. 5.2. Realizamos simulações para diferentes valores dos parâmetros, onde foi possível constatar que a série temporal oscila rapidamente, sendo que a largura entre o valor máximo e o valor mínimo da série temporal $r(t)$ varia conforme a escolha de η e κ , não variando muito com os parâmetros $\gamma \neq 0$ e $\delta \in [0, 1]$.

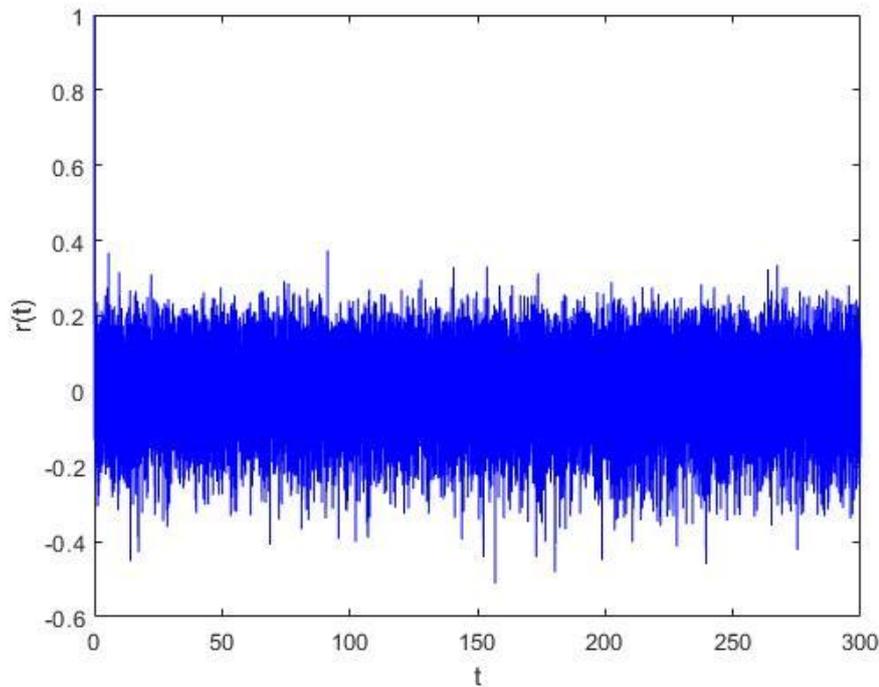


Figura 5.2: Evolução da série temporal de retorno $r(t) = \ln X(t + \Delta t) - \ln X(t)$ para valores de parâmetros $\eta = 1.0$, $\kappa = 1.0$, $\gamma = 1$ e $\delta = 1.0$

Em muitos trabalhos empíricos sobre o mercado financeiro foi verificado que cauda da distribuição da volatilidade dos retornos cai lentamente podendo obedecer a lei de potência dada por $P(|r|) = 1/|r|^\alpha$ [18, 19, 20, 33]. Na Fig. 5.3a, mostramos o ajuste log-log da distribuição de cauda pesada da série de volatilidade, onde obtemos o expoente da curva ajustada da distribuição como $\alpha = 12.203$.

Também mostramos o ajuste log-log da cauda pesada da distribuição das volatilidades na Fig. 5.3b, porém, para o modelo com $\delta \neq 1.0$ ($\delta = 0.25$). Obtemos $\alpha = 17.222$, indicando uma grande mudança da lei de potência ajustada aos dados, para o comporta-

mento da cauda pesada da distribuição de probabilidade acumulada.

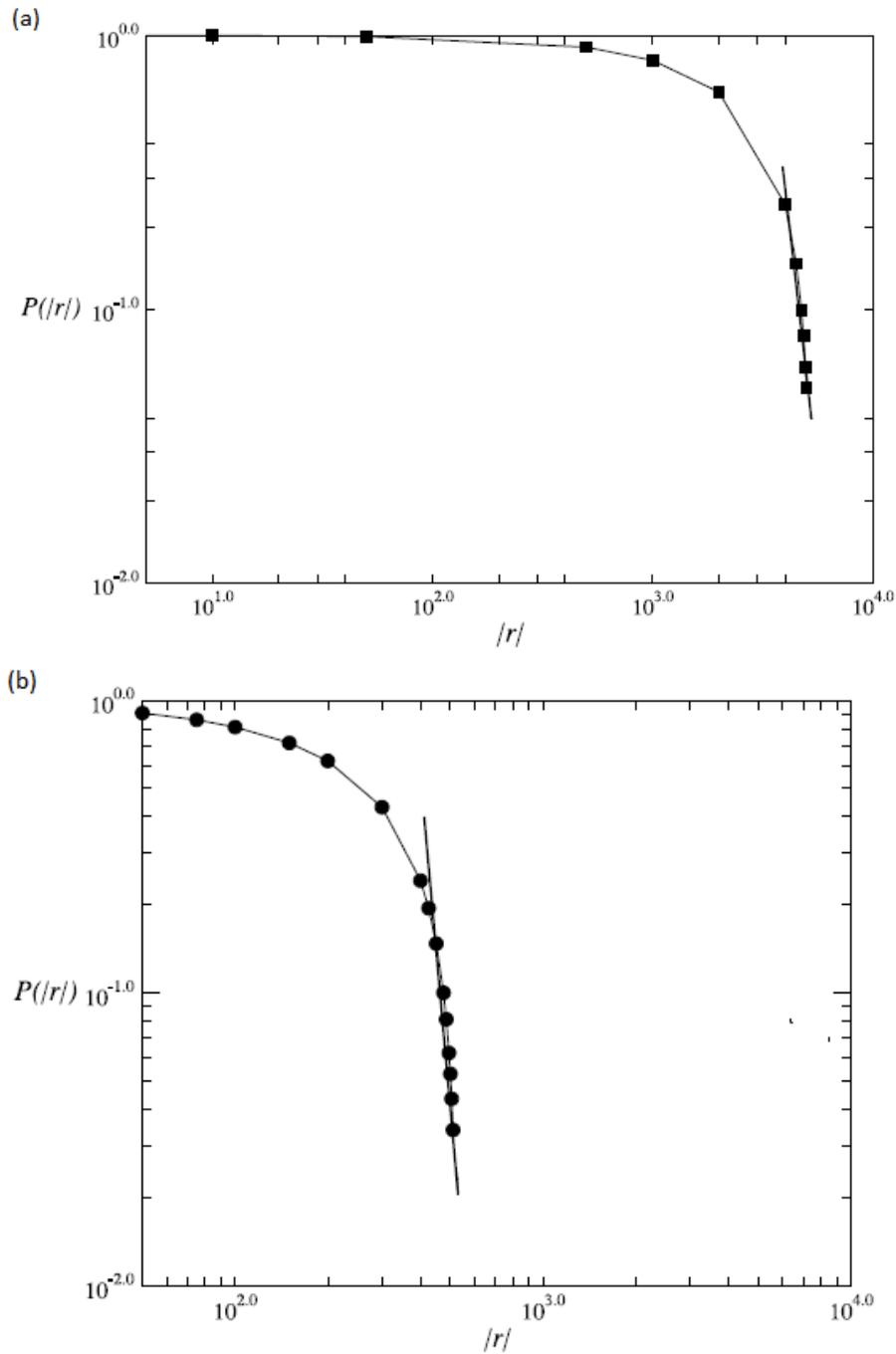


Figura 5.3: Gráficos log-log da distribuição de probabilidade acumulada da volatilidade $P(|r|)$ vs. $|r|$. O ajuste por mínimos quadrados foi realizado para a lei de potência $P(|r|) \sim |r|^{-\alpha}$, onde obtivemos (a) $\alpha = 12.20(3)$ e (b) $\alpha = 17.22(2)$, nesse caso com $\delta = 0.25$.

No entanto, como as chamadas “caudas da lei de potência” têm apenas cerca de

0.1 ordens de magnitude, em qualquer curva como a da Fig. 5.4 podemos obter quaisquer valores de expoente da cauda da lei de potência. Consequentemente, não podemos pensar que existem caudas da lei de potência, neste caso.

5.2 Resultados Numéricos Obtidos pela Análise R/S

Calculamos os índices de Hurst mostrados nas Figuras 5.4 e 5.5, usando o método R/S para o retorno e volatilidade respectivamente, gerando os gráficos $\log(R/S)$ vs. $\log n$. Os determinamos para valores de $\kappa = 1.0$ e $\eta = 0.0$ na Eq. 3.4.

Obtemos o índice de Hurst para a série temporal do retorno, como $H = 0.5076$ para o valor $\delta = 0.0$, e para $\delta = 0.25$ os valores $H = 0.5004$ e $H = 0.4912$. Estes valores aproximados de 0.5 para $\gamma = 1$, obtidos para o expoente de Hurst, pode ser devido à natureza exponencial dada para a solução na Eq. 3.4 obtida para os casos analisados.

Para a volatilidade dos retornos, obtemos valores $H \sim 0.4$ para $\delta = 0$ e $\delta = 0.25$ conforme indicados na Fig. 5.5.

Assim, apesar do expoente de Hurst indicar possíveis correlações antipersistentes para a volatilidade, os resultados obtidos para a lei de potência com o expoente da cauda sendo tão grande quanto os que encontramos e os expoentes de Hurst dos retornos próximos a 0.5 indicam que os resultados estão longe dos fatos estilizados bem conhecidos, de regularidades estatísticas dos retornos financeiros.

Além disso, como não foi acrescentado um tipo de filtragem, com esses valores obtidos para os retornos não é possível distinguir se a série converge para passeio aleatório ou possui ML à medida que o tempo aumenta. O que fizemos foi comparar estes resultados com os obtidos pelo *DFA*. Vale ressaltar também, que não houve mudança significativa no índice de Hurst com o parâmetro δ .

5.3 Resultados Numéricos Obtidos pelo DFA

Na Fig. 5.6, mostramos o gráfico log-log de $F(n) \propto n^\alpha$ onde n são tamanhos de janela diferentes e $F(n)$ é a flutuação [49]. Como explicado na metodologia, o expoente de escala α , é calculado como a inclinação de uma linha reta ajustada ao gráfico log-log

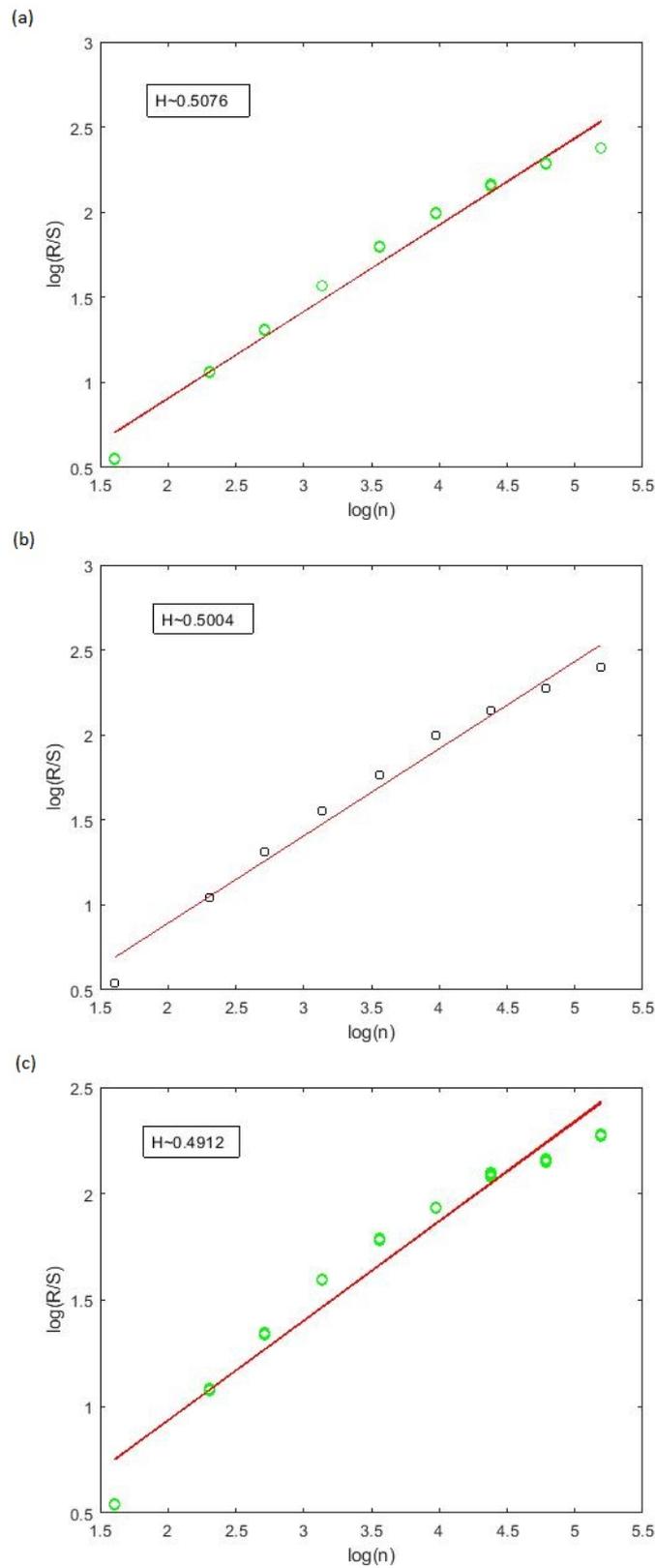


Figura 5.4: Gráficos R/S , $\log(R/S)$ vs. $\log(n)$ usando método R/S para o cálculo do índice de Hurst do retorno para (a) $\eta = 0.0$ e $\delta = 0$, (b) $\eta = 0.0$ e $\delta = 0.25$ e (c) $\eta = 1.0$ e $\delta = 0.25$ respectivamente. Usamos $\gamma = 1.0$ e $\kappa = 1.0$ em todos os casos.

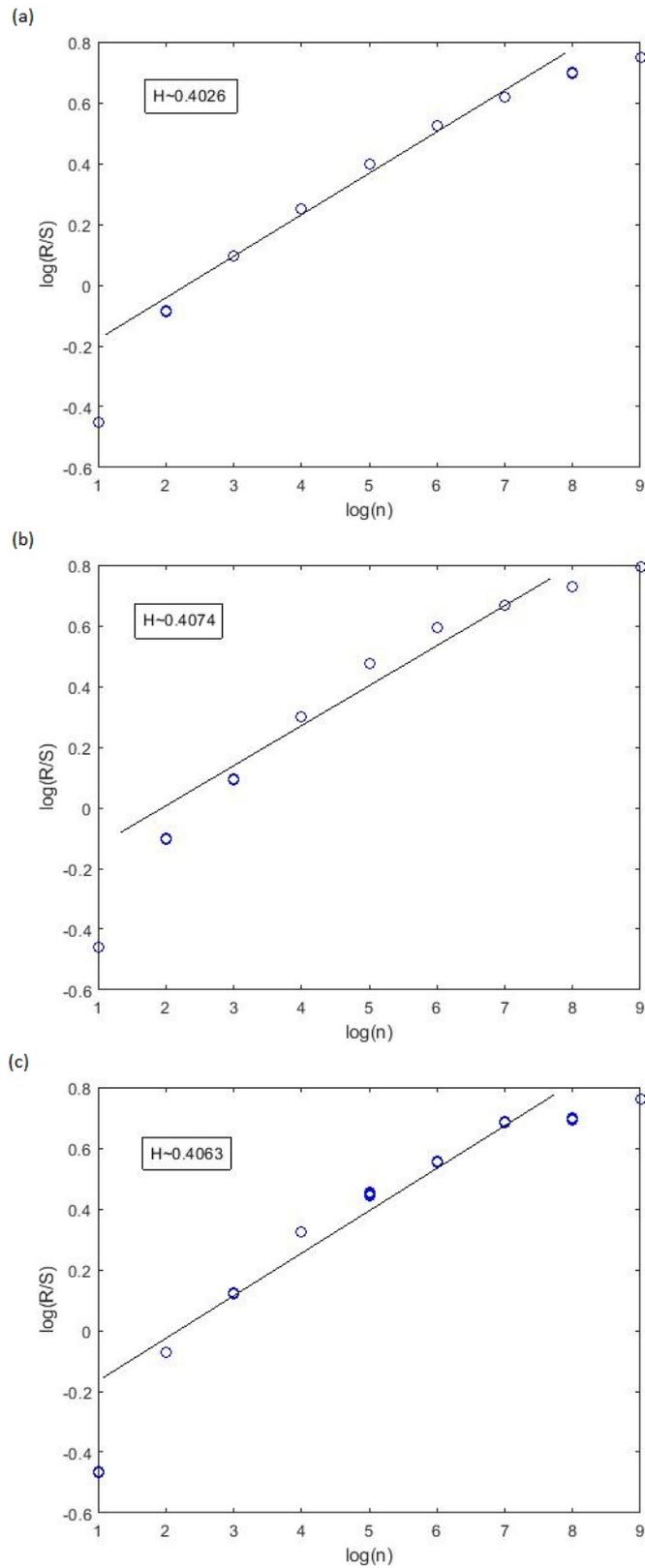


Figura 5.5: Gráficos usando método R/S , $\log(R/S)$ vs. $\log(n)$ para cálculo do índice de Hurst da volatilidade, para modelo com (a) $\eta = 0.0$ $\delta = 0$, (b) $\eta = 0$ e $\delta = 0.25$ e (c) $\eta = 1.0$ e $\delta = 0.25$. Também usamos $\kappa = 1.0$ e $\gamma = 1.0$.

$\log(F(n))$ versus $\log(n)$. O ajuste foi obtido pelo método dos mínimos quadrados.

Este expoente é uma generalização do expoente de Hurst, dessa forma, o deslocamento esperado em uma caminhada aleatória não correlacionada de comprimento N cresce com \sqrt{N} . Um expoente de $\frac{1}{2}$ corresponderia a ruído branco não correlacionado.

Quando o expoente está entre 0 e 1 e diferente de $\frac{1}{2}$, o resultado é o movimento Browniano fracionário [96], com o valor preciso dando informação sobre as auto-correlações da série. Para os retornos, encontramos um expoente $\alpha \approx 0.48$, próximo ao valor do índice de Hurst obtido usando o método R/S .

No entanto, para a volatilidade, obtivemos valores maiores que aquele obtido usando a análise R/S próximos à 0.6 conforme mostram os gráficos da Fig. 5.7. Contudo, como o método R/S clássico foi raramente adotado nos últimos anos, temos que os resultados obtidos pelo DFA devem ser mais confiáveis e mais próximos da realidade.

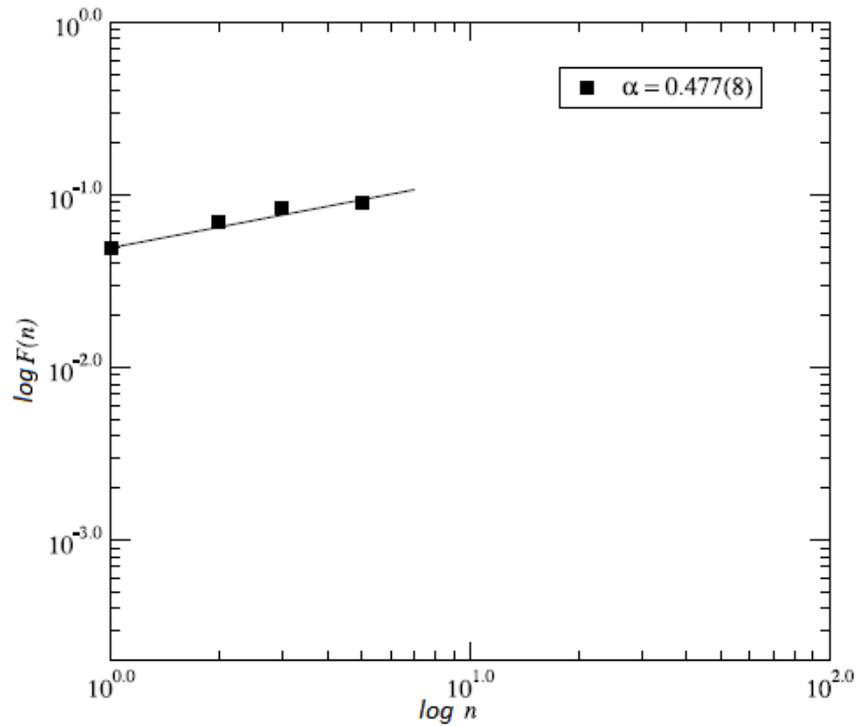


Figura 5.6: Gráfico $\log f(n)$ vs. $\log n$, usando o DFA para determinar expoente de Hurst da série de retornos, com parâmetros $\eta = 0.0$ e $\gamma = 1.0$, $\delta = 0.25$ e $\kappa = 1.0$.

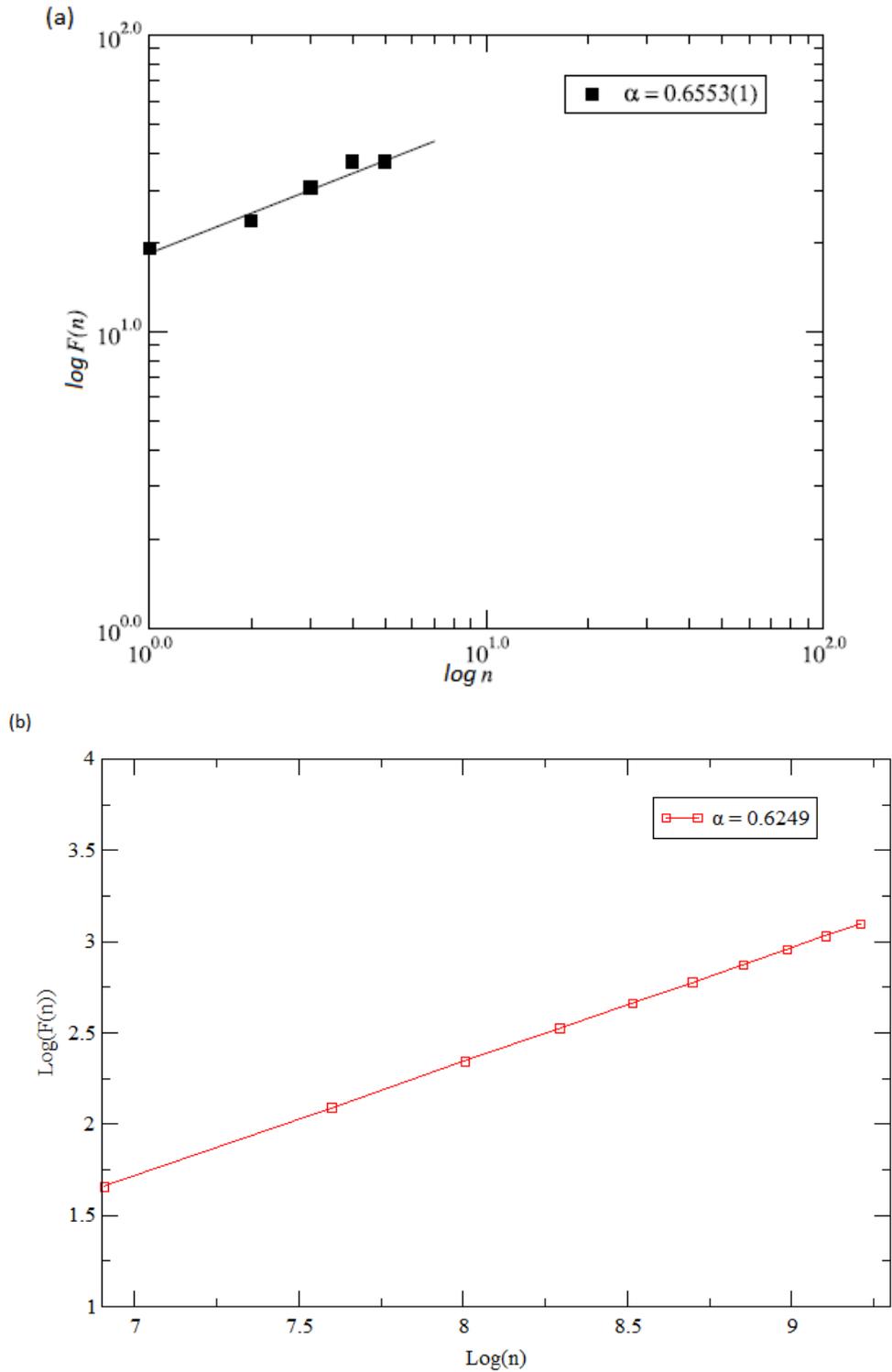


Figura 5.7: Gráficos $\log f(n)$ vs. $\log n$, usando o DFA para determinar expoente de Hurst para a volatilidade com (a) $\eta = 0$, $\gamma = 1$ e $\delta = 0.0$ e (b) $\eta = 0$, $\gamma = 1$ e $\delta = 0.25$. Usamos também $\kappa = 1.0$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em síntese, utilizamos o cálculo estocástico desenvolvido por Itô para estudar a equação diferencial estocástica dada pela Eq. 3.4, como um modelo matemático proposto para a dinâmica de preço do mercado financeiro.

Essa equação é composta por um termo não linear, caracterizado por um potencial quártico de poço duplo, e um ruído ambiente, principalmente o de caráter multiplicativo. A dinâmica microscópica contendo ruído multiplicativo pode ser encontrada em muitos processos dinâmicos e, devido ao seu significado, tem sido objeto de inúmeros estudos nas últimas décadas [22].

Além de introduzir alguns conceitos do cálculo estocástico, foi realizada uma revisão bibliográfica dos assuntos relacionados ao estudo do modelo, tais como conceitos básicos do mercado de ações e teoria de probabilidade, séries temporais, lei de potência, conceitos físicos e estatísticos, além de uma revisão sucinta da história da memória longa.

Com o objetivo principal de verificar se equação 3.4 atende como modelo econômico para a dinâmica de preços, foi verificado o comportamento da curva da distribuição de volatilidades, esperando um decaimento lento seguindo uma lei de potência. O expoente de escala dessa lei, chamado de expoente da cauda pesada, deve apresentar um valor próximo de 3 [18, 19, 20, 33].

Nesse sentido, foi obtido o comportamento da série temporal para a variação de preços $X(t)$, e o expoente da cauda pesada das variações positivas dos retornos. Além disso, cumprimos outro objetivo que consistiu em determinar o expoente de Hurst H , usado como uma medida do termo de memória longa das séries temporais de retornos e volatilidades. Este expoente se relaciona com as autocorrelações das séries temporais e com a taxa em que estas diminuem à medida que a defasagem entre pares de valores aumenta.

Desenvolvemos a análise R/S , que emprega ferramentas estatísticas, estimando o expoente de Hurst como $H \sim 0.5$ para os retornos, e $H \sim 0.4$ para as volatilidades, usando $\gamma = 1.0$. Não houve uma mudança significativa no índice de Hurst estimado, tanto para o ruído aditivo com $\delta = 0$ como para o ruído multiplicativo, tomando $\delta = 0.25$.

No entanto, os resultados usando o método DFA foram diferentes para o índice de Hurst da volatilidade. Porém, como esta metodologia está sendo mais utilizada nos últimos anos e por ser considerada uma técnica mais robusta que o R/S , os resultados obtidos por ela são considerados mais confiáveis.

Para o expoente da distribuição da cauda pesada da volatilidade encontramos valores consideravelmente maiores que 3, o que diverge de muitos resultados empíricos sobre séries temporais financeiras. Desse modo, o modelo estudado pode não descrever bem o comportamento do mercado financeiro como esperado. Entretanto, a lei de potência que descreve esse fato estilizado do mercado financeiro é apenas uma lei empírica e consequentemente não podemos saber com certeza como ele se comporta.

Além disso, podemos indagar se de fato a lei de potência descreve o comportamento de todos os mercados financeiros. Pois, observando comportamento de séries temporais de alguns índices tais como $S\&P500$, $DJIA$ e VIX , pode-se ver que eles obedecem a um comportamento semelhante à série temporal obtida para o modelo da Eq. 3.4 [55], dado na Fig. 5.2. Isso poderia revelar o poder do modelo teórico proposto neste trabalho.

Dessa forma, novos trabalhos empíricos podem fortalecer o poder do modelo proposto. Por exemplo, empregando índices reais de bolsas de valores para comparar com os resultados numéricos obtidos e verificar se a equação estocástica pode descrever bem os comportamentos destes índices. Nesse sentido, resultados experimentais podem dar suporte aos nossos resultados teóricos. Em relação aos mercados financeiros reais e aos comportamentos de preços que não são apenas produzidos por uma equação estocástica, podemos considerar a utilização de uma série de preços dos ativos reais, como ações, dos mercados financeiros reais para fazer alguns trabalhos empíricos para identificar o modelo teórico proposto nesta pesquisa.

De maneira geral, o potencial quártico que compõe o modelo, tem um mínimo em $x = x^*$, que é positivo. O incremento de preço ΔX fica oscilando em torno de um valor positivo, o que significa que há uma tendência não zero, não baseada no crescimento real, mas inteiramente induzida pelo fato de que um aumento de preço motiva mais pessoas a comprar, provocando a chamada bolha especulativa [58].

Geralmente, o preço de um ativo oscila entre valores mínimos e máximos representados graficamente e respectivamente nivelados em linhas de suporte e resistência [111]. A bolha especulativa pode ser um dos fatores que faz o preço se valorizar tanto a ponto de romper a linha resistência de forma que se o preço cair bruscamente, então poderá atingir um novo valor mínimo. Assim, conforme consta em [58], quanto mais forte o potencial com o termo κ na Eq. 3.4 puxando o preço de volta para o valor fundamental, mais curta deve ser a duração dessas bolhas. Nesse sentido, nossa proposta é interessante porque associa o modelo à ruptura das linhas de tendência e considera mais de um preço mínimo estável.

Na literatura existem alguns trabalhos para o estudo da dinâmica de preços, como o preço da energia [118, 119, 120]. Entretanto, até onde pesquisamos não encontramos proposta alguma como o modelo do tipo estudado aqui. Dessa maneira, esperamos que este estudo motive outras pesquisas relacionadas ao assunto. Ou que pelo menos colabore com a discussão sobre processos estocásticos com memória a longo prazo e o uso da equação de Langevin, que inspirou este trabalho, na modelagem de processos como séries temporais financeiras.

Como perspectiva para os próximos trabalhos, pretendemos aprimorar o modelo estudado. Ajustando parâmetros, verificando outros tipos de potencial e acrescentar alguma filtragem para evitar correlações de curto alcance, uma vez que, obtendo um valor de H tão próximo de 0.5 dentro do intervalo de confiança, seria difícil distinguir a detecção de memória a longo prazo [113]. Por isso, seria interessante também, pesquisar e testar outras técnicas diferentes da análise R/S clássica e do DFA padrão para estimar o expoente de Hurst do modelo ajustado.

REFERÊNCIAS

- 1 TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. de. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35*. 2. ed. São Paulo: EdUSP, 2014.
- 2 GOPIKRISHNAN, P. et al. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical Review E*, APS, v. 60, n. 5, p. 5305, 1999.
- 3 MENG, H. et al. Effects of long memory in the order submission process on the properties of recurrence intervals of large price fluctuations. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 98, n. 3, p. 38003, 2012.
- 4 SORNETTE, D. *Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2004.
- 5 ASSENZA, T.; GATTI, D. D.; GRAZZINI, J. Emergent dynamics of a macroeconomic agent based model with capital and credit. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, v. 50, p. 5–28, 2015.
- 6 DIKS, C.; WANG, J. Can a stochastic cusp catastrophe model explain housing market crashes? *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, v. 69, p. 68–88, 2016.
- 7 VELD, D. in't. Adverse effects of leverage and short-selling constraints in a financial market model with heterogeneous agents. *JOURNAL OF ECONOMIC DYNAMICS & CONTROL*, ELSEVIER SCIENCE BV PO BOX 211, 1000 AE AMSTERDAM, NETHERLANDS, v. 69, p. 45–67, 2016.
- 8 MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. *An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. 4. ed. Cambridge, New York: Cambridge university press, 2007.
- 9 BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.
- 10 PEREIMA, J. B. A consolidação do mercado de capitais brasileiro. *Revista Economia & Tecnologia*, v. 11, n. 3, out/dez.

- 11 SANT'ANNA, A. A. Mercado de capitais: evolução recente e financiamento das empresas brasileiras no período 2004-2006. *XI Jornadas de Economia Crítica*, 2008.
- 12 SZABOLCS, M.; DOYNE, F. J. An empirical behavioral model of liquidity and volatility. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 200–234, 2008.
- 13 XAVIER, P. O.; ATMAN, A.; MAGALHÃES, A. B. de. Equation-based model for the stock market. *Physical Review E*, APS, v. 96, n. 3, p. 032305, 2017.
- 14 JR, H. do N. et al. Why stock markets crash: the origin of fat tailed distributions of returns. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, n. 3, p. 341–346, 2007.
- 15 MANTEGNA, R. N. Lévy walks and enhanced diffusion in milan stock exchange. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 179, n. 2, p. 232–242, 1991.
- 16 LUX, T.; MARCHESI, M. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 397, n. 6719, p. 498, 1999.
- 17 PAGAN, A. The econometrics of financial markets. *Journal of empirical finance*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 15–102, 1996.
- 18 GOPIKRISHNAN, P. et al. Inverse cubic law for the distribution of stock price variations. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 3, n. 2, p. 139–140, 1998.
- 19 PLEROU, V. et al. Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies. *Physical review e*, APS, v. 60, n. 6, p. 6519, 1999.
- 20 BOTTA, F. et al. Quantifying stock return distributions in financial markets. *PloS one*, Public Library of Science, v. 10, n. 9, p. e0135600, 2015.
- 21 WANG, F. et al. Indication of multiscaling in the volatility return intervals of stock markets. *Physical Review E*, APS, v. 77, n. 1, p. 016109, 2008.

- 22 QUEIROS, S. M. D.; ANTENEODO, C.; TSALLIS, C. Power-law distributions in economics: a nonextensive statistical approach. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. *Noise and Fluctuations in Econophysics and Finance*. [S.l.], 2005. v. 5848, p. 151–165.
- 23 MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, v. 36, n. 4, p. 394–419, 1963.
- 24 FAMA, E. F. Mandelbrot and the stable paretian hypothesis. *The Journal of Business*, v. 36, n. 4, p. 420–429, 1963.
- 25 FAMA, E. F. The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, JSTOR, v. 38, n. 1, p. 34–105, 1965.
- 26 BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. In: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. [S.l.: s.n.], 1900. v. 17, p. 21–86.
- 27 SAMUELSON, P. A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. In: *The World Scientific Handbook of Futures Markets*. [S.l.]: World Scientific, 2016. p. 25–38.
- 28 MALKIEL, B. G.; FAMA, E. F. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970.
- 29 GU, G.-F.; ZHOU, W.-X. Emergence of long memory in stock volatility from a modified mike-farmer model. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 86, n. 4, p. 48002, 2009.
- 30 GU, G.-F.; ZHOU, W.-X. On the probability distribution of stock returns in the mike-farmer model. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 67, n. 4, p. 585–592, 2009.
- 31 LIU, Y. et al. Statistical properties of the volatility of price fluctuations. *Physical review e*, APS, v. 60, n. 2, p. 1390, 1999.

- 32 ZHOU, J. et al. Computational experiments successfully predict the emergence of autocorrelations in ultra-high-frequency stock returns. *Computational Economics*, Springer, v. 50, n. 4, p. 579–594, 2017.
- 33 GOPIKRISHNAN, P. et al. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical Review E*, APS, v. 60, n. 5, p. 5305, 1999.
- 34 BAILLIE, R. T. Long memory processes and fractional integration in econometrics. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 73, n. 1, p. 5–59, 1996.
- 35 HURST, H.; BLACK, R.; SIMAIKA, Y. Long-term storage, an experimental study (pp. xiv, 145 p.). *London: Constable*, 1965.
- 36 HURST, H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. *Trans. Amer. Soc. Civil Eng.*, v. 116, p. 770–799, 1951.
- 37 HURST, H. E. A suggested statistical model of some time series which occur in nature. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 180, n. 4584, p. 494, 1957.
- 38 PETERS, E. E. *Chaos and order in the capital markets: a new view of cycles, prices, and market volatility*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1996.
- 39 MANDELBROT, B. B.; WALLIS, J. R. Noah, joseph, and operational hydrology. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 4, n. 5, p. 909–918, 1968.
- 40 MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. *Análise de Series Temporais*. [S.l.]: BLUCHER., 2006.
- 41 SEATER, J. J. World temperature-trend uncertainties and their implications for economic policy. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 11, n. 3, p. 265–277, 1993.
- 42 BERAN, J. *Statistics for long-memory processes* chapman & hall. *New York*, 1994.
- 43 FELLER, W. The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, p. 427–432, 1951.
- 44 FEDER, J. *Fractals*. Plenum, 1989.

- 45 GRAVES, T. et al. A brief history of long memory: Hurst, mandelbrot and the road to arfima, 1951–1980. *Entropy*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 19, n. 9, p. 437, 2017.
- 46 MCLEOD, A. I.; HIPEL, K. W. Preservation of the rescaled adjusted range: 1. a reassessment of the hurst phenomenon. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 14, n. 3, p. 491–508, 1978.
- 47 CAJUEIRO, D. O.; TABAK, B. M. The hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 336, n. 3-4, p. 521–537, 2004.
- 48 MOREIRA, J.; SILVA, J. K. L. da; KAMPHORST, S. O. On the fractal dimension of self-affine profiles. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 27, n. 24, p. 8079, 1994.
- 49 PENG, C.-K. et al. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP, v. 5, n. 1, p. 82–87, 1995.
- 50 HAUSDORFF, J. M.; PENG, C.-K. Multiscaled randomness: A possible source of $1/f$ noise in biology. *Physical review E*, APS, v. 54, n. 2, p. 2154, 1996.
- 51 SZNAJD-WERON, K.; WERON, R. A simple model of price formation. *International Journal of Modern Physics C*, World Scientific, v. 13, n. 01, p. 115–123, 2002.
- 52 SHREVE, S. E. *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004.
- 53 GARDINER, C. *Stochastic methods: a handbook for the natural and social sciences 4th ed.(2009)*. [S.l.]: Springer.
- 54 OKSENDAL, B. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

- 55 LIMA, L. S.; SANTOS, G. K. C. Stochastic process with multiplicative structure for the dynamic behavior of the financial market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 512, p. 222–229, 2018.
- 56 LIMA, L.; MIRANDA, L. Price dynamics of the financial markets using the stochastic differential equation for a potential double well. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 490, p. 828–833, 2018.
- 57 LIMA, L. S. Nonlinear stochastic equation within an itô prescription for modelling of financial market. *Entropy*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 21, n. 5, p. 530, 2019.
- 58 BOUCHAUD, J.-P.; CONT, R. A langevin approach to stock market fluctuations and crashes. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 6, n. 4, p. 543–550, 1998.
- 59 KING, R. R. et al. The robustness of bubbles and crashes in experimental stock markets. *Nonlinear dynamics and evolutionary economics*, Oxford University Press Oxford, p. 183–200, 1993.
- 60 LIMA, L.; OLIVEIRA, S.; ABEILICE, A. Modelling based in stochastic non-linear differential equation for price dynamics. *Pioneer J. Math. Math. Sci*, v. 23, p. 93–103, 2018.
- 61 FISCHER, H. P. Mathematical modeling of complex biological systems: from parts lists to understanding systems behavior. *Alcohol Research & Health*, National Institute on Alcohol Abuse and Alcoholism, v. 31, n. 1, p. 49, 2008.
- 62 HULL, J. C. *Options futures and other derivatives*. [S.l.]: Pearson Education India, 2003.
- 63 KEHINDE, S. J. Share price movement and the white-noise hypothesis: the algebraic approach. *International Journal of Business & Information Technology*, v. 2, n. 1, 2012.
- 64 FONTES, R. *Construção de um índice agrícola para o mercado derivativo de commodities agrícolas na BM&F. 2006. 147 p.* Tese (Doutorado) — Tese (Doutorado em Administração)-Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais, 2006.

- 65 LEITE, H. d. P.; SANVICENTE, A. Z. Índice bovespa: um padrão para os investimentos brasileiros. Sao Paulo. Atlas, 1995.
- 66 CLAUSET, A.; SHALIZI, C. R.; NEWMAN, M. E. Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, SIAM, v. 51, n. 4, p. 661–703, 2009.
- 67 GUERRIERO, V. Power law distribution: Method of multi-scale inferential statistics. *Journal of Modern Mathematics Frontier*, Science and Engineering Publishing Company, v. 1, n. 1, p. 21–28, 2012.
- 68 LIMA, L. Modeling of the financial market using the two-dimensional anisotropic ising model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 482, p. 544–551, 2017.
- 69 ZHANG, X. et al. Are price limits effective? an examination of an artificial stock market. *PloS one*, Public Library of Science, v. 11, n. 8, p. e0160406, 2016.
- 70 GONÇALVES, B. A.; COELHO, E. K.; FARIA, A. A. Análise da complexidade do mercado de ações através de um modelo autômoto celular.
- 71 ZHOU, W.-X.; SORNETTE, D. Self-organizing ising model of financial markets. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 55, n. 2, p. 175–181, 2007.
- 72 CALLEN, E.; SHAPERO, D. A theory of social imitation. *Physics Today*, v. 27, p. 23, 1974.
- 73 MONTROLL, E. W.; BADGER, W. W. *Introduction to quantitative aspects of social phenomena*. [S.l.]: Gordon and Breach, 1974.
- 74 ORLÉAN, A. Bayesian interactions and collective dynamics of opinion: Herd behavior and mimetic contagion. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Elsevier, v. 28, n. 2, p. 257–274, 1995.
- 75 SECURATO, J. R. *Decisões financeiras em condições de risco*. 1993.
- 76 SILVA, M. d. S. et al. *Estatística para os cursos de economia, administração e ciências contábeis*. vol 1 e 2. São Paulo: Editora Atlas SA, 1997.

- 77 MORETTIN, L. G. *Estatística básica: probabilidade e inferência: volume único*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2010.
- 78 GALL, J.-F. L. *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*. [S.l.]: Springer, 2016.
- 79 CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Statistical inference*. [S.l.]: Duxbury Pacific Grove, CA, 2002.
- 80 WILCOX, R. R. *Basic statistics: understanding conventional methods and modern insights*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2009.
- 81 AL-SALEH, M. F.; YOUSIF, A. E. Properties of the standard deviation that are rarely mentioned in classrooms. *Austrian Journal of Statistics*, v. 38, n. 3, p. 193–202, 2009.
- 82 GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. *Econometria Básica-5*. [S.l.]: Amgh Editora, 2011.
- 83 SCHERER, C. *Métodos computacionais da física*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2005.
- 84 ROMERO, M. *Introducción Sucinta a la Matemática Industrial: Teoría, técnica y práctica*. [S.l.]: Marcos Romero, 2017. ISBN 9781973355021.
- 85 ALLEN, E. *Modeling with Itô stochastic differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- 86 HARRISON, J. M.; KREPS, D. M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, Citeseer, v. 20, n. 3, p. 381–408, 1979.
- 87 VILLE, J. Etude critique de la notion de collectif. *Bull. Amer. Math. Soc*, v. 45, n. 11, p. 824, 1939.
- 88 WOOLDRIDGE, J. M. *Introductory econometrics: A modern approach*. [S.l.]: Nelson Education, 2016.
- 89 ARMSTRONG, J. S. *Principles of forecasting: a handbook for researchers and practitioners*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.

- 90 SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. *Time series analysis and its applications: with R examples*. [S.l.]: Springer, 2017.
- 91 MENDENHALL, W.; SINCICH, T.; BOUDREAU, N. S. *A second course in statistics: regression analysis*. [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1996.
- 92 BOUCHAUD, J.-P.; POTTERS, M. *Théorie des risques financiers*. [S.l.: s.n.].
- 93 BAVIERA, R. et al. Efficiency in foreign exchange markets. *arXiv preprint cond-mat/9901225*, 1999.
- 94 GRABBE, J. Chaos and fractals in financial markets: The correlation integral and the correlation dimension. *The Laissez Faire Electronic Times*, v. 2, n. 2, 2003.
- 95 BRESLIN, M.; BELWARD, J. Fractal dimensions for rainfall time series. *Mathematics and computers in simulation*, Elsevier, v. 48, n. 4-6, p. 437–446, 1999.
- 96 MANDELROT, B. B.; NESS, J. W. V. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*, SIAM, v. 10, n. 4, p. 422–437, 1968.
- 97 APPLEBAUM, D. Lévy processes—from probability to finance and quantum groups. *Notices of the AMS*, v. 51, n. 11, p. 1336–1347, 2004.
- 98 BROWN, R. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The Philosophical Magazine*, Taylor & Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828.
- 99 NELSON, E. *Dynamical theories of Brownian motion*. 2. ed. [S.l.]: Princeton university press, 1967.
- 100 STACHEL, J. O ano miraculoso de einstein: cinco artigos que mudaram a face da física. *Tradução: Alexandre Carlos Tort. Rio de Janeiro: Editora UFRJ*, 2001.
- 101 EINSTEIN, A. et al. On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat. *Annalen der physik*, v. 17, p. 549–560, 1905.

- 102 SALINAS, S. R. Einstein e a teoria do movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 27, n. 2, p. 263–269, 2005.
- 103 WIENER, N. Differential-space. *Journal of Mathematics and Physics*, Wiley Online Library, v. 2, n. 1-4, p. 131–174, 1923.
- 104 WIENER, N. Un problème de probabilité dénombrables. *Bulletin de la Société mathématique de France*, v. 52, p. 569–578, 1924.
- 105 RAYLEIGH, L. The problem of the random walk. *Nature*, v. 72, n. 1866, p. 318, 1905.
- 106 HUYNH, H. T.; SOUMARE, I. et al. *Stochastic simulation and applications in finance with MATLAB programs*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- 107 CHARNES, J. *Financial Modeling with Crystal Ball and Excel, + Website*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- 108 MAO, X. *Stochastic differential equations and applications*. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- 109 ARNOLD, L. *Stochastic differential equations: theory and applications*. [S.l.], 1974.
- 110 DONG, Q. et al. Exact solutions of a quartic potential. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 34, n. 26, p. 1950208, 2019.
- 111 II, C. D. K.; DAHLQUIST, J. A. *Technical analysis: the complete resource for financial market technicians*. [S.l.]: FT press, 2010.
- 112 MANDELBROT, B. B.; WALLIS, J. R. Computer experiments with fractional gaussian noises: Part 1, averages and variances. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 5, n. 1, p. 228–241, 1969.
- 113 SOUZA, S. R.; TABAK, B. M.; CAJUEIRO, D. O. Investigação da memória de longo prazo na taxa de câmbio no brasil. *Revista Brasileira de Economia*, SciELO Brasil, v. 60, n. 2, p. 193–209, 2006.

- 114 LO, A. W. Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, v. 59, n. 5, p. 1279–1313, 1991.
- 115 MANDELBROT, B. Statistical methodology for nonperiodic cycles: from the covariance to r/s analysis. In: *Annals of Economic and Social Measurement, Volume 1, Number 3*. [S.l.]: NBER, 1972. p. 259–290.
- 116 MANDELBROT, B. B. Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, Springer, v. 31, n. 4, p. 271–285, 1975.
- 117 BULDYREV, S. et al. Long-range correlation properties of coding and noncoding dna sequences: Genbank analysis. *Physical Review E*, APS, v. 51, n. 5, p. 5084, 1995.
- 118 BENTH, F. E.; BENTH, J. S.; KOEKEBAKKER, S. *Stochastic modelling of electricity and related markets*. [S.l.]: World Scientific, 2008.
- 119 GALLEGO, G.; RYZIN, G. V. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons. *Management science*, INFORMS, v. 40, n. 8, p. 999–1020, 1994.
- 120 RUSAKOV, O.; LASKIN, M. A stochastic model for stationary dynamics of prices in real estate markets. a case of random intensity for poisson moments of prices changes. In: AIP PUBLISHING LLC. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2017. v. 1836, n. 1, p. 020087.