

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MARÍLIA CARVALHO SALGADO PENIDO SALLES

AVALIAÇÃO DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM EM PÓRTICOS SEMIRRÍGIDOS DE
AÇO UTILIZANDO MÉTODO APROXIMADO E ANÁLISE RIGOROSA

BELO HORIZONTE

2020

MARÍLIA CARVALHO SALGADO PENIDO SALLES

**AVALIAÇÃO DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM EM PÓRTICOS SEMIRRÍGIDOS DE
AÇO UTILIZANDO MÉTODO APROXIMADO E ANÁLISE RIGOROSA**

**Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil do
Centro Federal de Educação Tecnológica de
Minas Gerais como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Engenharia
Civil.**

Orientadora: Profa. Dra. Renata Gomes Lanna da Silva

BELO HORIZONTE

2020

S168a Salles, Marília Carvalho Salgado Penido
Avaliação dos efeitos de 2ª ordem em pórticos semirrígidos de aço utilizando método aproximado e análise rigorosa / Marília Carvalho Salgado Penido Salles. – 2020.
119 f. : il., gráfs, tabs.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Civil.
Orientadora: Renata Gomes Lanna da Silva.
Bibliografia: f. 117-119.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Civil

1. Construção de aço – Modelos – Teses. 2. Juntas (Engenharia) – Teses. 3. Quadros estruturais – Teses. 4. Pórticos estruturais – Teses.
I. Silva, Renata Gomes Lanna da. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Departamento de Engenharia Civil.
III. Título.

CDD 624.1821

MARÍLIA CARVALHO SALGADO PENIDO SALLES

**AVALIAÇÃO DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM EM PÓRTICOS SEMIRRÍGIDOS DE
AÇO UTILIZANDO MÉTODO APROXIMADO E ANÁLISE RIGOROSA**

**Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil do
Centro Federal de Educação Tecnológica de
Minas Gerais como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Engenharia
Civil.**

BANCA EXAMINADORA

**PROFA. DRA. RENATA GOMES LANNA DA SILVA –
ORIENTADORA**

PROF. DR. LINEKER MAX GOULART COELHO (CEFET-MG)

PROF. DR. ARMANDO CESAR CAMPOS LAVALL (UFMG)

Belo Horizonte, 18 de dezembro de 2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por não ter me permitido perder a força e a persistência.

Agradeço à minha orientadora Prof. Dra. Renata Gomes Lanna da Silva por todos ensinamentos compartilhados, incentivo, apoio e paciência, fundamentais para a conclusão desta pesquisa.

Agradeço à minha querida família, em especial aos meus pais Charles e Neusa, pelos princípios de vida ensinados, e aos meus irmãos, Rodolfo e Rodrigo, pelas palavras de apoio, incentivo e por compreenderem os momentos em que estive ausente. Vocês são minha maior fonte de inspiração. Ao meu marido Denis pelo seu apoio, dedicação, compreensão e respeito às minhas escolhas. À minha sogra, Mary Carmen, pela ajuda generosa nas tarefas do dia a dia, para que eu pudesse me dedicar ainda mais à pesquisa.

Aos meus amigos, em especial aos amigos da pós-graduação Maíra, Bruno e Fernanda, pela convivência diária, palavras de carinho e companheirismo durante esse período. Ao colega Harley, pelo apoio.

Ao CEFET-MG e ao PPGEC, todos os professores e funcionários do departamento.

RESUMO

As normas atuais de dimensionamento de estruturas em aço orientam a consideração dos efeitos de segunda ordem na análise estrutural, pois esses efeitos podem causar variações significativas na distribuição dos esforços internos, nos valores de deslocamentos nodais e na estabilidade da estrutura. Diversas normas apresentam procedimentos de análise aproximados que são capazes de considerar os efeitos de segunda ordem, tal como o Método de Amplificação dos Momentos, conhecido como método B_1-B_2 , uma vez que a consideração mais precisa é demorada e complexa. As ligações entre vigas e pilares desempenham uma função importante no comportamento das estruturas de aço, visto que a resposta global das estruturas é influenciada pela flexibilidade dessas ligações. Em geral, na análise estrutural, considera-se as ligações viga-pilar com comportamento idealizado, totalmente rígidas ou totalmente rotuladas, o que pode resultar em valores imprecisos das respostas estruturais, uma vez que muitas ligações exibem comportamento não linear intermediário, denominado como semirrígido. A consideração de ligações semirrígidas na modelagem de pórticos planos de aço é relevante, pois reflete de forma mais fidedigna o comportamento da estrutura e permite, assim, uma análise elástica de 2ª ordem mais realista e confiável. Neste contexto, este trabalho visa avaliar a influência do comportamento da ligação entre viga e pilar na análise estrutural elástica considerando os efeitos de segunda ordem, pelo método aproximado B_1-B_2 e pelo método rigoroso. Para isso, foram determinados os momentos fletores solicitantes nos pilares e deslocamentos nodais horizontais de pórticos planos, por meio do programa PPLANLEP, a partir de uma análise elástica de 2ª ordem, que insere o comportamento não linear das ligações por meio de trechos lineares da curva $M-\theta_r$ para as análises rigorosas, e as rigidezes secantes k_{i0} e k_b para as análises aproximadas. As análises comparativas realizadas demonstraram que o método aproximado B_1-B_2 considerando a influência das ligações apresentou boa correlação com o método rigoroso em 2ª ordem elástica, quando comparados os valores de momentos fletores e de deslocamentos laterais.

Palavras-Chave: Efeitos de 2ª ordem elástica. Ligações semirrígidas. Método aproximado B_1-B_2 . Método de análise rigorosa. Pórticos planos de aço.

ABSTRACT

The current norms for design of steel structures guide the consideration of second-order effects in structural analysis, as these effects can cause significant variations in the distribution of internal forces, in the values of nodal displacements as well as in the structure stability. Several standards have presented approximate analysis procedures that are capable of considering second-order effects, such as the B₁-B₂ method, since the most precise consideration is time-consuming and complex. The connections between beam and columns play an important role in the behavior of steel structures, since the overall structural response is influenced by the flexibility of these connections. In general, beam-column connections are considered with idealized behavior in structural analysis, either fully rigid or fully pinned, which can result in inaccurate structural responses, because many connections exhibit an intermediate nonlinear behavior, called semi-rigid. The consideration of semi-rigid connections in the modeling of steel plane frames is relevant, as it reflects the behavior of the structure in a more reliable way and thus allows a second-order elastic analysis closer to the real behavior of the structures. In this context, this work aims to evaluate the influence of the beam-column connection behavior on the elastic structural analysis considering the second-order effects, by applying the approximate B₁-B₂ method and the rigorous method. For this purpose, the requesting forces and horizontal nodal displacements of several studied frames were determined, using the PPLANLEP program, from a 2nd order elastic analysis, which takes into account the nonlinear connection behavior by applying multilinearized M-θ_r curves for rigorous analyzes, and secant stiffnesses k_{i0} e k_b for approximate analyzes. The comparative analyzes demonstrated that the approximate B₁-B₂ method including the influence of the connections presented a good correlation with the rigorous method in 2nd elastic order.

Keywords: Steel plane frames. Semi-rigid connections. Second-order effects. Approximate B₁-B₂ method. Nonlinear elastic analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Rotação relativa de uma ligação Viga-Pilar	24
Figura 2 - Curvas $M-\theta$ para diversos tipos de ligações	24
Figura 3 - Curvas $M-\theta$ para modelo de três parâmetros.....	25
Figura 4 - Tipos de rigidez de uma ligação.....	26
Figura 5 - Casos de Flambagem em pilares isolados	28
Figura 6 - Pórtico indeslocável	29
Figura 7 – Curva carga crítica x restrições de extremidade	32
Figura 8 - Curva fator do comprimento efetivo x restrições de extremidade	32
Figura 9 – Pilar indeslocável	33
Figura 10 – Subestrutura de pórtico plano indeslocável.....	34
Figura 11 – Pórtico plano indeslocável.....	36
Figura 12 – Pilar com molas rotacional e translacional nas extremidades	37
Figura 13 - Subestrutura de um pórtico plano deslocável	38
Figura 14 - Pórtico plano deslocável	40
Figura 15 – Gráfico de Alinhamento – Pórtico indeslocável	41
Figura 16 – Gráfico de Alinhamento – Pórtico deslocável.....	42
Figura 17 – Viga com extremidades semirrígidas	44
Figura 18 - Tipos de rigidez de uma ligação.....	47
Figura 19 - Efeito global de 2ª ordem (efeito $P-\Delta$).....	49
Figura 20 - Efeito local de 2ª ordem (efeito $P-\delta$)	50
Figura 21- Comportamento força x deslocamento dos vários tipos de análise	51
Figura 22 - Efeito local de 2ª ordem (efeito $P-\delta$)	53
Figura 23 – Diagramas de momentos fletores de uma barra submetida a força de compressão e momentos desiguais nas extremidades.....	54
Figura 24 – Diagramas de momentos fletores de uma barra submetida a uma força de compressão e carregamento uniformemente distribuído.	55
Figura 25 – Barra submetida a uma força de compressão e carregamento uniformemente distribuído.....	56
Figura 26 – Forças atuantes sobre pilares de um andar de um pórtico de múltiplos andares – Análise do equilíbrio em teoria de 1ª ordem.....	58
Figura 27 – Forças atuantes sobre pilares de um andar de um pórtico de múltiplos andares – Análise do equilíbrio em teoria de 2ª ordem.....	59

Figura 28 - Método Aproximado – Estrutura “nt” e “lt”	61
Figura 29 – Pórtico com andares desalinhados	63
Figura 30 - Configurações das fibras do material.....	65
Figura 31 - Comportamento de uma fibra: (a) comportamento elastoplástico e (b) comportamento elástico perfeitamente plástico	66
Figura 32 - Elemento de pórtico plano em sua configuração original e em sua configuração corrigida	68
Figura 33 - Elemento diferencial de barra reta	70
Figura 34 - Pórtico semirrígido de um andar e um vão	77
Figura 35 - Comportamento $M-\theta_r$ das ligações: (a) $M_u=M_p$ e (b) $M_u=M_p/2$	79
Figura 36 - Comportamento $M-\theta_r$ das ligações e linhas de viga: (a) $M_u=M_p$ e (b) $M_u=M_p/2$	81
Figura 37 - Comparação do fator do comprimento efetivo k_2 para ligações com $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$	83
Figura 38 - Caso 1 - Momento fletor x $\log k_i$ para método aproximado e rigoroso, para $M_u=M_p$	90
Figura 39 - Caso 1 - Momento fletor x $\log k_i$ para método aproximado e rigoroso, para $M_u=M_p/2$	90
Figura 40 - Caso 2 - Momento fletor do pilar da direita x $\log k_i$ para método aproximado e rigoroso, para $M_u=M_p$	96
Figura 41 - Caso 2 - Momento fletor do pilar da direita x $\log k_i$ para método aproximado e rigoroso, para $M_u=M_p/2$	97
Figura 42 - Pórtico semirrígido de dois andares e um vão	98
Figura 43 - Comportamento $M-\theta_r$ das ligações.....	100
Figura 44 - Comportamento $M-\theta_r$ das ligações e linhas de viga.....	101
Figura 45 – Pórtico de dois andares e um vão	105
Figura 46 – Comportamento e classificação das ligações: (a) viga inferior, (b) viga superior	106
Figura 47 – Comportamento das ligações pelo modelo multilinear: (a) viga inferior, (b) viga superior	107
Figura 48 – Estado de rigidez das ligações semirrígidas na análise elástica em 2ª ordem rigorosa, para 100% do carregamento	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Casos de Flambagem	29
Tabela 2 – Dimensões e propriedades dos perfis utilizados	78
Tabela 3 – Parâmetro de rigidez adimensional (ρ) e rigidez inicial das ligações (k_i).79	
Tabela 3 – Valores de k_b para ligações com $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$	81
Tabela 5 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_1 para a estrutura “ nt ”.....	82
Tabela 6 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_2 para a estrutura “ lt ”, para $M_u=M_p$	82
Tabela 7 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_2 para a estrutura “ lt ” para $M_u=M_p/2$	83
Tabela 8 – Caso 1 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=0,5$	85
Tabela 9 – Caso 1- Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=1,0$ Fonte: Elaborado pela Autora (2020)	85
Tabela 10 – Caso 1 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=1,5$	86
Tabela 11 – Caso 1 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=2,0$	86
Tabela 12 - Caso 1 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=0,5$	87
Tabela 13 - Caso 1 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=1,0$	88
Tabela 14 - Caso 1 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=1,5$	88
Tabela 15 - Caso 1 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=2,0$	89
Tabela 16 - Caso 2 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=0,5$	91
Tabela 17 - Caso 2 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=1,0$	92
Tabela 18 - Caso 2 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=1,5$	93
Tabela 19 - Caso 2 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=2,0$	93
Tabela 20 - Caso 2 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=0,5$	94
Tabela 21 - Caso 2 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=1,0$	94
Tabela 22 - Caso 2 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=1,5$	95

Tabela 23 - Caso 2 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=2,0$	95
Tabela 24 – Dimensões e propriedades dos perfis utilizados	98
Tabela 25 – Parâmetros das ligações semirrígidas.....	99
Tabela 26 – Valores de k_{i0} e k_b para ligações	100
Tabela 27 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_1 para a estrutura “ nt ”.....	102
Tabela 28 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_2 para a estrutura “ lt ”.....	102
Tabela 29 – Ligações consideradas em cada andar de cada pórtico.....	102
Tabela 30 – Deslocamentos horizontais no topo dos pilares	104
Tabela 31 - Momentos fletores no topo dos pilares.....	104
Tabela 32 – Parâmetros de cálculo das ligações para o modelo de três parâmetros	107
Tabela 33 – Parâmetros das ligações para o modelo multilinear	108
Tabela 34 – Valores de k_{i0} e k_b para ligações	109
Tabela 35 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_1 para a estrutura “ nt ”.....	109
Tabela 36 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_2 para a estrutura “ lt ”	110
Tabela 37 – Deslocamentos horizontais no topo dos pilares	111
Tabela 38 - Momentos fletores no topo dos pilares.....	112

LISTA DE SÍMBOLOS

A_g	Área bruta da seção transversal da barra
A_r	Área da seção transversal de uma fibra na configuração de referência ou inicial
A_c	Área da seção transversal de uma fibra na configuração corrigida ou deformada
b_f	Largura da mesa do perfil "I"
B_1	Coeficiente de amplificação da barra para consideração do efeito local de 2ª ordem, aplicado às estruturas nt
B_2	Coeficiente de amplificação da barra para consideração do efeito global de 2ª ordem, aplicado às estruturas lt
C_m	Coeficiente de equivalência de momentos, baseado em análise de 1ª ordem, com os nós da estrutura impedidos de se deslocar lateralmente, dependente da curvatura do pilar causada pelos momentos aplicados e das restrições de extremidades da barra no plano de flexão considerado.
d	Altura total do perfil "I"
d^*	Relação entre deslocamento aproximado e deslocamento rigoroso em análise de 2ª ordem
D	Módulo de rigidez do material da fibra
D^e	Módulo de rigidez elástico da fibra
D^{ep}	Módulo de rigidez elastoplástico da fibra
E	Módulo de elasticidade longitudinal do aço
f_y	Tensão de escoamento do aço
G, G_A, G_B	Resistência rotacional elástica das extremidades da barra, fator de rigidez relativa das vigas e pilares de determinado nó
H	Carregamento horizontal
$\sum H_{sd}$	Somatório de todas as forças horizontais de cálculo que produzem D_{oh} no andar considerado.
l_r	Comprimento longitudinal de uma fibra na configuração inicial
l_c	Comprimento longitudinal de uma fibra na configuração corrigida
I, I_x	Momento de inércia da seção transversal no plano de flexão

I_p	Momento de inércia no plano de flexão do pilar
I_v	Momento de inércia no plano de flexão da viga
K	Fator do comprimento efetivo, coeficiente de flambagem
k_i	Rigidez rotacional inicial da ligação
k_{i0}	Rigidez de serviço da ligação, rigidez secante da ligação
k_{tan}	Rigidez tangente da ligação
k_{des}	Rigidez de descarregamento da ligação
k_b	Rigidez efetiva secante da ligação
k_v	Valor médio de I_v/L_v
k_p	Valor médio de I_p/L_p
L	Comprimento da barra
L_E	Comprimento efetivo do pilar
L_p	Comprimento do pilar
L_v	Comprimento da viga
m^*	Relação entre momento fletor aproximado e momento fletor rigoroso em análise de 2ª ordem
M	Momento fletor
M_u	Momento fletor último da ligação
M_1	Menor momento fletor das extremidades da barra não-contraventada no plano de flexão considerado Momento aplicado em uma das extremidades da barra
M_2	Maior momento das extremidades da barra não-contraventada no plano de flexão considerado Momento aplicado em uma das extremidades da barra
M_p	Momento plástico
M_{sd}	Momento fletor aproximado solicitante de cálculo
M_{s0}	Momento fletor de serviço esperado da ligação
M_0	Momento fletor máximo de 1ª ordem
M_{nt}	Momento fletor solicitante de cálculo, obtido por análise elástica de 1ª ordem, assumindo não existir translação lateral da estrutura
M_{lt}	Momento fletor solicitante de cálculo, obtido por análise elástica de 1ª ordem devido à translação lateral da estrutura

	(deslocamentos horizontais dos nós)
M_I	Momento fletor de 1ª ordem
M_{II}	Momento fletor de 2ª ordem
M_{zmax}	Momento fletor máximo de 2ª ordem
n	Fator de forma da ligação
N	Força normal
N_{e1}, N_{e2}	Carga de flambagem elástica de Euler
N_{sd}	Força normal de compressão aproximada atuante de cálculo
N_{nt}	Força normal solicitante de cálculo, obtido por análise elástica de 1ª ordem, assumindo não existir translação lateral da estrutura
N_{lt}	Força normal solicitante de cálculo, obtido por análise elástica de 1ª ordem, assumindo existir translação lateral da estrutura
P	Carga vertical concentrada Força de compressão
P_{cr}	Carga crítica de flambagem elástica
$P-\Delta$	Efeito global de 2ª ordem
$P-\delta$	Efeito local de 2ª ordem
P_E	Carga crítica de flambagem
P_i	Forças nodais internas nodais do elemento
p_i^T	Vetor 6x1 dos graus de liberdade cartesianos
$q, q(z), q_0$	Carregamento uniformemente distribuído
q_a^T	Vetor 3x1 dos graus de liberdade corrotacionais
R_{KA}, R_{KB}	Rigidezes elásticas das molas nas extremidades A e B, respectivamente
R_s	Coefficiente de ajuste
u, v	Translações nas direções x e y, respectivamente
u_c	Campo de deslocamento no sistema corrotacional
t_f	Espessura da mesa do perfil "I"
t_w	Espessura da alma do perfil "I"
v	Flecha da barra, deslocamento lateral da estrutura
v_c	Campo de deslocamento no sistema corrotacional
V_r	Volume de uma fibra na configuração inicial

V_c	Volume de uma fibra na configuração deformada
V_{sd}	Força cortante aproximada atuante de cálculo
V_{nt}	Força cortante solicitante de cálculo, obtido por análise elástica de 1ª ordem, assumindo não existir translação lateral da estrutura
V_{lt}	Força cortante solicitante de cálculo, obtido por análise elástica de 1ª ordem, assumindo existir translação lateral da estrutura
x, y	Sistema global de coordenadas
x_r, y_r	Sistema local de coordenadas corrotacionais
x_c, y_c	Sistema local de coordenadas
x_a, x_b	Coordenadas do elemento na configuração original
y_a, y_b	Coordenadas do elemento na configuração original
y_I	Deslocamento de 1ª ordem
y_{II}	Deslocamento de 2ª ordem
Z_x	Módulo de resistência plástico no plano de flexão
α	Constante de mola Ângulo entre a corda e a tangente Rotação das seções transversais
	Fator de amplificação do carregamento uniformemente distribuído
α_{nt}	Fator de modificação da rigidez da viga em pórticos indeslocáveis
α_{lt}	Fator de modificação da rigidez da viga em pórticos deslocáveis
e	Deformação linear da fibra Campo de deformação
D_{0h}	Deslocamento horizontal relativo de 1ª ordem do andar em consideração devido a $\sum H_{sd}$
φ_c	Ângulo entre a corda e o eixo global x
d	Deslocamento lateral devido a flambagem da estrutura.
δ_1	Deslocamento de 1ª ordem devido atuação de um carregamento $q(z)$.

d_e	Deformação virtual da fibra
d_{p_i}	Deslocamento virtual nodal do elemento
l	Medida básica de deformação denominada de estiramento da fibra
η	Fator de proporcionalidade
r	Parâmetro de rigidez adimensional
s	Tensão normal da fibra
s_N	Tensão de engenharia na fibra
s_y	Tensão de escoamento
q, θ_r	Ângulo referente a configuração deformada de uma barra ou estrutura Rotação relativa entre elementos conectados
θ_0	Rotação plástica de referência
θ_u	Capacidade de rotação da ligação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA	16
1.2 PERGUNTA DA PÉSQUISA	18
1.3 OBJETIVOS	18
1.3.1 Objetivo geral	18
1.3.2 Objetivos específicos.....	18
1.4 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA	19
1.5 RESTRIÇÕES E LIMITAÇÕES DA PESQUISA	20
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO	20
2 REVISÃO TEÓRICA	22
2.1 LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS	22
2.1.1 Considerações Iniciais.....	22
2.1.2 Comportamento das Ligações.....	23
2.2 ESTABILIDADE DE PÓRTICOS	26
2.2.1 Estabilidade de Pórticos Rígidos.....	27
2.2.2 Cálculo aproximado do fator do comprimento efetivo	40
2.3 CONSIDERAÇÕES DAS LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS NA ESTABILIDADE DE PÓRTICOS.....	44
2.3.1 Determinação da rigidez da ligação para pórticos indeslocáveis - k_{i0}	45
2.3.2 Determinação da rigidez da ligação para pórticos deslocáveis – k_b	45
2.4 ANÁLISE EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM DE PÓRTICOS PLANOS.....	47
2.4.1 Considerações Iniciais.....	47
2.4.2 Tipos de Análises	50
2.4.3 Métodos Aproximados de Análise	52
2.4.4 Análise Rigorosa em Teoria de 2ª Ordem	64
3 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE CONSIDERANDO AS LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS	75
4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	77
4.1 PÓRTICO DE UM ANDAR E UM VÃO	77
4.1.1 Resultados para o caso 1 - Pórtico com carga uniformemente distribuída na viga (αq_0) e carga vertical concentrada (P) no topo dos pilares	84
4.1.2 Resultados para o caso 2 - Pórtico com carga uniformemente distribuída na viga (αq_0), carga vertical concentrada (P) no topo dos pilares e carga horizontal concentrada (H) no topo do pilar da esquerda	91
4.2 PÓRTICO DE DOIS ANDARES E UM VÃO	97
4.3 PÓRTICO DE DOIS ANDARES E UM VÃO	105
5 CONCLUSÕES	114
5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117

1 INTRODUÇÃO

Apresenta-se, neste capítulo, uma breve contextualização da pesquisa, a justificativa de escolha do tema, os objetivos deste trabalho, bem como suas limitações e restrições.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA

A utilização do aço como estrutura na construção civil no Brasil, embora em menor volume, se comparado a outros países, vem crescendo de forma significativa.

A estrutura projetada em aço reduz sensivelmente os impactos ambientais na etapa de construção. Quando esgotada a sua vida útil, o material pode retornar aos fornos e se tornar um novo aço, sem perda de qualidade. Dessa forma, a edificação em aço está diretamente relacionada à menor utilização de recursos, menor consumo de energia e menor desperdício de material, devido à eficiência e à reciclagem do aço, juntamente com o peso relativamente baixo dos elementos que compõem a estrutura.

Para um dimensionamento econômico, porém que atenda às recomendações normativas, deve-se realizar a análise estrutural considerando os efeitos de segunda ordem. As normas atuais de dimensionamento de estruturas em aço orientam sobre essa consideração, pois esses efeitos podem causar variações significativas na distribuição dos esforços internos, nos valores de deslocamentos nodais e na estabilidade da estrutura. Diversas normas, como por exemplo, a ABNT NBR 8800: 2008 apresentam procedimentos de análise aproximada de cálculo considerando esses efeitos de segunda ordem, uma vez que a consideração mais precisa é demorada e complexa.

Conforme Barros (2010), o estudo da estabilidade de pórtico pode ser realizada considerando forças nocionais ou por meio do fator do comprimento efetivo de flambagem. A determinação deste fator pela teoria elástica pode ser realizada por meio de ábacos de pontos alinhados ou por fórmulas matemáticas disponíveis na literatura aberta. Estes ábacos fornecem uma solução elástica aproximada do fator de comprimento efetivo K , para pórticos indeslocáveis e deslocáveis, em substituição a uma análise de estabilidade “exata”.

O Método de Amplificação de Esforços Solicitantes (MAES), incorporado na ABNT NBR 8800: 2008, é baseado no método de Amplificação dos Momentos B_1 - B_2 da norma americana AISC 360-05, que foi atualizada para AISC 360-10 pelo *American Institute of Steel Construction* em 2010. Nesse método, a análise elástica de 2ª ordem é realizada por meio de duas análises de 1ª ordem (FAKURY; SILVA; CALDAS, 2015). O fator do comprimento efetivo, ou simplesmente coeficiente de flambagem K , das barras comprimidas, é tomado igual a 1,00 para o cálculo do fator de amplificação B_1 . Isso facilita, enormemente, o cálculo estrutural, evitando que o projetista tenha que fazer estudos complexos para a obtenção do citado coeficiente. Entretanto, quando o comportamento das ligações entre vigas e pilares é considerado na análise, essa simplificação deve ser avaliada, pois os resultados de esforços e deslocamentos obtidos da análise aproximada podem ser bem diferentes daqueles de uma análise rigorosa.

Na análise convencional, consideram-se, simplificadamente, duas condições de ligação durante o cálculo estrutural: totalmente rígida (engastada) ou perfeitamente flexível (rotulada). Na prática, essas duas situações são impossíveis de acontecer, por questões construtivas, ocorrendo alguma rotação nas ligações engastadas e uma transmissão de momento fletor na ligação rotulada.

Embora a consideração das hipóteses do comportamento ideal da ligação simplifique a análise e o dimensionamento de estruturas, a validade dessas hipóteses pode ser questionada quando a flexibilidade das ligações precisar ser levada em conta no projeto.

Essa simplificação no comportamento da ligação interfere na estabilidade e no dimensionamento da estrutura, uma vez que o equilíbrio da mesma, em análise de segunda ordem, é feito na sua posição deslocada. Quando a flexibilidade das ligações é considerada, pode ocorrer um aumento no deslocamento lateral da estrutura, e, conseqüentemente, um aumento do efeito $P-\Delta$, quando comparada à análise convencional com ligações totalmente rígidas, conduzindo a resultados mais consistentes. Portanto, a rigidez das ligações, ou seja, a sua capacidade de impedir a rotação relativa local das peças conectadas, é responsável pelo comportamento final da estrutura, tanto em termos de rotações e deslocamentos e quanto à distribuição dos esforços.

Métodos práticos para análise de estruturas de aço considerando o comportamento das ligações e os efeitos de segunda ordem têm sido apresentados

por vários autores. Estudos têm sido direcionados na incorporação de ligações semirrígidas entre viga e pilar em métodos aproximados de análise, como o método B₁-B₂.

Dessa forma, este trabalho pretende avaliar a influência do comportamento da ligação entre viga e pilar na análise estrutural considerando os efeitos de segunda ordem.

1.2 PERGUNTA DA PESQUISA

O método aproximado de 2ª ordem elástica, ao se considerar o comportamento não linear das ligações, é confiável?

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

A presente pesquisa tem como objetivo avaliar os efeitos de segunda ordem em pórticos planos de aço, considerando a influência do comportamento das ligações semirrígidas entre vigas e pilares da estrutura, introduzindo os parâmetros das ligações no método aproximado B₁-B₂ e comparando o resultado com a análise rigorosa, ambas em análise elástica de 2ª ordem.

1.3.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo principal, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Determinar os momentos fletores solicitantes e os deslocamentos horizontais em pórticos planos de aço com ligações semirrígidas, considerando o método de análise em 1ª ordem elástica, utilizando o programa PPLANLEP.
- Determinar os momentos fletores solicitantes e os deslocamentos horizontais em pórticos planos de aço, considerando os seguintes métodos de análise em 2ª ordem elástica: método aproximado de amplificação dos esforços B₁-B₂ levando-se em conta, para cálculo dos fatores de amplificação, o fator do comprimento efetivo de pilares, e o método rigoroso.
- Analisar comparativamente todos os resultados obtidos pelos métodos de análise em 2ª ordem aproximado e rigoroso.

1.4 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

O tipo de ligação considerado entre vigas e pilares de uma estrutura de aço reflete diretamente no seu comportamento estrutural global, ou seja, sua resposta aos carregamentos externos depende do comportamento das ligações consideradas, que por sua vez depende da interação entre os elementos e os seus meios de ligação.

Embora a consideração do comportamento totalmente rígido ou rotulado da ligação seja prática recorrente e torne mais simples e mais fácil a análise de uma estrutura, a validade dessas considerações pode ser contestada quando as ligações apresentam comportamento semirrígido, devendo ser, portanto, considerado no projeto.

Pode-se afirmar que a maioria das ligações nas estruturas de aço apresenta um comportamento não linear intermediário devido à impossibilidade, na prática, de se projetar ligações ideais. Essas ligações permitem algum movimento relativo entre os elementos conectados, nas ligações consideradas rígidas, e uma determinada transmissão de momento fletor entre os elementos conectados, nas ligações consideradas rotuladas. Dessa forma, a consideração das ligações semirrígidas é importante, pois permite análises mais realistas da resposta global das estruturas e dos elementos que as formam.

Pesquisas têm mostrado a importância de se considerar as ligações semirrígidas na análise estrutural, na tentativa de melhor representar o comportamento global das estruturas, podendo citar os trabalhos mais recentes de He et al. (2009), Silva (2010), Lavall et al. (2012), Oliveira (2015), Buonicontro et al. (2017) e Mendes; Silva; Costa (2017). No entanto, apesar de avanços terem sido alcançados no estudo do comportamento das ligações semirrígidas, faz-se necessária a formulação de procedimentos simplificados de análise que considerem o comportamento semirrígido das ligações e que possam ser incorporados na rotina de projeto, ou mesmo critérios de projeto que permitam a consideração das hipóteses de comportamento idealizado de forma segura e econômica e que garantam a estabilidade global da estrutura, como o trabalho apresentado por Xu e Xu (2012).

Justifica-se, portanto, o interesse no conhecimento mais profundo do comportamento das ligações, para aperfeiçoamento e desenvolvimento de novos métodos de análise e dimensionamento, visando-se obter projetos estruturais mais

confiáveis do ponto de vista da segurança, mais econômicos e conseqüentemente, mais sustentáveis.

1.5 RESTRIÇÕES E LIMITAÇÕES DA PESQUISA

Esta pesquisa limita-se por alguns aspectos, dentre eles:

- A verificação da estrutura quanto aos estados limites últimos e de serviço não foi realizada.
- Não é foco do estudo o comportamento de estruturas complexas que podem incluir, por exemplo, o comportamento misto de aço e concreto em vigas e pilares;
- O estudo será realizado apenas para pórticos não contraventados e utiliza-se apenas o software PPLANLEP, não comercial, para as simulações numéricas dos exemplos propostos;
- As ligações semirrígidas são consideradas, na análise em teoria de 2ª ordem elástica, por meio de elementos de mola, cuja rigidez rotacional é obtida por meio de curvas multilineares $M-\theta$;
- Neste estudo serão utilizadas apenas seções transversais compactas nos elementos estruturais para assegurar que a flambagem local não limite a capacidade de rotação da barra.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho apresenta-se estruturado em cinco capítulos: introdução, revisão teórica, metodologia, aplicações numéricas com discussão dos resultados e conclusão.

A revisão teórica sobre o tema é tratada no capítulo 2, apontando os principais conceitos referentes às ligações semirrígidas e seu comportamento, à estabilidade de pórticos, ao fator do comprimento efetivo de pilares (K) e aos diferentes tipos de análise estrutural. Também são demonstradas as considerações das ligações semirrígidas na estabilidade dos pórticos, explicitando as formulações de cada método de análise proposto neste trabalho.

O capítulo 3 descreve a metodologia utilizada na pesquisa, listando as etapas necessárias para realização do estudo, indicando as formulações utilizadas em cada uma das análises aproximadas considerando o comportamento das ligações semirrígidas.

O capítulo 4 apresenta as aplicações numéricas desenvolvidas nesta pesquisa e as suas respectivas discussões de resultados.

O capítulo 5 apresenta as conclusões e considerações finais, referentes ao desenvolvimento desta pesquisa, finalizando com as sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica do tema, que foi utilizada como embasamento teórico para a realização da pesquisa. O capítulo inicia-se com uma apresentação sobre o comportamento e parâmetros das ligações. Posteriormente, são introduzidos os conceitos de estabilidade de pórticos planos, inclusive considerando-se as ligações semirrígidas. Por fim, é feita a descrição dos principais tipos de análise, finalizando com formulações aproximadas e rigorosa para análise em teoria de segunda ordem de pórticos planos, incluindo ou não o comportamento das ligações semirrígidas.

2.1 LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

2.1.1 Considerações Iniciais

As ligações desempenham uma função importante no comportamento das estruturas de aço, apresentando influência significativa nos aspectos econômicos, construtivos e principalmente nos estruturais. O comportamento global das estruturas de aço depende do comportamento das ligações, que, por sua vez, depende da interação entre os elementos e os meios que as compõem, como por exemplo, chapas, cantoneiras, soldas e parafusos. As características geométricas dos perfis conectados (viga e pilares) também influenciam no comportamento das ligações.

Em geral, na análise estrutural, considera-se que as ligações viga-pilar são totalmente rígidas ou totalmente rotuladas. Essas ligações idealizadas podem resultar valores imprecisos das respostas estruturais, uma vez que muitas ligações apresentam comportamento não linear intermediário, denominado semirrígido.

Na análise estrutural elástica, a norma brasileira ABNT NBR 8800: 2008 preconiza que uma ligação viga-pilar pode ser considerada rotulada quando sua rigidez rotacional inicial é menor ou igual a $0,5EI_v/L_v$, ou seja, $k_i \leq 0,5EI_v/L_v$, sendo I_v o momento de inércia da seção transversal da viga no plano da estrutura e L_v o comprimento da viga conectada ao pilar. Caso a rigidez rotacional inicial k_i seja maior ou igual a $25EI_v/L_v$, considera-se a ligação com comportamento rígido. Quando a ligação não atende a nenhum dos dois critérios, classifica-se o comportamento da ligação como semirrígido.

A condição $k_i \geq 25EI_v/L_v$ é válida apenas para estruturas que satisfaçam, em cada andar, $K_v/K_p \geq 0,1$, onde K_v é o valor médio de I_v/L_v para todas as vigas no topo do andar e K_p é o valor médio de I_p/L_p para todos os pilares do andar. Caso $K_v/K_p < 0,1$, deve-se considerar a ligação com comportamento semirrígido (ABNT NBR 8800, 2008).

A consideração de ligações semirrígidas na modelagem de pórticos planos de aço é relevante, pois reflete de forma mais fidedigna o comportamento da estrutura, permitindo, assim, um dimensionamento mais realista e confiável. A consideração de uma ligação totalmente rígida leva o projetista a subestimar os deslocamentos nodais da estrutura e a superestimar os esforços solicitantes na ligação. Caso seja considerada uma ligação completamente rotulada, as vigas dimensionadas apresentarão seções transversais maiores, resultando em perfis estruturais mais pesados (SILVA, 2010).

2.1.2 Comportamento das Ligações

As ligações semirrígidas permitem alguma rotação relativa entre os elementos conectados, e também alguma transmissão de momento fletor entre eles. Conforme mostrado na Figura 1, a rotação relativa equivale à mudança do ângulo original entre o pilar e viga conectados, em consequência da atuação do momento.

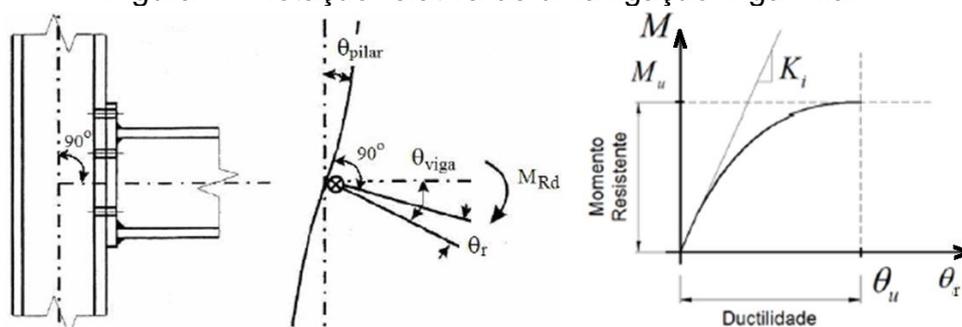
O comportamento das ligações é geralmente representado pela curva $M-\theta_r$, definindo-se três propriedades fundamentais de uma ligação: a rigidez rotacional inicial, K_i ; o momento resistente, M_u , e a capacidade de rotação, θ_u . Essa curva relaciona o momento fletor solicitante da ligação e a sua rotação relativa entre os elementos conectados.

A Figura 2 mostra curvas para diferentes tipos de ligações semirrígidas. Elas apresentam comportamento intermediário às ligações idealizadas: totalmente rígida, representada pelo eixo vertical e perfeitamente flexível, representada pelo eixo horizontal.

Em análise à Figura 2, percebe-se que, para um mesmo tipo de ligação, a rigidez diminui com o aumento da rotação. Pode-se afirmar, também, que para um mesmo valor de momento, as ligações mais flexíveis apresentam maior valor de rotação. Além disso, um mesmo tipo de ligação pode apresentar vários comportamentos rotacionais, simplesmente alterando os valores de seus parâmetros, como

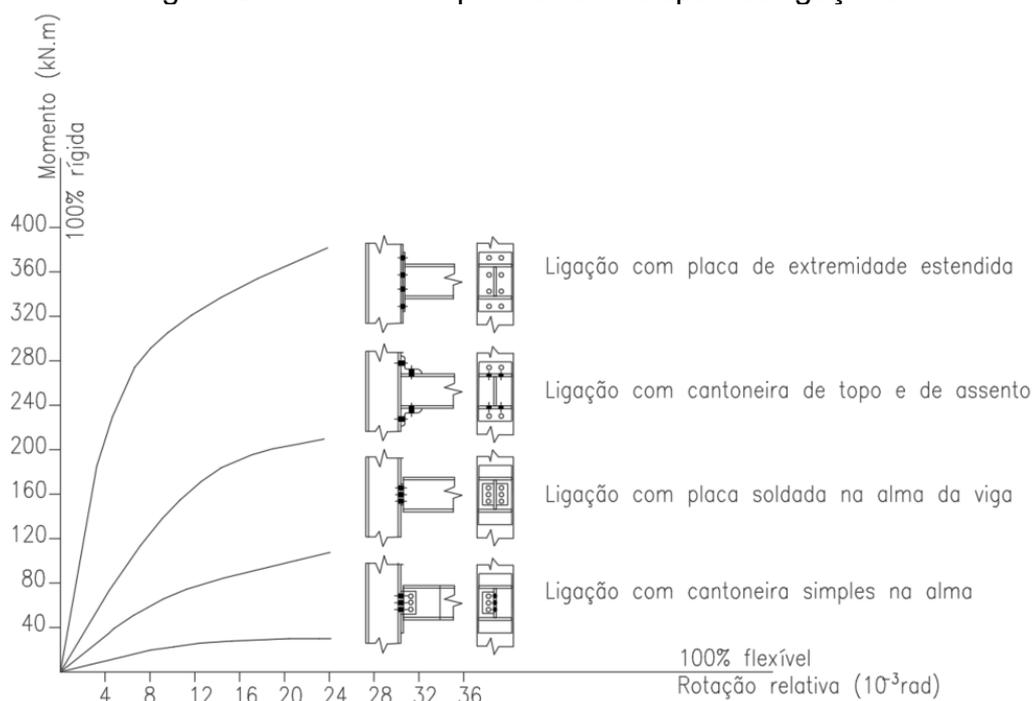
espessura da chapa e/ou diâmetro dos parafusos numa ligação com chapa de extremidade estendida.

Figura 1 - Rotação relativa de uma ligação Viga-Pilar



Fonte: (SILVA, 2010)

Figura 2 - Curvas M- θ para diversos tipos de ligações



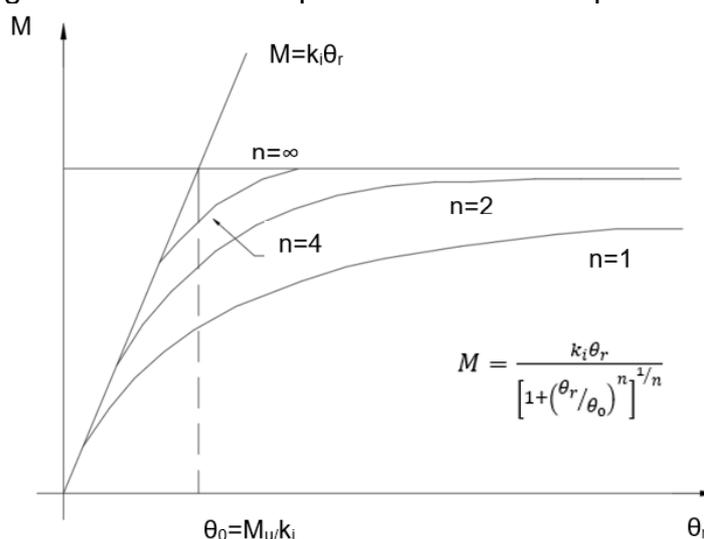
Fonte: Adaptada de (CHEN; TOMA, 1994)

O comportamento da ligação pode ser representado por meio de sua modelagem, o que exige uma representação matemática da curva momento x rotação relativa. A modelagem pode ser analítica, experimental, mecânica ou

numérica. Um exemplo muito utilizado de modelagem analítica é o modelo de três parâmetros.

O modelo dos três parâmetros representa o comportamento das ligações por meio da função $M = k_i \theta_r / (1 + (\theta_r / \theta_0)^n)^{1/n}$, representada graficamente pela Figura 3, que correlaciona três parâmetros de relevância para o modelo, a saber: rigidez inicial da ligação (K_i), a capacidade última ao momento da ligação e o fator de forma n . O fator de forma n depende das características da ligação e pode ser obtido por meio do método dos mínimos quadrados às diferenças entre as curvas teórica e experimental (CHEN; TOMA, 1994). θ_0 é a rotação plástica de referência e vale M_u/K_i , sendo M_u a capacidade última ao momento da ligação.

Figura 3 - Curvas M- θ para modelo de três parâmetros



Fonte: Adaptada de (CHEN; TOMA, 1994)

Quando uma ação externa atua na estrutura, é possível diferenciar 04 tipos de rigidez da ligação (CHEN; TOMA, 1994), mostradas na Figura 4:

Rigidez Inicial (k_i): corresponde à inclinação inicial da curva momento x rotação, aproximadamente constante no início da curva.

Rigidez de serviço (K_{i0}): corresponde à rigidez secante da ligação, baseada no momento de serviço esperado, calculada pela Equação 1:

$$k_{i0} = M_{s0} / \theta_0, \quad (1)$$

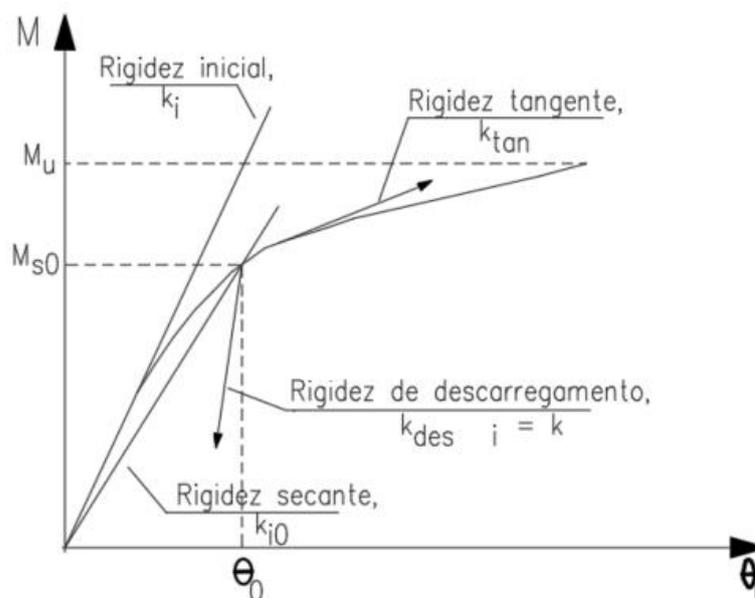
sendo $\theta_0 = M_u / K_i$. A rigidez secante é utilizada na análise de 1ª ordem para o cálculo da estrutura “*nt*” (*no translation*), mostrada adiante (HE et al., 2009).

Rigidez tangente (K_{tan}): corresponde à rigidez instantânea da ligação, em qualquer ponto da curva, dada pela Equação 2:

$$k_{tan} = dM/d\theta \quad (2)$$

Rigidez de descarregamento (K_{des}): possui comportamento aproximadamente linear até atingir o momento nulo, sendo considerada igual à rigidez inicial.

Figura 4 - Tipos de rigidez de uma ligação



Fonte: Adaptado de (CHEN; TOMA, 1994)

2.2 ESTABILIDADE DE PÓRTICOS

Segundo Salama (2014), a análise de um pilar pode ser iniciada com a avaliação da resistência rotacional elástica em ambas as extremidades (G_A , G_B), a partir da qual determina-se o fator de comprimento efetivo para flambagem (K). As equações matematicamente exatas para pórticos deslocáveis e indeslocáveis foram desenvolvidas por Barakat e Chen (1990) e exigem muitos cálculos complexos e cansativos. Outra maneira de se determinar o fator de comprimento efetivo (K) é por

meio do uso de gráficos de alinhamento específicos para cada tipo de pórtico, deslocáveis e indeslocáveis, que foram originalmente desenvolvidos por O.J. Julian e L.S. Lawrence, e apresentado em detalhes por T.C. Kavanagh apud Salama (2014). Essas soluções gráficas das equações matematicamente exatas foram comumente usadas na maioria das normas, como na ABNT NBR 8800 (1986). A precisão dos gráficos de alinhamento depende essencialmente do tamanho do gráfico e da nitidez da visão do leitor. Além disso, a obtenção dos valores de K por meio de gráficos impede a automação total no processo de análise e dimensionamento estrutural, tornando-se uma potencial fonte de erros no processo.

2.2.1 Estabilidade de Pórticos Rígidos

A flambagem é um fenômeno de instabilidade em sistemas estruturais esbeltos sujeitos a cargas de compressão e está associada à transição de sua posição reta de equilíbrio estável para uma configuração curva de equilíbrio. A carga que provoca a flambagem de peças esbeltas submetidas à compressão é inferior à carga que a romperia. Além disso, ela ocorre abruptamente, podendo resultar em uma falha repentina e dramática da estrutura. Ressalta-se a importância de as estruturas serem analisadas também sob o aspecto de sua estabilidade e não apenas quanto a sua resistência e a sua rigidez. A carga axial máxima que um pilar pode suportar quando está na iminência de sofrer flambagem é denominada carga crítica.

As cargas críticas são obtidas resolvendo-se o equilíbrio do pilar deformado lateralmente. Supondo que os deslocamentos e rotações sejam pequenos, a curvatura de um membro, j , pode ser definida pela Equação 3. Se o membro é perfeitamente elástico e o material obedece à lei de Hooke, pode-se afirmar que o momento fletor é proporcional à curvatura, com a rigidez à flexão do membro como constante de proporcionalidade, conforme mostra a Equação 4:

$$k = \frac{d^2v}{dx^2}, \quad (3)$$

$$M = -EI \frac{d^2v}{dx^2}, \quad (4)$$

onde v representa a flecha, E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia da seção transversal.

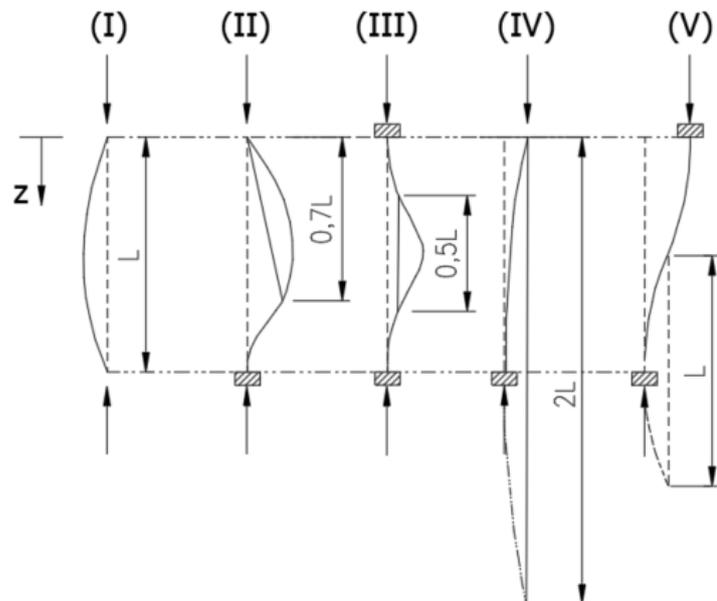
Com a substituição $k^2 = P/EI$, a carga crítica de flambagem pode ser escrita conforme Equação 5:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L_E^2} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}, \quad (5)$$

onde P_E é a carga crítica de flambagem e L_E é o comprimento efetivo do pilar. O comprimento efetivo L_E do pilar é obtido pelo produto entre o comprimento da barra L e um fator de comprimento efetivo, K , relacionado com as condições de contorno das extremidades da barra.

A Figura 5 lista os casos fundamentais da flambagem em pilares isolados, que diferem entre si por apresentarem diferentes condições de contorno em suas extremidades. O comprimento efetivo pode ser ilustrado como a distância entre os pontos de inflexão na geometria flambada do pilar. A Tabela 1 apresenta esses casos de flambagem com suas respectivas condições de contorno, seus valores de carga crítica (P_{cr}) e de comprimento efetivo (K).

Figura 5 - Casos de Flambagem em pilares isolados



Fonte: Adaptado de (GALAMBOS & SUROVEK, 2008)

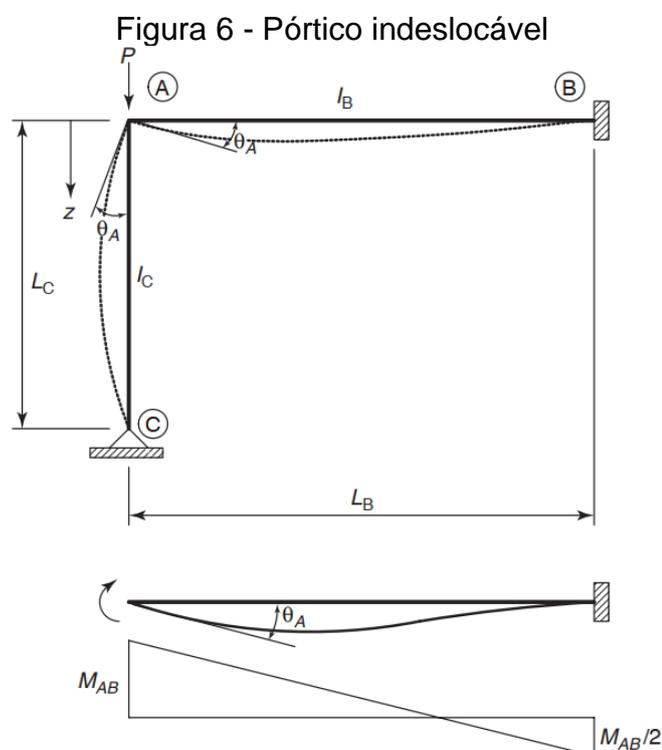
Tabela 1 – Casos de Flambagem

Caso	Condições de Contorno	Carga Crítica de Flambagem (P_{cr})	Fator de Comprimento Efetivo (k)
I	$v(0) = v''(0) = 0$ $v(L) = v''(L) = 0$	$P_{cr} = P_E$	1
II	$v(0) = v''(0) = 0$ $v(L) = v'(L) = 0$	$P_{cr} = 2,045P_E$	0,7
III	$v(0) = v'(0) = 0$ $v(L) = v'(L) = 0$	$P_{cr} = 4P_E$	0,5
IV	$v'''(0) + k^2v' = v''(0) = 0$ $v(L) = v'(L) = 0$	$P_{cr} = P_E/4$	2
V	$v'''(0) + k^2v' = v'(0) = 0$ $v(L) = v'(L) = 0$	$P_{cr} = P_E$	1

Fonte: Adaptado de (GALAMBOS & SUROVEK, 2008)

2.2.1.1 Estabilidade de Pórtico Indeslocável

Seja a Figura 6, a seguir, que mostra um pilar rotulado em sua base, C, e contido na outra extremidade, A, por uma viga elástica, engastada na extremidade B.



Fonte: (GALAMBOS; SUROVEK, 2008)

As condições de contorno na parte inferior do pilar ($z = L_c$) são $v(L_c) = v''(L_c) = 0$. No topo, não existe deslocamento e a inclinação é igual à inclinação na extremidade da viga. Por meio da análise estrutural, pode-se determinar o momento fletor na extremidade da viga:

$$M_{AB} = \frac{4EI_B}{L_B} \theta_A = \alpha \theta_A = \alpha v'(0). \quad (6)$$

O símbolo α é definido como constante de mola e vale $\alpha = \frac{4EI_B}{L_B}$ quando a extremidade oposta da viga é engastada e $\alpha = \frac{3EI_B}{L_B}$ quando a extremidade oposta é rotulada. O momento fletor no topo do pilar é igual a $M_{AC} = -EI_C v''(0)$.

A quarta condição de contorno é obtida por meio da condição de equilíbrio $M_{AB} + M_{AC} = 0$. Dessa forma, as quatro condições de contorno para o pilar são resumidas a seguir, pelas Equações 7 a 10:

$$v(0) = 0, \quad (7)$$

$$\alpha v'(0) - EI_C v''(0) = 0, \quad (8)$$

$$v(L_c) = 0, \quad (9)$$

$$v''(L_c) = 0. \quad (10)$$

A substituição dessas condições de contorno na equação de deslocamento, $v = A + Bz + C \sin kz + D \cos kz$, e suas derivadas, fornecem quatro equações simultâneas homogêneas que estão representadas matricialmente na Equação 11. Resolvendo o determinante e igualando-o a zero, obtém-se as Equações 12, 13 e 14.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha k & P \\ 1 & L & \sin kL_c & \cos kL_c \\ 0 & 0 & -k^2 \sin kL_c & -k^2 \cos kL_c \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

$$\tan kL_C = \frac{\alpha kL_C}{PL_C + \alpha} = \frac{\gamma kL_C}{(kL_C)^2 + \gamma}, \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{\alpha L_C}{EI_C}, \quad (13)$$

$$kL_C = \sqrt{\frac{PL_C^2}{EI_C}}. \quad (14)$$

A Equação 14 mostra a equação de flambagem para um pilar com uma extremidade rotulada e a outra contida por uma mola elástica. Quando $I_B = \alpha = \gamma = 0$, a restrição do nó final desaparece e tem-se um pilar rotulado nas duas extremidades. Assim, $\tan kL_C = 0$ quando $kL_C = 0, \pi, 2\pi \dots$. Logo, $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_C}{L_C^2}$.

Quando $I_B = \alpha = \gamma = \infty$, tem-se a extremidade superior do pilar engastado, resultando nas equações 15 e 16:

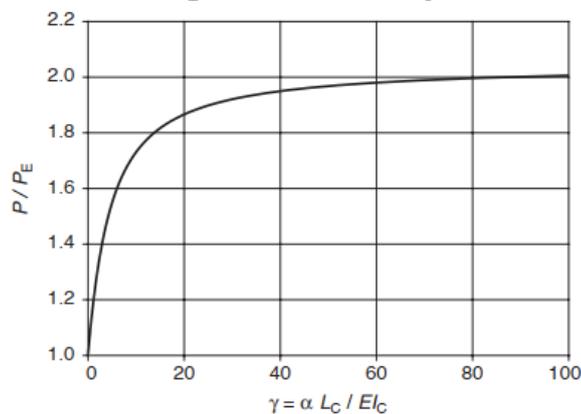
$$\tan kL_C = \frac{kL_C}{\frac{(kL_C)^2}{\gamma} + 1} \rightarrow \tan kL_C = kL_C, \quad (15)$$

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi^2 EI_C}{L_C^2} \right) \times 2,045 = 20,19 \frac{EI_C}{L_C^2}. \quad (16)$$

A variação da carga crítica com a constante de mola é mostrada na Figura 7. Observa-se que $P = P_{cr} = P_E$ quando $\gamma = 0$ e $P = P_{cr} = 2,045 P_E$ quando o valor da constante da mola se aproxima do infinito.

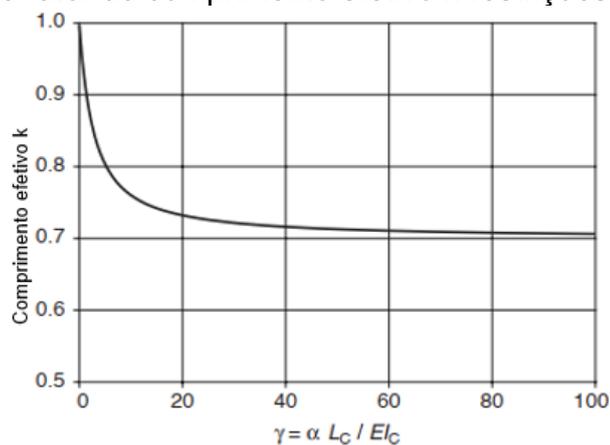
A Figura 8 mostra o gráfico fator do comprimento efetivo, K , em função de γ , para um pilar com uma extremidade rotulada e a outra contida por uma mola elástica. Novamente, nota-se que K é igual a 1,0 quando a extremidade contida pela mola é considerada rotulada e igual a 0,7 quando a extremidade é considerada engastada. Há uma tendência importante que pode ser deduzida a partir dessas curvas: Por um lado, quando há pequena restrição, grandes aumentos da carga de flambagem resultam de pequenos aumentos da constante de mola α . Por outro lado, quando α se torna muito grande, uma mudança muito pequena na carga de flambagem resulta em mudanças muito grandes na constante da mola.

Figura 7 – Curva carga crítica x restrições de extremidade



Fonte:(GALAMBOS; SUROVEK, 2008)

Figura 8 - Curva fator do comprimento efetivo x restrições de extremidade

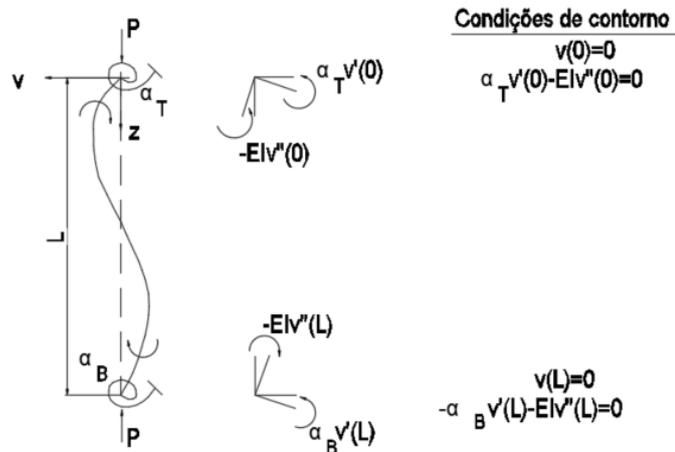


Fonte:(GALAMBOS; SUROVEK, 2008)

2.2.1.1.1 Pilares com restrição nas extremidades

Seja um pilar prismático com molas elásticas em suas extremidades, simulando uma ligação de vigas de rigidez finita nas extremidades do pilar. Não são permitidos deslocamentos transversais nestas extremidades. A Figura 9 ilustra essa situação e define as suas condições de contorno.

Figura 9 – Pilar indeslocável



Fonte: Adaptado de (GALAMBOS & SUROVEK, 2008)

A substituição das quatro condições de contorno na equação $v = A + Bz + C \sin kz + D \cos kz$ e suas derivadas resulta em quatro equações simultâneas homogêneas. Resolvendo o determinante dos coeficientes das constantes A, B, C, D e igualando-se a zero, conforme mostra a Equação 17:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & L & \sin kL & \cos kL \\ 0 & \alpha_T & \alpha_T k & EI k^2 \\ 0 & -\alpha_B & -\alpha_B k \cos kL + EI k^2 \sin kL & \alpha_B k \sin kL + EI k^2 \cos kL \end{vmatrix} = 0, \quad (17)$$

sabendo-se que $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ e introduzindo as constantes de mola como mostrado em Equações 18 e 19:

$$R_T = \frac{\alpha_T L}{EI}, \quad (18)$$

$$R_B = \frac{\alpha_B L}{EI}, \quad (19)$$

o cálculo algébrico do determinante resulta na seguinte auto função:

$$-2R_T R_B + \sin kL [R_T R_B kL - kL(R_T + R_B) - (kL)^3] + \cos kL [2R_T R_B + (kL)^2(R_T + R_B)] = 0, \quad (20)$$

cuja resolução, para o menor valor de KL , fornece a carga crítica de flambagem. As duas situações limites representadas pela Equação 20 são mostradas a seguir:

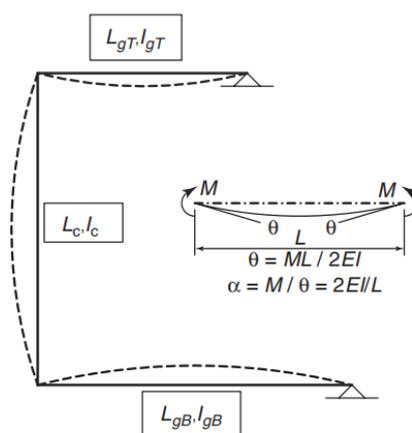
- Barra bi-rotulada $\rightarrow \alpha_T = \alpha_B = 0 \rightarrow R_T = R_B = 0$
- Barra bi-engastada $\rightarrow \alpha_T = \alpha_B = \infty \rightarrow R_T = R_B = \infty$

Após algumas manipulações algébricas e trigonométricas, é possível demonstrar que a função para pilares com extremidades rotuladas vale $\sin kL = 0$ e com extremidades engastadas é igual a $\sin \frac{kL}{2} = 0$. Assim, a Equação 20 engloba todas as condições intermediárias entre as extremidades totalmente rotuladas e as extremidades totalmente engastadas. A carga crítica e o comprimento efetivo variam entre $P_{cr} = P_E$ a $P_{cr} = 4 P_E$ e $K = 0,5$ a $K = 1,0$, respectivamente.

A condição de flambagem da Equação 20 é diretamente aplicável à situação em que as constantes das molas elásticas rotacionais, α_T e α_B , são conhecidas.

Seja uma subestrutura de um pórtico plano indeslocável conforme mostrado na Figura 10. Assume-se que as vigas do topo e da base possuem inclinações iguais próximas das extremidades. Essa não é a situação adequada para esse problema, porém é a hipótese considerada na determinação do comprimento efetivo das barras.

Figura 10 – Subestrutura de pórtico plano indeslocável



Fonte: (GALAMBOS; SUROVEK, 2008)

As constantes da mola no topo e na base do pilar são dadas pelas equações 21 e 22:

$$\alpha_T = \frac{2EI_{gT}}{L_{gT}} \rightarrow R_T = \frac{2(I_{gT}/L_{gT})}{(I_c/L_c)}, \quad (21)$$

$$\alpha_B = \frac{2EI_{gB}}{L_{gB}} \rightarrow R_B = \frac{2(I_{gB}/L_{gB})}{(I_c/L_c)}. \quad (22)$$

Após considerações trigonométricas e manipulações algébricas, tem-se:

$$\frac{(KL)^2 G_T G_B}{4} - 1 + \frac{G_T + G_B}{2} \left(1 - \frac{KL}{\tan KL}\right) + \frac{2 \tan(KL/2)}{KL} = 0, \quad (23)$$

onde:

$$G_T = \frac{I_c/L_c}{I_{gT}/L_{gT}}, \quad (24)$$

$$G_B = \frac{I_c/L_c}{I_{gB}/L_{gB}}. \quad (25)$$

Introduzindo o fator de comprimento efetivo K e fazendo $k = \frac{\pi}{KL}$, a Equação 23 pode ser reescrita conforme apresentado na equação 26:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 G_T G_B}{4} - 1 + \frac{G_T + G_B}{2} \left(1 - \frac{\frac{\pi}{k}}{\tan \frac{\pi}{k}}\right) + \frac{2 \tan(\pi/2k)}{\frac{\pi}{k}} = 0. \quad (26)$$

A Equação 26 é a base do gráfico para pórticos indeslocáveis, também chamado de gráfico de alinhamento do Manual do Instituto Americano de Construção em Aço (AISC 2005), e que também, pode ser resolvida por equações numéricas computacionais.

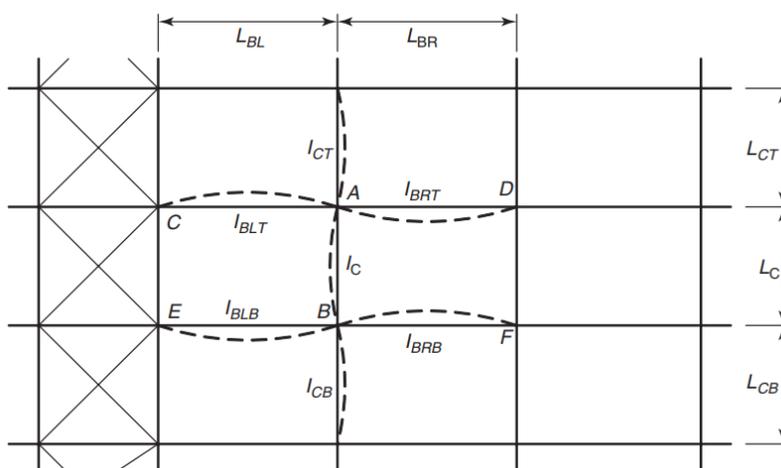
O pórtico da Figura 10 pode ser considerado como uma parte da estrutura mostrada em Fig. 11. Nesta figura, é estudado o pilar AB. Supõe-se que a rotação nas extremidades das vigas de restrição seja da mesma magnitude, porém de direção oposta às rotações no nó na parte superior e inferior, respectivamente. Supõe-se ainda que os momentos de restrição nestes nós sejam distribuídos entre

os dois pilares adjacentes na proporção de I/L dos respectivos pilares. O comprimento efetivo do pilar AB pode então, ser determinado a partir da Equação 26, com o novo valor do parâmetro de restrição G:

$$G_T = \frac{\Sigma I_c / L_c}{\Sigma I_{gT} / L_{gT}}, \quad (27)$$

$$G_B = \frac{\Sigma I_c / L_c}{\Sigma I_{gB} / L_{gB}}. \quad (28)$$

Figura 11 – Pórtico plano indeslocável



Fonte:(GALAMBOS; SUROVEK, 2008)

O próximo avanço do problema de estabilidade é o estudo do caso geral de um pilar prismático com mola rotacional e translacional em cada uma de suas extremidades, conforme mostra a Figura 12.

Tem-se, para este caso, as condições de contorno apresentadas abaixo:

Em $z = 0$:

$$-EIv''' - Pv' = \beta_T v \text{ e}$$

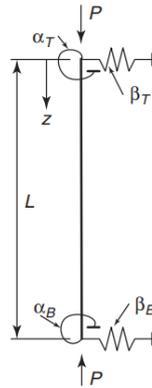
$$-EIv'' = -\alpha_T v'.$$

Em $z = L$:

$$-EIv''' - Pv' = -\beta_B v \text{ e}$$

$$-EIv'' = \alpha_B v'.$$

Figura 12 – Pilar com molas rotacional e translacional nas extremidades



Fonte:(GALAMBOS; SUROVEK, 2008)

Introduzindo-se as variáveis $R_T = \frac{\alpha_T L}{EI}$, $R_B = \frac{\alpha_B L}{EI}$, $T_T = \frac{\beta_T L^3}{EI}$, $T_B = \frac{\beta_B L^3}{EI}$ e $K = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ e substituindo as quatro condições de contorno na equação $v = A + Bz + C \sin kz + D \cos kz$ e suas derivadas, tem-se quatro equações simultâneas homogêneas. Resolvendo o determinante dos coeficientes das constantes A, B, C, D e igualando-se a zero, conforme mostra a Equação 29:

$$\begin{vmatrix} T_T & (KL)^2 & 0 & T_T \\ 0 & R_T & R_T KL & (KL)^2 \\ T_B & [T_B - (KL)^2] & T_B \sin KL & T_B \cos KL \\ 0 & R_B & [R_B KL \cos KL - (KL)^2 \sin KL] & [-R_B KL \sin KL - (KL)^2 \cos KL] \end{vmatrix} = 0, \quad (29)$$

o auto valor KL pode ser obtido usando um solucionador de equações automático adequado.

Para o caso não deslocável, as constantes da mola translacional são assumidas iguais a infinito, uma vez que ambas as extremidades do pilar estão impedidas de se moverem lateralmente, uma em relação à outra. Dividindo a primeira e a terceira linha da Equação 29 por T_T e T_B , respectivamente, e considerando as constantes de mola próximas a infinito, tem-se:

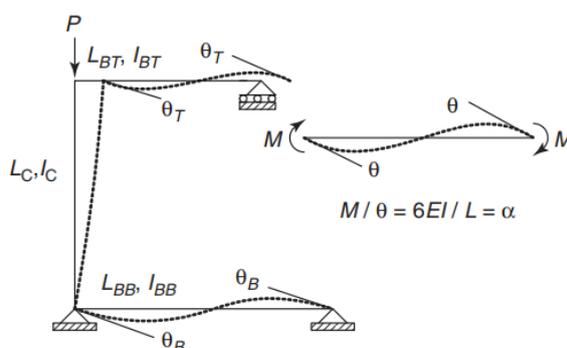
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & R_T & R_T KL & (KL)^2 \\ 1 & 1 & \sin KL & \cos KL \\ 0 & R_B & [R_B KL \cos KL - (KL)^2 \sin KL] & [-R_B KL \sin KL - (KL)^2 \cos KL] \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

resultando na Equação 20, anteriormente calculada.

2.2.1.2 Estabilidade de Pórtico Deslocável

Seja a subestrutura de um pórtico plano deslocável conforme mostrado na Figura 13 em que a parte superior do pilar é capaz de se deslocar em relação à parte inferior. Assume-se que a base não pode transladar, ou seja, $T_B = \infty$, e que não existe uma restrição no topo, sendo $T_T = 0$. Supõe-se que as vigas possuem flexão com dupla curvatura, de modo que a inclinação em cada extremidade oposta seja igual à inclinação da extremidade do respectivo nó do pilar.

Figura 13 - Subestrutura de um pórtico plano deslocável



Fonte:(GALAMBOS; SUROVEK, 2008)

Fazendo $T_T = 0$ na primeira linha da Equação 29, dividindo cada termo da terceira linha por T_B e, em seguida, considerando $T_B = \infty$, tem-se:

$$\begin{vmatrix} 0 & (KL)^2 & 0 & 0 \\ 0 & R_T & R_T KL & (KL)^2 \\ 1 & 1 & \sin KL & \cos KL \\ 0 & R_B & [R_B KL \cos KL - (KL)^2 \sin KL] & [-R_B KL \sin KL - (KL)^2 \cos KL] \end{vmatrix} = 0. \quad (31)$$

Da Figura 13, são obtidas as seguintes correlações:

$$\alpha_T = \frac{6EI_{BT}}{L_{BT}}, \quad (32)$$

$$\alpha_B = \frac{6EI_{BB}}{L_{BB}}, \quad (33)$$

$$R_T = \frac{\alpha_T L_C}{EI_C} = \frac{6EI_{BT}}{L_{BT}} \frac{L_C}{EI_C} = 6 \left(\frac{I_{BT}/L_{BT}}{I_C/L_C} \right) = \frac{6}{G_T}, \quad (34)$$

$$R_B = \frac{\alpha_B L_C}{EI_C} = \frac{6EI_{BB}}{L_{BB}} \frac{L_C}{EI_C} = 6 \left(\frac{I_{BB}/L_{BB}}{I_C/L_C} \right) = \frac{6}{G_B}, \quad (35)$$

$$G_T = \frac{I_C/L_C}{I_{BT}/L_{BT}}, \quad (36)$$

$$G_B = \frac{I_C/L_C}{I_{BB}/L_{BB}}. \quad (37)$$

Substituindo R_T e R_B no determinante da Equação 31, igualando a zero e fazendo algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$\frac{KL}{\tan KL} - \frac{(KL)^2 G_T G_B - 36}{6(G_T + G_B)} = 0. \quad (38)$$

Essa equação é a base do gráfico de alinhamento para pórticos deslocáveis apresentado na especificação AISC (2005), com:

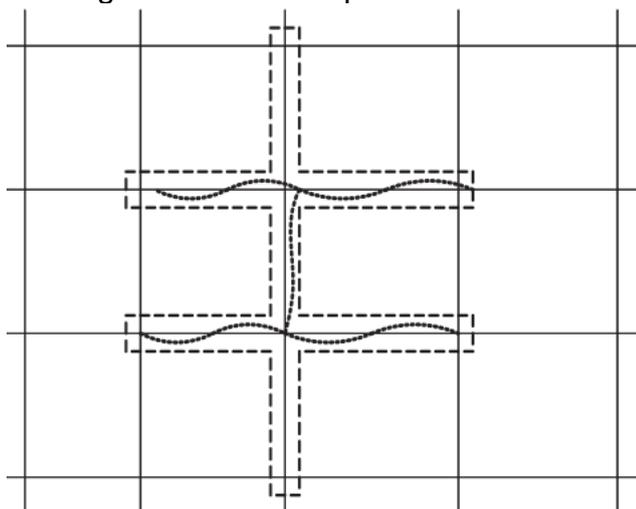
$$G_T = \frac{\sum I_C/L_C}{\sum I_{BT}/L_{BT}} \quad (39)$$

$$G_B = \frac{\sum I_C/L_C}{\sum I_{BB}/L_{BB}}, \quad (40)$$

sendo o comprimento efetivo $K = \frac{\pi}{kL}$.

A Figura 14 ilustra um pórtico deslocável. A área pontilhada define as barras envolvidas no cálculo de fator do comprimento efetivo do pilar. Assume-se que todos os pilares no andar flambam simultaneamente e que, portanto, não há restrição lateral disponível.

Figura 14 - Pórtico plano deslocável



Fonte:(GALAMBOS; SUROVEK, 2008)

2.2.2 Cálculo aproximado do fator do comprimento efetivo

Para calcular os corretos fatores de comprimento efetivo, K , é necessário realizar uma análise de flambagem elástica ou inelástica da estrutura. Poucos programas comerciais de cálculo estrutural apresentam essa capacidade. Portanto, métodos aproximados para determinar esses fatores K são disponibilizados em normas. O Anexo 7 da AISC (2016) apresenta dois gráficos para determinação do fator K : um para pórticos indeslocáveis e outro para pórticos deslocáveis. Trata-se de uma representação gráfica das equações desenvolvidas, que incluem os fatores G , em linhas verticais graduadas, dos nós superior e inferior do pilar, por uma linha reta para ler o fator de comprimento efetivo correspondente K em uma terceira linha vertical escalada graduada. Outro método para o cálculo de K consiste em utilizar equações aproximadas estabelecidas por normas (MOUSTAFA; SALAMA, 2015).

Os fatores G representam a rigidez relativa das vigas e pilares no nó e, portanto, a restrição fornecida pelos membros adjacentes ao pilar em questão. As Equações 27, 28, 39 e 40 podem ser reescritas como:

$$G = \frac{\Sigma(I/L)_{pilar}}{\Sigma(I/L)_{viga}}. \quad (41)$$

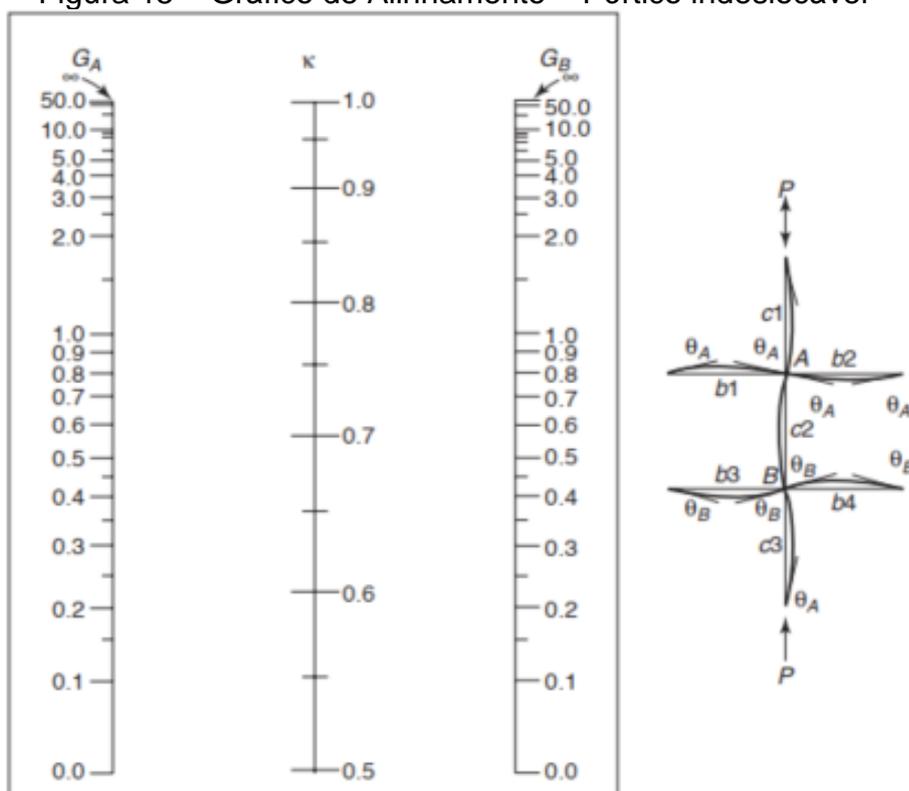
Substituindo G_T por G_A , a equação para determinação de K para pórticos indeslocáveis é reescrita e o gráfico de alinhamento é apresentado na Figura 15:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 G_A G_B}{4} - 1 + \frac{G_A + G_B}{2} \left(1 - \frac{\pi}{k \tan \frac{\pi}{k}}\right) + \frac{2 \tan(\pi/2k)}{\frac{\pi}{k}} = 0. \quad (42)$$

Conforme dito anteriormente, a Equação 42 é matematicamente exata e só pode ser resolvida por métodos numéricos. A Equação 43 consiste numa solução aproximada para o cálculo do comprimento de flambagem para pórticos indeslocáveis.

$$k_1 = \left[\frac{3G_A G_B + 1,4(G_A + G_B) + 0,64}{3G_A G_B + 2(G_A + G_B) + 1,28} \right]. \quad (43)$$

Figura 15 – Gráfico de Alinhamento – Pórtico indeslocável



Fonte: (AISC, 2010)

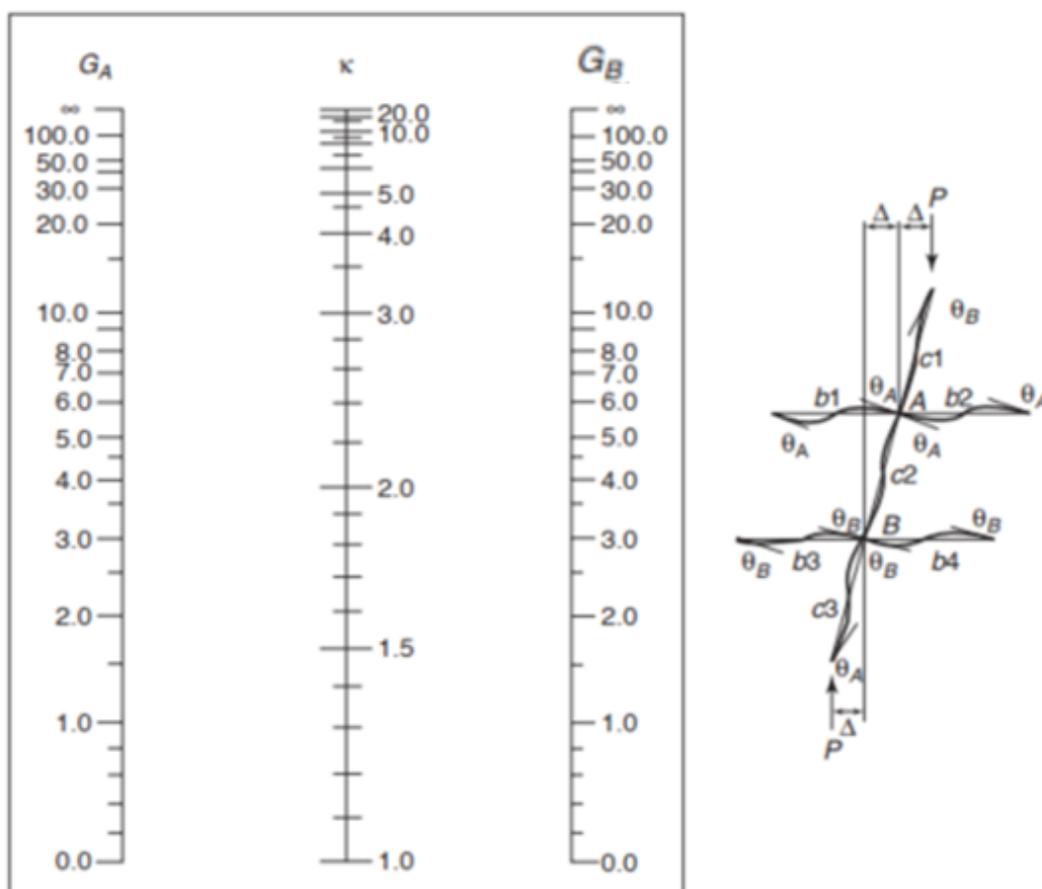
Novamente, substituindo G_T por G_A , a equação para determinação de K para pórticos deslocáveis é reescrita e o gráfico de alinhamento é apresentado na Figura 16:

$$\frac{\pi/k}{\tan \pi/k} - \frac{(\pi/k)^2 G_A G_B - 36}{6(G_A + G_B)} = 0 . \quad (44)$$

A equação matematicamente exata, Equação 44, não pode ser resolvida de forma fechada e a Equação 45 consiste numa solução aproximada para o cálculo do comprimento de flambagem para pórticos deslocáveis:

$$k_2 = \sqrt{\frac{1,52G_A G_B + 4(G_A + G_B) + 7,5}{(G_A + G_B + 7,5)}} . \quad (45)$$

Figura 16 – Gráfico de Alinhamento – Pórtico deslocável



Fonte: (AISC, 2010)

Enfim, K pode ser calculado diretamente a partir das equações, exatas ou aproximadas, ou pode ser determinado graficamente a partir dos gráficos de alinhamento. Entretanto, para utilização dos gráficos de alinhamento, é importante conhecer as hipóteses consideradas em sua construção (DUAN; CHEN, 2003). São elas:

- Todas as barras têm seção transversal constante e apresentam comportamento puramente elástico;
- Todos os nós são rígidos;
- Para os pilares que apresentam deslocamentos laterais impedidos (pórticos contraventados), as rotações nas extremidades opostas das vigas de restrição são iguais em magnitude e em direções opostas, e produzem flexão de curvatura simples (ver Figura 15);
- Para os pilares com deslocamentos laterais permitidos (pórticos não contraventados), as rotações nas extremidades opostas das vigas de restrição são iguais em magnitude e direção, e produzem flexão com curvatura reversa (ver Figura 16);
- Forças axiais nas vigas são desprezadas;
- Os parâmetros de rigidez de todos os pilares, $L\sqrt{\frac{P}{EI}}$, são iguais;
- Todos os pilares flambam simultaneamente.

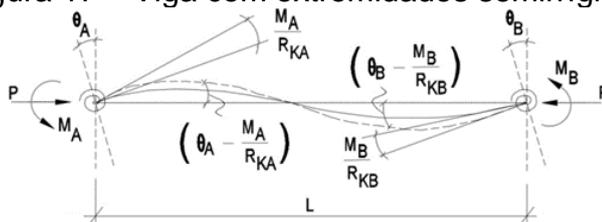
Quase nunca essas hipóteses são completamente cumpridas em pórticos reais, exigindo modificações nos métodos aproximados para considerar variações no comportamento do pórtico em relação àquelas hipóteses. Como exemplo pode-se citar a primeira suposição de que as barras apresentam comportamento puramente elástico. Se o pilar está escoando no início da flambagem, a rigidez do pilar é reduzida. Neste caso, as vigas fornecem maior restrição relativa aos pilares que no caso elástico, causando um menor fator G e, conseqüentemente, um menor fator K . Assim, considera-se a inelasticidade do pilar devido principalmente a tensões residuais. Neste trabalho, será considerado apenas o comportamento elástico.

Outro exemplo se refere a hipótese de rigidez total dos nós. Quando o efeito da flexibilidade da ligação é considerada, a rigidez da viga, $(EI/L)_b$, usada no cálculo de G_A e G_B , deve ser multiplicada pelo fator α para levar em conta o comportamento semirrígido da ligação. Esse procedimento será tratado com detalhes neste trabalho.

2.3 CONSIDERAÇÕES DAS LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS NA ESTABILIDADE DE PÓRTICOS

Quando as extremidades da viga, conectadas a outros membros, não são totalmente rígidas, mas semirrígidas, conforme mostra a Figura 17, os momentos nas extremidades são dados por:

Figura 17 – Viga com extremidades semirrígidas



Fonte: Adaptado de (CHEN; LUI, 1991)

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[4 \left(\theta_A - \frac{M_A}{R_{KA}} \right) + 2 \left(\theta_B - \frac{M_B}{R_{KB}} \right) \right], \quad (46)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[2 \left(\theta_A - \frac{M_A}{R_{KA}} \right) + 4 \left(\theta_B - \frac{M_B}{R_{KB}} \right) \right], \quad (47)$$

onde R_{KA} e R_{KB} são as rigidezes elásticas das molas nas extremidades A e B, respectivamente.

Resolvendo as equações acima para M_A e M_B , tem-se:

$$M_A = \frac{EI}{LR^*} \left[\left(4 + \frac{16EI}{LR_{KB}} - \frac{4EI}{LR_{KB}} \right) \theta_A + 2\theta_B \right], \quad (48)$$

$$M_B = \frac{EI}{LR^*} \left[2\theta_A + \left(4 + \frac{16EI}{LR_{KA}} - \frac{4EI}{LR_{KA}} \right) \theta_B \right], \quad (49)$$

onde:

$$R^* = \left(1 + \frac{4EI}{LR_{KA}} \right) \left(1 + \frac{4EI}{LR_{KB}} \right) - \left(\frac{EI}{L} \right)^2 \frac{4}{R_{KA}R_{KB}}. \quad (50)$$

Assumindo que $R_{KA} = R_{KB} = R_k$, tem-se, para um pórtico indeslocável, $\theta_B = -\theta_A$. Então a equação de M_A pode ser reescrita como:

$$M_A = \frac{2EI}{L} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{2EI}{LR_K}\right)} \right] \theta_A. \quad (51)$$

Para um pórtico deslocável, $\theta_B = \theta_A$ e a equação de M_A pode ser reescrita como:

$$M_A = \frac{6EI}{L} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{6EI}{LR_K}\right)} \right] \theta_A. \quad (52)$$

Pode-se observar que o efeito da flexibilidade da ligação pode ser levado em consideração modificando-se a rigidez da viga de um pórtico indeslocável por um fator igual a $\alpha_{nt} = 1/(1 + 2EI / LR_k)$ e a rigidez da viga de um pórtico deslocável por um fator igual a $\alpha_{lt} = 1/(1 + 6EI / LR_k)$.

A rigidez da viga, $(EI/L)_b$, usada no cálculo de G_A e G_B , apresentado posteriormente, deve ser multiplicada pelo fator α .

Nas expressões anteriores, $R_k = k_{i0}$ para pórticos indeslocáveis e $R_k = k_b$ para pórticos deslocáveis.

2.3.1 Determinação da rigidez da ligação para pórticos indeslocáveis - k_{i0}

Dois parâmetros da ligação são necessários para a determinação de k_{i0} : a rigidez rotacional inicial, k_i , e a capacidade de momento último da ligação, M_u , da ligação. Esses parâmetros podem ser determinados por meio de curva experimental momento-rotação, por modelos analíticos ou modelos mecânicos. k_{i0} é definida como uma rigidez secante correspondente a uma rotação igual a θ_0 . Essa rotação é obtida por meio da interseção da rigidez inicial e o momento último da ligação (Figura 4). Chen e Lui (1991), recomendam o uso de k_{i0} em vez de k_i como uma rigidez representativa da ligação na análise de pórticos indeslocáveis, uma vez que, a rigidez rotacional inicial apresenta um valor muito alto para ser usado nas análises aproximadas.

2.3.2 Determinação da rigidez da ligação para pórticos deslocáveis – k_b

Em estágios avançados de carregamento, a ligação apresenta rotações crescentes e, conseqüentemente, exibe valores decrescentes de rigidez. Para pórticos deslocáveis, presume-se que a ligação sofre uma deformação perceptível

quando o efeito das cargas laterais é adicionado ao das cargas gravitacionais. Para o método simplificado, apresentado posteriormente, na determinação dos esforços da estrutura deslocável (“*lt*”), a rigidez rotacional de projeto da ligação deve ser menor do que a rigidez utilizada para a determinação de esforços na estrutura indeslocável (“*nt*”). Barakat e Chen (1990) apud Chen e Toma (1994) propuseram um valor de rigidez secante da ligação k_b para a análise do pórtico deslocável, utilizando-se a linha de viga, descrita a seguir.

O Método da Linha de Viga, ou *Beam Line*, desenvolvido por Batho e Rowan (1934) apud Silva (2010), visa compatibilizar o comportamento da viga e da ligação, como técnica para analisar o comportamento das ligações semirrígidas em estruturas metálicas. Por meio desse método, é possível obter a resistência da ligação relacionada à sua rigidez, considerando-se comportamento elástico.

A reta, definida como linha de viga, é traçada de acordo com o estado de comportamento da viga, com relação às suas condições de extremidade. Tem-se, assim, dois pontos: um correspondente à situação de engastamento perfeito, e outro, de rótula perfeita nas extremidades da viga. O primeiro relaciona-se à situação de ausência total de rotação nas ligações das extremidades da viga, não importando a magnitude do momento fletor resistido pela ligação. Já o segundo corresponde à situação em que as ligações não resistem aos momentos fletores, ficando livres para girar.

A equação da linha de viga, mostrada na Equação 53, pode ser determinada por meio da teoria estrutural elementar, considerando uma viga com carregamento uniformemente distribuído, conforme mostrado em Figura 18.

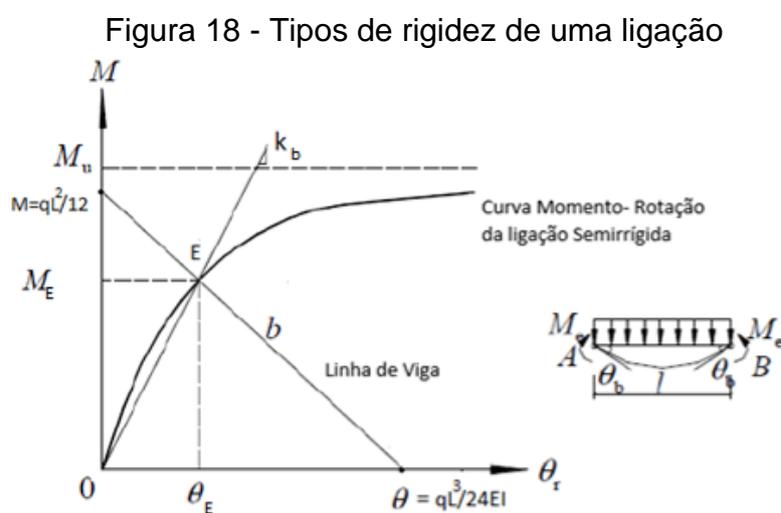
$$M = \frac{qL^2}{12} - \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta. \quad (53)$$

Aplicando-se a condição de ligação rígida nas extremidades da viga, tem-se da Equação 53, que θ é nulo e o momento M é dado pela Equação 54. Se as extremidades da viga estiverem sendo consideradas flexíveis, o momento M é nulo e a rotação θ é determinada pela Equação 55.

$$M = \frac{qL^2}{12}, \quad (54)$$

$$\theta = \frac{qL^3}{24EI}. \quad (55)$$

A Figura 18 representa graficamente o método da linha de viga. O ponto E representa a compatibilização entre o giro da extremidade da viga com o giro relativo da ligação, determinando-se o momento M_E e a rigidez secante k_b . Estes parâmetros são geralmente utilizados no cálculo da estrutura "I" (*lateral translation*), conforme mostrado posteriormente, considerando ligações semirrígidas.



Fonte: Adaptado de (HE et al., 2009)

2.4 ANÁLISE EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM DE PÓRTICOS PLANOS

2.4.1 Considerações Iniciais

A análise tem como função determinar os efeitos das ações na estrutura, como por exemplo, os esforços solicitantes e os deslocamentos produzidos no modelo estrutural. A análise deve garantir que as estruturas tenham uma segurança adequada em relação aos estados limites últimos e de serviço e que, ao mesmo tempo, sejam as mais econômicas possíveis (AMARAL, 2003).

Com o aumento da esbeltez das estruturas, das possibilidades de análises oferecidas por meio de diferentes ferramentas computacionais e das novas exigências normativas, os engenheiros calculistas têm reconhecido cada vez mais a importância e a necessidade de se considerar, nos projetos de estruturas de aço, os diferentes efeitos não lineares envolvidos no problema. Dentre esses efeitos

destacam-se principalmente os advindos da mudança na geometria da estrutura (análise em teoria de 2ª ordem), do comportamento elastoplástico do material e do comportamento das ligações.

Anteriormente, os projetos eram desenvolvidos considerando-se uma análise na qual eram considerados o equilíbrio da estrutura na sua posição indeslocada e o comportamento elástico linear dos materiais, ou seja, utilizando-se a análise elástica em teoria de primeira ordem. No entanto, essa situação não refletia a condição real da estrutura.

Segundo a ABNT NBR 8800: 2008, as estruturas podem ser classificadas quanto à sensibilidade a deslocamentos laterais em estruturas de pequena, média e grande deslocabilidade. A classificação da estrutura deve ser feita a partir de análises que considerem as combinações de ações no estado limite último. Além disso, para fins de classificação, as imperfeições iniciais de material não precisam ser consideradas. A estrutura é classificada como de pequena deslocabilidade quando, em todos os andares, a relação entre o deslocamento lateral do andar relativo a base, obtido na análise de 2ª ordem, e aquele obtido em 1ª ordem, é igual ou inferior a 1,1. Se a relação entre os deslocamentos for superior a 1,1 ou igual ou inferior a 1,4, a estrutura é considerada de média deslocabilidade. Finalmente, se a relação ultrapassar o limite de 1,4, a estrutura é considerada de grande deslocabilidade.

A ABNT NBR 8800: 2008 indica que a relação entre os deslocamentos laterais de 2ª e de 1ª ordem de um andar em relação à base pode ser aproximada, de forma aceitável, pelo valor do coeficiente B_2 , presente no método da amplificação dos esforços solicitantes, facilitando a classificação das estruturas.

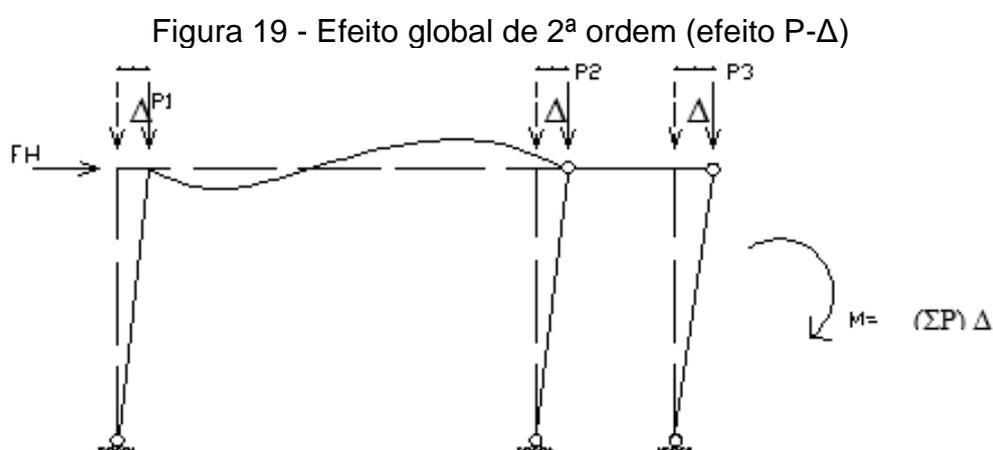
A ABNT NBR 8800 (2008) recomenda a determinação dos esforços solicitantes por meio de um tipo de análise, conforme a classificação da estrutura. Assim, para uma estrutura de média deslocabilidade permite-se que os esforços solicitantes sejam determinados por meio de uma análise elástica de segunda ordem aproximada, podendo ser utilizado o método de amplificação dos esforços solicitantes (MAES), no qual, os coeficientes B_1 e B_2 são calculados com as rigidezes a flexão e axial reduzidas para 80% dos seus valores originais, de modo a considerar a influência das imperfeições do material. Quando a estrutura é classificada de pequena deslocabilidade, o efeito global de segunda ordem $P-\Delta$ e o efeito das imperfeições do material podem ser desprezados, podendo-se obter os esforços a partir de uma análise elástica linear. Essa simplificação é permitida,

desde que as forças axiais solicitantes de cálculo de todas as barras cuja rigidez à flexão contribua para a estabilidade lateral da estrutura, em cada uma das combinações últimas de ações, não sejam superiores a 50% da força axial correspondente ao escoamento da seção transversal dessas barras. Para as estruturas classificadas como de grande deslocabilidade, deve-se fazer a análise de segunda ordem rigorosa, incluindo-se as não linearidades geométricas e de material. Entretanto, para a obtenção de respostas mais realistas nas análises estabelecidas pela norma, independente da classificação da estrutura, o comportamento semirrígido das ligações deve ser considerado.

A análise em teoria de segunda ordem é complexa, por não se conhecer a geometria deformada da estrutura na fase de resolução das equações de equilíbrio, tornando inevitável utilizar um processo incremental-iterativo.

Os efeitos global e local de segunda ordem, $P-\Delta$ e $P-\delta$, respectivamente, devem, necessariamente, ser considerados durante a análise em teoria de segunda ordem. O efeito global caracteriza-se pelas respostas decorrentes dos deslocamentos horizontais relativos das extremidades das barras, submetidas às cargas verticais atuantes na estrutura.

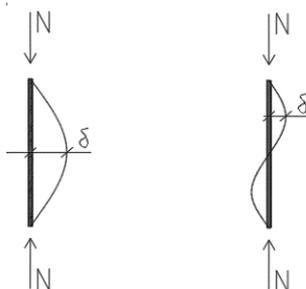
O fenômeno pode ser resumido da seguinte forma: os nós superiores de um pórtico em que atuam cargas verticais e horizontais sofrem deslocamentos. Essas cargas verticais, juntamente com o deslocamento, geram um momento de 2ª ordem. A Figura 19 mostra o surgimento do momento de segunda ordem.



Fonte: Adaptado de (FAKURY; SILVA; CALDAS, 2015)

Já o efeito local de segunda ordem, conhecido por P- δ , reflete as respostas decorrentes dos deslocamentos da configuração deformada de cada barra da estrutura submetida à própria força axial. Por exemplo, o momento fletor da barra comprimida, indicada na Figura 20, é aumentado pelo valor do produto entre N e δ .

Figura 20 - Efeito local de 2ª ordem (efeito P- δ)



Fonte: Adaptado de (FAKURY; SILVA; CALDAS, 2015)

2.4.2 Tipos de Análises

A análise estrutural pode ser diferenciada por duas avaliações distintas: a consideração ou não da geometria deformada no estudo do equilíbrio da estrutura e da plastificação das barras.

Quando se considera a proporcionalidade entre tensões e deformações em todos os elementos da estrutura, diz-se que a análise é elástica, ou seja, obedece à Lei de Hooke. Significa dizer que existe linearidade física na análise estrutural. Caso essa proporcionalidade entre tensões e deformações não ocorra, pode-se afirmar que a não linearidade física do material deve ser considerada na análise.

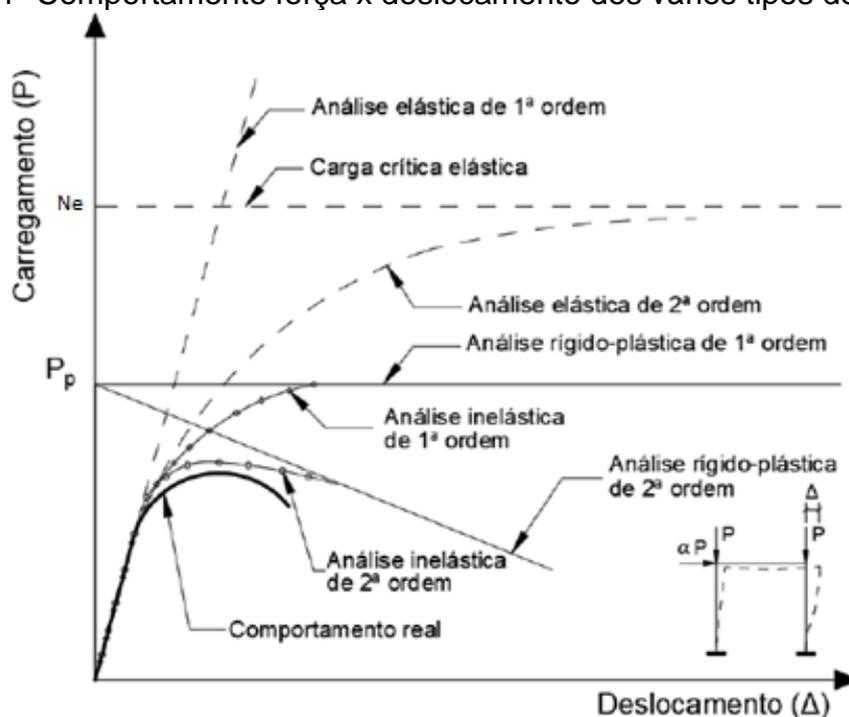
O outro tipo de classificação das análises leva em consideração a posição da estrutura para a formulação das suas equações de equilíbrio. A análise realizada em teoria de primeira ordem considera a estrutura em sua posição original (indeslocada) para obtenção das equações de equilíbrio. Tem-se a linearidade geométrica. Essa análise refere-se à proporcionalidade entre os esforços aplicados e os deslocamentos, angulares ou lineares, provocados na estrutura. Portanto, uma análise é geometricamente linear quando realizada em teoria de 1ª ordem e geometricamente não linear quando realizada em teoria de 2ª ordem.

Para se obter informação sobre a estabilidade da estrutura, deve-se realizar a análise em teoria de segunda ordem, que considera a posição deslocada da

estrutura na formulação das equações de equilíbrio. Assim, assume-se que o deslocamento interfere no equilíbrio da estrutura, podendo-se considerar regime de pequenos ou grandes deslocamentos. Neste tipo de análise, devem ser considerados os efeitos global ($P-\Delta$) e local ($P-\delta$) de segunda ordem, resultando em maiores momentos e forças internas.

A Figura 21 representa as curvas *força x deslocamento lateral* para diferentes tipos de análise de um pórtico rígido.

Figura 21- Comportamento força x deslocamento dos vários tipos de análise



Fonte: Adaptado de (VIANA, 2019)

Observa-se, na Figura 21, que a curva de análise elástica em teoria de primeira ordem é linear. Neste tipo de análise, são válidos o princípio da superposição dos efeitos e a hipótese de ocorrência de pequenos deslocamentos, que não afetam o equilíbrio da estrutura.

Na análise elástica em teoria de segunda ordem, observa-se que a curva tende assintoticamente para a carga crítica elástica da estrutura. Esta análise considera os efeitos da estabilidade elástica, mas não fornece nenhuma informação direta da resistência inelástica real do pórtico.

Na análise inelástica em teoria primeira ordem, a curva aproxima de forma assintótica da carga limite plástica. Este tipo de análise inclui os efeitos de plastificação das barras, mas não fornece informação sobre a estabilidade da estrutura.

A análise inelástica em teoria de segunda ordem, que considera as não linearidades tanto física quanto geométrica, apresenta a curva que mais se aproxima do comportamento real do pórtico. A principal vantagem dessa análise é a consideração da redistribuição dos esforços internos, levando a resultados mais realistas da rigidez, da resistência e da estabilidade da estrutura, e possibilita prever, com maior precisão, os possíveis modos de colapso da estrutura (SILVA, 2010).

O estudo em teoria de segunda ordem pode ser realizado pelo método de análise aproximada ou por análise rigorosa.

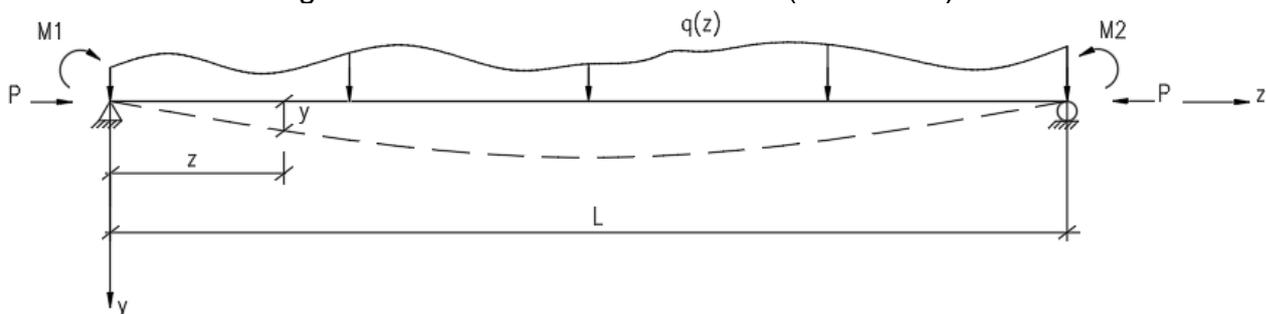
2.4.3 Métodos Aproximados de Análise

Em estruturas calculadas com base na análise elástica, os esforços solicitantes devem ser determinados por meio de uma análise elástica rigorosa em teoria de 2ª ordem ou por uma análise de 2ª ordem aproximada. A determinação rigorosa desses esforços requer cálculo não linear trabalhoso em processo iterativo. Na maioria das situações, é aceitável obter os esforços solicitantes por meio de formulações aproximadas. Os métodos de Amplificação dos Momentos (B_1 - B_2), do Coeficiente γ_z e da Força Nodal Equivalente (P - Δ) são exemplos de métodos aproximados de análise em 2ª ordem. Neste estudo, será apresentado o método de Amplificação dos Momentos (B_1 - B_2), em que os efeitos de segunda ordem são obtidos por meio de análises elásticas em teoria de 1ª ordem. Este método considera os efeitos P - δ e P - Δ em sua formulação.

2.4.3.1 Efeito P - δ – Coeficiente B_1

A Figura 22 mostra o carregamento geral de uma barra de pórtico, a saber: força de compressão P , carregamento distribuído $q(z)$ atuando transversalmente ao longo de todo eixo da barra e momentos M_1 e M_2 aplicados em suas extremidades.

Figura 22 - Efeito local de 2ª ordem (efeito P-δ)



Fonte: Adaptado de (SILVA, 2004)

O carregamento gera deslocamento e momento fletor de primeira ordem, M_I e y_I . Esse deslocamento, juntamente com a força normal P , produzirá momento fletor e deslocamento de 2ª ordem, M_{II} e y_{II} . Ou seja, M_{II} e y_{II} são decorrentes do efeito de segunda ordem, chamado efeito P- δ . Assim, o momento fletor total e deslocamento total são a soma das duas parcelas existentes: deslocamento e momento de 1ª ordem e deslocamento e momento devido ao efeito P- δ , de 2ª ordem. Para obtenção do momento fletor M_z , formula-se a equação de equilíbrio na posição deformada da barra:

$$M_z = M_I + M_{II} = M_I + Py = -EI \frac{d^2y}{dz^2}. \quad (56)$$

Reorganizando a Equação 56, derivando duas vezes, considerando constante o produto EI e adotando $k^2=P/EI$, obtém-se a equação diferencial final:

$$\frac{d^2M_z}{dz^2} + k^2M_z = \frac{d^2M_I}{dz^2}, \quad (57)$$

que apresenta solução geral dada por Equação 58:

$$M_z = A \sin kz + B \cos kz + f_1(z), \quad (58)$$

sendo $f_1(z)$ o valor do momento M_z que satisfaz Equação 57. Se M_z é função contínua, seu máximo pode ser encontrado derivando-se a Equação 58, igualando-a igual a zero e considerando $df_1(z)/dz = 0$, com A e B constantes da Equação 58.

$$M_{z_{max}} = \frac{A^2}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{B^2}{\sqrt{A^2+B^2}} + f_1(z) = \sqrt{A^2+B^2} + f_1(z). \quad (59)$$

2.4.3.1.1 Situação A: M_1 e M_2 desiguais nas extremidades da barra e carregamento distribuído nulo

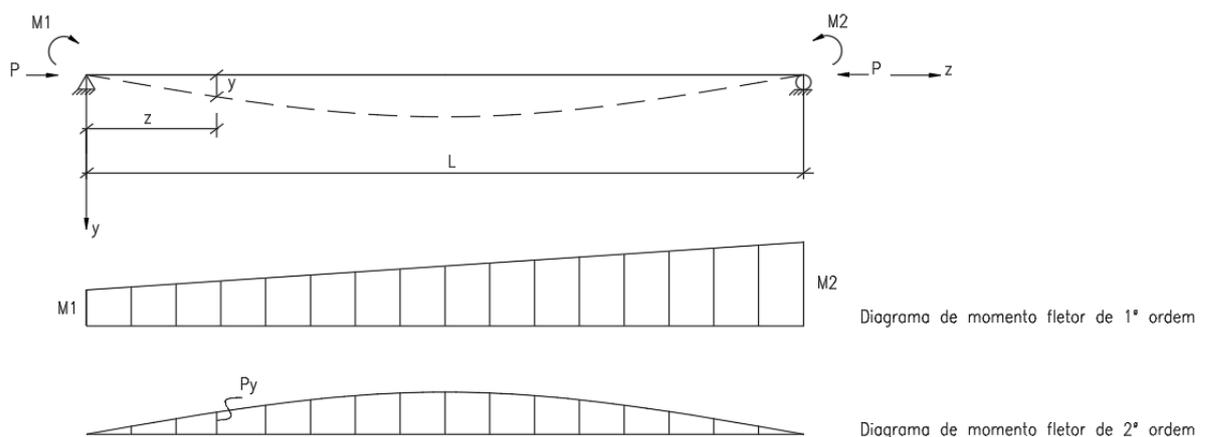
Seja $M_2 > M_1$ e $q(z)=0$ conforme ilustra a Figura 23. Tem-se momento de 1ª ordem igual a:

$$M_I = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{L} z. \quad (60)$$

Com $d^2 M_I / dz^2 = 0$, a Equação 57 torna-se homogênea. Fazendo-se $f_1(z) = 0$, determina-se o momento máximo $M_{z_{max}}$ e, por meio de aplicação das condições de contorno na Equação 58, as constantes A e B são determinadas.

$$M_{z_{max}} = M_2 \sqrt{\frac{1 - 2\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \cos(kl) + \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2}{\sin^2 kl}}. \quad (61)$$

Figura 23 – Diagramas de momentos fletores de uma barra submetida a força de compressão e momentos desiguais nas extremidades.



Fonte: Adaptado de (SILVA, 2004)

2.4.3.1.2 Situação B: M_1 e M_2 iguais nas extremidades da barra e carregamento distribuído nulo

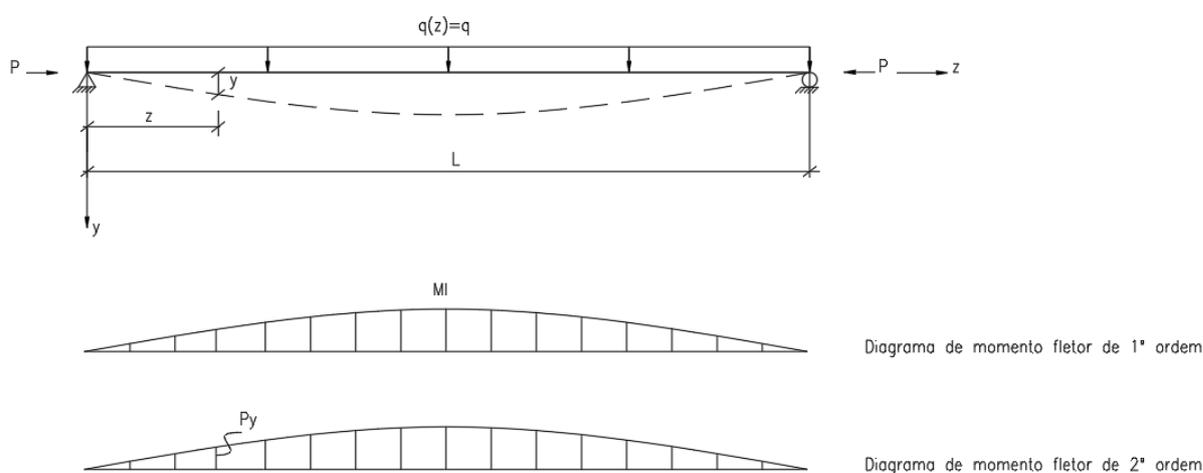
Trata-se de uma particularização da situação A, pois $M_1 = M_2 = M$. Tem-se, portanto:

$$M_{z_{max}} = M \sec\left(\frac{kl}{2}\right). \quad (62)$$

2.4.3.1.3 Situação C: M_1 e M_2 nulos e carregamento uniformemente distribuído $q \neq 0$

Seja a barra mostrada na Figura 24, com carregamento uniformemente distribuído.

Figura 24 – Diagramas de momentos fletores de uma barra submetida a uma força de compressão e carregamento uniformemente distribuído.



Fonte: Adaptado de (SILVA, 2004)

O momento fletor de 1ª ordem pode ser determinado através da Equação 63:

$$M_I = \frac{q}{2} z(L - z). \quad (63)$$

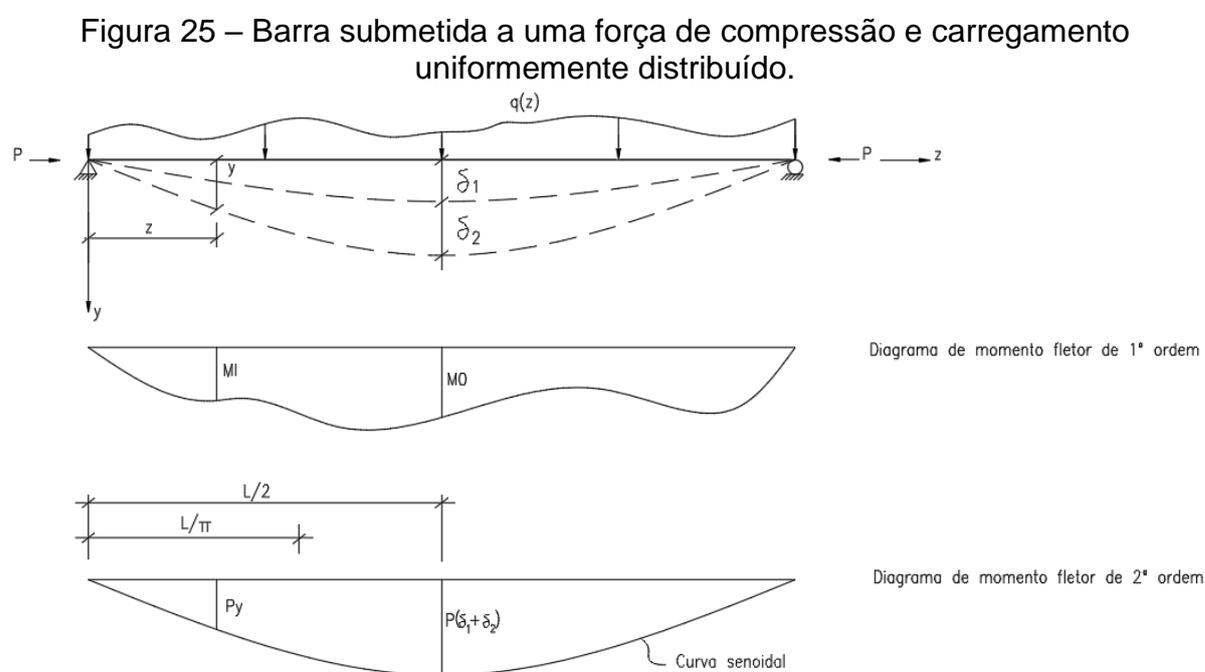
Assim, $d^2 M_I / dz^2 = -q$ e $f_1(z) \neq 0$. Sendo a solução particular igual a $f_1(z) = C_1 + C_2 z$ e determinando todas as constantes da Equação 59, o momento fletor máximo é obtido por meio da Equação 64:

$$M_{z_{max}} = \frac{qL^2}{8} \left[\left(\frac{8}{(kL)^2} \right) \left(\sec \left(\frac{kL}{2} \right) - 1 \right) \right]. \quad (64)$$

Percebe-se que em todas as situações, o momento fletor máximo de 2ª ordem, $M_{z_{max}}$, é o valor do momento fletor máximo de 1ª ordem, multiplicado por um coeficiente de majoração, devido à carga de compressão.

Existe um procedimento simplificado para determinação do momento fletor máximo, $M_{z_{max}}$.

Considere a barra de um pórtico submetida a um carregamento $q(z)$ e um deslocamento de 1ª ordem, δ_1 devido a essa carga, conforme mostra a Figura 25.



Fonte: Adaptado de (SILVA, 2004)

Adotando uma curva senoidal para o diagrama de momento fletor de 2ª ordem, o deslocamento δ_2 valerá:

$$\delta_2 = \delta_1 \left[\frac{N_{sd}/N_{e1}}{1 - N_{sd}/N_{e1}} \right] = \delta_1 \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right), \quad (65)$$

sendo $\alpha = N_{sd} / N_{e1}$, com N_{sd} igual à força de compressão majorada da barra e N_{e1} igual à carga de flambagem elástica, com fator do comprimento efetivo da barra, K ,

igual a 1. Assim, o deslocamento e o momento máximos de segunda ordem são dados por:

$$y_{max} = \delta_1 + \delta_2 = \delta_1 \left(\frac{1}{1-\alpha} \right), \quad (66)$$

$$M_{zmax} = M_0 + P y_{max}. \quad (67)$$

M_{zmax} pode ser reescrito como o produto entre o momento máximo de 1ª ordem, M_0 , pelo coeficiente de amplificação B_1 , que é determinado conforme mostra a Equação 69:

$$M_{zmax} = B_1 \cdot M_0, \quad (68)$$

$$B_1 = \frac{C_m}{\left(1 - \frac{N_{sd}}{N_{e1}}\right)} \geq 1,0, \quad (69)$$

onde,

$$C_m = 1 + \psi\alpha = 1 + \left(\frac{\pi^2 EI \delta_1}{M_0 L^2} - 1 \right) \left(\frac{N_{sd}}{N_{e1}} \right). \quad (70)$$

2.4.3.2 Efeito P-Δ – Coeficiente B₂

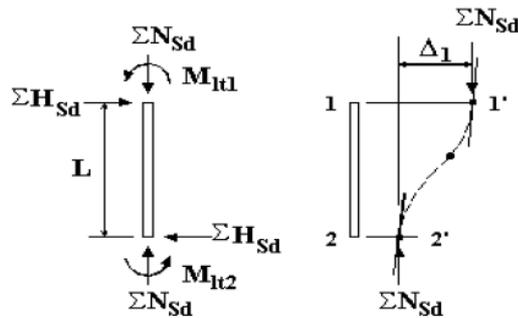
A Figura 26 mostra as forças que atuam nos pilares de um andar de um pórtico de múltiplos andares e o seu equilíbrio em teoria de primeira ordem, que é formulado como:

$$M_{lt1} + M_{lt2} = \sum H_{sd} L. \quad (71)$$

O deslocamento lateral Δ_1 é denominado deslocamento de 1ª ordem, pois foi obtido através da atuação das forças horizontais $\sum H_{sd}$ nessa posição indeformada da estrutura. As forças verticais, $\sum N_{sd}$, interagirão com Δ_1 , acrescentando um valor ao momento de 1ª ordem, que será dado por $\sum H_{sd} \cdot L + \sum N_{sd} \cdot \Delta_1$. Assim, o deslocamento lateral relativo aumentará e passará a valer Δ_2 , sendo essa a posição deformada

final, na qual ocorrerá o equilíbrio da estrutura. Este fenômeno é conhecido como feito P- Δ , baseado no conceito de rigidez do andar.

Figura 26 – Forças atuantes sobre pilares de um andar de um pórtico de múltiplos andares – Análise do equilíbrio em teoria de 1ª ordem.



Fonte: (SILVA, 2004)

O equilíbrio final, considerando-se o efeito de 2ª ordem, P- Δ , pode ser descrito como:

$$B_2(M_{lt1} + M_{lt2}) = \sum H_{sd} \cdot L + \sum N_{sd} \Delta_2, \quad (72)$$

em que B_2 representa o coeficiente de amplificação e M_{lt1} e M_{lt2} são os momentos fletores de 1ª ordem.

O coeficiente de amplificação B_2 é determinado por meio das Equações 71 e 72, sendo igual a:

$$B_2 = \frac{\sum H_{sd} + \sum N_{sd} \Delta_2}{\sum H_{sd} L}. \quad (73)$$

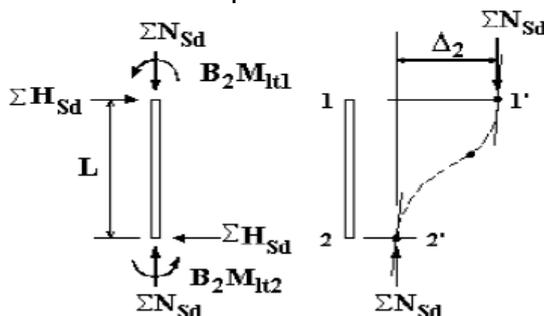
A partir da Figura 26 e adotando um fator de proporcionalidade η , é possível definir:

$$\Delta_{0h} = \eta \sum H_{sd}. \quad (74)$$

Com referência na Figura 27, que representa o equilíbrio de 2ª ordem de um pilar de um andar de um pórtico de múltiplos andares, determina-se a força lateral equivalente amplificada (2ª ordem), H_{equiv} :

$$H_{equiv} = \sum H_{sd} + \frac{\sum N_{sd} \Delta_2}{L}. \quad (75)$$

Figura 27 – Forças atuantes sobre pilares de um andar de um pórtico de múltiplos andares – Análise do equilíbrio em teoria de 2ª ordem.



Fonte: (SILVA, 2004)

Da mesma forma:

$$\Delta_2 = \eta H_{equiv} = \eta \left(\sum H_{sd} + \frac{\sum N_{sd} \Delta_2}{L} \right). \quad (76)$$

Por meio da Equação 74, determina-se:

$$\Delta_2 = \Delta_{0h} + \frac{\Delta_{0h} \sum N_{sd} \Delta_2}{\sum H_{sd} L}. \quad (77)$$

Reajustando e isolando Δ_2 , tem-se:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_{0h}}{1 - \frac{\sum N_{sd} \Delta_{0h}}{\sum H_{sd} L}}. \quad (78)$$

Levando a Equação 78 na Equação 73, obtém-se a equação que determina B_2 :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta_{0h} \sum N_{sd}}{L \sum H_{sd}}}, \quad (79)$$

sendo, ΣN_{sd} o somatório das forças axiais de compressão solicitantes de cálculo, em todos os pilares e elementos resistentes a cargas verticais do andar, Δ_{h0} o deslocamento horizontal relativo e ΣH_{sd} a força cortante no andar, ou seja, o somatório das forças horizontais de cálculo no andar, que produzem Δ_{h0} .

O anexo D da ABNT NBR 8800: 2008 apresenta o método de Amplificação dos Esforços Solicitantes (MAES) para a execução de análise elástica aproximada de segunda ordem, levando em conta os efeitos global e local, demonstrados acima. Os esforços solicitantes aproximados podem ser determinados por meio das Equações 80, 81 e 82:

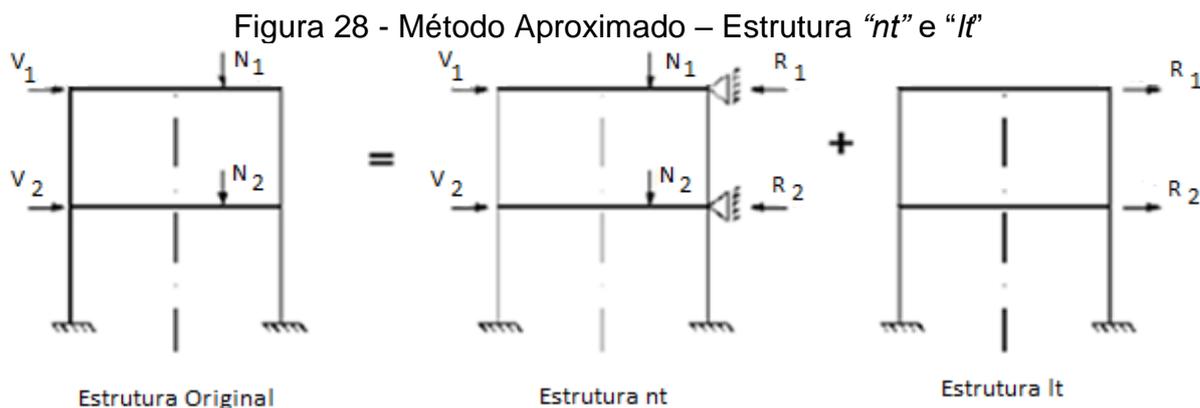
$$N_{sd} = N_{nt} + B_2 N_{lt}, \quad (80)$$

$$V_{sd} = V_{nt} + V_{lt}, \quad (81)$$

$$M_{sd} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt}, \quad (82)$$

onde N_{nt} , V_{nt} e M_{nt} são os esforços solicitantes de cálculo obtidos por meio da análise estrutural em primeira ordem de uma estrutura denominada “*nt*” (*no translation*). Assume-se que esta estrutura não apresenta deslocamento lateral, ou seja, os nós são impedidos de se deslocar horizontalmente devido à consideração de apoios fictícios. N_{lt} , V_{lt} e M_{lt} representam os esforços solicitantes determinados na estrutura “*lt*” (*lateral translation*), que contém apenas as reações dos apoios fictícios (contidos na estrutura “*nt*”), aplicadas nos mesmos nós, porém em sentidos contrários. Este artifício de cálculo que consiste em dividir a estrutura original em duas outras está ilustrado na Figura 28, a seguir:

De posse dos valores dos esforços atuantes nas barras das estruturas “*nt*” e “*lt*”, torna-se possível o cálculo dos coeficientes B_1 e B_2 . Esses coeficientes serão utilizados para obter os esforços de segunda ordem aproximada em cada barra do pórtico.



Fonte: Adaptado de (ABNT NBR8800, 2008)

O coeficiente B_1 , conforme apresentado anteriormente, considera, no valor dos esforços solicitantes, o efeito local $P-\delta$, e é tanto maior quanto maior for o deslocamento encontrado. Cada barra da estrutura possui seu valor de B_1 . Ele deve ser adotado igual a unidade se a força na barra for de tração e, se for compressão, deve ser obtido conforme Equação 69, reescrita abaixo:

$$B_1 = \frac{C_m}{(1 - N_{sd}/N_{e1})} \geq 1,0, \quad (69)$$

em que:

C_m = coeficiente de equivalência de momentos: vale 1,0 se houver forças transversais entre as extremidades da barra em consideração. Caso contrário, $C_m = 0,6 - 0,4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$, sendo $\left(\frac{M_1}{M_2} \right)$ a relação entre o menor e o maior dos momentos fletores solicitantes de cálculo (em módulo) na estrutura “nt”, no plano de flexão, nas extremidades da barra. Para barras comprimidas sujeitas a forças transversais entre os nós, C_m é tomado igual a 0,85 no caso de barras com ambas extremidades engastadas, ou igual a 1,0 para os demais casos. O sinal da relação é obtido observando-se a curvatura causada pelos momentos: relação positiva, se a curvatura for dupla, e negativa, caso a curvatura seja simples;

N_{sd} = força axial de cada barra e

N_{e1} = carga de flambagem elástica da barra, dada por: $N_{e1} = \frac{\pi^2 EI}{(k_1 l)^2}$.

A ABNT NBR 8800: 2008 estabelece para o cálculo de N_e , o comprimento real do pilar, isto é, k_1 sempre igual a 1. Para levar em conta o comportamento das ligações,

pode-se adotar a equação aproximada de k_1 , apresentada anteriormente e reescrita a seguir, que considera as rigidezes relativas entre pilares e vigas no topo e na base do pilar em análise na estrutura “nt”, como fazem He et al. (2009):

$$k_1 = \left[\frac{3G_A G_B + 1,4(G_A + G_B) + 0,64}{3G_A G_B + 2(G_A + G_B) + 1,28} \right], \quad (43)$$

onde:

$$G_A = \frac{\sum_A i_c}{\sum_A \alpha_A i_b}, \quad (83)$$

$$G_B = \frac{\sum_B i_c}{\sum_B \alpha_B i_b}, \quad (84)$$

$$\alpha_{nt} = \frac{1}{[1 + (2EI_b / lk_{i0})]}. \quad (85)$$

Já o coeficiente B_2 considera o efeito global, P- Δ , nos valores de força axial e de momento fletor e é proporcional ao deslocamento Δh e às forças gravitacionais atuantes na estrutura. Esse coeficiente é determinado por andar, ou seja, cada andar da estrutura possuirá um valor de B_2 , conforme definido anteriormente na Equação 79, reescrita a seguir, incluindo o coeficiente de ajuste R_s , recomendado pela ABNT NBR 8800: 2008:

$$B_2 = \frac{1}{\left[1 - \frac{(1)}{R_s} \left(\frac{\Delta h}{h} \right) \left(\frac{\sum N_{sd}}{\sum H_{sd}} \right) \right]}, \quad (86)$$

onde:

$\frac{\sum N_{sd}}{\sum H_{sd}}$ é a relação entre a carga total gravitacional atuante no andar considerado e a força cortante da estrutura “/” no andar, produzida pelas cargas horizontais;

$\frac{\Delta h}{h}$ representa a relação entre o deslocamento horizontal relativo entre os dois níveis sucessivos e a altura do andar e

R_s é o coeficiente de ajuste, sendo 0,85 quando a subestrutura de contraventamento for pórtico rígido e 1,0 nos demais casos.

O coeficiente B_2 também pode ser determinado pela Equação 87, conforme fazem He et al.(2009) :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P}{\sum N_e}}, \quad (87)$$

onde:

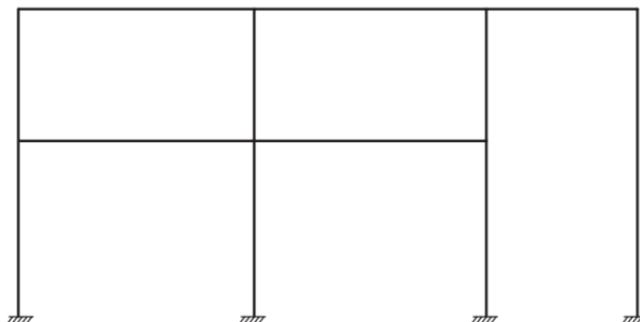
$\sum P$ = somatório das forças normais de compressão solicitantes de cálculo em todos os pilares e outros elementos resistentes a cargas verticais do andar,

$\sum N_e$ = somatório das forças que provocam a flambagem elástica das barras que efetivamente pertencem ao sistema lateral resistente no andar considerado,

representado por $\sum N_e = \frac{\pi^2 EI}{(k_2 l)^2} = R_s \frac{h}{\Delta h} \sum H_{sd}$

Nenhuma orientação é fornecida para casos de pórticos com andares desalinhados, conforme ilustra a Figura 29. Nesses casos, o fator B_2 do pilar do lado direito não pode ser calculado conforme a norma, sendo a análise direta de segunda ordem a escolha mais prudente (GALAMBOS; SUROVEK, 2008).

Figura 29 – Pórtico com andares desalinhados



Fonte:(GALAMBOS; SUROVEK, 2008)

Para levar em conta o comportamento das ligações, pode-se adotar a equação aproximada de k_2 , apresentada anteriormente e reescrita a seguir, que considera as rigidezes relativas entre pilares e vigas no topo e na base do pilar em análise na estrutura “ l^* ”, como fazem He et al. (2009):

$$k_2 = \sqrt{\frac{1,52G_A G_B + 4(G_A + G_B) + 7,5}{(G_A + G_B + 7,5)}}, \quad (45)$$

onde:

$$G_A = \frac{\sum_A i_c}{\sum_A \alpha_A i_b}, \quad (88)$$

$$G_B = \frac{\sum_B i_c}{\sum_B \alpha_B i_b}, \quad (89)$$

$$\alpha_{lt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{6EI_b}{lk_b}\right)}. \quad (90)$$

A ABNT NBR8800: 2008 menciona que a relação entre o deslocamento lateral obtido na análise de 2ª ordem e aquele obtido na análise de primeira ordem, pode ser aproximada, de maneira aceitável, pelo coeficiente B_2 .

2.4.4 Análise Rigorosa em Teoria de 2ª Ordem

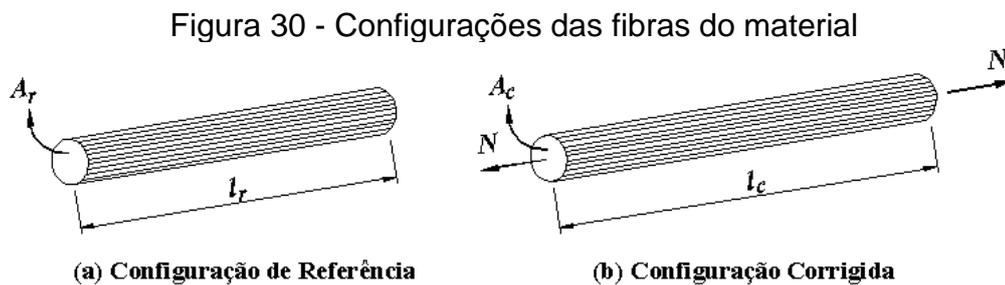
Para realizar as análises elásticas em teoria de 1ª ordem e aproximada e rigorosa em teoria de 2ª ordem, considerando ou não a flexibilidade das ligações, pode ser utilizado o programa PPLANLEP (Pórticos Planos de Aço, considerando a Análise Não Linear Elasto-plástica), desenvolvido por Lavall (1996) e aprimorado por Silva (2010). O programa é escrito na linguagem FORTRAN 90. Além da análise elástica, o programa é capaz de realizar a análise elastoplástica de pórticos planos de aço com ligações semirrígidas. Entretanto, a análise não linear do material não será contemplada nesta pesquisa.

A solução numérica das equações não lineares é realizada através do método Newton-Raphson puro. Assim, no processo incremental-iterativo do programa, analisa-se o equilíbrio da estrutura em cada iteração de acordo com um critério de convergência baseado nos deslocamentos.

Os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$, oriundos da análise não linear geométrica, são contemplados. Os efeitos oriundos da plasticidade, conforme dito anteriormente, não serão considerados na pesquisa. O programa permite uma representação multilinear da curva momento x rotação, com até cinco trechos lineares, com intuito de modelar o comportamento não linear de uma ligação semirrígida, e considera o elemento de mola para representar a ligação.

2.4.4.1 Definições de Deformações e Tensões

Seja uma fibra submetida a uma força normal N , com as seguintes características geométricas em sua configuração original: volume V_r , área da seção transversal A_r e comprimento l_r , conforme mostra a Figura 30-a. Para a configuração deformada, mostrada na Figura 30-b, o volume, a área da seção transversal e o comprimento são representados respectivamente por V_c , A_c e l_c .



Fonte: (SILVA, 2004)

A deformação linear dessa fibra pode ser escrita como mostra a Equação 91, tendo seu estiramento (encurtamento ou alongamento) dado por $\lambda = l_c/l_r$:

$$\varepsilon = \lambda - 1 = \frac{l_c}{l_r} - 1 = \frac{l_c - l_r}{l_r} = \frac{\Delta l}{l_r}. \quad (91)$$

Tem-se, como tensão de engenharia na fibra, o valor:

$$\sigma_N = \frac{N}{A_r}. \quad (92)$$

2.4.4.2 Relações Constitutivas

Sendo a relação tensão x deformação representada pela Equação 93:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon), \quad (93)$$

Derivando-se em relação ao tempo, tem-se:

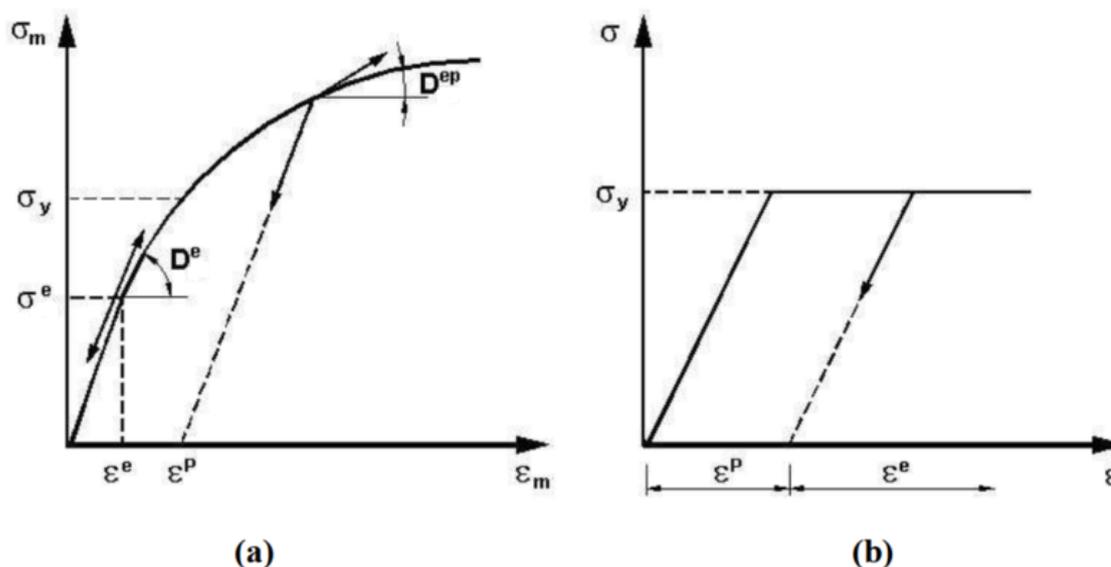
$$\dot{\sigma} = D \dot{\varepsilon} . \quad (94)$$

Assim, é possível definir o módulo de rigidez do material da fibra, conforme mostrado na Equação 95:

$$D = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (95)$$

Lavall (1996) adotou o modelo constitutivo elastoplástico, apropriado para o estudo de pilares de aço. A Figura 31 mostra dois modelos teóricos simplificados de um diagrama tensão x deformação de um corpo de prova de aço submetido a um estado de tensão unidimensional. A Figura 31-a representa o comportamento elastoplástico e a Figura 31-b representa o comportamento elástico perfeitamente plástico de uma fibra de aço.

Figura 31 - Comportamento de uma fibra: (a) comportamento elastoplástico e (b) comportamento elástico perfeitamente plástico



Fonte: Adaptado de (SILVA, 2004)

Analisando-se a Figura 31-a, observa-se que existem duas regiões distintas. Uma região elástica onde σ é menor que σ_y e uma região elastoplástica onde σ é maior que σ_y . A fibra está em regime elástico se existe uma relação que associa cada deformação a uma só tensão. O módulo de rigidez elástico é dado por:

$$D^e = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}. \quad (96)$$

Assim, se $(\sigma - \sigma_y) < 0$, a fibra está na fase elástica, tanto em carga ($\varepsilon \dot{\varepsilon} > 0$) quanto em descarga ($\varepsilon \dot{\varepsilon} < 0$).

A fibra está em regime elastoplástico quando:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} D^e \dot{\varepsilon}, & \text{se } \varepsilon \dot{\varepsilon} < 0 \\ D^{ep} \dot{\varepsilon}, & \text{se } \varepsilon \dot{\varepsilon} > 0 \end{cases}, \quad (97)$$

onde D^{ep} é o módulo de rigidez elastoplástico. Então, se $(\sigma - \sigma_y) > 0$, a fibra está na fase elastoplástica: $D = D^e$ se estiver em descarga ($\varepsilon \dot{\varepsilon} < 0$) e $D = D^{ep}$ se estiver em carga ($\varepsilon \dot{\varepsilon} > 0$). Quando a fibra está em regime elástico perfeitamente plástico (Figura 31-b), tem-se $D^{ep} = 0$.

2.4.4.3 Sistemas de Coordenadas

Um elemento de pórtico plano com extremidades a e b em sua configuração inicial é representado na Figura 32. No sistema global de referência, (x, y) , os nós possuem três graus de liberdade, sendo duas translações, u e v , nas direções x e y , respectivamente, e uma rotação θ , considerada positiva quando medida no sentido anti-horário.

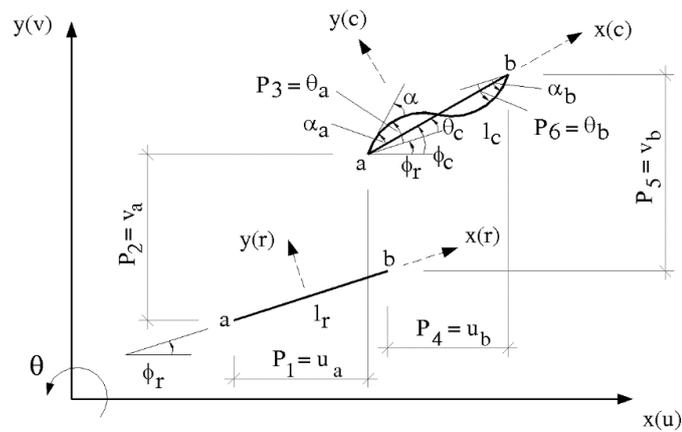
Considerando-se o sistema local de coordenadas corrotacional, (x_r, y_r) , com origem no centro do elemento, o comprimento do elemento entre os seus nós de extremidade é definido como l_r , cujo ângulo com o eixo de referência global é ϕ_r .

Para um determinado nível de carregamento, o elemento encontra-se deformado na posição atualizada ou corrigida. Um sistema local de coordenadas, (x_c, y_c) , é considerado, sendo ϕ_c o ângulo entre a corda e o eixo global x . Para esta posição deformada, o ângulo entre a corda e a tangente é dado por α .

O estiramento da corda, λ , e sua deformação, ε , são dados, respectivamente, por:

$$\lambda = \frac{l_c}{l_r} \quad e \quad \varepsilon = \lambda - 1. \quad (98)$$

Figura 32 - Elemento de pórtico plano em sua configuração original e em sua configuração corrigida



Fonte: (SILVA, 2004)

Os graus de liberdade, denominados naturais ou corrotacionais, podem ser reunidos no vetor 3×1 , definido por:

$$\mathbf{q}^T_{\alpha} = \{q_1, q_2, q_3\}, \quad (99)$$

sendo, $q_1 = l_c - l_r$, $q_2 = \alpha_a$ e $q_3 = \alpha_b$, em que estes dois últimos independem da rotação de corpo rígido $\theta_c = \phi_c - \phi_r$.

Os graus de liberdade cartesianos podem ser agrupados em um vetor 6×1 , dado por:

$$\mathbf{p}^T_i = \{u_a, v_a, \theta_a, u_b, v_b, \theta_b\}. \quad (100)$$

Os graus de liberdade em coordenadas corrotacionais, \mathbf{q}_{α} , e os graus de liberdade em coordenadas globais cartesianos, \mathbf{p}_i , podem ser relacionados conforme as expressões a seguir, deduzidas com auxílio da Figura 32.

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \theta_a - \theta_c = p_3 - \varphi_c + \varphi_r, \\ q_3 = \alpha_b = \theta_b - \theta_c = p_6 - \varphi_c + \varphi_r \end{cases} \quad (101)$$

sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_c = [(x_b - x_a + p_4 - p_1)^2 + (y_b - y_a + p_5 - p_2)^2]^{1/2} \\ l_r = [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2]^{1/2} \\ \text{sen}\phi_c = \frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{l_c}, \text{cos}\phi_c = \frac{x_b - x_a + p_4 - p_1}{l_c} \\ \phi_c = \text{arctg} \left(\frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{x_b - x_a + p_4 - p_1} \right) \\ \phi_r = \text{arccos} \left(\frac{x_b - x_a}{l_r} \right) \end{array} \right. \quad (102)$$

Nas equações acima, apresentadas em Equação 102, x_a , x_b , y_a e y_b são as coordenadas dos elementos na configuração original.

As relações diferenciais entre as coordenadas locais corrotacionais e as coordenadas globais cartesianas podem ser escritas numa matriz $\mathbf{B}_{3 \times 6}$ ao se derivar \mathbf{q}_α em relação a \mathbf{p}_i , isto é, $\partial \mathbf{q}_\alpha / \partial \mathbf{p}_i$, ou $q_{\alpha,i}$.

As derivadas segunda de \mathbf{q}_α em relação a \mathbf{p}_i , isto é $\partial^2 \mathbf{q}_\alpha / \partial q_i \partial q_j$, ($\alpha=1,2,3$ e $i=j=1, \dots, 6$), ou $q_{\alpha,ij}$, serão também necessárias e podem ser representadas em três matrizes simétricas \mathbf{G}_α (6×6). Esta derivada segunda, $q_{\alpha,ij}$, é uma relação que envolve apenas geometria, ou seja, deslocamentos em coordenadas corrotacionais e cartesianas, e será uma parcela da matriz geométrica oriunda da teoria de segunda ordem.

2.4.4.3.1 Teoria Estrutural

Esta pesquisa considera a hipótese cinemática atribuída a Bernoulli-Euler, que afirma o seguinte: *“As seções transversais planas e ortogonais ao eixo da barra permanecem planas, indeformáveis e ortogonais ao eixo, após a deformação”*.

2.4.4.4 Cinemática de Elemento

2.4.4.4.1 Campo de Deformação

Para se definir o campo de deformação consistente com a teoria estrutural apresentada, considere-se um elemento diferencial de barra reta de pórtico plano na configuração inicial, como representado na Figura 33-a, limitado por duas seções transversais ortogonais a um eixo longitudinal arbitrariamente definido e distante dx_r uma da outra.

Denominando-se fibra como um conjunto de pontos materiais sobre uma reta paralela a este eixo longitudinal, verifica-se que uma fibra a uma distância y_r do eixo e uma fibra neste eixo têm os comprimentos dS_r e $d\bar{S}_r$, respectivamente, dados por:

$$dS_r = d\bar{S}_r = dx_r . \quad (103)$$

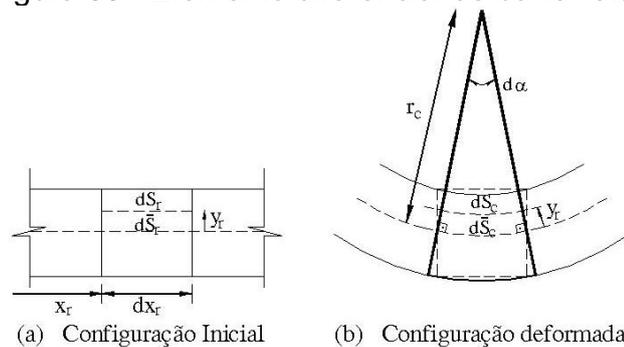
Considera-se agora o mesmo elemento diferencial na configuração deformada, conforme Figura 33-b. Observando-se a hipótese de Bernoulli-Euler, obtém-se para uma fibra a uma distância y_r do eixo e uma fibra no eixo os seguintes comprimentos, respectivamente:

$$dS_c = (r_c - y_r)d\alpha \quad e \quad d\bar{S}_c = r_c d\alpha , \quad (104)$$

onde r_c é o raio de curvatura local e $d\alpha$ é o ângulo interno do setor definido pelas seções transversais, formado após a deformação. Da Equação 104 tem-se que:

$$dS_c = d\bar{S}_c - y_r d\alpha . \quad (105)$$

Figura 33 - Elemento diferencial de barra reta



Fonte: (SILVA, 2004)

O estiramento de uma fibra a uma distância y_r do eixo, λ , e o estiramento de uma fibra no eixo, $\bar{\lambda}$, são definidos por:

$$\lambda = \frac{dS_c}{dS_r} \quad e \quad \bar{\lambda} = \frac{d\bar{S}_c}{d\bar{S}_r} . \quad (106)$$

Estiramentos são grandezas positivas, sendo que os valores maiores que um correspondem a esticamentos e valores menores que um a encurtamentos. Levando-se a Equação 105 na Equação 106, e com o auxílio da Equação 103, tem-se o estiramento dado por:

$$\lambda = \bar{\lambda} - y_r \alpha' , \quad (107)$$

onde $\alpha' = d\alpha/dx_r$.

Subtraindo-se a unidade de ambos os lados, chega-se à expressão analítica do campo de deformação consistente com a teoria estrutural adotada, dada por:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - y_r \alpha' . \quad (108)$$

2.4.4.4.2 Campo de Deslocamento

Da hipótese de Bernoulli-Euler adotada nesta pesquisa, o campo de deslocamento dos pontos da barra fica caracterizado completamente se conhecidos os deslocamentos axiais, \bar{u} , e transversais, \bar{v} , dos pontos situados sobre o eixo, bem como a rotação α das seções transversais.

No sistema corrotacional (x_c, y_c) , os deslocamentos denotados por u_c e v_c representam os campos de deslocamento e são dados exatamente por:

$$u_c(x, y) = \bar{u}_c(x) - y_r \operatorname{sen} \alpha \quad e \quad v_c(x, y) = \bar{v}_c(x) - y_r(1 - \cos \alpha), \quad (109)$$

onde \bar{v}_c e \bar{u}_c são os deslocamentos do eixo da barra no sistema corrotacional.

A rotação α das seções transversais vale:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{v}_c'}{1 + \bar{u}_c'} \right). \quad (110)$$

Para este campo de deslocamento e após algumas substituições, chega-se à expressão analítica do campo de deformação consistente com a teoria estrutural adotada, dada pela Equação 108, que fica:

$$\varepsilon = (1 + \bar{u}_c') \sec \alpha - 1 - y_r \alpha' \quad (111)$$

Este será o campo de deformação a ser utilizado neste trabalho. Para sua determinação, definem-se as funções de interpolação para o deslocamento \bar{u}_c do eixo da barra e para o ângulo α de rotação deste eixo:

$$\bar{u}_c(x_r) = q_1 \left(\frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \right) = q_1 \Psi_1(x_r), \quad (112)$$

$$\alpha(x_r) = q_2 \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + q_3 \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) = q_2 \psi_2'(x_r) + q_3 \psi_3'(x_r). \quad (113)$$

Utilizando-se aproximações de segunda ordem para as funções trigonométricas e adotando-se um valor constante $\bar{\varepsilon}$, representado pelo valor médio $\bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{l_r} \int \bar{\varepsilon} dx_r$, tem-se o campo de deformação, em função das coordenadas corrotacionais:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left(\frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) - y_r (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3''). \quad (114)$$

2.4.4.5 Equilíbrio Estático do Elemento

Uma vez conhecido o campo de deformação do elemento e aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, formula-se o equilíbrio estático conforme a seguir:

$$\int_{V_r} \sigma \delta \varepsilon dV_r = P_i \delta p_i, \quad (115)$$

onde V_r é o volume do elemento na configuração original, σ a tensão normal da fibra, $\delta \varepsilon$ a deformação virtual da fibra, P_i as forças nodais internas do elemento e δp_i o deslocamento virtual nodal do elemento.

Obtém-se a deformação virtual da fibra, por meio da regra da cadeia:

$$\varepsilon = \varepsilon_{,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i, \quad (116)$$

em que $q_{\alpha,i}$ representa uma transformação de coordenadas do sistema corrotacional para o sistema cartesiano, inicialmente em coordenadas locais e após uma rotação de eixos, colocando-o no sistema global.

Portanto, a equação de equilíbrio do elemento é dada por:

$$P_i = \left(\int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \right) q_{\alpha,i}. \quad (117)$$

Fazendo-se $\int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r = Q_\alpha$, em notação indicial tem-se:

$$P_i = Q_\alpha q_{\alpha,i}. \quad (118)$$

Reunindo-se P_i e Q_α em dois vetores, \mathbf{P} e \mathbf{Q} , respectivamente, pode-se reescrever a Equação 118, na forma matricial:

$$P = B^T \cdot Q. \quad (119)$$

2.4.4.5.1 Matriz de Rigidez Tangente do Elemento

Os componentes da matriz de rigidez tangente do elemento são obtidos das derivadas de P_i em relação às coordenadas cartesianas p_j . Portanto, derivando-se a Equação 118, com o auxílio da regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_i} = k_{ij} = q_{\alpha,i} Q_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_\alpha q_{\alpha,ij}. \quad (120)$$

Resolvendo-se a derivada $Q_{\alpha,\beta}$ conclui-se que:

$$Q_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} (\varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} + \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta}) dV_r, \quad (121)$$

de onde são definidos $D_{\alpha,\beta}$ e $H_{\alpha,\beta}$, respectivamente, como:

$$D_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} dV_r \quad e \quad H_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta} dV_r. \quad (122)$$

Levando-se a Equação 121 na Equação 120, com o auxílio da Equação 122, tem-se a matriz de rigidez tangente para o elemento, dada por:

$$k_{i,j} = \underbrace{q_{\alpha,i}(D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta})q_{\beta,j}}_{\text{Parcela objetiva}} + \underbrace{Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}}_{\text{Parcelado movimento de corpo r\u00edgido}}, \quad (123)$$

podendo tamb\u00e9m ser escrita como:

$$k_{i,j} = \underbrace{q_{\alpha,i} D_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{Parcela constitutiva}} + \underbrace{q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}}_{\text{Parcela geom\u00e9trica}}. \quad (124)$$

Na parcela geom\u00e9trica da Equa\u00e7\u00e3o 124, a express\u00e3o $q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}$ \u00e9 respons\u00e1vel pelo efeito P- δ e a express\u00e3o $Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}$, pelo efeito P- Δ .

3 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE CONSIDERANDO AS LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

Para avaliar de forma confiável o efeito da 2ª ordem na análise aproximada de pórticos de aço com ligações semirrígidas, algumas etapas de cálculo são necessárias. A influência desse efeito não está apenas na redistribuição dos momentos fletores de vigas e pilares, mas também no deslocamento lateral do pórtico e, conseqüentemente, no efeito de segunda ordem.

Os esforços solicitantes nas barras e os deslocamentos nodais dos pórticos planos de aço serão obtidos por meio da utilização do programa PPLANLEP, considerando-se as análises de 1ª ordem elástica e 2ª ordem elástica rigorosa, de pórticos planos com ligações convencionais e semirrígidas.

Para a análise em teoria de 2ª ordem elástica rigorosa, o comportamento não linear da ligação viga-pilar, $M-\theta_r$, será considerado no programa por meio de uma mola rotacional, representada por curvas multilinearizadas com cinco trechos lineares. O programa considera a descarga ou recarga em qualquer trecho da curva. Para a análise em teoria de 1ª ordem elástica, o comportamento da ligação será considerado linear com rigidez rotacional constante, k_{i0} e k_b , para estruturas indeslocáveis e deslocáveis, respectivamente. Os resultados de momento fletor nos pilares e os deslocamentos laterais no topo de cada andar dos pórticos planos, obtidos da análise aproximada, serão comparados com os resultados da análise rigorosa.

Os procedimentos de cálculo para o método de análise aproximada considerando as ligações semirrígidas apresentam as seguintes etapas:

- a) O cálculo da rigidez secante da ligação, k_{i0} e k_b , para a estrutura indeslocável e deslocável, respectivamente. Caso k_{i0} seja menor que k_b , considera-se $k_{i0}=k_i$;
- b) A determinação dos esforços solicitantes e dos deslocamentos laterais da estrutura indeslocável “*nt*”, na análise elástica de primeira ordem, considerando a rigidez secante k_{i0} ;
- c) A determinação dos esforços solicitantes e dos deslocamentos laterais no topo dos andares da estrutura deslocável “*lt*”, na análise elástica de primeira ordem, considerando a rigidez k_b ;

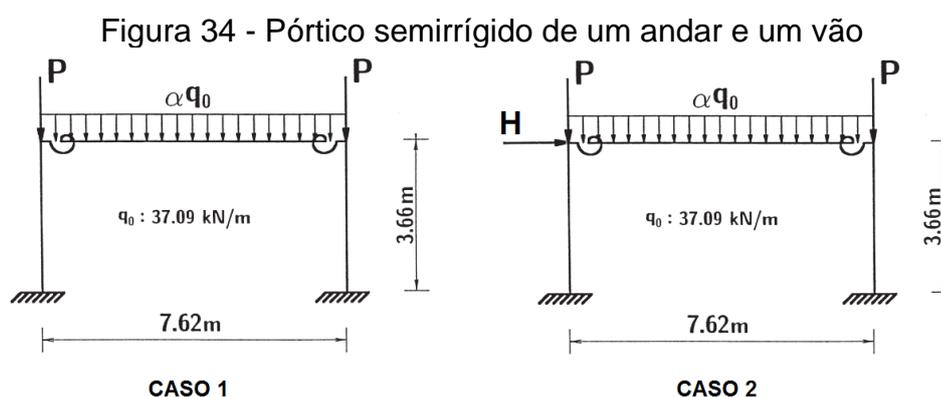
- d) O cálculo do coeficiente de flambagem, k_1 , utilizando-se a Equação 43, aproximada, e posteriormente, a determinação do coeficiente B_1 , por meio da Equação 69.
- e) O cálculo do coeficiente de flambagem, k_2 , utilizando-se a Equação 45, aproximada, e posteriormente, a determinação do coeficiente B_2 , por meio da Equação 87.
- f) A determinação, em segunda ordem elástica, dos momentos fletores solicitantes de cálculo utilizando a Equação 82.
- g) A determinação do deslocamento lateral do andar relativo à base, de segunda ordem, utilizando o coeficiente B_2 multiplicado pelo deslocamento da análise de 1ª ordem, sem considerar as imperfeições iniciais de material.

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta três exemplos numéricos com o objetivo de investigar o efeito das ligações semirrígidas na determinação do fator do comprimento efetivo K e na análise aproximada de 2ª ordem elástica de pórticos planos de aço. Os deslocamentos laterais dos andares relativo à base e os momentos fletores nos pilares dos pórticos semirrígidos serão avaliados, para combinações últimas de ações.

4.1 PÓRTICO DE UM ANDAR E UM VÃO

Na Figura 34 está apresentado o pórtico semirrígido de um andar e um vão, estudado por Kishi et al. (1998), com bases engastadas e carregamento uniformemente distribuído na viga igual a αq_0 , sendo $q_0=0,37\text{kN/cm}$. O pórtico possui 762cm de largura e 366cm de altura. Os pilares e a viga são constituídos, respectivamente, por perfis W14x90 ($I_{356 \times 368 \times 18 \times 11,2}$) e W18x65 ($I_{467 \times 193 \times 19,1 \times 11,4}$), que possuem as propriedades apresentadas na Tabela 2. Dois casos são analisados. Para o caso 1, o pórtico apresenta um carregamento vertical uniformemente distribuído aplicado na viga igual a αq_0 e um carregamento vertical concentrado P aplicado no topo de cada pilar igual a 4275kN, referente à carga de escoamento $A_g f_y$, sendo f_y igual a 250MPa. Para o caso 2, o pórtico apresenta, além dos carregamentos uniformemente distribuído na viga e concentrado no topo dos pilares, um carregamento horizontal H igual a $0,003P$, aplicado no topo do pilar da esquerda, ou seja, igual a 12,83kN.



Fonte: Adaptado de (KISHI et al., 1998)

Tabela 2 – Dimensões e propriedades dos perfis utilizados

Dimensões e propriedades dos perfis utilizados							
Perfil	d (cm)	b _f (cm)	t _w (cm)	t _f (cm)	I _x (cm ⁴)	Z _x (cm ³)	Área (cm ²)
W14x90 (I356x368x18x11,2)	35,60	36,80	1,12	1,80	41600	2570	171
W18x65 (I467x193x19,1x11,4)	46,70	19,30	1,14	1,91	44500	2180	123

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

O pórtico é analisado considerando as análises em 2ª ordem elástica, aproximada e rigorosa. O módulo de elasticidade longitudinal do aço é igual a 200.000 MPa.

Para considerar a influência da largura do pórtico sobre o fator do comprimento efetivo, K, a carga distribuída 'q' varia em até duas vezes a carga distribuída básica q₀, usando um fator de amplificação α. Neste estudo, foram considerados os fatores iguais a α=0,5, α=1,0, α=1,5 e α=2,0.

Para implementação dos dados no programa, a carga uniformemente distribuída na viga foi modelada como um conjunto de cargas nodais equivalentes. Dez elementos finitos foram utilizados para modelar a viga e os pilares. As seções transversais foram divididas em 20 fatias iguais, sendo uma para cada mesa e 18 para a alma do perfil. O comportamento não linear da ligação é aproximado por uma curva multilinear, considerando-se cinco trechos lineares, com os pares de θ_r e M.

Rigidez Rotacional Inicial

O modelo de três parâmetros é usado para construir as curvas multilineares das ligações, onde a rigidez inicial rotacional, K_i, e a capacidade de momento último, M_u, da ligação no modelo são tomados como variáveis, em função do parâmetro de rigidez adimensional ρ, conforme a Equação 125. O parâmetro de forma n é considerado igual a unidade.

$$\rho = EI_v / k_i L_v , \quad (125)$$

onde E é o módulo de elasticidade, I_v é o momento de inércia da viga, k_i é rigidez inicial da ligação e L_v é o comprimento da viga.

A Tabela 3 apresenta os valores dos parâmetros de rigidez adimensional e os respectivos valores de rigidez rotacional inicial das ligações. Observa-se que os

parâmetros ρ iguais a 0,001 e 10 correspondem aos comportamentos das ligações próximos às condições extremas do comportamento totalmente rígido e idealmente rotulado, respectivamente.

Tabela 3 – Parâmetro de rigidez adimensional (ρ) e rigidez inicial das ligações (k_i)

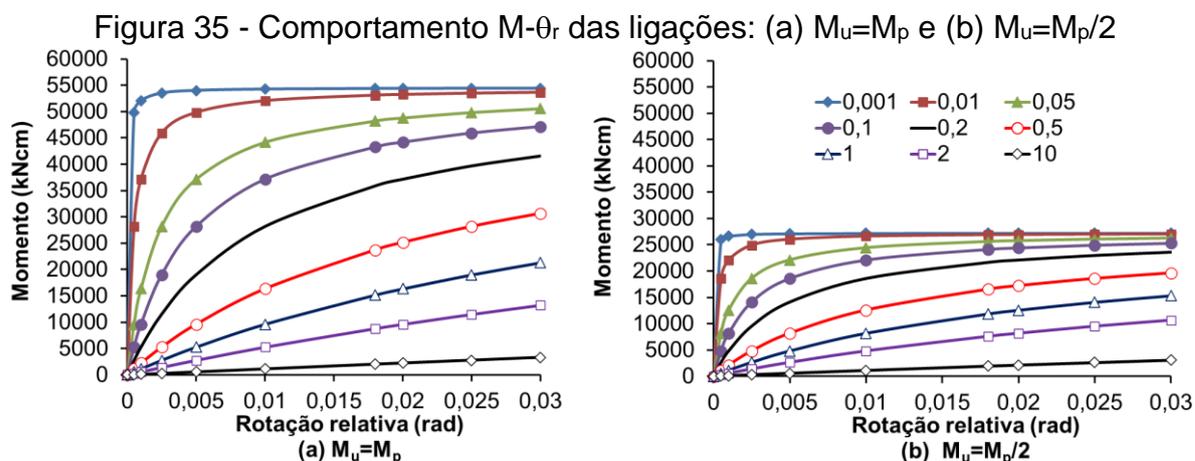
ρ	k_i (kNcm/rad)	$\log k_i$
0,001	1167979003	9,07
0,01	116797900	8,07
0,05	23359580	7,37
0,1	11679790	7,07
0,2	5839895	6,77
0,5	2335958	6,37
1	1167979	6,07
2	583990	5,77
10	116798	5,07

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Capacidade de Momento Último da Ligação

A capacidade de momento último da ligação é considerada igual a $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$, onde M_p é o momento plástico da viga.

Dessa forma, a Figura 35 apresenta os 18 comportamentos de ligações que serão adotados para as análises elásticas rigorosas de 2ª ordem, considerando os dois casos de pórticos (casos 1 e 2).



Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Determinação dos parâmetros k_{i0} e k_b

Para a análise elástica de 2ª ordem aproximada, dois parâmetros de rigidez da ligação são necessários para a determinação dos fatores dos comprimentos efetivos nas estruturas indeslocável “ nt ” e deslocável “ lt ”: a rigidez secante k_{i0} e a rigidez secante efetiva k_b , respectivamente.

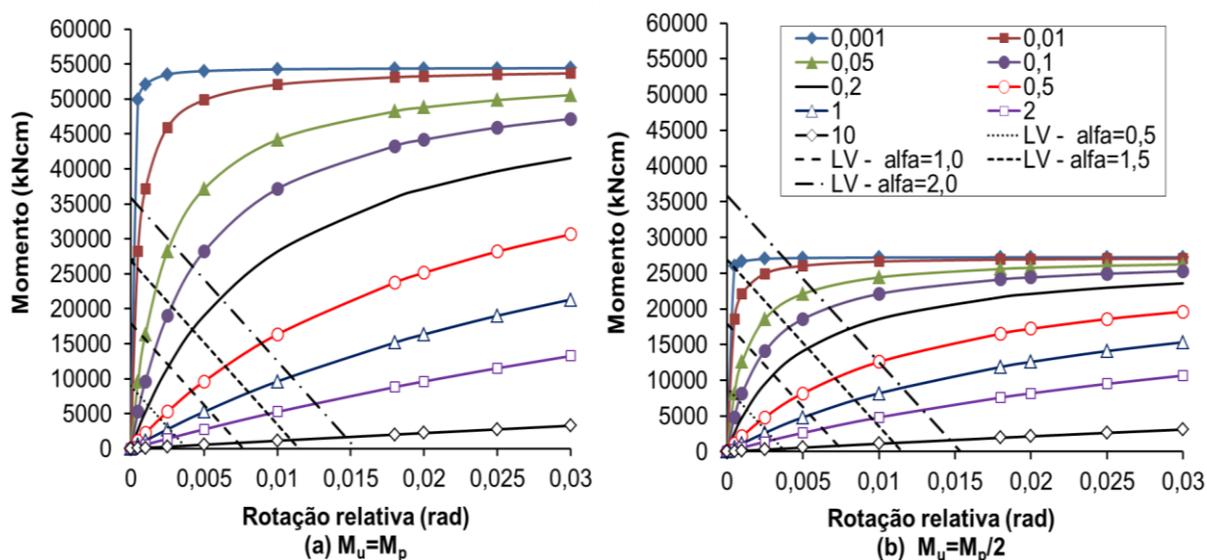
Chen e Lui (1991) recomendam o uso da rigidez secante k_{i0} , em vez da rigidez rotacional inicial, k_i , como uma rigidez representativa da ligação na análise de pórticos indeslocáveis, “ nt ”, uma vez que a rigidez inicial apresenta um valor elevado para ser usado nas análises aproximadas. A rigidez rotacional inicial e a rigidez secante, k_{i0} , possuem a mesma rotação inicial θ_0 . Dessa forma, considerando o modelo de três parâmetros, a rigidez secante k_{i0} é dada por:

$$M = \frac{k_i \theta_0}{[1 + (\theta_r / \theta_0)^n]^{1/n}} = \frac{k_i \theta_0}{[1 + (1)^n]^{1/n}} = \frac{k_i \theta_0}{2^{1/n}} \quad (126)$$

Entretanto, a rigidez k_{i0} não pode ser menor que a rigidez secante efetiva, k_b . Para o presente exemplo, adotou-se a rigidez k_i para análise do pórtico indeslocável “ nt ”, para todos os valores do parâmetro de rigidez adimensional, ρ , uma vez que os valores de k_{i0} foram menores que os valores de k_b .

A rigidez secante efetiva da ligação, k_b , é determinada utilizando-se a linha de viga, em que o ponto de intercessão da curva da ligação com a linha de viga representa a compatibilização entre o giro da extremidade da viga com o giro relativo da ligação, determinando-se, assim, a rigidez secante k_b . A Figura 36 mostra as curvas da ligação e as linhas de vigas para os fatores de amplificação do carregamento uniformemente distribuído variando de $\alpha=0,5$ a $\alpha=2,0$ e considerando os comportamentos das ligações iguais $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$. Os valores de k_b são apresentados na Tabela 4.

Figura 36 - Comportamento M- θ_r das ligações e linhas de viga: (a) $M_u=M_p$ e (b) $M_u=M_p/2$



Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 4 – Valores de k_b para ligações com $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$

ρ	k_b para $M_u = M_p$				k_b para $M_u = M_p/2$			
	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1,0$	$\alpha = 1,5$	$\alpha = 2,0$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1,0$	$\alpha = 1,5$	$\alpha = 2,0$
0,001	976.030.288	784.208.259	593.000.887	402.565.835	784.359.923	402.544.619	54.783.893	6.169.623
0,01	97.952.816	79.282.439	60.939.416	43.274.386	79.284.475	43.272.424	14.993.864	5.271.094
0,05	19.865.394	16.476.210	13.326.892	10.447.195	16.499.231	10.446.895	6.030.296	3.593.167
0,1	10.075.302	8.559.171	7.168.937	5.928.108	8.562.078	5.927.980	3.992.423	2.759.776
0,2	5.147.447	4.509.140	3.928.443	3.414.480	4.507.880	3.414.426	2.586.462	1.996.848
0,5	2.137.279	1.955.698	1.790.867	1.642.287	1.955.671	1.642.272	1.389.818	1.188.855
1	1.099.754	1.036.562	978.455	924.765	1.036.683	924.759	829.670	748.868
2	562.872	542.928	524.095	506.295	542.933	506.293	473.543	444.196
10	115.746	114.712	113.693	112.695	114.712	112.695	110.744	112.695

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Determinação dos fatores do comprimento efetivo: k_1 e k_2

A Tabela 5 apresenta os valores do fator de rigidez relativa G_B (Eq. 84), determinado em função de α_{nt} (Eq. 85), e o fator do comprimento efetivo k_1 para a estrutura “nt” (Eq. 43) para todos os parâmetros de rigidez adimensional, ρ . O fator de rigidez relativa G_A é considerado igual a zero. O valor de k_1 é constante para todos os fatores de amplificação do carregamento distribuído, α , e varia de 0,651 a 0,697, para valores de ρ de 0,001 a 10, respectivamente, e independe do valor da capacidade de momento último da ligação.

Tabela 5 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_1 para a estrutura “nt”

ρ	G_B	k_1
0,001	1,95	0,651
0,01	1,99	0,651
0,05	2,14	0,654
0,1	2,34	0,657
0,2	2,72	0,662
0,5	3,89	0,672
1	5,84	0,680
2	9,73	0,688
10	40,87	0,697

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Nas Tabelas 6 e 7 estão apresentados os valores do fator de rigidez relativa G_B (Eq. 89), determinado em função de α_{lt} (Eq. 90) e o fator do comprimento efetivo k_2 (Eq. 45) para a estrutura “lt”, para ligações com $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$, respectivamente, e para todos os parâmetros de rigidez adimensional, ρ . O fator de rigidez relativa G_A é considerado igual a zero. Os valores de G_B e k_2 são determinados para cada fator de amplificação do carregamento uniformemente distribuído, α .

Tabela 6 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_2 para a estrutura “lt”, para $M_u=M_p$

ρ	$\alpha=0,5$		$\alpha=1,0$		$\alpha=1,5$		$\alpha=2,0$	
	G_B	k_2	G_B	k_2	G_B	k_2	G_B	k_2
0,001	1,96	1,273	1,96	1,274	1,97	1,27	1,98	1,275
0,01	2,09	1,286	2,12	1,289	2,17	1,29	2,26	1,302
0,05	2,63	1,334	2,77	1,345	2,97	1,36	3,25	1,381
0,1	3,30	1,384	3,54	1,401	3,85	1,42	4,25	1,444
0,2	4,60	1,463	4,97	1,482	5,42	1,50	5,94	1,525
0,5	8,33	1,606	8,92	1,622	9,56	1,64	10,25	1,653
1	14,35	1,723	15,10	1,733	15,89	1,74	16,70	1,752
2	26,18	1,825	27,07	1,830	27,97	1,83	28,89	1,839
10	119,78	1,955	120,85	1,956	121,91	1,96	122,98	1,956

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

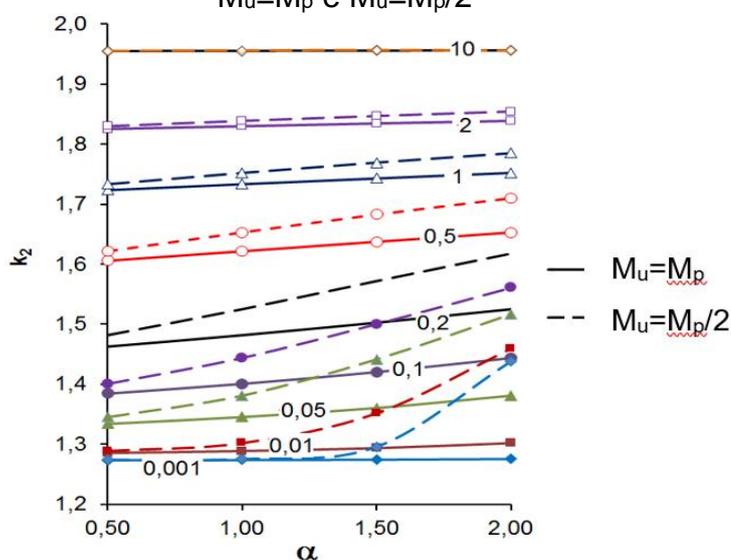
Tabela 7 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_2 para a estrutura “ l^l ” para $M_u=M_p/2$

ρ	$\alpha=0,5$		$\alpha=1,0$		$\alpha=1,5$		$\alpha=2,0$	
	G_B	k_2	G_B	k_2	G_B	k_2	G_B	k_2
0,001	1,96	1,274	1,98	1,275	2,20	1,296	4,16	1,439
0,01	2,12	1,289	2,26	1,302	2,86	1,352	4,53	1,460
0,05	2,77	1,345	3,25	1,381	4,21	1,442	5,74	1,517
0,1	3,54	1,401	4,25	1,444	5,36	1,500	6,89	1,561
0,2	4,97	1,482	5,94	1,525	7,22	1,572	8,78	1,618
0,5	8,92	1,622	10,25	1,653	11,76	1,683	13,42	1,710
1	15,10	1,733	16,70	1,752	18,39	1,769	20,16	1,785
2	27,07	1,830	28,89	1,839	30,75	1,847	32,65	1,855
10	120,85	1,956	122,98	1,956	125,11	1,957	122,98	1,956

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

A Figura 37 mostra os valores do fator do comprimento efetivo k_2 para a estrutura “ l^l ”, considerando as ligações com $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$, em função do fator de amplificação do carregamento uniformemente distribuído α . Conforme as curvas apresentadas na Figura 37, para cada fator de rigidez ρ , e os valores apresentados nas Tabelas 6 e 7, pode-se observar que o valor de k_2 é praticamente constante para as ligações com $M_u=M_p$, mas aumenta consideravelmente com o aumento do carregamento uniformemente distribuído para as ligações com $M_u=M_p/2$, à medida que ρ decresce.

Figura 37 - Comparação do fator do comprimento efetivo k_2 para ligações com $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$



Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

4.1.1 Resultados para o caso 1 - Pórtico com carga uniformemente distribuída na viga (αq_0) e carga vertical concentrada (P) no topo dos pilares

Neste item são apresentados os resultados obtidos para o pórtico com carga uniformemente distribuída na viga e carga vertical concentrada no topo dos pilares.

Os resultados do deslocamento horizontal no topo do pórtico e dos momentos fletores máximos nos pilares para as análises elásticas de 1ª ordem e de 2ª ordem, aproximada e rigorosa, são apresentados nas tabelas a seguir, para cada fator de amplificação da carga distribuída, e para as ligações do pórtico, que apresentam capacidade de momento último iguais a M_p e $M_p/2$ e parâmetro de rigidez ρ variando-se de 0,001 a 10. Nessas tabelas, é possível notar a influência do comportamento da ligação semirrígida já na análise de 1ª ordem elástica, ao se comparar os resultados do deslocamento horizontal no topo do pórtico e dos momentos fletores máximos nos pilares considerando o comportamento da ligação rígido convencional ($\rho=0,001$) com os resultados considerando-se as ligações com comportamento semirrígido.

Observa-se, nas tabelas, que os resultados da análise elástica em 2ª ordem aproximada estão sempre relacionados com os resultados da análise elástica em 2ª ordem rigorosa. Dessa forma, d^* é a relação entre deslocamento aproximado e deslocamento rigoroso em análise de segunda ordem e m^* representa a relação entre os momentos fletores dessas análises.

A Tabela 8 apresenta os valores para os coeficientes de majoração B_2 e os deslocamentos horizontais do pilar da direita para todas as análises (1ª e 2ª ordem aproximada e rigorosa), quando o coeficiente de amplificação do carregamento uniformemente distribuído, α , é igual a 0,5. O sinal negativo significa que o deslocamento horizontal no topo do pilar da direita ocorre para a esquerda. Observa-se que os valores dos deslocamentos horizontais obtidos pela análise aproximada e rigorosa apresentam boa correlação para valores de ρ inferiores a 1,0. Dessa forma, para $\alpha=0,5$, os pórticos com ligações que apresentam rigidez inicial k_i maiores ou iguais a 1167979 kNcm/rad mostraram uma boa correlação entre os métodos abordados, principalmente quando $M_u=M_p$.

Tabela 8 – Caso 1 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=0,5$

Deslocamento horizontal do pilar da direita (cm) para $\alpha=0,5$											
ρ	B_2	$M_u=M_p$				d^*	$M_u=M_p/2$				
		1ª ordem	2ª ordem		1ª ordem		2ª ordem		1ª ordem	2ª ordem	
			aproximada	rigorosa			aproximada	rigorosa			
0,001	1,129	-0,00442	-0,00499	-0,00458	1,09	1,129	-0,00443	-0,004997	-0,00452	1,11	
0,01	1,131	-0,00438	-0,00495	-0,00453	1,09	1,132	-0,0044	-0,004979	-0,00447	1,11	
0,05	1,143	-0,00416	-0,00475	-0,00431	1,10	1,146	-0,00423	-0,0048469	-0,00426	1,14	
0,1	1,156	-0,00390	-0,00451	-0,00407	1,11	1,160	-0,00399	-0,0046278	-0,00400	1,16	
0,2	1,177	-0,00344	-0,00405	-0,00368	1,10	1,183	-0,00353	-0,0041743	-0,00360	1,16	
0,5	1,221	-0,00252	-0,00308	-0,00297	1,04	1,227	-0,00257	-0,0031491	-0,00290	1,08	
1	1,264	-0,00174	-0,00219	-0,00244	0,90	1,268	-0,00175	-0,0022238	-0,00240	0,93	
2	1,306	-0,00107	-0,00140	-0,00200	0,70	1,308	-0,00108	-0,0014067	-0,00198	0,71	
10	1,368	-0,00026	-0,00036	-0,00148	0,24	1,368	-0,00026	-0,0003613	-0,00148	0,24	

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

As tabelas 9 a 11 apresentam os deslocamentos horizontais referentes a $\alpha=1,0$, $\alpha=1,5$ e $\alpha=2,0$, respectivamente, para todas as análises (1ª e 2ª ordem aproximada e rigorosa). Para $\alpha=1,0$, observa-se que os métodos apresentaram melhor correlação para as situações em que ρ é igual ou inferior a 0,5, tanto para ligações com $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$, ou seja, para ligações com rigidez inicial k_i igual ou superior a 2335958 kNcm/rad. Para $\alpha=1,5$ e $\alpha=2,0$, pode-se observar valores de d^* superiores a unidade para ρ igual ou inferior a 0,2, tanto para $M_u=M_p$ quanto para $M_u=M_p/2$, ou seja, para ligações com rigidez inicial k_i igual ou superior a 5839895 kNcm/rad. Observa-se, novamente, que os resultados obtidos considerando-se $M_u=M_p/2$ apresentaram valores de d^* maiores que os resultados obtidos considerando $M_u=M_p$.

Tabela 9 – Caso 1- Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=1,0$

Deslocamento horizontal do pilar da direita (cm) para $\alpha=1,0$											
ρ	B_2	$M_u=M_p$				d^*	$M_u=M_p/2$				
		1ª ordem	2ª ordem		1ª ordem		2ª ordem		1ª ordem	2ª ordem	
			aproximada	rigorosa			aproximada	rigorosa			
0,001	1,131	-0,00885	-0,01001	-0,00952	1,05	1,131	-0,00888	-0,01004	-0,00942	1,07	
0,01	1,135	-0,0088	-0,00998	-0,00943	1,06	1,138	-0,00898	-0,01022	-0,00933	1,10	
0,05	1,149	-0,00846	-0,00972	-0,00903	1,08	1,158	-0,00891	-0,01032	-0,00884	1,17	
0,1	1,163	-0,00798	-0,00928	-0,00857	1,08	1,175	-0,00846	-0,00994	-0,00828	1,20	
0,2	1,186	-0,00706	-0,00837	-0,00795	1,05	1,199	-0,00745	-0,00894	-0,00772	1,16	
0,5	1,231	-0,00513	-0,00632	-0,00698	0,91	1,243	-0,00531	-0,00660	-0,00681	0,97	
1	1,273	-0,00351	-0,00447	-0,00634	0,70	1,281	-0,00358	-0,00458	-0,00626	0,73	
2	1,314	-0,00215	-0,00283	-0,00585	0,48	1,319	-0,00217	-0,00286	-0,00581	0,49	
10	1,376	-0,00053	-0,00073	-0,00538	0,14	1,376	-0,00053	-0,00073	-0,00538	0,14	

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 10 – Caso 1 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=1,5$

Deslocamento horizontal do pilar da direita (cm) para $\alpha=1,5$											
ρ	B_2	1ª ordem	$M_u=M_p$			d^*	B_2	1ª ordem	$M_u=M_p/2$		
			2ª ordem		2ª ordem						
			aproximada	rigorosa	aproximada				rigorosa	d^*	
0,001	1,134	-0,01329	-0,01507	-0,01483	1,02	1,139	-0,01376	-0,0157	-0,0147	1,07	
0,01	1,138	-0,01329	-0,01513	-0,01472	1,03	1,153	-0,01453	-0,0168	-0,0145	1,15	
0,05	1,155	-0,01298	-0,01499	-0,01412	1,06	1,178	-0,01454	-0,0171	-0,0136	1,26	
0,1	1,172	-0,01230	-0,01441	-0,01360	1,06	1,195	-0,01366	-0,0163	-0,0131	1,24	
0,2	1,196	-0,01087	-0,01301	-0,01295	1,00	1,219	-0,01183	-0,0144	-0,0126	1,15	
0,5	1,242	-0,00784	-0,00973	-0,01213	0,80	1,259	-0,00823	-0,0104	-0,0119	0,87	
1	1,283	-0,00531	-0,00682	-0,01176	0,58	1,294	-0,00545	-0,0071	-0,0117	0,60	
2	1,323	-0,00324	-0,00429	-0,01166	0,37	1,329	-0,00328	-0,0044	-0,0117	0,37	
10	1,384	-0,00079	-0,00110	-0,01173	0,09	1,385	-0,00079	-0,0011	-0,0117	0,09	

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 11 – Caso 1 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=2,0$

Deslocamento horizontal do pilar da direita (cm) para $\alpha=2,0$											
ρ	B_2	1ª ordem	$M_u=M_p$			d^*	B_2	1ª ordem	$M_u=M_p/2$		
			2ª ordem		2ª ordem						
			aproximada	rigorosa	aproximada				rigorosa	d^*	
0,001	1,136	-0,01792	-0,02037	-0,02045	1,00	1,180	-0,02257	-0,02663	-0,02025	1,32	
0,01	1,143	-0,01796	-0,02053	-0,02040	1,01	1,186	-0,02251	-0,02670	-0,01966	1,36	
0,05	1,164	-0,01783	-0,02074	-0,01969	1,05	1,204	-0,02135	-0,02571	-0,01905	1,35	
0,1	1,182	-0,01693	-0,02000	-0,01924	1,04	1,219	-0,01961	-0,02391	-0,01881	1,27	
0,2	1,207	-0,01491	-0,01799	-0,01884	0,96	1,239	-0,01662	-0,02060	-0,01863	1,11	
0,5	1,252	-0,01063	-0,01331	-0,01868	0,71	1,275	-0,01129	-0,01440	-0,01883	0,76	
1	1,293	-0,00715	-0,00924	-0,01901	0,49	1,307	-0,00738	-0,00965	-0,01920	0,50	
2	1,332	-0,00434	-0,00578	-0,01950	0,30	1,340	-0,00440	-0,00590	-0,01965	0,30	
10	1,393	-0,00106	-0,00147	-0,02051	0,07	1,393	-0,00106	-0,00147	-0,02053	0,07	

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Conforme critério de classificação quanto à sensibilidade dos deslocamentos das estruturas, todos os pórticos foram classificados como de média deslocabilidade, por apresentarem coeficiente de amplificação B_2 maiores que 1,1 e menores que 1,4. Conforme a ABNT NBR 8800: 2008, os efeitos das imperfeições iniciais de material devem ser levados em conta na análise, reduzindo a rigidez à flexão e a rigidez axial das barras para 80% dos valores originais. Por não ser objetivo do trabalho, as novas análises dos pórticos classificados de média deslocabilidade não serão apresentadas.

As Tab. 12 a Tab. 15 apresentam os valores dos coeficientes de majoração B_2 e os valores de momentos fletores máximos nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) dos pórticos, para cada coeficiente de amplificação α , para as análises de 1ª

ordem e 2ª ordem aproximada e rigorosa. Os valores de momento variam conforme o comportamento da ligação, ou seja, quando a capacidade de momento último é igual a M_p ou a $M_p/2$ e quando o parâmetro de rigidez ρ varia de 0,001 a 10. Os valores obtidos do coeficiente B_1 foram menores que um, e tomados iguais à unidade, conforme recomendado pela ABNT NBR 8800: 2008.

Observa-se que os valores de momento fletor determinados pela análise aproximada e rigorosa de segunda ordem elástica apresentaram boa correlação. Essa comparação pode ser verificada por meio do fator m^* . Verifica-se também que os valores dos momentos fletores obtidos considerando-se $M_u=M_p$ foram ainda mais próximos dos valores dos momentos rigorosos, quando comparados com os valores aproximados obtidos adotando-se $M_u=M_p/2$.

Portanto, por apresentar valores de momento fletor bem próximos dos valores obtidos por meio da análise rigorosa, comprova-se a importância da inclusão do comportamento não linear das ligações nas análises estruturais realizadas pelo método aproximado. Por exemplo, para $\alpha=1,0$, ligação semirrígida com $M_u=M_p$ e $\rho=0,2$, o valor do momento fletor do pilar da esquerda pela análise rigorosa é 10032 kNcm, bem diferente do momento fletor calculado considerando-se a ligação rígida ($\rho=0,001$), igual a 13715 kNcm. Porém, o valor obtido pelo método aproximado, igual a -10477 kNcm, é bem próximo do valor obtido pela análise rigorosa.

Tabela 12 - Caso 1 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=0,5$

Momento fletor máximo nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) (kNcm) para $\alpha=0,5$											
ρ	Pilar	B_2	$M_u=M_p$				$M_u=M_p/2$				
			1ª ordem	2ª ordem		m^*	B_2	1ª ordem	2ª ordem		m^*
			aproximada	rigorosa					aproximada	rigorosa	
0,001	E	1,129	-6878	-6887	-6857	1,004	1,129	-6878	-6887	-6749	1,021
	D		6882	6873	6857	1,002		6882	6873	6749	1,018
0,01	E	1,131	-6782	-6791	-6760	1,005	1,132	-6782	-6790	-6652	1,021
	D		6786	6778	6760	1,003		6787	6778	6652	1,019
0,05	E	1,143	-6385	-6392	-6372	1,003	1,146	-6384	-6392	-6276	1,018
	D		6390	6382	6372	1,002		6391	6383	6276	1,017
0,1	E	1,156	-5949	-5956	-5925	1,005	1,160	-5948	-5955	-5794	1,028
	D		5955	5948	5925	1,004		5956	5949	5794	1,027
0,2	E	1,177	-5235	-5241	-5180	1,012	1,183	-5234	-5240	-5022	1,043
	D		5241	5235	5180	1,011		5242	5236	5022	1,043
0,5	E	1,221	-3850	-3853	-3764	1,024	1,227	-3849	-3852	-3623	1,063
	D		3854	3851	3764	1,023		3855	3851	3623	1,063
1	E	1,264	-2672	-2673	-2631	1,016	1,268	-2672	-2673	-2551	1,048
	D		2674	2673	2631	1,016		2675	2673	2551	1,048
2	E	1,306	-1657	-1658	-1643	1,009	1,308	-1657	-1658	-1602	1,035
	D		1659	1658	1643	1,010		1659	1658	1602	1,035
10	E	1,368	-410	-411	-408	1,005	1,368	-411	-411	-408	1,006
	D		411	411	408	1,006		411	411	408	1,006

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 13 - Caso 1 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=1,0$

Momento fletor máximo nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) (kNcm) para $\alpha=1,0$											
ρ	Pilar	B_2	$M_u=M_p$				$M_u=M_p/2$				
			1ª ordem	2ª ordem		m^*	1ª ordem	2ª ordem		m^*	
				aproximada	rigorosa			aproximada	rigorosa		
0,001	E	1,131	-13753	-13771	-13715	1,004	1,131	-13753	-13771	-13495	1,020
	D		13761	13743	13715	1,002		13762	13743	13495	1,018
0,01	E	1,135	-13560	-13578	-13524	1,004	1,138	-13558	-13576	-13307	1,020
	D		13570	13552	13524	1,002		13572	13554	13307	1,019
0,05	E	1,149	-12764	-12780	-12636	1,011	1,158	-12759	-12775	-12207	1,046
	D		12778	12762	12636	1,010		12784	12768	12207	1,046
0,1	E	1,163	-11893	-11907	-11561	1,030	1,175	-11887	-11901	-10876	1,094
	D		11909	11895	11561	1,029		11915	11901	10876	1,094
0,2	E	1,186	-10466	-10477	-10032	1,044	1,199	-10461	-10472	-9425	1,111
	D		10481	10470	10032	1,044		10486	10475	9425	1,111
0,5	E	1,231	-7697	-7703	-7269	1,060	1,243	-7695	-7701	-6741	1,142
	D		7707	7701	7269	1,059		7709	7703	6741	1,143
1	E	1,273	-5342	-5345	-5101	1,048	1,281	-5341	-5344	-4800	1,113
	D		5348	5345	5101	1,048		5349	5346	4800	1,114
2	E	1,314	-3314	-3315	-3144	1,054	1,319	-3313	-3315	-2956	1,122
	D		3317	3316	3144	1,055		3317	3316	2956	1,122
10	E	1,376	-821	-821	-799	1,027	1,376	-821	-821	-791	1,038
	D		822	821	799	1,028		822	821	791	1,038

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 14 - Caso 1 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=1,5$

Momento fletor máximo nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) (kNcm) para $\alpha=1,5$											
ρ	Pilar	B_2	$M_u=M_p$				$M_u=M_p/2$				
			1ª ordem	2ª ordem		m^*	1ª ordem	2ª ordem		m^*	
				aproximada	rigorosa			aproximada	rigorosa		
0,001	E	1,134	-20624	-20652	-20578	1,004	1,139	-20619	-20647	-20247	1,020
	D		20637	20609	20578	1,001		20643	20614	20247	1,018
0,01	E	1,138	-20334	-20361	-20293	1,003	1,153	-20319	-20346	-19739	1,031
	D		20351	20323	20293	1,001		20366	20338	19739	1,030
0,05	E	1,155	-19138	-19162	-18598	1,030	1,178	-19119	-19144	-17064	1,122
	D		19166	19141	18598	1,029		19185	19160	17064	1,123
0,1	E	1,172	-17831	-17852	-16967	1,052	1,195	-17814	-17836	-15218	1,172
	D		17863	17841	16967	1,052		17880	17858	15218	1,173
0,2	E	1,196	-15691	-15708	-14524	1,082	1,219	-15679	-15696	-12934	1,213
	D		15721	15704	14524	1,081		15733	15717	12934	1,215
0,5	E	1,242	-11463	-11454	-10293	1,113	1,259	-11536	-11544	-8891	1,298
	D		11559	11550	10293	1,122		11564	11555	8891	1,300
1	E	1,283	-8010	-8014	-6953	1,153	1,294	-8008	-8012	-6103	1,313
	D		8020	8015	6953	1,153		8022	8018	6103	1,314
2	E	1,323	-4969	-4971	-4439	1,120	1,329	-4969	-4970	-3991	1,245
	D		4974	4972	4439	1,120		4975	4973	3991	1,246
10	E	1,384	-1231	-1231	-1189	1,035	1,385	-1231	-1231	-1154	1,066
	D		1232	1232	1189	1,036		1232	1232	1154	1,067

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

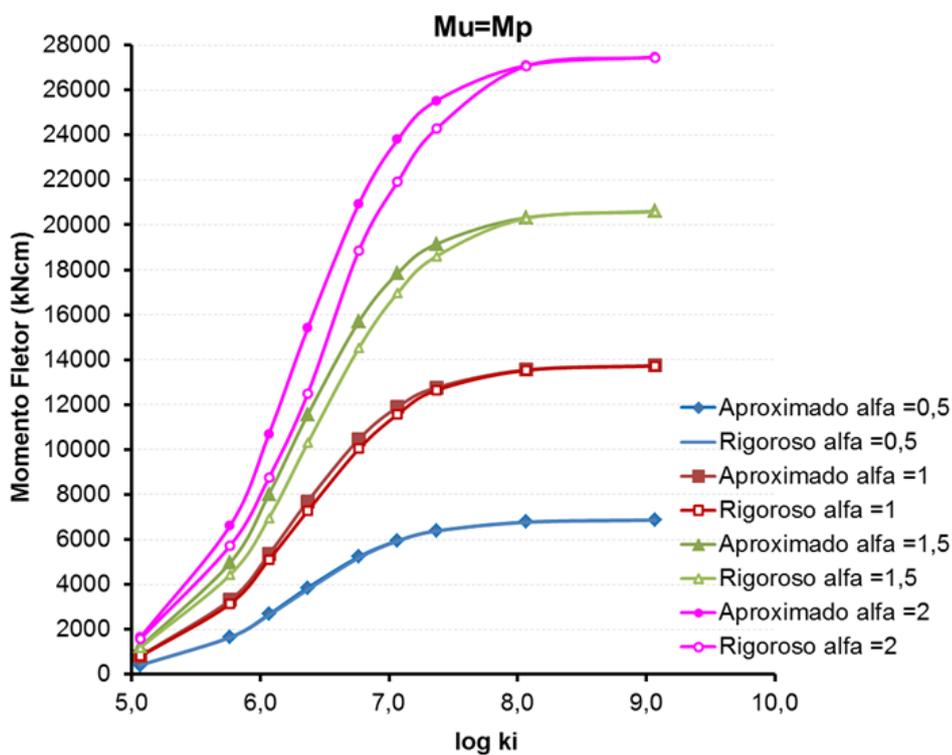
Tabela 15 - Caso 1 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=2,0$

Momento fletor máximo nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) (kNcm) para $\alpha=2,0$											
ρ	Pilar	B_2	$M_u=M_p$				$M_u=M_p/2$				
			1ª ordem	2ª ordem		m^*	B_2	1ª ordem	2ª ordem		m^*
				aproximada	rigorosa				aproximada	rigorosa	
0,001	E	1,136	-27492	-27529	-27447	1,003	1,180	-27433	-27472	-26553	1,035
	D		27509	27471	27447	1,001		27569	27529	26553	1,037
0,01	E	1,143	-27102	-27138	-27067	1,003	1,186	-27047	-27084	-24142	1,122
	D		27131	27093	27067	1,001		27187	27148	24142	1,125
0,05	E	1,164	-25504	-25538	-24273	1,052	1,204	-25462	-25494	-20654	1,234
	D		25555	25521	24273	1,051		25598	25565	20654	1,238
0,1	E	1,182	-23762	-23791	-21911	1,086	1,219	-23729	-23757	-18605	1,277
	D		23818	23788	21911	1,086		23851	23822	18605	1,280
0,2	E	1,207	-20911	-20934	-18859	1,110	1,239	-20890	-20911	-14511	1,441
	D		20961	20938	18859	1,110		20983	20961	14511	1,445
0,5	E	1,252	-15381	-15393	-12485	1,233	1,275	-15373	-15384	-10281	1,496
	D		15411	15398	12485	1,233		15419	15408	10281	1,499
1	E	1,293	-10676	-10682	-8756	1,220	1,307	-10673	-10679	-7399	1,443
	D		10692	10685	8756	1,220		10695	10689	7399	1,445
2	E	1,332	-6623	-6626	-5732	1,156	1,340	-6623	-6625	-5028	1,318
	D		6631	6628	5732	1,156		6632	6629	5028	1,319
10	E	1,393	-1641	-1641	-1578	1,040	1,393	-1641	-1641	-1517	1,082
	D		1642	1642	1578	1,040		1642	1642	1517	1,082

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

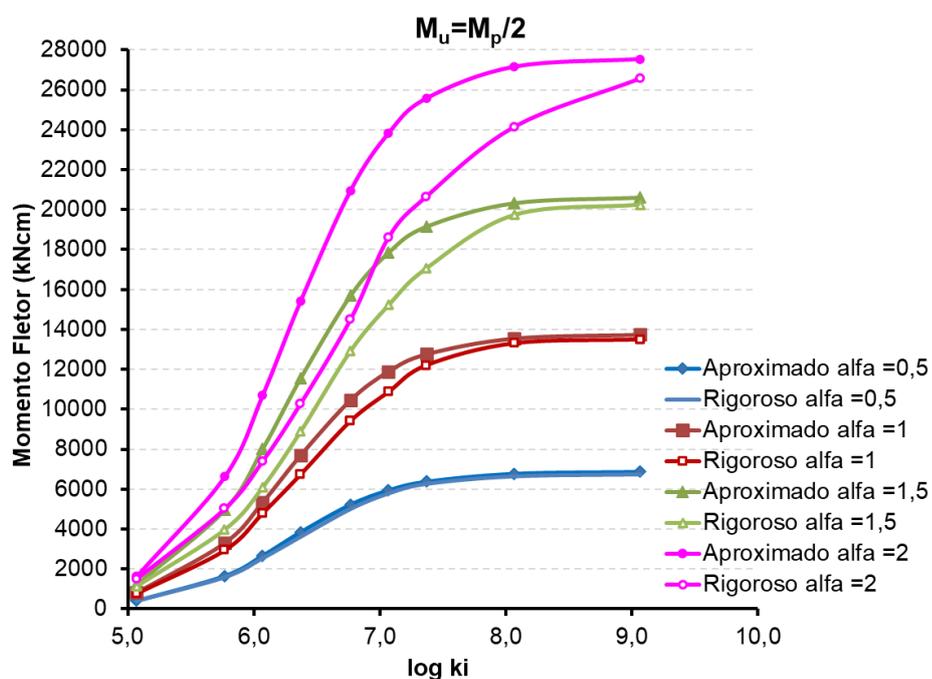
As Figuras 38 e 39 ilustram os valores de momentos fletores obtidos pelas análises aproximada e rigorosa em função de $\log k_i$, para os valores de α , considerando-se $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$, respectivamente. Observa-se que os momentos obtidos pela análise elástica em 2ª ordem aproximada são maiores que os momentos obtidos pela análise elástica em 2ª ordem rigorosa. Nota-se também que para valores intermediários de $\log k_i$, à medida que os valores de α aumentam, a diferença entre os valores dos momentos obtidos pelas análises aproximada e rigorosa também aumenta. Essa diferença é maior nas ligações com capacidade de momento último igual a $M_p/2$.

Figura 38 - Caso 1 - Momento fletor x $\log k_i$ para método aproximado e rigoroso, para $M_u=M_p$



Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Figura 39 - Caso 1 - Momento fletor x $\log k_i$ para método aproximado e rigoroso, para $M_u=M_p/2$



Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

4.1.2 Resultados para o caso 2 - Pórtico com carga uniformemente distribuída na viga (αq_0), carga vertical concentrada (P) no topo dos pilares e carga horizontal concentrada (H) no topo do pilar da esquerda

Neste item são apresentados os resultados obtidos para o pórtico com carregamentos uniformemente distribuído na viga, vertical P concentrado no topo dos pilares e horizontal H no topo do pilar da esquerda.

Os resultados do deslocamento horizontal no topo do pórtico e dos momentos fletores máximos nos pilares, para as análises elásticas de 1ª ordem e de 2ª ordem, aproximada e rigorosa, são apresentados nas tabelas a seguir, para cada fator de amplificação da carga distribuída, para as ligações do pórtico que apresentam capacidade de momento último iguais a M_p e a $M_p/2$ e parâmetro de rigidez ρ variando-se de 0,001 a 10. Nessas tabelas, é possível notar a influência do comportamento da ligação semirrígida já na análise de 1ª ordem elástica, ao se comparar os resultados do deslocamento horizontal no topo do pórtico e dos momentos fletores máximos nos pilares considerando o comportamento da ligação rígido convencional ($\rho=0,001$) com os resultados considerando-se as ligações com comportamento semirrígido.

A Tabela 16 apresenta os valores para os coeficientes de majoração B_2 e os deslocamentos horizontais do pilar da direita para todas as análises (1ª e 2ª ordem aproximada e rigorosa), quando o coeficiente de amplificação do carregamento uniformemente distribuído, α , é igual a 0,5. Para $\alpha = 0,5$ observa-se que todos os valores de d^* são superiores a 90%, para $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$.

Tabela 16 - Caso 2 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=0,5$

Deslocamento horizontal do pilar da direita (cm) para $\alpha=0,5$										
ρ	B_2	$M_u=M_p$				$M_u=M_p/2$				
		1ª ordem	2ª ordem		d^*	B_2	1ª ordem	2ª ordem		d^*
			aproximada	rigorosa				aproximada	rigorosa	
0,001	1,129	0,04994	0,05637	0,05828	0,97	1,129	0,04997	0,05640	0,05970	0,94
0,01	1,131	0,05109	0,05781	0,05952	0,97	1,132	0,05135	0,05813	0,06093	0,95
0,05	1,143	0,05576	0,06373	0,06464	0,99	1,146	0,05671	0,06497	0,06593	0,99
0,1	1,156	0,06075	0,07021	0,07258	0,97	1,160	0,06215	0,07209	0,07674	0,94
0,2	1,177	0,06872	0,08088	0,08399	0,96	1,183	0,07043	0,08329	0,09010	0,92
0,5	1,221	0,08376	0,10230	0,10486	0,98	1,227	0,08528	0,10461	0,10867	0,96
1	1,264	0,09648	0,12193	0,12407	0,98	1,268	0,09745	0,12355	0,12702	0,97
2	1,306	0,10762	0,14054	0,14217	0,99	1,308	0,10809	0,14138	0,14386	0,98
10	1,368	0,1219	0,16670	0,16724	1,00	1,368	0,12194	0,16677	0,16695	1,00

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

A Tabela 17 apresenta os valores para os coeficientes de majoração B_2 e os deslocamentos horizontais do pilar da direita, quando o coeficiente de amplificação do carregamento uniformemente distribuído, α , é igual a 1,0. Observa-se que os valores de d^* são superiores a 90% para todos os valores de ρ considerando $M_u=M_p$, mas para $M_u=M_p/2$, não ocorreu o mesmo comportamento, apresentando-se valores de d^* inferiores a 90% no intervalo de ρ entre 0,05 e 0,2.

Tabela 17 - Caso 2 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=1,0$

Deslocamento horizontal do pilar da direita (cm) para $\alpha=1,0$										
ρ	B_2	$M_u=M_p$				$M_u=M_p/2$				
		1ª ordem	2ª ordem		d^*	B_2	1ª ordem	2ª ordem		d^*
			aproximada	rigorosa					aproximada	
0,001	1,131	0,04554	0,05152	0,05349	0,96	1,131	0,04566	0,05167	0,05497	0,94
0,01	1,135	0,04695	0,05327	0,05476	0,97	1,138	0,04794	0,05454	0,05622	0,97
0,05	1,149	0,05248	0,06028	0,06307	0,96	1,158	0,05528	0,06401	0,07203	0,89
0,1	1,163	0,05816	0,06764	0,07361	0,92	1,175	0,06169	0,07249	0,08295	0,87
0,2	1,186	0,06690	0,07934	0,08213	0,97	1,199	0,07063	0,08471	0,09513	0,89
0,5	1,231	0,08271	0,10184	0,10559	0,96	1,243	0,08562	0,10639	0,11318	0,94
1	1,273	0,09570	0,12186	0,12580	0,97	1,281	0,09752	0,12492	0,13497	0,93
2	1,314	0,10702	0,14068	0,14220	0,99	1,319	0,10790	0,14227	0,15019	0,95
10	1,376	0,12167	0,16741	0,16438	1,02	1,376	0,12175	0,16756	0,16497	1,02

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

A Tabela 18 apresenta os valores para os coeficientes de majoração B_2 e os deslocamentos horizontais do pilar da direita para α igual a 1,5. Observa-se que para as ligações com $M_u=M_p$, o valor de d^* foi inferior a 90% apenas para o fator de rigidez ρ igual 0,5. Para ligações com $M_u=M_p/2$, foram obtidos valores de d^* inferiores a 90% no intervalo de ρ entre 0,01 e 0,5.

A Tabela 19 apresenta novamente os valores para os coeficientes de majoração B_2 e os deslocamentos horizontais do pilar da direita para α igual a 2,0. Nota-se que para as ligações com $M_u=M_p$, o valor de d^* foi inferior a 90% no intervalo de ρ entre 0,1 e 0,5. Para ligações com $M_u=M_p/2$, os valores de d^* foram inferiores a 90% para ρ menores que 1.

Observa-se que o método aproximado fornece um cálculo de deslocamentos horizontais de pilares satisfatório, quando comparado com a análise rigorosa. Nota-se que quando a capacidade de momento último é menor que o momento plástico da viga, o método aproximado não deve ser considerado. Nesta situação, o método rigoroso deve ser adotado.

Tabela 18 - Caso 2 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=1,5$

Deslocamento horizontal do pilar da direita (cm) para $\alpha=1,5$										
ρ	B_2	$M_u=M_p$				d^*	$M_u=M_p/2$			
		1ª ordem	2ª ordem		1ª ordem		2ª ordem			
			aproximada	rigorosa			aproximada	rigorosa		
0,001	1,134	0,04115	0,04665	0,04832	0,97	1,139	0,04259	0,04850	0,0498	0,97
0,01	1,138	0,04288	0,04881	0,04961	0,98	1,153	0,04686	0,05403	0,0658	0,82
0,05	1,155	0,04934	0,05700	0,06121	0,93	1,178	0,05526	0,06508	0,0776	0,84
0,1	1,172	0,05567	0,06522	0,06880	0,95	1,195	0,06182	0,07389	0,0990	0,75
0,2	1,196	0,06507	0,07783	0,08512	0,91	1,219	0,07079	0,08626	0,0988	0,87
0,5	1,242	0,08156	0,10127	0,12201	0,83	1,259	0,08565	0,10781	0,1377	0,78
1	1,283	0,09486	0,12169	0,12968	0,94	1,294	0,09737	0,12601	0,1398	0,90
2	1,323	0,10639	0,14078	0,13990	1,01	1,329	0,10762	0,14304	0,1452	0,98
10	1,384	0,12144	0,16814	0,15908	1,06	1,385	0,12155	0,16836	0,1597	1,05

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 19 - Caso 2 - Deslocamentos horizontais no topo do pilar da direita para $\alpha=2,0$

Deslocamento horizontal do pilar da direita (cm) para $\alpha=2,0$										
ρ	B_2	$M_u=M_p$				d^*	$M_u=M_p/2$			
		1ª ordem	2ª ordem		1ª ordem		2ª ordem			
			aproximada	rigorosa			aproximada	rigorosa		
0,001	1,136	0,03679	0,04180	0,04279	0,98	1,180	0,04676	0,05518	0,09246	0,60
0,01	1,143	0,03896	0,04452	0,04608	0,97	1,186	0,04881	0,05791	0,09133	0,63
0,05	1,164	0,04637	0,05396	0,05925	0,91	1,204	0,05554	0,06689	0,10067	0,66
0,1	1,182	0,05323	0,06289	0,07424	0,85	1,219	0,06167	0,07517	0,11982	0,63
0,2	1,207	0,06318	0,07626	0,09229	0,83	1,239	0,07046	0,08730	0,14811	0,59
0,5	1,252	0,0803	0,10056	0,11611	0,87	1,275	0,08531	0,10875	0,13160	0,83
1	1,293	0,09394	0,12143	0,12315	0,99	1,307	0,09702	0,12681	0,13311	0,95
2	1,332	0,10573	0,14084	0,13283	1,06	1,340	0,10726	0,14370	0,13804	1,04
10	1,393	0,12122	0,16887	0,15136	1,12	1,340	0,12122	0,16887	0,15194	1,11

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

As Tabelas 20 a 23 apresentam os valores dos coeficientes de majoração B_2 e os valores de momentos fletores máximos nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) dos pórticos, para cada coeficiente de amplificação α , para as análises de 1ª ordem e 2ª ordem, aproximada e rigorosa. Os valores de momento variam conforme o comportamento da ligação, ou seja, quando a capacidade de momento último é igual a M_p e a $M_p/2$ e quando o parâmetro de rigidez ρ varia de 0,001 a 10. Os valores para B_1 obtidos foram menores que um, portanto sendo tomados iguais à unidade, conforme recomendado pela ABNT NBR 8800: 2008.

Tabela 20 - Caso 2 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=0,5$

Momento fletor máximo nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) (kNcm) para $\alpha=0,5$											
ρ	Pilar	B_2	$M_u=M_p$				$M_u=M_p/2$				
			1ª ordem	2ª ordem		m^*	1ª ordem	2ª ordem		m^*	
				aproximada	rigorosa			aproximada	rigorosa		
0,001	E	1,129	-5985	-5885	-5861	1,004	1,129	-5985	-5885	-5765	1,021
	D		7759	7861	7840	1,003		7759	7860	7720	1,018
0,01	E	1,131	-5902	-5801	-5774	1,005	1,132	-5905	-5804	-5678	1,022
	D		7650	7752	7732	1,003		7646	7749	7613	1,018
0,05	E	1,143	-5559	-5455	-5430	1,005	1,146	-5571	-5466	-5344	1,023
	D		7199	7305	7303	1,000		7188	7294	7196	1,014
0,1	E	1,156	-5182	-5075	-5047	1,006	1,160	-5199	-5092	-4955	1,028
	D		6707	6815	6787	1,004		6690	6798	6624	1,026
0,2	E	1,177	-4560	-4452	-4383	1,016	1,183	-4581	-4473	-4267	1,048
	D		5902	6012	5933	1,013		5881	5991	5713	1,049
0,5	E	1,221	-3349	-3246	-3160	1,027	1,227	-3367	-3266	-3052	1,070
	D		4344	4449	4362	1,020		4326	4429	4188	1,057
1	E	1,264	-2317	-2229	-2182	1,022	1,268	-2329	-2243	-2118	1,059
	D		3020	3110	3061	1,016		3008	3096	2947	1,051
2	E	1,306	-1432	-1367	-1353	1,010	1,308	-1438	-1374	-1326	1,036
	D		1878	1944	1927	1,009		1872	1937	1871	1,035
10	E	1,368	-351	-330	-331	0,999	1,368	-351	-331	-332	0,998
	D		467	488	483	1,010		467	487	488	0,998

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 21 - Caso 2 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=1,0$

Momento fletor máximo nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) (kNcm) para $\alpha=1,0$											
ρ	Pilar	B_2	$M_u=M_p$				$M_u=M_p/2$				
			1ª ordem	2ª ordem		m^*	1ª ordem	2ª ordem		m^*	
				aproximada	rigorosa			aproximada	rigorosa		
0,001	E	1,131	-12860	-12767	-12718	1,004	1,131	-12861	-12768	-12511	1,021
	D		14637	14732	14701	1,002		14636	14731	14469	1,018
0,01	E	1,135	-12683	-12589	-12538	1,004	1,138	-12695	-12600	-12333	1,022
	D		14430	14525	14500	1,002		14417	14514	14272	1,017
0,05	E	1,149	-11951	-11853	-11718	1,011	1,158	-11985	-11886	-11322	1,050
	D		13575	13675	13545	1,010		13540	13642	12998	1,050
0,1	E	1,163	-11144	-11042	-10731	1,029	1,175	-11186	-11084	-10123	1,095
	D		12643	12746	12384	1,029		12599	12703	11621	1,093
0,2	E	1,186	-9812	-9708	-9270	1,047	1,199	-9858	-9755	-8708	1,120
	D		11120	11226	10788	1,041		11074	11179	10007	1,117
0,5	E	1,231	-7214	-7114	-6701	1,062	1,243	-7249	-7153	-6237	1,147
	D		8178	8280	7833	1,057		8142	8241	7242	1,138
1	E	1,273	-4999	-4913	-4667	1,053	1,281	-5021	-4939	-4396	1,123
	D		5682	5769	5463	1,056		5659	5743	5037	1,140
2	E	1,314	-3094	-3029	-2951	1,026	1,319	-3105	-3042	-2762	1,102
	D		3530	3596	3465	1,038		3520	3583	3149	1,138
10	E	1,376	-761	-741	-724	1,024	1,376	-762	-742	-721	1,030
	D		877	898	874	1,027		876	897	861	1,041

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 22 - Caso 2 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=1,5$

Momento fletor máximo nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) (kNcm) para $\alpha=1,5$											
ρ	Pilar	B_2	$M_u=M_p$				$M_u=M_p/2$				
			1ª ordem	2ª ordem		m^*	1ª ordem	2ª ordem		m^*	
				aproximada	rigorosa			aproximada	rigorosa		
0,001	E	1,134	-19732	-19646	-19581	1,003	1,139	-20370	-19663	-19261	1,021
	D		21513	21599	21567	1,001		20863	21583	21224	1,017
0,01	E	1,138	-19462	-19375	-19306	1,004	1,153	-20092	-19421	-18888	1,028
	D		21205	21294	21272	1,001		20565	21247	20582	1,032
0,05	E	1,155	-18341	-18249	-17734	1,029	1,178	-18939	-18320	-16307	1,123
	D		19946	20040	19455	1,030		19339	19968	17815	1,121
0,1	E	1,172	-17103	-17007	-16135	1,054	1,195	-17668	-17082	-14640	1,167
	D		18574	18673	17793	1,049		18000	18596	15793	1,177
0,2	E	1,196	-15062	-14961	-13826	1,082	1,219	-15573	-15034	-12351	1,217
	D		16336	16438	15218	1,080		15816	16364	13515	1,211
0,5	E	1,242	-11077	-10979	-9904	1,109	1,259	-11479	-11035	-8635	1,278
	D		12011	12110	10681	1,134		11602	12054	9147	1,318
1	E	1,283	-7679	-7594	-6627	1,146	1,294	-7977	-7630	-5862	1,302
	D		8342	8428	7279	1,158		8039	8391	6343	1,323
2	E	1,323	-4755	-4691	-4199	1,117	1,329	-4953	-4709	-3797	1,240
	D		5182	5247	4679	1,122		4981	5228	4186	1,249
10	E	1,384	-1172	-1151	-1113	1,034	1,385	-1226	-1153	-1084	1,064
	D		1287	1308	1265	1,034		1232	1307	1225	1,066

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 23 - Caso 2 - Momentos fletores no topo do pilar para $\alpha=2,0$

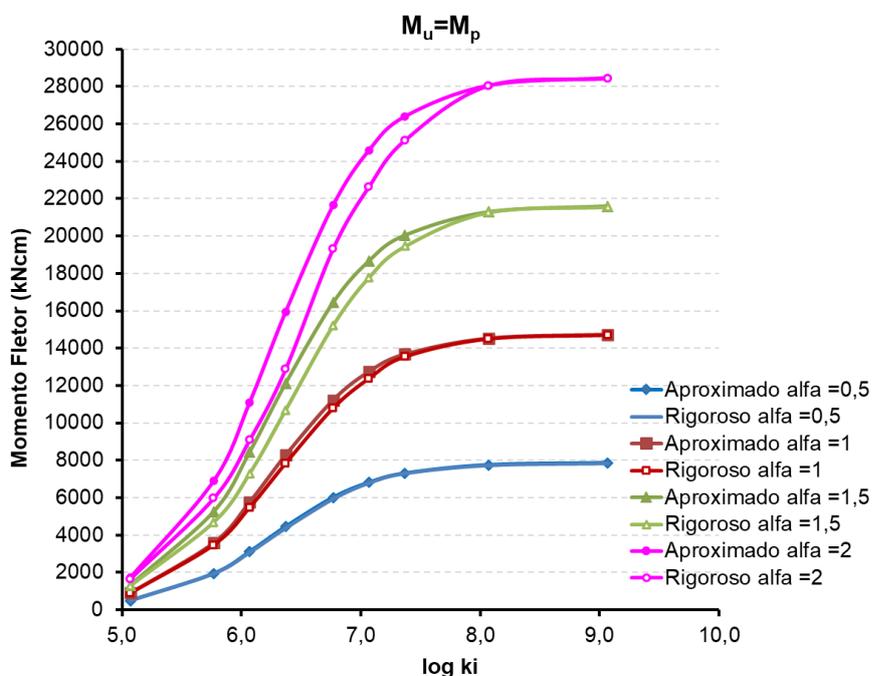
Momento fletor máximo nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) (kNcm) para $\alpha=2,0$											
ρ	Pilar	B_2	$M_u=M_p$				$M_u=M_p/2$				
			1ª ordem	2ª ordem		m^*	1ª ordem	2ª ordem		m^*	
				aproximada	rigorosa			aproximada	rigorosa		
0,001	E	1,136	-26600	-26522	-26448	1,003	1,180	-26721	-26640	-25863	1,030
	D		28384	28463	28439	1,001		28261	28343	27018	1,049
0,01	E	1,143	-26239	-26159	-26079	1,003	1,186	-26358	-26276	-23549	1,116
	D		27976	28057	28049	1,000		27855	27938	24733	1,130
0,05	E	1,164	-24730	-24644	-23408	1,053	1,204	-24841	-24756	-20136	1,229
	D		26312	26400	25134	1,050		26199	26285	21171	1,242
0,1	E	1,182	-23061	-22970	-21170	1,085	1,219	-23163	-23075	-18050	1,278
	D		24502	24595	22650	1,086		24398	24487	18766	1,305
0,2	E	1,207	-20307	-20212	-18135	1,115	1,239	-20395	-20306	-14391	1,411
	D		21550	21647	19316	1,121		21460	21551	14630	1,473
0,5	E	1,252	-14936	-14841	-12095	1,227	1,275	-14996	-14910	-10023	1,488
	D		15844	15940	12875	1,238		15782	15870	10539	1,506
1	E	1,293	-10356	-10273	-8429	1,219	1,307	-10393	-10318	-7158	1,442
	D		11002	11086	9084	1,220		10964	11041	7641	1,445
2	E	1,332	-6414	-6351	-5491	1,157	1,340	-6433	-6374	-4832	1,319
	D		6833	6898	5974	1,155		6815	6874	5225	1,316
10	E	1,393	-1582	-1561	-1502	1,039	1,340	-1582	-1561	-1446	1,080
	D		1697	1718	1655	1,038		1697	1718	1588	1,082

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Observa-se que os valores de momento fletor determinados pela análise aproximada de segunda ordem elástica apresentaram boa correlação com os valores obtidos por meio da análise rigorosa. Assim como no caso 1, verifica-se novamente que os valores dos momentos fletores aproximados obtidos considerando-se $M_u=M_p$ são ainda mais próximos dos valores dos momentos rigorosos, quando comparados com os valores aproximados obtidos considerando-se $M_u=M_p/2$.

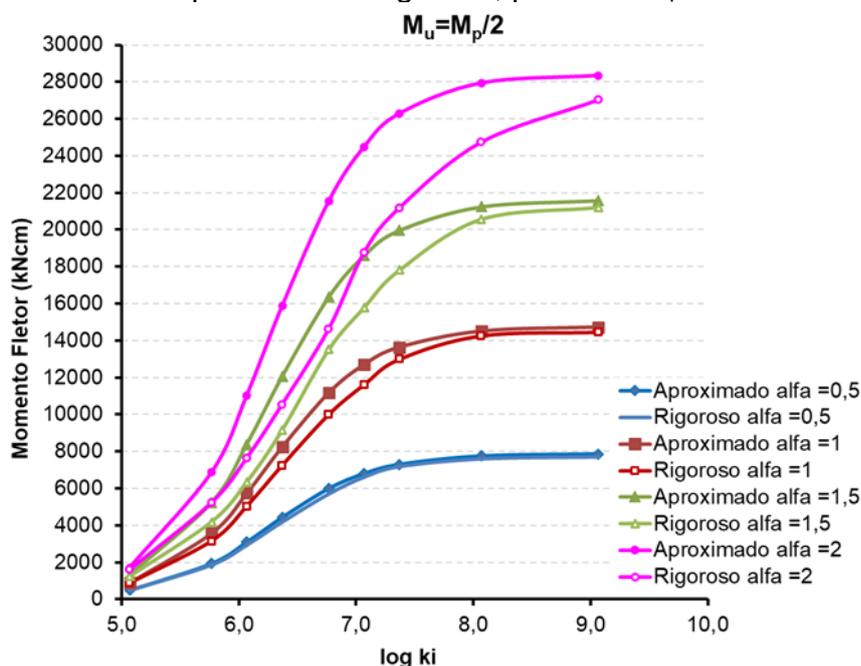
As Figuras 40 e 41 ilustram as curvas dos momentos fletores do pilar da direita do pórtico, obtidos pelas análises aproximada e rigorosa, em função de $\log k_i$, para os diversos valores de α , para $M_u=M_p$ e $M_u=M_p/2$, respectivamente. Novamente, observa-se que os momentos obtidos pela análise elástica em 2ª ordem aproximada são maiores que os momentos obtidos pela análise elástica em 2ª ordem rigorosa. Assim como no caso 1, a diferença entre os valores de momentos obtidos pelas análises aproximada e rigorosa é maior nas ligações com capacidade de momento último igual a $M_p/2$.

Figura 40 - Caso 2 - Momento fletor do pilar da direita x $\log k_i$ para método aproximado e rigoroso, para $M_u=M_p$



Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Figura 41 - Caso 2 - Momento fletor do pilar da direita x $\log k_i$ para método aproximado e rigoroso, para $M_u=M_p/2$



Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

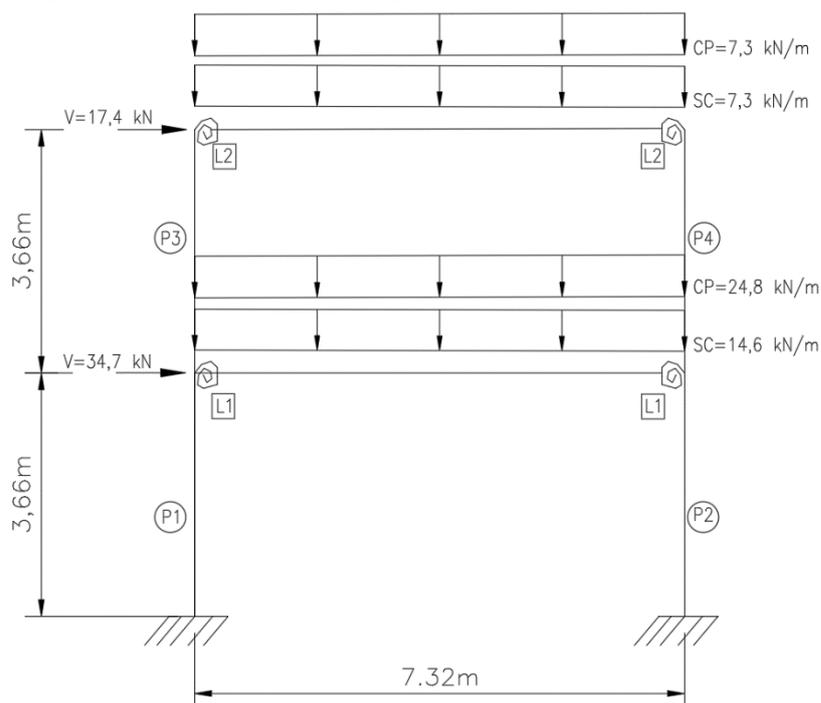
Verifica-se que o método aproximado, considerando-se o comportamento das ligações, apresentou valores de momento fletor bem próximos dos valores obtidos por meio da análise rigorosa, comprovando a importância da inclusão do comportamento não linear das ligações nas análises estruturais. Por exemplo, para $\alpha=1,0$, a ligação semirrígida com $M_u=M_p$ e $\rho=0,5$, o valor do momento fletor do pilar da esquerda, pela análise rigorosa, é 6701 kNcm, bem diferente do momento fletor calculado considerando-se a ligação rígida ($\rho=0,001$), igual a 12718 kNcm. Porém, o valor obtido pela análise aproximada, igual a 7114 kNcm, é bem próximo do valor calculado pelo método rigoroso.

4.2 PÓRTICO DE DOIS ANDARES E UM VÃO

Na Figura 42 está apresentado o pórtico semirrígido de dois andares e um vão, analisado previamente por Singh e Lui (2014) para o carregamento e dimensões de barras mostradas na figura. Todos os pilares e a viga do segundo andar são constituídos pelo perfil W10x33 (I 247,1x202,2x11,0x7,4), e a viga do primeiro andar, pelo perfil W12x50 (I 309,6x205,2x16,3x9,4), cujas propriedades estão apresentadas na Tabela 24. O carregamento é constituído por ações características permanentes, CP, devido ao peso próprio da estrutura e variáveis, SC, decorrentes do uso e

ocupação, uniformemente distribuídas. Na viga do primeiro andar tem-se CP e SC iguais a 24,8 kN/m e 14,6 kN/m, respectivamente. Na viga do segundo andar, CP e SC são iguais a 7,3 kN/m. O pórtico também está submetido a um carregamento horizontal característico devido ao vento, V , iguais a 34,7 kN e 17,4 kN aplicados no topo do primeiro e do segundo andar, respectivamente.

Figura 42 - Pórtico semirrígido de dois andares e um vão



Fonte: Adaptado de (SINGH & LUI, 2014)

Tabela 24 – Dimensões e propriedades dos perfis utilizados

Dimensões e propriedades dos perfis utilizados							
Perfil	d (cm)	b_f (cm)	t_w (cm)	t_f (cm)	I_x (cm ⁴)	Z_x (cm ³)	Área (cm ²)
W10x33 (I247,1x202,2x11,0x7,4)	24,71	20,22	0,74	1,10	7075,93	573,55	62,65
W12x50 (I309,6x205,2x16,3x9,4)	30,96	20,52	0,94	1,63	16399,52	1052,05	94,19

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Para o cálculo dos momentos fletores solicitantes nos pilares e dos deslocamentos laterais no topo dos andares do pórtico, com ligações semirrígidas e rígida convencional, considera-se a combinação de carga na qual a sobrecarga atua como ação variável principal ($1,4 CP + 1,5 SC + 0,84 V$).

Para implementação dos dados no programa, as cargas uniformemente distribuídas nas vigas foram modeladas como um conjunto de cargas nodais equivalentes. Dez elementos finitos foram utilizados para modelar cada viga e pilar. As seções transversais foram divididas em 20 fatias iguais, sendo uma para cada mesa e 18 para a alma do perfil. O comportamento não linear da ligação é aproximado por uma curva multilinear, considerando-se cinco trechos lineares, com os pares de θ_r e M . O pórtico é analisado considerando a 2ª ordem elástica, aproximada e rigorosa. O módulo de elasticidade longitudinal é igual a 200.000 MPa.

O modelo de três parâmetros é usado para construir as curvas multilineares das ligações, com os valores de rigidez inicial rotacional, k_i , o fator de forma, n , e a capacidade de momento último, M_u da ligação apresentados na Tabela 25, assim como os valores do parâmetro de rigidez adimensional (ρ), a relação M_u/M_p , sendo M_p o produto o módulo plástico da viga e a resistência ao escoamento do material, igual a 345 MPa, e a classificação em termos de rigidez, conforme a ABNT NBR 8800: 2008.

Tabela 25 – Parâmetros das ligações semirrígidas

	Ligação	k_i (kNcm/rad)	ρ	M_u (kNcm)	M_u/M_p	n	Classificação
1º andar	1A	7.751.800	0,0578	24713	0,681	1,41	Semirrígida
	1B	11.413.000	0,0393	30092	0,829	1,03	Rígida
	1C	16.916.100	0,0265	35482	0,978	0,89	Rígida
2º andar	2A	2.395.600	0,0807	10260	0,519	1,32	Semirrígida
	2B	2.915.400	0,0663	12170	0,615	1,31	Semirrígida
	2C	3.638.600	0,0531	14249	0,720	1,24	Semirrígida

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

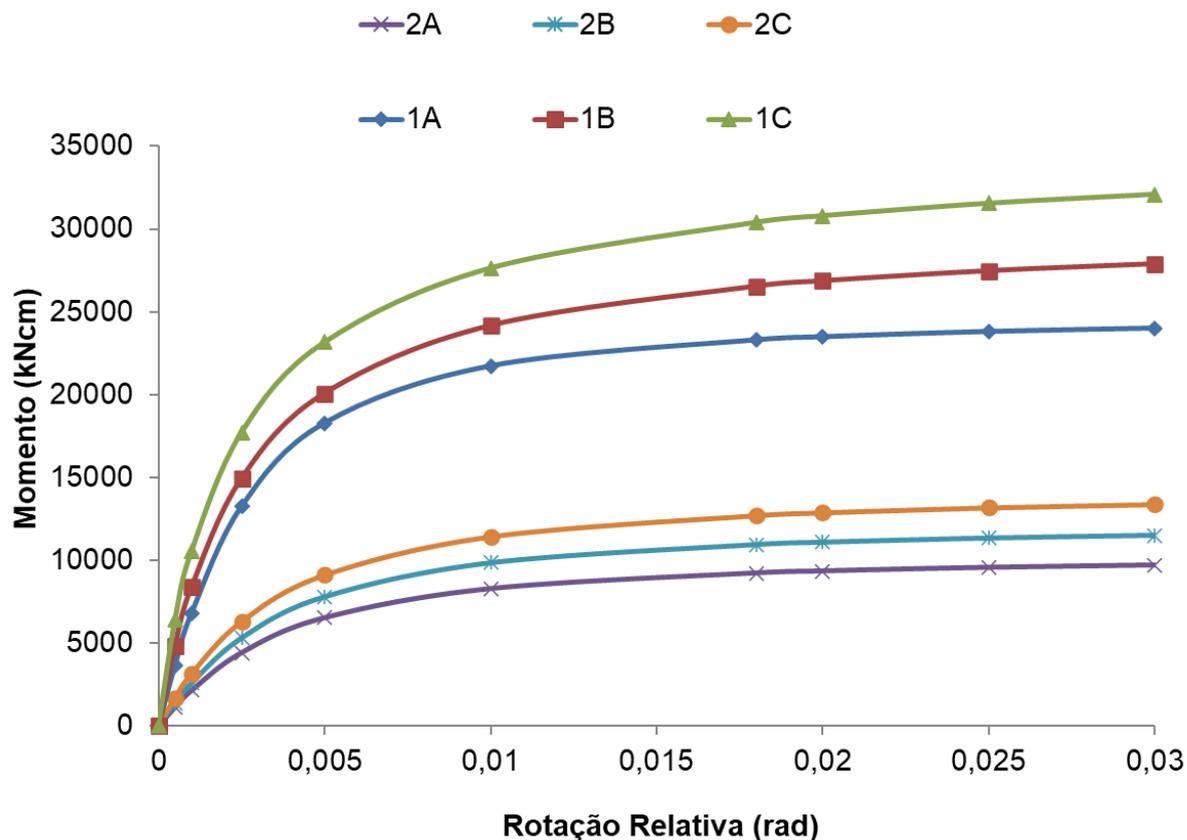
A Figura 43 apresenta o comportamento não linear $M-\theta_r$ para as seis ligações adotadas.

Para a análise elástica de 2ª ordem aproximada, os dois parâmetros de rigidez da ligação, k_{i0} e k_b , são calculados para serem utilizados nas análises dos pórticos indeslocáveis “ nt ” e deslocáveis “ lt ”, respectivamente.

A rigidez secante k_{i0} é determinada em função de k_i , θ_0 e n , conforme apresentado no exemplo anterior. A rigidez secante efetiva da ligação, k_b , é determinada utilizando-se a linha de viga. A Figura 44 mostra as curvas das ligações

e as linhas de vigas para as vigas do 1º e 2º andar. Os valores de k_{i0} e k_b são apresentados na Tabela 26.

Figura 43 - Comportamento M- θ_r das ligações

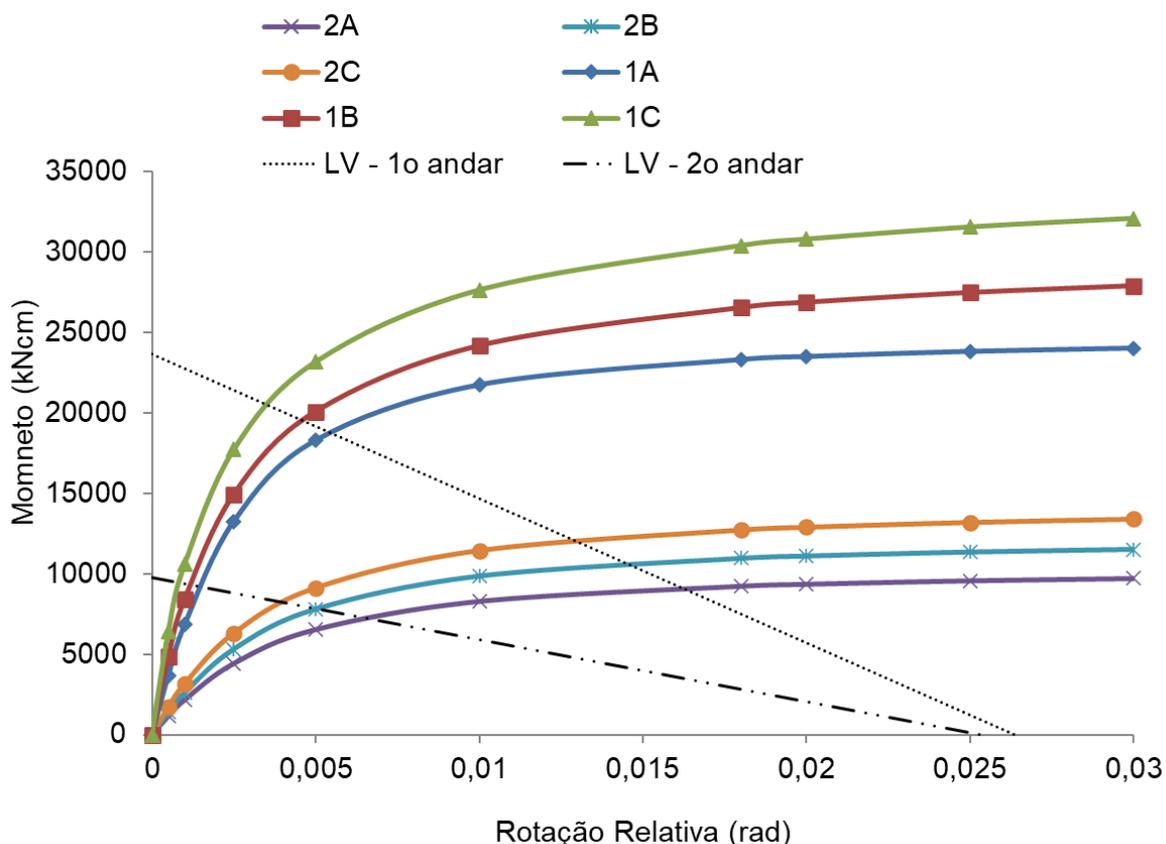


Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 26 – Valores de k_{i0} e k_b para ligações

	Ligação	ρ	k_{i0} (kNcm/rad)	k_b (kNcm/rad)
1º andar	1A	0,0578	4.741.395	3.466.701
	1B	0,0393	5.822.878	4.237.770
	1C	0,0265	7.763.620	5.823.182
2º andar	2A	0,0807	1.416.972	1.118.319
	2B	0,0663	1.717.530	1.554.459
	2C	0,0531	2.080.502	2.058.735

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Figura 44 - Comportamento M- θ_r das ligações e linhas de viga

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

A Tabela 27 apresenta os valores do fator de rigidez relativa G_B (Eq. 84), determinado em função de α_{nt} (Eq. 85), e o fator do comprimento efetivo k_1 para a estrutura "nt" (Eq. 43), para todas as ligações apresentadas anteriormente e para as ligações rígidas convencionais (1R e 2R). O fator de rigidez relativa G_A é considerado igual a zero (valor teórico). O valor de k_1 varia de 0,646 a 0,660, para valores de ρ entre 0,0002 a 0,0807.

Na Tabela 28 estão apresentados os valores do fator de rigidez relativa G_B (Eq. 89), determinado em função de α_{lt} (Eq. 90), e o fator do comprimento efetivo k_2 (Eq. 45) para a estrutura "lt", para as ligações consideradas. O fator de rigidez relativa G_A é considerado igual a zero.

Tabela 27 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_1 para a estrutura “nt”

	Ligação	ρ	G_B	k_1
1º andar	1A	0,0578	2,05	0,652
	1B	0,0393	1,99	0,651
	1C	0,0265	1,93	0,650
	1R	0,0004	1,73	0,646
2º andar	2A	0,0807	2,55	0,660
	2B	0,0663	2,45	0,659
	2C	0,0531	2,37	0,657
	2R	0,0002	2,00	0,652

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Tabela 28 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_2 para a estrutura “lt”

	Ligação	ρ	G_B	K_2
1º andar	1A	0,0578	3,06	1,368
	1B	0,0393	2,82	1,349
	1C	0,0265	2,52	1,325
	1R	0,0004	1,73	1,249
2º andar	2A	0,0807	4,07	1,434
	2B	0,0663	3,49	1,398
	2C	0,0531	3,13	1,372
	2R	0,0002	2,00	1,277

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Quatro pórticos são avaliados. Em cada avaliação, duas ligações são utilizadas, uma para o primeiro andar e uma para o segundo andar, conforme apresentado na Tabela 29.

Tabela 29 – Ligações consideradas em cada andar de cada pórtico

	Ligação 1º andar	Ligação 2º andar
Pórtico 1	1A	2A
Pórtico 2	1B	2B
Pórtico 3	1C	2C
Pórtico 4	1R	2R

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

A seguir, são apresentados os resultados obtidos para os pórticos analisados. Os resultados da análise elástica em 2ª ordem aproximada estão sempre relacionados

com os resultados da análise elástica em 2ª ordem rigorosa. Dessa forma, d^* e m^* são, respectivamente, a relação entre o deslocamento e o momento aproximados com o deslocamento e o momento rigorosos.

Os resultados do deslocamento horizontal no topo de cada pilar e dos momentos fletores máximos nos pilares para as análises elásticas de 1ª ordem e de 2ª ordem, aproximada e rigorosa, são apresentados nas tabelas a seguir, para todos os pórticos estudados. Novamente, é possível notar a influência do comportamento da ligação semirrígida já na análise de 1ª ordem elástica, ao se comparar os resultados do deslocamento horizontal no topo do pórtico e dos momentos fletores máximos nos pilares considerando o comportamento da ligação rígido convencional ($\rho=0,001$) com os resultados considerando-se as ligações com comportamento semirrígido.

A Tabela 30 apresenta os valores para os coeficientes de majoração B_2 e os deslocamentos horizontais dos pilares para todas as análises (1ª e 2ª ordem aproximada e rigorosa). Observa-se que, para todos os pórticos, o método aproximado fornece um cálculo de deslocamentos horizontais satisfatório, uma vez que $d^* < 1,0$. Observa-se, também, que apenas o pórtico 3 apresenta resultados que indicam uma boa correlação entre os métodos estudados. Nota-se que o pórtico 4, que possui ligações representativas do comportamento rígido convencional tanto no primeiro quanto no segundo andar, apresentaram valores de deslocamentos laterais aproximados maiores que os valores obtidos pela análise rigorosa, uma vez que $d^* \geq 1,0$.

A Tabela 31 apresenta os valores dos coeficientes de majoração B_2 e os valores de momentos fletores máximos nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) dos pórticos, para as análises de 1ª ordem e 2ª ordem aproximada e rigorosa. Os valores para B_1 obtidos foram menores que um, e tomados iguais à unidade, conforme recomenda a ABNT NBR 8800: 2008. Observa-se que os valores de momento fletor máximo obtidos pela análise aproximada foram maiores que os obtidos pela análise rigorosa apenas para o primeiro andar dos pórticos estudados e para o pilar da esquerda do 2º andar dos pórticos 1 e 2.

Observa-se que, os valores de momento fletor determinados pela análise aproximada e rigorosa em segunda ordem elástica apresentaram boa correlação, pois o valor de m^* é bem próximo de 1,0.

Conforme critério de classificação quanto à sensibilidade ao deslocamento lateral estabelecido pela norma brasileira, todos os pórticos analisados enquadraram-se

como estrutura de pequena deslocabilidade, por apresentarem coeficiente de amplificação B_2 menores que 1,1.

Tabela 30 – Deslocamentos horizontais no topo dos pilares

Deslocamento horizontal no topo dos pilares (cm)									
		Ligação	ρ	Barra	B_2	1ª Ordem	2ª ordem		d*
							aproximada	rigorosa	
Pórtico 1	1º andar	1A	0,0578	pilar 1 - E	1,049	1,110	1,164	1,740	0,67
				pilar 2 - D	1,049	1,106	1,160	1,703	0,68
	2º andar	2A	0,0807	pilar 3 - E	1,013	2,123	2,190	3,667	0,60
				pilar 4 - D	1,013	2,106	2,173	3,645	0,60
Pórtico 2	1º andar	1B	0,0393	pilar 1 - E	1,048	1,125	1,179	1,550	0,76
				pilar 2 - D	1,048	1,122	1,175	1,518	0,77
	2º andar	2B	0,0663	pilar 3 - E	1,013	2,147	2,213	3,087	0,72
				pilar 4 - D	1,013	2,129	2,195	3,065	0,72
Pórtico 3	1º andar	1C	0,0265	pilar 1 - E	1,046	1,076	1,126	1,202	0,94
				pilar 2 - D	1,046	1,073	1,122	1,177	0,95
	2º andar	2C	0,0531	pilar 3 - E	1,012	1,999	2,059	2,261	0,91
				pilar 4 - D	1,012	1,980	2,041	2,238	0,91
Pórtico 4	1º andar	1R	0,0004	pilar 1 - E	1,041	0,952	0,991	0,994	1,00
				pilar 2 - D	1,041	0,951	0,990	0,977	1,01
	2º andar	2R	0,0002	pilar 3 - E	1,011	1,607	1,652	1,657	1,00
				pilar 4 - D	1,011	1,585	1,631	1,633	1,00

Fonte: Elaborado pela Autora

Tabela 31 - Momentos fletores no topo dos pilares

Momento fletor máximo nos pilares									
		Ligação	ρ	Barra	B_2	1ª ordem	2ª ordem		m*
							aproximada	rigorosa	
Pórtico 1	1º andar	1A	0,0578	pilar 1 - E	1,049	-4571	-4422	-4339	1,019
				pilar 2 - D	1,049	10745	10896	8633	1,262
	2º andar	2A	0,0807	pilar 3 - E	1,013	-3397	-3375	-2477	1,363
				pilar 4 - D	1,013	6668	6690	6773	0,988
Pórtico 2	1º andar	1B	0,03926	pilar 1 - E	1,048	-4737	-4592	-4362	1,053
				pilar 2 - D	1,048	10879	11025	9344	1,180
	2º andar	2B	0,06631	pilar 3 - E	1,013	-3620	-3598	-3102	1,160
				pilar 4 - D	1,013	7007	7028	7471	0,941
Pórtico 3	1º andar	1C	0,02649	pilar 1 - E	1,046	-4853	-4710	-4625	1,018
				pilar 2 - D	1,046	11136	11280	10875	1,037
	2º andar	2C	0,05313	pilar 3 - E	1,012	-3894	-3873	-3959	0,978
				pilar 4 - D	1,012	7257	7278	7486	0,972
Pórtico 4	1º andar	1R	0,00045	pilar 1 - E	1,041	-5105	-4969	-4288	1,008
				pilar 2 - D	1,041	11851	11988	9310	1,005
	2º andar	2R	0,00019	pilar 3 - E	1,011	-5426	-5408	-3298	0,993
				pilar 4 - D	1,011	8863	8881	7823	0,993

Fonte: Elaborado pela Autora

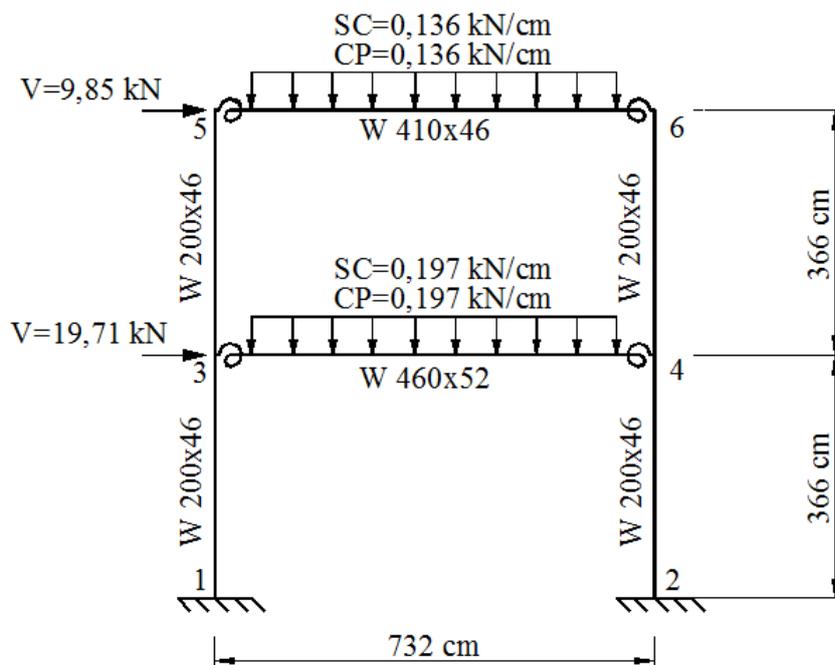
4.3 PÓRTICO DE DOIS ANDARES E UM VÃO

O pórtico semirrígido de dois andares e um vão foi analisado e dimensionado por Silva (2010) por meio da análise avançada e considerando-se os procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008. O pórtico será agora analisado levando-se em conta o método aproximado apresentado nesse trabalho.

A geometria, dimensões e o carregamento característico do pórtico estão mostrados na Figura 45. O carregamento vertical é composto pelas contribuições de peso próprio e de sobrecarga, na mesma proporção. O carregamento permanente se deve ao peso próprio de elementos construtivos industrializados com adições “in loco” e a sobrecarga é devida a elevadas concentrações de pessoas. A força horizontal aplicada no topo de cada andar é decorrente do vento.

As vigas são conectadas aos pilares, com suas almas no plano do pórtico por ligações com cantoneiras de topo e de assento e duplas cantoneiras na alma. O pórtico é analisado considerando a 2ª ordem elástica, aproximada e rigorosa. O módulo de elasticidade longitudinal é igual a 200.000 MPa. As imperfeições iniciais geométricas e de material não são consideradas na análise.

Figura 45 – Pórtico de dois andares e um vão

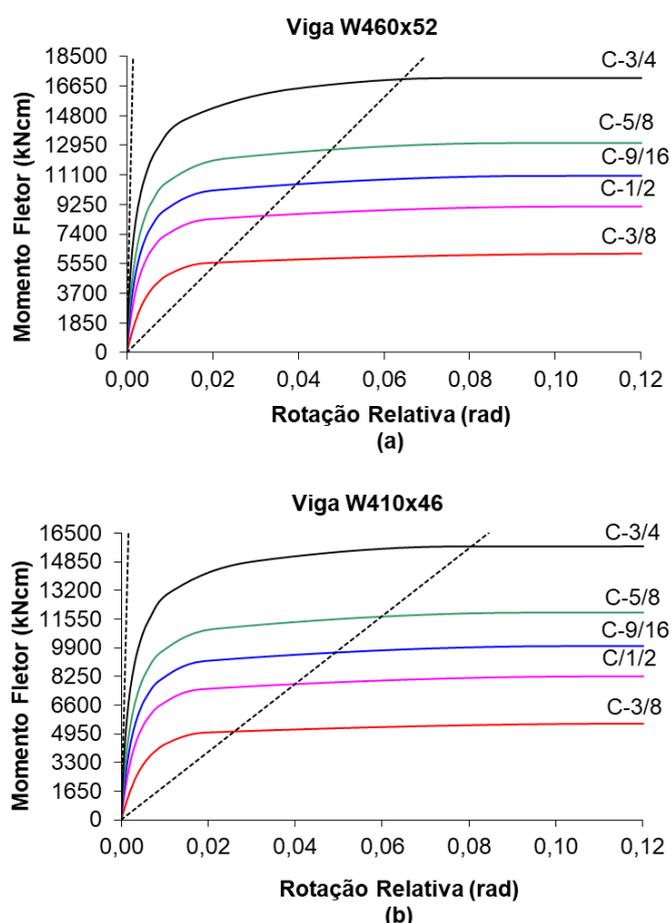


Fonte: Adaptado de (SILVA, 2010)

Para implementação dos dados do programa as vigas foram divididas em 4 elementos e os pilares em 2 elementos iguais. As seções transversais foram divididas em 20 fatias, sendo 1 fatia em cada mesa e 18 fatias na alma.

O modelo de três parâmetros é usado para construir as curvas multilíneas das ligações. Cinco tipos de ligações são avaliadas, variando-se apenas a espessura das cantoneiras de topo e de assento, definidas como C-3/8, C-1/2, C-9/16, C-5/8 e C-3/4. O comportamento $M-\theta_r$ das ligações é mostrado na Figura 46, em que as retas pontilhadas representam os limites de classificação das ligações quanto à rigidez, segundo a ABNT NBR 8800: 2008, indicando que todas são semirrígidas. Os parâmetros de cálculo dessas ligações são apresentados na Tabela 32, assim como os valores do parâmetro de rigidez adimensional (ρ), a relação M_u/M_p , sendo M_p o produto entre o módulo plástico da viga e a resistência ao escoamento do material, igual a 250 MPa.

Figura 46 – Comportamento e classificação das ligações: (a) viga inferior, (b) viga superior



Fonte: (SILVA, 2010)

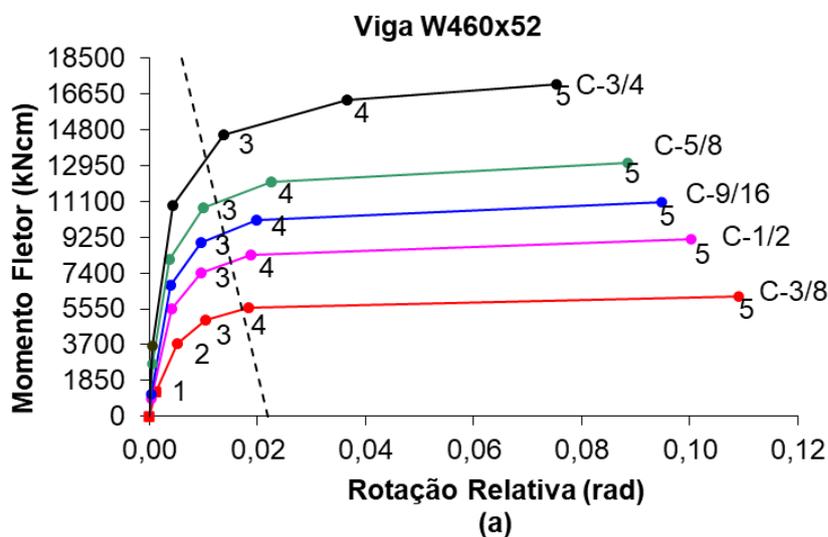
Tabela 32 – Parâmetros de cálculo das ligações para o modelo de três parâmetros

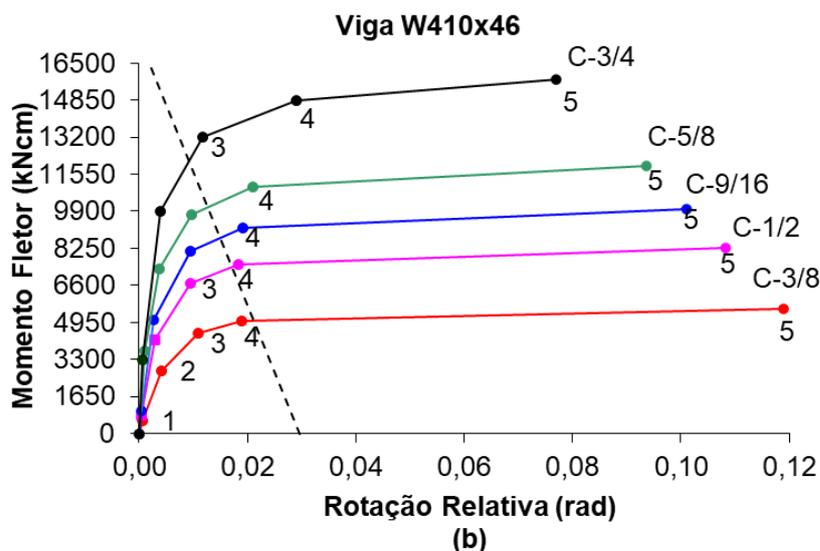
Tipo de ligação	W 460x52					W 410x46				
	$k_{i,Rd}$ (kNcm/rad)	ρ	$M_{u,Rd}$ (kNcm)	M_u/M_p	n	$k_{i,Rd}$ (kNcm/rad)	ρ	$M_{u,Rd}$ (kNcm)	M_u/M_p	n
C-3/8	1104663	0,53	6224	0,23	1,49	893402	0,48	5577	0,20	1,55
C-1/2	2611254	0,22	9275	0,34	1,20	2115117	0,20	8361	0,31	1,27
C-9/16	3796239	0,15	11268	0,41	1,10	3077286	0,14	10169	0,37	1,16
C-5/8	5346524	0,11	13486	0,49	1,00	4337251	0,10	12182	0,44	1,06
C-3/4	9799010	0,06	18211	0,66	0,81	7961116	0,05	16496	0,60	0,88

Fonte: (SILVA, 2010)

A Figura 47 e a Tabela 33 apresentam os pares rotação relativa e momento fletor, para o comportamento multilinear, onde θ_5 representa a capacidade de rotação máxima da ligação, considerada por Silva (2010). Essa figura também apresenta as linhas de vigas para ambos os andares, representadas por linhas pontilhadas.

Figura 47 – Comportamento das ligações pelo modelo multilinear: (a) viga inferior, (b) viga superior





Fonte: (SILVA, 2010)

Tabela 33 – Parâmetros das ligações para o modelo multilinear

Viga	Ligação	Momento Fletor (kNcm)					Rotação Relativa (rad)				
		M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
W 460x52	C-3/8	1244	3732	4976	5598	6174	0,0012	0,0052	0,0105	0,0184	0,1091
	C-1/2	927	5562	7416	8343	9137	0,0004	0,0041	0,0095	0,0188	0,1003
	C-9/16	1126	6756	9008	10134	11046	0,0003	0,0038	0,0095	0,0198	0,0949
	C-5/8	2696	8088	10784	12132	13112	0,0006	0,0038	0,0101	0,0226	0,0884
	C-3/4	3640	10920	14560	16380	17150	0,0005	0,0042	0,0137	0,0365	0,0754
W 410x46	C-3/8	558	2788	4462	5019	5540	0,0006	0,0041	0,0110	0,0190	0,1190
	C-1/2	836	4180	6688	7524	8264	0,0004	0,0030	0,0095	0,0183	0,1083
	C-9/16	1017	5084	8134	9151	10006	0,0004	0,0028	0,0094	0,0192	0,1010
	C-5/8	3654	7307	9743	10961	11909	0,0011	0,0038	0,0098	0,0210	0,0936
	C-3/4	3297	9891	13188	14837	15750	0,0006	0,0039	0,0117	0,0291	0,0769

Fonte: (SILVA, 2010)

Em cada avaliação, apenas um tipo de ligação é usado para todas as conexões entre viga e pilar do pórtico. A combinação de ações última utilizada neste trabalho é 1,4 CP + 1,5 SC + 0,84 V, em que CP corresponde à carga permanente, SC à sobrecarga e V ao vento.

Os valores de k_{i0} e k_b , utilizados na análise elástica de 2ª ordem aproximada, são apresentados na Tabela 34.

Tabela 34 – Valores de k_{i0} e k_b para ligações

Tipo de ligação	ρ	W 460x52		ρ	W 410x46	
		k_{i0} (kNcm/rad)	k_b (kNcm/rad)		k_{i0} (kNcm/rad)	k_b (kNcm/rad)
C-3/8	0,53	693.739	323.401	0,48	571.260	240.853
C-1/2	0,22	1.465.517	542.207	0,20	1.225.471	435.434
C-9/16	0,15	2.021.575	707.870	0,14	1.693.009	596.240
C-5/8	0,11	2.673.262	910.786	0,10	2.255.402	818.848
C-3/4	0,06	4.164.283	1.371.893	0,05	3.621.549	1.423.239

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

A Tabela 35 apresenta os valores do fator de rigidez relativa G_B (Eq. 84), determinados em função de α_{nt} (Eq. 85), e o fator do comprimento efetivo k_1 para a estrutura “ nt ” (Eq. 43), para todas as ligações apresentadas anteriormente e para a ligação rígida convencional. O fator de rigidez relativa G_A é considerado igual a zero (valor teórico). O valor de k_1 varia entre 0,61 e 0,66, para valores de ρ entre 0 a 0,53.

Tabela 35 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_1 para a estrutura “ nt ”

Tipo de ligação	ρ	W 460x52		ρ	W 410x46	
		G_b	k_1		G_b	k_1
C-3/8	0,53	2,28	0,66	0,48	2,90	0,66
C-1/2	0,22	1,53	0,64	0,20	1,97	0,65
C-9/16	0,15	1,34	0,64	0,14	1,74	0,65
C-5/8	0,11	1,22	0,63	0,10	1,60	0,64
C-3/4	0,06	1,09	0,63	0,05	1,43	0,64
Rígida	0,00	0,85	0,61	0,00	1,16	0,63

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Na Tabela 36 estão apresentados os valores do fator de rigidez relativa G_B (Eq. 89), determinados em função de α_{lt} (Eq. 90), e o fator do comprimento efetivo k_2 (Eq. 45), para a estrutura “ lt ”, para as ligações consideradas. O fator de rigidez relativa G_A é considerado igual a zero. O valor de k_2 varia entre 1,14 e 1,71, para valores de ρ entre 0 a 0,53.

Tabela 36 – Fator de rigidez relativa G_B e fator do comprimento efetivo k_2 para a estrutura “/”

Tipo de ligação	W 460x52			W 410x46		
	ρ	G_b	k_2	ρ	G_b	k_2
C-3/8	0,53	10,06	1,65	0,48	13,53	1,71
C-1/2	0,22	6,34	1,54	0,20	8,00	1,60
C-9/16	0,15	5,06	1,49	0,14	6,15	1,53
C-5/8	0,11	4,12	1,44	0,10	4,80	1,47
C-3/4	0,06	3,02	1,36	0,05	3,25	1,38
Rígida	0,00	0,85	1,14	0,00	1,16	1,18

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Os resultados do deslocamento horizontal no topo de cada pilar e do momento fletor máximo nos pilares, para as análises elásticas de 1ª ordem e de 2ª ordem, aproximada e rigorosa, são apresentados nas tabelas a seguir, para todos os pórticos estudados. Novamente, é possível observar a influência do comportamento da ligação semirrígida já na análise de 1ª ordem elástica, ao se comparar os resultados do pórtico com comportamento rígido convencional ($\rho=0,001$) com os resultados do pórtico com as ligações semirrígidas.

A Tabela 37 apresenta os valores para os coeficientes de majoração B_2 e os deslocamentos horizontais dos pilares para todas as análises (1ª e 2ª ordem aproximada e rigorosa). Observa-se que os deslocamentos laterais no topo do 2º andar, em relação à base, são aproximadamente o dobro dos deslocamentos laterais no topo do 1º andar do pórtico, para todas as análises realizadas. Verifica-se que para todos os pórticos com ligações semirrígidas, o método aproximado fornece um cálculo satisfatório em termos de deslocamentos, quando comparados com os valores obtidos pela análise rigorosa. Para o pórtico rígido convencional, o método aproximado forneceu valores de deslocamentos laterais no topo dos andares superiores aos deslocamentos da análise rigorosa.

A Tabela 38 apresenta os valores dos coeficientes de majoração B_2 e os valores de momentos fletores máximos nos pilares da esquerda (E) e da direita (D) dos pórticos, para as análises de 1ª ordem e 2ª ordem, aproximada e rigorosa. Os valores para B_1 obtidos foram menores que um, e tomados iguais à unidade, conforme recomendado pela ABNT NBR 8800: 2008.

Tabela 37 – Deslocamentos horizontais no topo dos pilares

Deslocamento horizontal no topo dos pilares (cm)									
Andar	Ligação	ρ	Barra	B_2	1ª ordem	2ª ordem		d^*	
						aproximada	rigorosa		
Pórtico 1	1º	0,53	pilar 1 - E	1,17	1,59	1,87	2,64	0,706	
			pilar 2 - D	1,17	1,60	1,87	2,59	0,722	
	2º	0,48	pilar 3 - E	1,07	3,69	4,11	6,57	0,625	
			pilar 4 - D	1,07	3,67	4,09	6,51	0,628	
Pórtico 2	1º	0,22	pilar 1 - E	1,14	1,31	1,50	2,11	0,707	
			pilar 2 - D	1,14	1,32	1,50	2,08	0,724	
	2º	0,20	pilar 3 - E	1,06	2,80	3,07	4,88	0,628	
			pilar 4 - D	1,06	2,77	3,04	4,82	0,630	
Pórtico 3	1º	0,15	pilar 1 - E	1,13	1,17	1,32	1,86	0,712	
			pilar 2 - D	1,13	1,17	1,33	1,83	0,729	
	2º	0,14	pilar 3 - E	1,05	2,37	2,60	4,04	0,643	
			pilar 4 - D	1,05	2,35	2,57	3,98	0,644	
Pórtico 4	1º	0,11	pilar 1 - E	1,12	1,07	1,20	1,66	0,719	
			pilar 2 - D	1,12	1,07	1,21	1,64	0,735	
	2º	0,10	pilar 3 - E	1,05	2,08	2,26	3,46	0,652	
			pilar 4 - D	1,05	2,05	2,23	3,41	0,653	
Pórtico 5	1º	0,06	pilar 1 - E	1,11	0,99	1,10	1,34	0,820	
			pilar 2 - D	1,11	1,00	1,11	1,32	0,839	
	2º	0,05	pilar 3 - E	1,04	1,84	1,98	2,51	0,790	
			pilar 4 - D	1,04	1,81	1,95	2,46	0,794	
Pórtico 6	1º	0,00	pilar 1 - E	1,08	0,71	0,76	0,76	1,008	
			pilar 2 - D	1,08	0,72	0,78	0,76	1,028	
	2º	0,00	pilar 3 - E	1,03	1,14	1,21	1,20	1,002	
			pilar 4 - D	1,03	1,10	1,17	1,15	1,016	

Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Observa-se que, com exceção do segundo andar do pórtico rígido convencional (pilares 3 e 4), os valores de momento fletor determinados pela análise aproximada de segunda ordem elástica foram maiores que os valores obtidos por meio da análise rigorosa de 2ª ordem elástica. Ainda assim, os valores de m^* foram muito próximos de 1,0 para o segundo andar do pórtico rígido convencional.

Verifica-se que os valores de momento fletor determinados pela análise aproximada apresentaram uma boa correlação com os valores obtidos por meio da análise rigorosa de 2ª ordem elástica. Observa-se que os valores dos momentos fletores aproximados são mais próximos dos valores rigorosos à medida que a relação M_u/M_p diminui.

Tabela 38 - Momentos fletores no topo dos pilares

	Andar	Ligação	ρ	M_u/M_p	Barra	B_2	2ª ordem			m*
							1ª ordem	aproximada	rigorosa	
Pórtico 1	1º	C-3/8	0,53	0,23	pilar 1 - E	1,17	-1939	-1778	-1304	1,364
				0,23	pilar 2 - D	1,17	3914	4078	1777	2,295
	2º		0,20	pilar 3 - E	1,07	-4291	-4229	-2407	1,757	
			0,20	pilar 4 - D	1,07	6368	6429	5031	1,278	
Pórtico 2	1º	C-1/2	0,22	0,34	pilar 1 - E	1,14	-2786	-2595	-1601	1,621
				0,34	pilar 2 - D	1,14	5455	5648	3178	1,777
	2º		0,31	pilar 3 - E	1,06	-6076	-6017	-4244	1,418	
			0,31	pilar 4 - D	1,06	8249	8308	7097	1,171	
Pórtico 3	1º	C-9/16	0,15	0,41	pilar 1 - E	1,13	-3123	-2927	-1808	1,619
				0,41	pilar 2 - D	1,13	6038	6235	3924	1,589
	2º		0,37	pilar 3 - E	1,05	-6772	-6716	-5187	1,295	
			0,37	pilar 4 - D	1,05	8863	8918	8185	1,090	
Pórtico 4	1º	C-5/8	0,11	0,49	pilar 1 - E	1,12	-3375	-3183	-2140	1,487
				0,49	pilar 2 - D	1,12	6486	6680	4654	1,435
	2º		0,44	pilar 3 - E	1,05	-7296	-7248	-5881	1,232	
			0,44	pilar 4 - D	1,05	9332	9380	8861	1,059	
Pórtico 5	1º	C-3/4	0,06	0,66	pilar 1 - E	1,11	-3653	-3461	-2463	1,405
				0,66	pilar 2 - D	1,11	7115	7309	5663	1,291
	2º		0,60	pilar 3 - E	1,04	-7897	-7853	-6976	1,126	
			0,60	pilar 4 - D	1,04	10023	10067	9864	1,021	
Pórtico 6	1º	Rígida	0,00	-	pilar 1 - E	1,08	-4382	-4224	-4196	1,007
				-	pilar 2 - D	1,08	8529	8687	8600	1,010
	2º		0,00	pilar 3 - E	1,03	-9437	-9412	-9474	0,993	
			0,00	pilar 4 - D	1,03	11189	11214	11279	0,994	

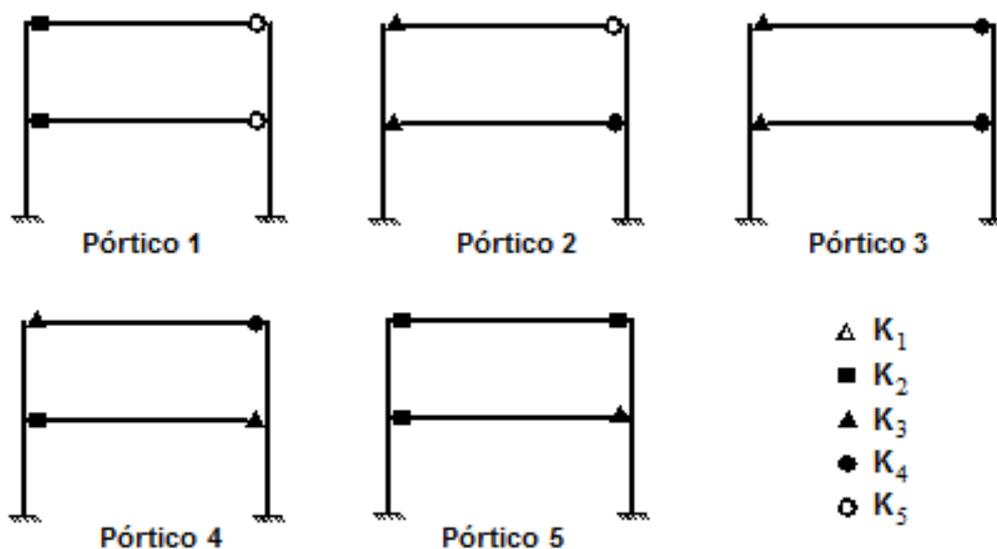
Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Conforme critério de classificação quanto à sensibilidade ao deslocamento lateral estabelecido pela norma brasileira, com exceção do pórtico rígido convencional, os pórticos semirrígidos enquadraram-se como estrutura de média deslocabilidade, uma vez que a relação entre o deslocamento lateral relativo à base do pórtico em teoria de 2ª ordem e aquele em teoria de 1ª ordem foi maior que 1,10 e menor que 1,4, no primeiro andar. O pórtico com ligações rígidas convencionais é classificado como de pequena deslocabilidade, uma vez que a relação entre o deslocamento lateral relativo à base do pórtico, em teoria de 2ª ordem, e aquele em teoria de 1ª ordem foi menor que 1,10, em todos os andares.

A Figura 48 mostra, esquematicamente, o estado de rigidez das ligações para o carregamento total aplicado, obtido pela análise elástica rigorosa em 2ª ordem. Nota-se que as ligações na extremidade direita das vigas são mais solicitadas em relação à sua extremidade esquerda. Isso se deve ao carregamento horizontal aplicado no topo do andar da esquerda, que solicita mais as ligações da direita e alivia as ligações da esquerda. A carga horizontal incremental faz com que a ligação na

extremidade da viga, oposta à aplicação da carga, continue a girar no mesmo sentido, com comportamento $M-\theta_r$ baseado na rigidez tangente, enquanto que a ligação na extremidade da viga onde a carga horizontal foi aplicada apresenta um descarregamento linear, com inclinação igual à rigidez inicial da ligação. Os trechos com rigidezes k_1 a k_5 , para as ligações do 1º e 2º andar, estão apresentados nas curvas $M-\theta_r$ da Figura 47. Nota-se que para o pórtico 1, mais flexível, a rigidez da ligação atinge o trecho 5 da curva $M-\theta_r$.

Figura 48 – Estado de rigidez das ligações semirrígidas na análise elástica em 2ª ordem rigorosa, para 100% do carregamento



Fonte: Elaborado pela Autora (2020)

Comparando as Figuras 47 e 48, nota-se que para os pórticos 4 e 5, o momento atuante nas ligações do 1º e 2º andares, obtido pela linha de viga, é nitidamente maior que o encontrado na análise elástica de 2ª ordem rigorosa. Para os pórticos 1, 2 e 3, as ligações do primeiro andar do pilar da direita apresentam valores de momentos fletores obtidos na análise rigorosa superiores quando comparados com os valores aproximados, entretanto são valores muito próximos, com relações superiores a 97%. Esse resultado mostrou que o método da linha de viga é adequado para se obter a resistência da ligação relacionada à sua rigidez, considerando-se o comportamento elástico de pórticos deslocáveis pelo método aproximado B₁-B₂.

5 CONCLUSÕES

A ABNT NBR 8800 (2008) afirma que os efeitos de 2ª ordem devem ser levados em conta no cálculo e dimensionamento das estruturas. Com o objetivo de minimizar o trabalho ao se considerar os efeitos em 2ª ordem, a norma permite o uso de métodos aproximados de análise, dependendo da sensibilidade da estrutura aos deslocamentos horizontais. Entretanto, a norma não apresenta a influência do comportamento das ligações semirrígidas no método aproximado de 2ª ordem elástica, definido como Método de Amplificação dos Esforços Solicitantes.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho foi avaliar os efeitos de segunda ordem em pórticos planos de aço, considerando a influência do comportamento das ligações semirrígidas entre vigas e pilares da estrutura, por meio dos métodos de análise elástica em 2ª ordem, aproximado B₁-B₂ e rigoroso. Os resultados obtidos no método aproximado foram comparados com os resultados obtidos na análise rigorosa, a fim de avaliar a consistência e a precisão dos resultados encontrados pelo método aproximado de análise e obter conclusões de caráter prático.

Para atingir o objetivo do trabalho, foi realizado um estudo sobre estabilidade de pórticos visando entender o comportamento global das estruturas. Também foram apresentadas as formulações teóricas dos métodos aproximado e rigoroso, para análise elástica de 2ª ordem. Essas formulações foram utilizadas nas análises dos pórticos estudados.

As análises comparativas mostraram que o método aproximado B₁-B₂ apresentou resultados satisfatórios com relação aos momentos fletores. Os valores dos momentos fletores máximos nos pilares dos pórticos, obtidos pela análise aproximada, foram comparados com os valores obtidos pela análise rigorosa, por meio do parâmetro m^* . Este estudo confirmou a importância da consideração do comportamento das ligações nas análises estruturais, uma vez que a transferência dos momentos fletores da viga para o pilar depende do comportamento da ligação. Os resultados dos momentos fletores obtidos pela análise de 2ª ordem aproximada apresentaram boa correlação com os valores obtidos por meio da análise rigorosa. Essa correlação é maior quando as ligações apresentam capacidade de momento último próximas ou iguais a M_p .

Para estruturas classificadas como de média deslocabilidade, a correlação é ainda melhor, quando comparada com as estruturas classificadas como de pequena deslocabilidade. Isso pode ser comprovado nos resultados de m^* do exemplo 2, em que os pórticos foram classificados como de pequena deslocabilidade, e do exemplo 3, cujos pórticos foram classificados como de média deslocabilidade. A correlação entre os métodos também melhora à medida que a relação M_u/M_p diminui.

Foi possível mostrar que o método da linha de viga é adequado para se obter a resistência da ligação relacionada à sua rigidez, quando utilizado o método aproximado B_1-B_2 para a análise de 2ª ordem elástica, uma vez que os resultados de momento fletor e do estado de rigidez das ligações, obtidos pelo método aproximado e rigoroso, apresentaram boa correlação. Portanto, pode-se, na prática, adotar a linha de viga na análise da estrutura “ l ” do método aproximado.

Os deslocamentos horizontais nos topos dos andares, aproximados e rigorosos, foram obtidos por meio da combinação última de ações e, portanto, não podem ser utilizados para verificação dos estados limites de serviço. Os resultados dos deslocamentos da análise aproximada foram relacionados com os resultados dos deslocamentos obtidos pela análise rigorosa, por meio do parâmetro d^* . Os valores dos deslocamentos obtidos pela análise aproximada foram satisfatórios, entretanto, em alguns pórticos, não apresentaram resultados que demonstrem boa correlação ($d^* \approx 1,0$) entre os métodos de análise estudados.

Não foi possível estabelecer um limite para a rigidez das ligações em que é confiável a utilização do método aproximado. Isso se deve ao fato de que diversas variáveis estão correlacionadas e interferem na determinação da carga crítica de flambagem, por exemplo, as características do pórtico, das seções transversais e dos carregamentos atuantes. Entretanto, é possível concluir que o método aproximado B_1-B_2 apresentado considerando-se a influência das ligações semirrígidas apresentaram bons resultados para o cálculo e dimensionamento das estruturas na prática.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Sugere-se, para trabalhos futuros, analisar mais exemplos numéricos, alterando-se, ora as características dos pórticos, ora as características das ligações semirrígidas. A escolha de ligações reais, em que sejam especificadas suas

características e propriedades geométricas, para então determinar as suas rigidezes, também pode enriquecer o estudo. Inserir as não linearidades física e geométrica também amplia os estudos referentes ao comportamento do pórtico semirrígido, considerando a análise por meio do método aproximado B₁-B₂.

Estudos e análises que possibilitem ajustar e refinar os coeficientes e fatores utilizados na pesquisa, por exemplo, k_1 e k_2 , a fim de melhorar a correlação entre os métodos utilizados, também podem enriquecer o trabalho.

Pode-se também realizar análises dos pórticos por meio de outros métodos aproximados e utilizar outros programas, que utilizam formulações diferentes das formulações desenvolvidas no PPLANLEP, e fazer análises comparativas entre os resultados obtidos com os métodos aproximados e rigoroso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - **NBR8800 Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios (método dos estados limites) - Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 1986.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - **NBR8800 Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. Rio de Janeiro: ABNT, 2008.
- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION AISC. **ANSI/AISC 360-10: Specification for structural steel buildings**. Illinois, 2010.
- AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE **ANSI/AISC 360:05. Specification for Structural Steel Buildings**. Washington, 2005.
- BARROS, A. DE. **Um estudo da estabilidade de pórticos considerando o fator do comprimento efetivo e as forças nocionais**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.
- BUONICONTRO, L. M. S. et al. Novo Sistema de Classificação não-linear de Ligações Viga-Pilar para Estruturas de Aço. **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2017.
- CHEN, W. F.; LUI, E. M. **Stability design of steel frames**. Boca Raton, FL: CRC Press, 1991.
- CHEN, W. F.; TOMA, S. **Advanced Analysis of Steel Frames: Theory, Software, and Applications**. Boca Raton: CRC-Press, p. 384, 1994
- DUAN, L.; CHEN, W. F. **Effective length of compression members**. Structural Engineering Handbook. Ed. Chen Wai-Fah. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
- FAKURY, R.; SILVA, A. L. R. C. E.; CALDAS, R. B. **Dimensionamento de Elementos Estruturais de Aço e Mistos de Aço e Concreto**. São Paulo: Pearson, 496 p. 2016.
- GALAMBOS, T. V.; SUROVEK, A. E. **Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers**. John Wiley & Sons, Inc, p.373, 2008
- HE, Yibin. et al. Simplified Computational Methods for the Second-order Internal

Force and Displacement of Semi-rigidly Connected Steel Frames. **International Conference on Engineering Computation**, p. 40–43, 2009.

KISHI, N. ; CHEN W. F.; GOTO Y.; KOMURO, M. Effective length factor of columns in flexibly jointed and braced frames. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 47, n. 1–2, p. 93–118, 1998.

LAVALL, A. C. C.; SILVA, R. G. L.; OLIVEIRA, D. G. C.; FAKURY, R. H. Análise de pórticos planos de aço considerando as ligações semirrígidas viga-pilar. **XXXV Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural**, Rio de Janeiro, 19 a 21 Set. 14 p., 2012.

LAVALL, A. C. C. **Uma Formulação Teórica Consistente para a Análise Não linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos Considerando Barras com Imperfeições Iniciais e Tensões Residuais nas Seções Transversais**. 1996. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

MENDES, F. T. C. et al. Determinação das Propriedades Mecânicas das Ligações Viga-Pilar com Chapas de Extremidade Estendida pelo Método dos Componentes. **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2017**.

MOUSTAFA, A.; SALAMA, M. I. Modified formulas for buckling length factor for rigid steel frame structures. **IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering** Ver. II, v. 12, n. 3, p. 2320–334, 2015.

OLIVEIRA, L. A. R. DE. **Análise de Pórticos de Aço com Ligações Viga-Pilar e de Base de Pilar Semirrígidas a partir do Método dos Componentes**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

PINHEIRO, S. M. T. **Edifícios sustentáveis em construção metálica**. 2014. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Minho, Braga, 2012.

SALAMA, M. I. New simple equations for effective length factors. **HBRC Journal**, v. 10, n. 2, p. 156–159, 2014.

SILVA, R. G. L.. **Avaliação dos efeitos de 2ª ordem em edifícios de aço utilizando métodos aproximados e análise rigorosa**. 2004. Dissertação (

Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

SILVA, R. G. L. **Análise inelásticas avançada de pórticos planos de aço considerando as influências do cisalhamento e de ligações semi-rígidas.** 2010. Belo Horizonte. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

SINGH, R.; LUI, E. M. Design of pr frames with top and seat angle connections using the direct analysis method. **Advanced Steel Construction**, v. 10, n. 2, p. 116–138, 2014.

XU, W.; XU, J. Simplified Second-order Analysis of Semirigid Connected Steel Frames. **Advanced Materials Research**, p. 846–852, 2012.