



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS DIRETORIA
DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PRGORAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

RODRIGO VIEIRA FONSECA

**CALIBRAÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE DANOS EM ESTRUTURAS RETICULADAS
POR MEIO DE SUAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E UM ALGORITMO DE
OTIMIZAÇÃO**

BELO HORIZONTE
2020

RODRIGO VIEIRA FONSECA

**CALIBRAÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE DANOS EM ESTRUTURAS RETICULADAS
POR MEIO DE SUAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E UM ALGORITMO DE
OTIMIZAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção de título de mestre em Engenharia de Produção Civil.

Professor Orientador: Claudio José Martins

BELO HORIZONTE

2020

RODRIGO VIEIRA FONSECA

**CALIBRAÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE DANOS EM ESTRUTURAS RETICULADAS
POR MEIO DE SUAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E UM ALGORITMO DE
OTIMIZAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção de título de mestre em Engenharia de Produção Civil.

BANCA EXAMINADORA

PROF. DR. CLÁUDIO JOSÉ MARTINS – ORIENTADOR

PROF. DRA. RENATA GOMES LANNA DA SILVA (CEFET-MG)

PROF. DR. VINÍCIUS NICCHIO ALVES (UFOP-MG)

Belo Horizonte, 15 de dezembro de 2020

F676c Fonseca, Rodrigo Vieira
Calibração e identificação de danos em estruturas reticuladas por meio de suas frequências naturais e um algoritmo de otimização / Rodrigo Vieira Fonseca. – 2020.
85 f. : il., gráfs, tabs., fotos.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Civil.

Orientador: Cláudio José Martins.

Bibliografia: f. 83-85.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Civil.

1. Método dos elementos finitos – Teses. 2. Análise estrutural (Engenharia) – Calibração – Teses. 3. Algoritmos – Teses. 4. Otimização matemática – Teses. 5. Falhas estruturais – Modelos matemáticos – Teses. I. Martins, Cláudio José. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD 624.171

RESUMO

A procura por simulações estruturais numéricas mais precisas tem crescido de forma acelerada, tendo em vista que as construções estão se tornando mais esbeltas e flexíveis. Neste cenário, softwares baseados na resolução de modelos matemáticos são cada vez mais utilizados. Estes softwares permitem a obtenção da resposta da estrutura frente uma grande variedade de ações, sendo softwares dos elementos finitos (MEF) os mais utilizados. Existe uma dificuldade em simular de forma correta alguns parâmetros estruturais, como as condições de contorno e características específicas dos materiais. Esses parâmetros geram diferenças de respostas entre o modelo numérico e a estrutura real. Para contornar essas dificuldades, existem métodos de calibração de modelos. Tais métodos consistem em alterar parâmetros estruturais, no modelo numérico, de forma iterativa. Estas alterações tem a finalidade de aproximar os parâmetros numéricos aos parâmetros da estrutura real, por meio da minimização de uma função penalidade, que converge de valores das respostas estruturais numéricas aos valores das respostas extraídas experimentalmente. Entretanto, quando o processo é feito manualmente, depende da experiência do engenheiro, além de demandar muito tempo, tornando o método inviável em alguns modelos. Neste contexto, este trabalho apresenta um software de otimização, complementar ao MEF, que realiza a calibração automática de modelos, por um procedimento simplificado, baseado nos métodos de algoritmos de otimização. Após o desenvolvimento, o software de otimização foi testado ao calibrar e identificar danos em modelos numéricos de duas vigas metálicas e ao calibrar um modelo numérico de uma torre metálica. Essas estruturas tem suas respostas modais conhecidas, que foram extraídas por ensaios experimentais. A calibração foi feita por meio de testes iterativos de amostras de parâmetros. Tais amostras foram geradas por uma técnica de amostragem de desenvolvimento próprio. Pela diferença entre as frequências naturais coletadas experimentalmente e as frequências naturais numéricas, foram obtidos valores de menor resíduo. Apesar deste procedimento apresentar elevado custo computacional, foi possível encontrar valores para os parâmetros desconhecidos, que geraram resíduos pequenos.

Palavras Chave: Método dos elementos finitos, Calibração de modelos numéricos, Método baseado em algoritmo de otimização, Identificação de danos estruturais.

ABSTRACT

The demand for more accurate numerical simulations has grown in the same order as buildings become increasingly slender and flexible. In this scenario, software based on solving mathematical methods are increasingly used. These software's allows to obtain structures responses in front of a great variety of actions and, being the finite element method (FEM) the most used. There is a difficulty in correctly simulating some parameters, as boundary conditions and specific material characteristics of structures. These parameters generate differences in responses between numerical model and the actual structure. To get around these differences, there are model updating methods. These methods consist of changing structural parameters, in the numerical model, iteratively. These changes are intended to approach the numerical parameters closer to the real structure parameters, and with the objective of minimizing a penalty function by converging values of the numerical structural responses to the values of the responses extracted experimentally. However, when the process is done manually, it depends on the analyst experience, and being very time consuming, making it unfeasible in some models. In this context, this paper presents the development of an optimization software, complementary to the FEM, which performs automatic model updating, by a simplified procedure, based on the indirect iterative methods. After development, the software was tested by performing updating and damage detection of metal beams and updating of a metal tower numeric model, whose modal parameters were extracted by experimental tests. Model updating was done by automatic and iterative changes in unknown parameters of the structures. By the minimization of a penalty function, describe by the difference in measured and numeric natural frequencies, lower residue values were obtained. Despite this procedure has a high computational cost, it was possible to find the parameters values, that generated small residuals.

Keywords: Model Updating, Finite element method, Algorithm optimization method, Damage identification

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Formas de Elementos finitos e seus pontos nodais.....	24
Figura 2 - Distribuição de nós, elementos, funções de interpolação e matriz de conectividade.	25
Figura 3 - Pilar axialmente carregado, discretizado em um elemento finito.	29
Figura 4 – Viga com força cortante e momento fletor, discretizada em um elemento finito.....	31
Figura 5- Fluxograma do software de calibração de modelos numéricos	50
Figura 6- Fluxograma da sub-rotina de redução de custo computacional do software de otimização.....	58
Figura 7– Propriedades físicas e geométricas das vigas.	61
Figura 8 – Viga V2 simplesmente apoiada, com acelerômetro fixado durante ensaio experimental.	61
Figura 9- Técnicas adotadas para o processamento dos sinais de aceleração coletados experimentalmente nas vigas metálicas.	62
Figura 10– Tore metálica que foi moldada e calibrada numericamente.	63
Figura 11– Discretização dos modelos das vigas metálicas - 31 nós, 30 elementos, 186 graus de liberdade.....	65
Figura 12– Discretização do modelo da torre metálica autoportante - 7 nós, 6elementos, 42 graus de liberdade	69
Figura 13– Discretização do modelo da torre metálica - 25 nós, 24 elementos, 150 graus de liberdade.....	70

Figura 14– Desvio (%) de frequências naturais numéricas normalizadas em relação as frequências experimentais da viga V1.	78
Figura 15 - Desvio (%) de frequências naturais numéricas normalizadas em relação as frequências experimentais da viga V2.	78
Figura 16 - - Desvio (%) de frequências naturais numéricas normalizadas em relação as frequências experimentais da torre metálica.	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 1– Relação entre especificações dos parâmetros e número de amostras.	59
Tabela 2– Frequências naturais, extraídas experimentalmente, das vigas metálicas intactas e danificadas.	62
Tabela 3– Valores de Área e Inercia das seções transversais cortadas.	63
Tabela 4– Modos de vibração e frequências naturais experimentais, extraídas da torre metálica autoportante.	64
Tabela 5– Menor resíduo, frequências numéricas, condições de contorno e módulo de Young após calibração da viga V1	72
Tabela 6– Menor resíduo, frequências numéricas, condições de contorno e módulo de Young após calibração da viga V2	72
Tabela 7– Menor resíduo, frequências numéricas e propriedades geométricas após calibração da viga V2 danificada	73
Tabela 8– Menor resíduo, frequências numéricas e propriedades geométricas após calibração da viga V1 danificada	73
Tabela 9– Diferença percentual entre parâmetros calibrados no modelo numérico danificado e propriedades geométricas das seções transversais danificadas nas vigas metálicas	73
Tabela 10– Frequências experimentais e numéricas antes e após calibração das vigas intactas e danificadas.	74
Tabela 11– Resíduos, frequências naturais numéricas e parâmetros após calibração do modelo numérico da torre metálica.	75

Tabela 12– Respostas modais das torre metálicas sem calibração, com calibração e respostas modais experimentais da torre metálica 75

Tabela 13– Frequências experimentais e numéricas normalizadas e resíduos dos modelos sem calibração e com calibração..... 77

Tabela 14– Frequências naturais normalizadas em relação as frequências naturais experimentais e resíduos da calibração da torre metálica. 80

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO	8
1.2 PERGUNTA DE PESQUISA	12
1.3 JUSTIFICATIVA	12
1.4 LIMITAÇÕES	14
1.5 OBJETIVOS	15
1.5.1 Objetivo geral	15
1.5.2 Objetivos específicos	15
1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	15
2. FUNDAMENTAÇÃO TEORICA	16
2.1 DECOMPOSIÇÃO DE VALORES SINGULARES	16
2.1.1 Especificidades da decomposição de valores singulares	17
2.1.2 Aplicações da decomposição de valores singulares	17
2.2 CALIBRAÇÃO DE MODELOS NUMÉRICOS	17
2.2.1 Métodos para calibração de modelos numéricos	19
2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	22
2.3.1 Introdução ao método dos elementos finitos	22
2.3.2 Teoria do método dos elementos finitos	23
2.3.3 Montagem da malha de elementos finitos	24
2.3.4 Métodos dos resíduos ponderados por Galerkin	26
2.3.5 Matriz de rigidez do elemento de barra para espaço tridimensional	28
2.3.6 Matriz de massa do elemento de barra para pórtico tridimensional	35
2.3.7 Matrizes globais de rigidez e massa	38
2.3.8 Resolução de problema físico pelas matrizes globais	38
2.4 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS	39
2.4.1 Sistemas com um grau de liberdade	40
2.4.2 Sistemas com múltiplos graus de liberdade (MDOF)	41
2.5 REVISÃO BIBLIOGRAFICA	45
3. METODOLOGIA	49
3.1 ENTRADAS E SAÍDAS DO SOFTWARE MEF E DE OTIMIZAÇÃO	56

3.2 NÚMERO DE AMOSTRAS, CUSTO COMPUTACIONAL, FATORES LIMITANTES E TEMPO DE EXECUÇÃO	57
3.3 RESPOSTAS EXPERIMENTAIS EXTRAIDAS DAS VIGAS E TORRE METÁLICA	60
3.4 APLICAÇÃO DO SOFTWARE NAS VIGAS METÁLICAS	64
3.5 APLICAÇÃO DO SOFTWARE EM TORRE METÁLICA AUTOPORTANTE..	68
4. RESULTADOS.....	71
4.1 RESULTADOS DE CALIBRAÇÃO DAS VIGAS METALICAS.....	71
4.2 RESULTADOS DE CALIBRAÇÃO DA TORRE METALICA AUTOPORTANTE	74
5. DISCUSSÃO	76
6. CONCLUSÃO	81
REFERÊNCIAS.....	83

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se uma breve contextualização do trabalho, a justificativa da escolha do tema, os objetivos e metodologia abordada.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A necessidade de resolver problemas matemáticos complexos de elasticidade e análise estrutural levou o matemático Richard Courant a desenvolver um método pioneiro em 1943. O método consistia em dividir um domínio em sub-regiões triangulares finitas, para resolução de equações diferenciais parciais, de um problema de torção em um cilindro (COURANT, 1943). A contribuição de Courant foi evolutiva e baseada em resultados de artigos anteriores sobre equações diferenciais parciais, como o desenvolvido por Ritz (1909). Apesar de abordagens diferentes, outros autores publicaram artigos sobre a discretização de um domínio contínuo em um conjunto de elementos discretos, como Argyris (1955).

O desenvolvimento de softwares de elementos finitos impulsionou a utilização do procedimento no final da década de 60. A NASA patrocinou o software NASTRAN e a Universidade da Califórnia, nos EUA, tornou o programa SAPIV disponível ao público. Na Noruega a sociedade de classificação de navios Det Norske Veritas (DNV GL) desenvolveu o software Sesam em 1969, para o uso em análises de navios (ERIKSEN, 2015). O método dos elementos finitos (MEF) foi formalizado no início da década de 70, com a publicação de uma base matemática rigorosa, formulada por Strang e Fix (1973). A partir da consolidação do método para modelagem numérica, diversos tipos de sistemas físicos como os de eletromagnetismo, transmissão de calor, dinâmica dos fluídos e dinâmica das estruturas foram incluídos na utilização prática do MEF (BATHE, 2006).

Atualmente, com a evolução dos computadores, problemas discretos podem ser resolvidos mesmo para estruturas complexas, o que significa resultados mais precisos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005). Com isso, o método dos elementos finitos tornou-se a técnica mais utilizada para modelagem numérica na área da engenharia estrutural (DAS; DEBNATH, 2018).

Entretanto, devido às incertezas associadas as propriedades dos materiais, a geometria estrutural, as condições de contorno, a conectividade das partes estruturais, as não linearidades e as simplificações matemáticas do próprio MEF, o comportamento real das estruturas difere frequentemente das previsões do modelo numérico. Para contornar este problema, autores têm desenvolvido estratégias para a calibração de modelos numéricos (BARTILSON; JANG; SMYTH, 2019; DAS; DEBNATH, 2018; SABAMEHR; LIM; BAGCHI, 2018; SHABBIR; OMENZETTER, 2015).

Na calibração de modelos numéricos via MEF, várias técnicas foram desenvolvidas e podem ser categorizadas por duas principais classes, as de métodos diretos e métodos indiretos iterativos (FRISWELL; MOTTERSHEAD, 2013; MARWALA, 2010; MOTTERSHEAD; FRISWELL, 1993). Os métodos diretos utilizam respostas, coletadas experimentalmente, para atualizar a matriz do modelo MEF em uma única operação. Estes procedimentos são considerados métodos precisos e eficientes do ponto de vista computacional. Porém, devido ao processo de calibração, o método direto não garante respostas com significado físico relevante. As matrizes do problema físico podem, após calibração, se tornar não esparsas e ou mal condicionadas. Tais características geram reproduções irrealistas de malha e de conexão dos elementos (RIBEIRO, 2012).

Os métodos iterativos indiretos também necessitam de respostas, coletadas experimentalmente, da estrutura real e são baseados na minimização de uma função penalidade. O processo de minimização ocorre por meio da variação iterativa de parâmetros estruturais determinados como sensíveis. Parâmetros sensíveis podem ser selecionados por meio de uma análise de sensibilidade, em que se verifica a variação da função penalidade devido a variação iterativa de um ou mais parâmetros em foco. Parâmetros, com alta sensibilidade, devem ser selecionados para uma calibração relevante. Geralmente, a função penalidade é descrita pelas diferenças entre respostas do modelo numérico e respostas coletadas experimentalmente. Quando estas respostas são empregadas para calibrações que necessitam de maior sensibilidade, como identificação de danos, podem ser utilizadas repostas modais, sendo os modos de vibração e frequências naturais as

mais usuais. Para calibrações numéricas que requerem menor sensibilidade, podem ser aplicadas repostas estáticas, como deformação, deflexão e tensões (ALKAYEM et al., 2018).

O modo como a função penalidade é minimizada, nos métodos iterativos indiretos, depende do método de minimização empregado, e podem ser separados em dois tipos, os procedimentos baseados em matrizes de sensibilidade e os baseados em algoritmos de otimização (ALKAYEM et al., 2018).

Nos métodos baseados em matrizes de sensibilidade, o procedimento depende da atualização de matrizes de sensibilidade em cada iteração. Estas matrizes, contém as primeiras derivadas dos resíduos da função penalidade em relação aos parâmetros sensíveis. Tal procedimento se enquadra na otimização baseadas em gradientes, e tem como ponto negativo a possibilidade de finalização do procedimento em mínimos locais, o que acarretaria em uma incompleta minimização da função penalidade.

Nos métodos baseados em algoritmos de otimização, o procedimento é flexível, não é vinculado ao cálculo de sensibilidades. Existem diversos algoritmos de otimização para calibração de modelos numéricos, entre eles os algoritmos baseados em superfícies de resposta, algoritmos genéticos, redes neurais, redes bayesianas, inteligências artificiais. Alguns destes métodos de otimização podem ser combinados com outros procedimentos, como os algoritmos de superfícies de repostas que são muito utilizados em conjunto com o método da atualização das matrizes de sensibilidade (RIBEIRO, 2012).

Ambos os métodos diretos e indiretos de calibração necessitam de respostas, coletadas experimentalmente, para realizar seus procedimentos. Entretanto, para o caso da utilização de respostas modais, sabe-se que erros de medições são frequentes e praticamente impossíveis de evitar. As fontes de erros podem ser ocasionadas por variações ambientais, como temperatura e vento, modificações das condições de operação da estrutura durante os ensaios, e além disso podem ocorrer erros na aquisição e processamento de sinais. Portanto, no uso de respostas modais, coletadas experimentalmente, assume-se que os erros mencionados são consideravelmente inferiores aos erros dos modelos numéricos.

Para identificar as características dinâmicas das estruturas, as técnicas experimentais mais utilizadas são a análise modal experimental e análise modal operacional. Essas técnicas não intrusivas têm a capacidade de identificar as propriedades globais da estrutura, extraindo as frequências naturais de vibração, coeficientes de amortecimento e modos de vibração. Com essas informações pode-se realizar calibrações em modelos numéricos (SÁNCHEZ-APARICIO et al., 2014).

Neste trabalho, foi desenvolvido um programa, na linguagem de programação Fortran, para calibração de modelos numéricos. O software foi desenvolvido por meio de um algoritmo de otimização, e trabalha integrado a outro software próprio do MEF, de elementos de barra reticulados inseridos no espaço tridimensional. O programa de otimização busca minimizar uma função penalidade, descrita pela diferença entre as frequências naturais obtidas experimentalmente e as frequências naturais calculadas numericamente.

O método de minimização, consiste na realização de uma análise modal para cada iteração, em que cada iteração utiliza uma amostra. Tal amostra contém os parâmetros sensíveis. O conjunto de amostras é gerado sequencialmente, sendo que cada amostra contém uma variação sequencial, independente e linearmente crescente de um dos parâmetros tomados como sensíveis.

Cada parâmetro possui um número determinado de variações, e um alcance de valores que pode assumir, sendo que essas duas informações são inseridas pelo usuário do software. Com estas informações, o software é capaz de gerar todas as amostras de parâmetros que serão utilizados para as análises modais. Após todas as iterações serem calculadas, o software imprime os menores valores de resíduo da função penalidade, em ordem crescente, junto com as amostras de parâmetros que geraram tais resíduos.

O programa foi testado em vigas metálicas e em uma torre metálica, cujo parâmetros modais foram coletados experimentalmente. Por meio dos resultados de calibração, concluiu-se que o software é capaz de calibrar modelos numéricos com precisão e também identificar danos estruturais, deixando pequenos resíduos da função penalidade. Além disso, o tempo de execução e custo computacional foram considerados aceitáveis.

1.2 PERGUNTA DE PESQUISA

É possível calibrar estruturas por um método de algoritmo de otimização, com a função a ser minimizada sendo a diferença de frequências naturais numéricas e experimentais?

1.3 JUSTIFICATIVA

A análise estrutural moderna, utiliza modelos de elementos finitos para prever o comportamento dinâmico e entender o estado atual de um sistema. Embora esses modelos sejam frequentemente desenvolvidos a partir de projetos detalhados, sempre existem discrepâncias entre o comportamento medido (observado) e o do modelo numérico (MOTTERSHEAD; FRISWELL, 1993).

As fontes típicas de erro são decorrentes principalmente dos parâmetros incertos do modelo, como propriedades do material, propriedades da seção, geometria e condições de contorno. Discrepâncias indicam que um modelo não pode prever com segurança o comportamento de sua estrutura física correspondente (MOTTERSHEAD; FRISWELL, 1993; MOTTERSHEAD; LINK; FRISWELL, 2011).

A calibração de modelo numérico é um processo que busca reduzir as discrepâncias entre as informações medidas experimentalmente e as informações obtidas do modelo numérico. Isso é feito por meio da alteração de parâmetros selecionados, de um modelo MEF. A calibração de modelos já foi aplicada com sucesso a uma ampla variedade de estruturas aeroespaciais, mecânicas e civis (BARTILSON; JANG; SMYTH, 2019).

Os procedimentos de calibração manual iterativa podem ser processos demorados, exaustivos e até inviáveis, devido a necessidade inúmeras iterações até encontrar pequenos resíduos de repostas. Dessa forma, acredita-se que a calibração por meio de softwares contribuí significativamente para facilitar este processo. Neste contexto, este trabalho apresenta a elaboração de um programa

na linguagem Fortran, complementar a um software próprio de elementos finitos, que utiliza um algoritmo de otimização para calibrar modelos numéricos.

O software realizou calibrações numéricas em tempo hábil e encontrou pequenos resíduos. Isso foi possível porque este calculou uma grande quantidade de análises modais, para diversas amostras de parâmetros, em pouco tempo. O que seria impossível de se realizar manualmente. Além disso, o software desenvolvido permite uma maior liberdade na definição das condições de calibração, que se comparado com softwares comerciais. Por ser de desenvolvimento próprio, pode-se realizar uma variedade de adequações no software para atender as necessidades da calibração.

Devido ao procedimento adotado no programa desenvolvido, é improvável que mínimos locais sejam considerados como a resposta ótima, a não ser que o espaço amostral e as amostras de parâmetros sejam geradas incorretamente. Ademais, existe uma elevada liberdade na definição de parâmetros sensíveis, espaço amostral e amostras de parâmetros. Tais condições poderiam não ser atendidas em alguns softwares que utilizam o método das matrizes de sensibilidade.

O software desenvolvido utiliza o resíduo entre frequências naturais para calibrar os modelos numéricos. Diversos autores utilizam os modos de vibração para calibração, como pelo Critério da garantia modal, com abreviatura MAC em inglês. Entretanto, optou-se por minimizar apenas o resíduo entre frequências naturais, extraídas experimentalmente, das frequências naturais, obtidas numericamente. Tal decisão foi tomada para poder realizar calibrações de estruturas onde os ensaios experimentais necessitem de uma menor quantidade de acelerômetros, e para verificar a confiabilidade de calibrações que utilizam menor quantidade de respostas experimentais.

Após qualquer calibração realizada pelo software, uma avaliação manual dos menores resíduos é realizada, com a seleção manual de resíduos ótimos que tem seus modos numéricos próximos aos modos experimentais. A verificação de proximidade é feita visualmente. Este procedimento foi adotado para evitar o despareamento entre modos calibrados e os modos reais. Tal procedimento é adotado quando os modos de vibração experimentais estão disponíveis. Em

trabalhos futuros, o software pode ser adaptado para minimizar resíduos de modos de vibração.

1.4 LIMITAÇÕES

O software de calibração trabalha simultaneamente com o software do método dos elementos finitos. Portanto, as calibrações só podem ser realizadas em modelos numéricos geradas pelo próprio software.

O software, do método dos elementos finitos, utilizado só trabalha com elementos de barras reticuladas, justamente para diminuir o custo computacional. Entretanto, erros de métodos numéricos podem ocorrer. Com isso, em alguns casos específicos de estruturas complexas, a qualidade da otimização pode ser comprometida. Para contornar esse problema, deve ser realizado a avaliação e mensuração do erro.

Modelos calibrados poderão apresentar dezenas de resíduos mínimos iguais. Isto ocorre quando várias amostras de parâmetros, subsequentes umas às outras no processo iterativo de calibração, possui elevada diferença em um dos seus parâmetros, gerando um procedimento que não está suficientemente refinado para a descoberta de um possível mínimo global. Para contornar tal adversidade, deve-se realizar uma nova calibração, em que os acréscimos lineares, dos parâmetros destas amostras subsequentes, devem ser de menor valor.

O número de elementos, parâmetros tomados como desconhecidos, e número de variações de cada parâmetro devem ser restringidos para o tempo de execução ser conveniente. Estruturas complexas e de grande porte poderão ser calibradas pelo software. Entretanto, o tempo de execução poderá ser longo e dependerá da capacidade do computador. Nos últimos casos, simplificações na estrutura e nos parâmetros variados podem ser feitas para que seja possível calibrar o modelo numérico em tempo hábil.

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 Objetivo geral

Desenvolver um software para calibração de modelos numéricos de barras reticuladas tridimensionais.

1.5.2 Objetivos específicos

- Utilizar um software baseado no MEF, de desenvolvimento próprio, para a extração dos modos de vibrações de estruturas reticulares tridimensionais.
- Desenvolver um algoritmo integrado ao software MEF, para a determinação das propriedades físicas e mecânicas que melhor se ajustem aos valores experimentais.
- Analisar se as propriedades físicas, do modelo numérico calibrado automaticamente, têm significado físico relevante.

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho desenvolvido está estruturado em seis capítulos, sendo eles introdução, fundamentação teórica, metodologia, resultados, discussão e conclusão.

O capítulo 2 apresenta uma breve fundamentação teórica, em que apresenta os temas utilizados para o desenvolvimento deste trabalho. Tais temas são a decomposição dos valores singulares, método dos elementos finitos, calibração de modelos por métodos diretos e indiretos e dinâmica das estruturas. Além disso, alguns trabalhos desenvolvidos na área foram destacados, tanto pelos métodos diretos quanto pelos métodos indiretos iterativos.

O capítulo 3 detalha a metodologia utilizada para a realização do trabalho, abordando, de forma aprofundada, os procedimentos adotados para a calibração dos modelos numéricos.

O capítulo 4 apresenta os resultados encontrados, o capítulo 5 desenvolve uma discussão sobre os resultados, levando em conta a pergunta de pesquisa. O capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas ao longo do desenvolvimento deste trabalho, e descreve proposta para desenvolvimento de trabalhos futuros.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEORICA

O presente capítulo tem a finalidade apresentar de forma sucinta a fundamentação teórica necessária à compreensão dos procedimentos adotados neste trabalho. Serão descritos os conceitos de álgebra linear, calibração de modelos numéricos, descrição de método dos elementos finitos, bem como dinâmica das estruturas.

2.1 DECOMPOSIÇÃO DE VALORES SINGULARES

A decomposição de valores singulares (*Single Value Decomposition* - SVD) é um procedimento de fatoração matricial real ou complexa. Considerando uma matriz A real com dimensão $m \times n$ com $m \geq n$, essa pode ser escrita na forma fatorada como:

$$A = U\Sigma V^* \quad (7)$$

Onde:

U é uma matriz unitária $m \times m$ real ou complexa;

Σ é uma matriz $m \times n$ diagonal, com números reais não negativos;

V^* é uma matriz $n \times n$ unitária real ou complexa e é a conjugada transposta de V .

A matriz U é formada por n autovetores ortonormais associados com os n maiores autovalores de $A^T A$ e a matriz V é formada por autovetores ortonormais de $A^T A$. Os elementos diagonais da matriz Σ são as raízes quadradas não negativas

dos autovalores de $A^T A$ ou $A A^T$, e esses elementos são chamados de valores singulares (GOLUB; REINSCH, 1971).

2.1.1 Especificidades da decomposição de valores singulares

Quando a matriz A , da equação (7), tem dimensão $m \times m$ e ela possui elementos reais e determinante positivo, então U , V^* e Σ são matrizes $m \times m$ de elementos reais. Neste caso, a interpretação da fatoração da matriz A torna-se simples, U e V^* são matrizes de rotação e Σ é uma matriz de escala (GOLUB; REINSCH, 1971).

2.1.2 Aplicações da decomposição de valores singulares

A decomposição de valores singulares possui várias aplicações. Esse método permite resolver problemas de mínimos quadrados lineares, por meio do cálculo de uma matriz pseudoinversa. Além disso, também pode ser utilizado para solucionar sistemas lineares homogêneos, minimizar problemas de mínimos quadrados totais, encontrar imagem, núcleo e posto de matrizes, determinar qual matriz ortogonal mais próxima de uma matriz e para encontrar modos de vibração em análises modais.

2.2 CALIBRAÇÃO DE MODELOS NUMÉRICOS

Procedimentos modernos e sofisticados que utilizam o método dos elementos finitos estão disponíveis para análise estrutural. Porém, a aplicação frequentemente revela uma diferença considerável entre resultados numéricos e os resultados experimentais. Para reduzir esta variação, é necessário modificar alguns parâmetros de modelagem, até que os resultados numéricos e os resultados

experimentais cheguem a um nível de conformidade em que satisfaçam os requisitos práticos.

Na alteração dos parâmetros selecionados para calibração do modelo é necessário atenção especial aos aspectos que não podem ser corrigidos. Fontes de não conformidades estão relacionadas à erros de idealização, resultantes das hipóteses feitas para caracterizar o comportamento mecânico da estrutura. Esses erros surgem devido a diversos fatores, como a simplificações da estrutura, atribuição imprecisas de distribuição de massas, erros na conectividade da malha e na definição das condições de contorno, modelagem errônea de juntas, suposições equivocadas quanto as cargas externas, consideração de uma estrutura com comportamento não linear assumida como de comportamento linear.

Outras possíveis falhas podem ocorrer devido aos erros de discretização, introduzidos pelo próprio método dos elementos finitos. Isso ocorre quando a malha de elementos finitos é pouco refinada, de forma que os dados modais na frequência de interesse não convergem. Pode ocorrer também uma rigidez aparentemente aumentada, devido a forma do elemento. Além disso, a definição errônea dos parâmetros de materiais como o módulo de Young ou massa específica, assim como das propriedades de seção transversal de vigas como momentos de inércia da área, espessura da casca ou placa e rigidez da mola impactam nos resultados gerados pelo modelo numérico.

Quando o modelo inclui erros de idealização e discretização, a sua calibração ocorrerá normalmente, irá minimizar os desvios entre informações modais experimentais e informações modais numéricas. O mesmo acontece quando os parâmetros sensíveis de calibração selecionados não são consistentes com a fonte real do erro. Os parâmetros calibrados, em tais casos, podem perder seu significado físico após a calibração. Um resultado típico da atualização de tais modelos inconsistentes é que eles podem ser capazes de replicar as informações modais coletadas experimentalmente no modelo numérico. Porém, não serão úteis para prever ou identificar o comportamento da estrutura real.

O objetivo de todos os modelos numéricos, que é de prever a resposta estrutural, só pode ser alcançado se todos os tipos de erros de modelagem são

minimizados. Os modelos que preenchem estes requisitos devem ser chamados de modelos validados (MOTTERSHEAD; LINK; FRISWELL, 2011).

2.2.1 Métodos para calibração de modelos numéricos

Os procedimentos para calibração de modelos numéricos são classificados em dois tipos, os métodos diretos e métodos iterativos indiretos.

2.2.1.1. *MÉTODOS DIRETOS*

Os métodos diretos, atuam na maioria dos casos por alterações nas matrizes de rigidez e de massa, resolvendo um sistema de equações matriciais para replicar as frequências naturais e modos de vibração medidos experimentalmente. Os componentes das matrizes são alterados de tal forma que as frequências naturais a serem otimizadas coincidem com as coletadas experimentalmente. Este procedimento é considerado eficiente do ponto de vista computacional. Entretanto, o processo de calibração modifica as matrizes de resolução do problema MEF, tais alterações, muitas vezes, geram matrizes não esparsas e mal condicionadas. A consequência disto, é que a malha MEF pode perder sua conectividade, gerando resultados fisicamente irrelevantes (YANG; CHEN; HSU, 2009).

2.2.1.2. *MÉTODOS INDIRETOS ITERATIVO*

Os métodos indiretos iterativos, consideram que a resposta da estrutura, medida experimentalmente, pode ser alcançada no modelo numérico por meio de alterações de alguns parâmetros sensíveis. Um problema de otimização é formulado, por uma função penalidade, e tem como objetivo variar os valores dos parâmetros sensíveis, a fim de convergir respostas modais do modelo numérico com as repostas modais coletadas experimentalmente.

Os parâmetros sensíveis podem ser escolhidos manualmente, por meio do julgamento de engenharia, ou por uma análise de sensibilidade. No último, cada parâmetro é variado individualmente ou em conjunto com outros, e então verifica-se a sensibilidade da função penalidade em relação às variáveis em análise. É recomendado que os parâmetros selecionados tenham alta sensibilidade, e que as variações, causada por cada parâmetro, não sejam muito discrepantes. Além disso, deve-se limitar o número de parâmetros sensíveis, pois eles fazem com que o procedimento seja computacionalmente caro (MOTTERSHEAD; LINK; FRISWELL, 2011).

Um conjunto de parâmetros, do modelo numérico, é denominado de amostra, e a geração de diferentes amostras é realizado por técnicas de amostragem. Estas técnicas podem ser sistemáticas, ou estocásticas. As técnicas estocásticas são realizadas pelo método de Monte Carlo, ou pelo método do Hipercubo latino. O primeiro, gera amostras próximas umas das outras no espaço amostral, demonstrando um certo grau de correlação entre os parâmetros. O segundo, gera amostras igualmente distribuídas em todo o espaço amostral, possibilitando um melhor preenchimento da região em estudo.

Já na técnica sistemática de amostragem, é gerada uma amostra central, que é a amostra geradora de todas as outras. Em seguida, por meio de multiplicação de matrizes e de escalar, amostras subsequentes são geradas. A forma e o valor destas matrizes e escalares dependem do intervalo de valores que os parâmetros devem assumir e da técnica de geração empregada, que pode ser linear, quadrática, fatorial e fatorial aumentada. Cada técnica gera um número de amostras pré-determinado por uma equação, sendo que a técnica fatorial aumentada gera o maior número de amostras. Técnicas sistemáticas de amostragem geralmente dão origem a um maior número de amostras que se comparado as técnicas estocásticas (RIBEIRO, 2012).

Existem dois principais métodos indiretos iterativos, são eles os métodos baseados na matriz de sensibilidade e os métodos baseados em algoritmos de otimização. No primeiro procedimento, são utilizadas matrizes de sensibilidade, ou matrizes jacobianas, para a evolução das iterações. Tais matrizes, são formadas

pelas derivadas dos resíduos da função penalidade em relação aos parâmetros sensíveis. A abordagem procura uma solução ótima por meio de derivadas, então pode ser classificado como um procedimento de otimização baseado em gradientes. Por este motivo, o método corre o risco de encontrar mínimos locais como respostas ótimas, podendo gerar calibrações numéricas incorretas ou incompletas. Esta e outras limitações podem ser controladas por meio de condições descritas no parágrafo a seguir.

Para o sucesso do método das matrizes de sensibilidade, é necessário que algumas condições sejam verificadas. Primeiro, os parâmetros numéricos iniciais devem estar próximos dos parâmetros correspondentes as soluções ótimas. Ademais, no decorrer do processo de otimização, os parâmetros devem ser variados em intervalos reduzidos. A quantidade de parâmetros a serem selecionados deve ser limitada e parâmetros com sensibilidades muito diferentes devem ser evitados. Ao atender estas condições, evita-se erros numéricos gerados por uma matriz de sensibilidade mau condicionada (BREHM, 2011). Além disso, o número de respostas coletadas experimentalmente deve ser maior ou igual ao número de parâmetros sensíveis da calibração, tal condição também tem a finalidade de evitar erros numéricos. As condições mencionadas acima podem ser parcialmente contornadas por meio de técnicas de regularização demonstradas em Friswell e Mottershead (2013).

O método baseado em algoritmos de otimização inicia-se de uma primeira análise modal do modelo numérico. Com as respostas numéricas e experimentais, o valor da função penalidade é encontrado. Por meio do código de otimização utilizado, uma nova amostra de parâmetros do modelo numérico é selecionada em cada iteração, buscando a minimização da função penalidade. Entretanto, cada algoritmo minimiza a função penalidade de acordo com sua abordagem. Diversos algoritmos de otimização foram desenvolvidos nas últimas décadas. Dentre eles, os mais utilizados são os algoritmos baseados em superfície de resposta, algoritmos genéticos, redes neurais, redes bayesianas e baseados em inteligência artificial. Sendo que, os algoritmos baseados em superfície de resposta são frequentemente

utilizados em conjunto com o método das matrizes de sensibilidade, devido a fácil adequação dos dois procedimentos (RIBEIRO, 2012).

Os procedimentos baseados em algoritmos de otimização são mais flexíveis que o método baseado na matriz de sensibilidade, eles são mais adequados em casos de incertezas dos parâmetros e da função penalidade e ,em casos de algoritmos de otimização globais, são pouco suscetíveis a encontrar mínimos locais como respostas ótimas.

2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.3.1 Introdução ao método dos elementos finitos

As equações de movimento de corpos deformáveis são diferenciáveis em relação ao tempo e as coordenadas geométricas do modelo (X , Y , Z). Devida a estas características, existe uma grande dificuldade em encontrar soluções para este tipo de equações, a resolução das mesmas fica restringidas a modelos simples.

Para um caso de estrutura real, a resposta da equação diferencial de movimento fica impraticável de se encontrar, isso devido à complexidade do problema. Portanto, outro método é utilizado para estruturas complexas. O método dos elementos finitos, subdivide um domínio em diversos elementos, processo chamado de discretização do modelo. Cada elemento possui sua própria massa, rigidez e outras propriedades físicas, distribuídas nos chamados pontos nodais. A conectividade dos elementos também é feita através dos pontos nodais, que são encontrados em todas as extremidades dos elementos (KYURKCHAN, 2014).

A partir de técnicas tais como resíduos ponderados, cálculo variacional e trabalhos virtuais, a equação diferencial do modelo é substituída por equações integrais. Tomando por base o processo de discretização, são gerados sistemas

lineares de equações algébricas, que torna trivial a resolução do problema (KYURKCHAN, 2014).

2.3.2 Teoria do método dos elementos finitos

O número de equações derivadas do MEF é grande para quase todos os problemas práticos da engenharia, o que exige um programa de computador para calcular essas expressões numéricas de forma rápida, já que calcular manual seria inviável.

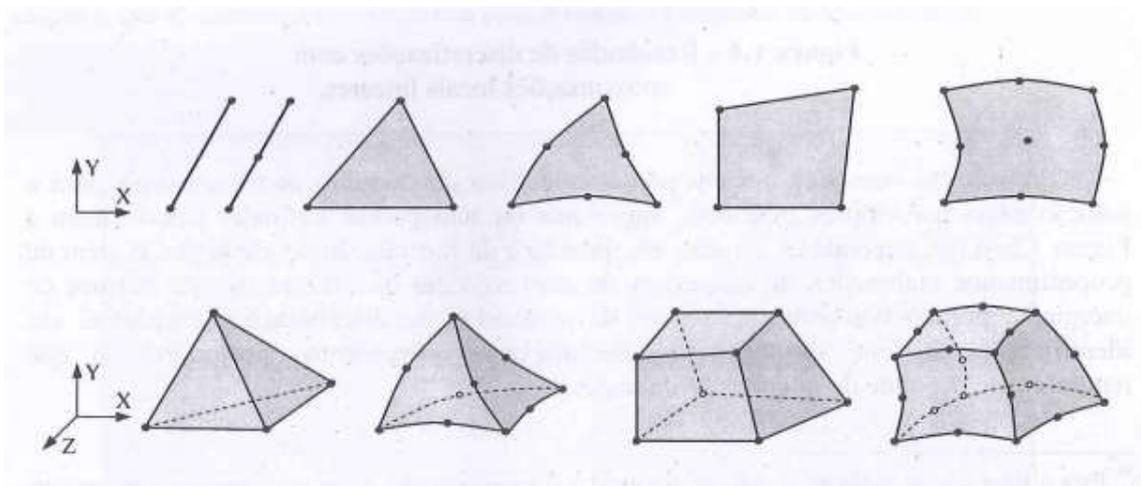
As etapas da análise do método dos elementos finitos são:

- Pré-processamento: Nesta etapa são definidos os seguintes elementos - Geometria; propriedades do material; geração da malha (elementos e nós); aplicações das condições de contorno; aplicação das forças externas e internas; e, verificação do modelo, que ocorre por meio da verificação de nós e elementos desconectados, restrições e liberações dos graus de liberdade, para maior confiabilidade do resultado.
- Análise: Com o modelo definido, essa etapa corresponde ao processamento de dados pelo programa de computador, que pode demorar de segundos a horas, dependendo do grau de complexidade do problema. As operações realizadas pelo programa são: montagem das matrizes de cada elemento; montagem da matriz global e resolução dos sistemas algébricos resultantes, que podem ter milhares de coeficientes.
- Pós-processamento: Nesta etapa são apresentados os resultados, que são exibidos de forma mais clara através da computação gráfica. Também são obtidos resultados derivados da solução, tais como tensões, deformações, frequências naturais, reações, esforços solicitantes nas barras e deslocamentos dos nós.

2.3.3 Montagem da malha de elementos finitos

Os elementos finitos da malha podem ser uni, bi e tridimensionais, podendo apresentar diversas formas e diferentes tipos de distribuições dos pontos nodais, como demonstrado na figura 1.

Figura 1 - Formas de Elementos finitos e seus pontos nodais



Fonte: (SORIANO, 2009)

As variáveis primárias podem ser deslocamentos e rotações, aplicados em todos os pontos nodais. Para elas, são arbitradas leis que descrevem seus comportamentos. Para que os elementos possam interagir entre si, as leis interpolam parâmetros nodais. A matriz de interpolação é representada por N . No caso de uma única variável primária “ u ” tem-se:

$$u = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

As funções de interpolação são fundamentais para o MEF e sua definição está relacionada com os parâmetros nodais, com a forma do elemento e com os critérios de convergência do método.

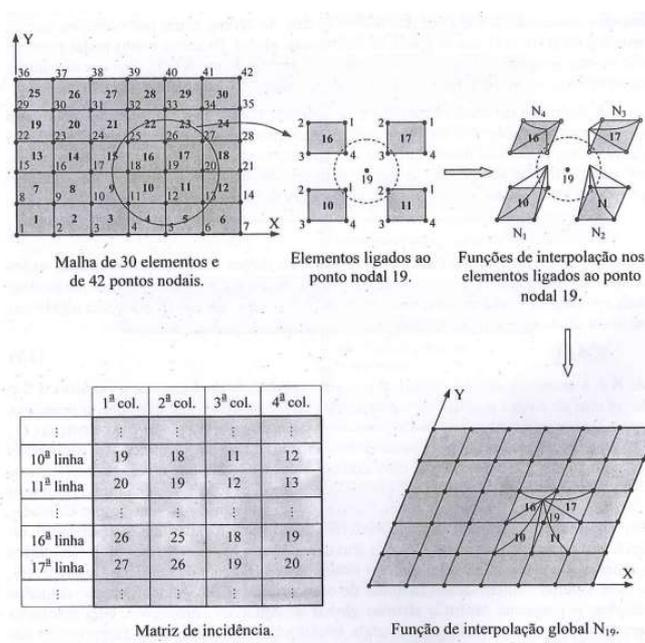
Para a automatização do MEF é necessário que os nós e elementos sejam numerados de forma ordenada:

- Numeração global dos pontos nodais.
- Numeração local dos pontos nodais.
- Numeração dos elementos da malha.

A figura 2, mostra uma malha bidimensional contendo 30 elementos, indicando os nós locais e globais. É apresentado também a matriz de conectividade, onde as linhas dessa matriz são os elementos finitos, as colunas são os nós locais e os elementos matriciais são os nós globais. A matriz mencionada é utilizada para facilitar a automatização do método. Pode-se perceber também que a conectividade dos elementos é possibilitada através das funções de interpolação.

Adicionando as respostas das equações diferenciais que definem cada elemento (equação 8), as condições de contorno essencial e não essencial do domínio, as propriedades dos materiais que estão contidos nos elementos, a geometria dos elementos, as ações externas e acoplando as matrizes de rigidez e deslocamento dos elementos em matrizes globais, pode-se definir a completa discretização do modelo.

Figura 2 - Distribuição de nós, elementos, funções de interpolação e matriz de conectividade.



Fonte: (SORIANO, 2009)

2.3.4 Métodos dos resíduos ponderados por Galerkin

O método descrito a seguir, é responsável pela geração das funções de interpolação e pela construção da equação do problema, para cada elemento. A técnica dos resíduos ponderados consiste em um conjunto de técnicas usadas para a resolução numérica de equações diferenciais. Nessa técnica, a solução exata é substituída por uma aproximação. Esta equação não satisfaz a equação diferencial, o que resulta em termo residual.

O método dos resíduos ponderados (MRP) requer que:

$$\int w_i(x) \cdot r(x) \cdot dx = 0 \quad (8)$$

com $r(x)$ sendo o termo residual e $w_i(x)$ são denominadas funções de ponderação do resíduo.

Dependendo da escolha de $w_i(x)$ e dos pontos onde $r(x)$ é nulo, obtém-se várias técnicas de resíduos ponderados, inclusive a técnica de Galerkin que serve de base para o MEF. As equações diferenciais de equilíbrio e as condições de contorno naturais de um problema físico podem ser definidas da seguinte forma:

$$A(u) + a = 0, \text{ no domínio } V \text{ (equações diferenciais de equilíbrio)} \quad (9)$$

$$B(u) + b = 0, \text{ no contorno } S1 \text{ (condições de contorno não essencial)} \quad (10)$$

$$C(u) + c = 0, \text{ no contorno } S2 \text{ (condições de contorno essencial)} \quad (11)$$

Onde:

A, B e C são operadores diferenciais e

a, b e c são funções das variáveis independentes.

Seja $N_i(x)$ uma série de funções, por exemplo: funções polinomiais, funções trigonométricas e funções exponenciais. Supondo que $\bar{u}(x)$ seja uma aproximação da resposta do problema de tal forma que esta possa ser descrita por uma combinação das funções $N_i(x)$, ou seja:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^i \psi_i \cdot N_i(x), \quad \text{com } \psi_i \text{ sendo um escalar} \quad (12)$$

Também podendo ser escrito na forma matricial:

$$\bar{u}(x) = \psi N \quad (13)$$

Com ψ e N matrizes linha e coluna, respectivamente.

O objetivo do problema consiste em determinar, para uma determinada série de funções de aproximação $N_i(x)$, quais os valores dos coeficientes ψ_i que tornam a função aproximada $\bar{u}(x)$ uma boa aproximação e que atenda as condições de contorno do problema.

Se a equação (13) for substituída nas equações diferenciais (9), (10) e (11) do problema, surgem resíduos dados por:

$$A(x) + a = R_A, \quad \text{no domínio } V. \quad (14)$$

$$B(x) + b = R_B, \quad \text{no contorno } S_2. \quad (15)$$

$$C(x) + c = R_C, \quad \text{no contorno } S_1. \quad (16)$$

Se $\bar{u}(x)$ é uma boa aproximação de (9), (10) e (11), significa que R_A , R_B e R_C são pequenos. Existem várias técnicas para gerar resíduos pequenos produzindo equações algébricas, que quando resolvidas, obtém-se os escalares ψ_i 's. O método mais utilizado em softwares de MEF é o de Galerkin.

No método de Galerkin as funções de ponderação $w_i(x)$ são escolhidas idênticas as funções de interpolação $N_i(x)$. Os resíduos médios são forçados a serem nulos no contorno S_2 e S_1 . Além disso, os coeficientes ψ_j são tomados como

os valores nodais dos elementos finitos. Dessa forma, procura-se refinar a resposta promovendo o aumento do número de elementos e procura-se manter as funções de forma de menor grau possível, diminuindo o gasto computacional em softwares.

Pelo método de Galerkin, nos nós de um elemento qualquer j , os valores desconhecidos serão obtidos minimizando o resíduo. Segue abaixo a equação do método dos resíduos ponderados por Galerkin.

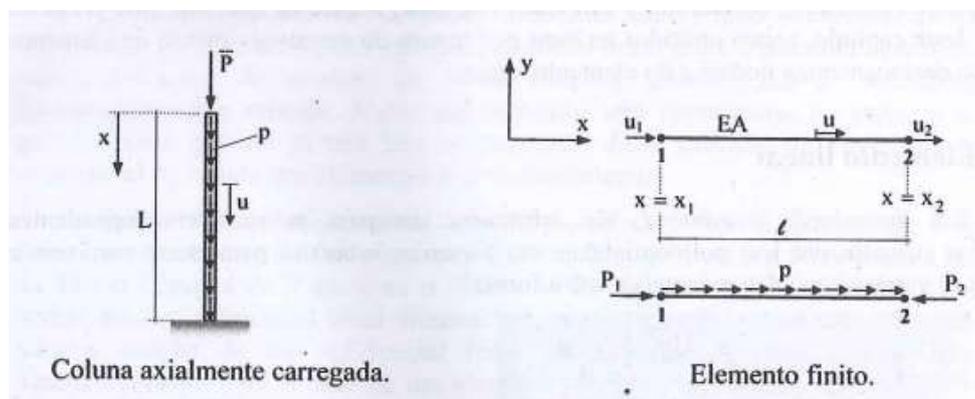
$$\int_V N_i(x) R_A = 0 \quad (17)$$

A equação (17) pode assumir diversas formas, dependendo do tipo de esforços que estão sendo simulados e do tipo da análise (estática, dinâmica). A aplicação dessa equação desenvolve-se na resposta do problema diferencial para um único elemento. Para a resolução MEF geral, é necessário que todos os elementos passem pelo procedimento da equação (17) e sejam acoplados no sistema de matrizes global do problema.

2.3.5 Matriz de rigidez do elemento de barra para espaço tridimensional

Para encontrar a matriz de rigidez de um elemento de barra tridimensional, é necessário utilizar o princípio da superposição de efeitos de dois casos particulares. Primeiramente, o caso de um pilar axialmente carregado, como mostra na figura 3.

Figura 3 - Pilar axialmente carregado, discretizado em um elemento finito.



Fonte: (SORIANO, 2009)

A equação diferencial que descreve esse problema tem a forma:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p = 0 \quad (18)$$

Com as condições de contorno geométrica e mecânica:

$$u = 0, \text{ para } x = L \quad (19)$$

$$EAu + \bar{P} = 0, \text{ para } x = 0 \quad (20)$$

E considerando o elemento finito da figura (3), com dois pontos nodais, a solução prepositiva tem a forma:

$$u(x) = [1 \quad x] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \psi \alpha \quad (21)$$

Para o caso particular, os pontos nodais são descritos da forma:

$$u^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \psi_0 \alpha \quad (22)$$

Os parâmetros generalizados podem ser descritos então, por:

$$\alpha = \psi_0^{-1}u^{(e)} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u^{(e)}, \quad (23)$$

Com l igual a $x_2 - x_1$.

Multiplicando a equação (18) por ψ_0^{-1} , obtêm-se o campo de deslocamento do elemento:

$$u(x) = \psi \psi_0^{-1}u^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x}{l} & \frac{x - x_1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Comparando com a equação (17) percebe-se que a matriz de interpolação N tem a forma:

$$N = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x}{l} \\ \frac{x - x_1}{l} \end{bmatrix} \quad (25)$$

E o campo de deslocamentos tem a derivada:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dN}{dx} u^{(e)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ l & l \end{bmatrix}, \text{ com } B = \frac{dN}{dx} \quad (26)$$

Para formular o elemento, utiliza-se a equação diferencial que rege o problema e a técnica de resíduos ponderados por Galerkin (17):

$$\int_{x_1}^{x_2} N^T \left(EA \frac{du}{dx} + p \right) dx = 0 \quad (27)$$

Utilizando integração por partes e as condições de contorno, chega-se a:

$$\left(\int_{x_1}^{x_2} B^T EAB dx \right) u^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} N^T p dx + \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Percebe-se que:

$$k^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} B^T EAB dx \quad (29)$$

$$f^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} N^T p dx + \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

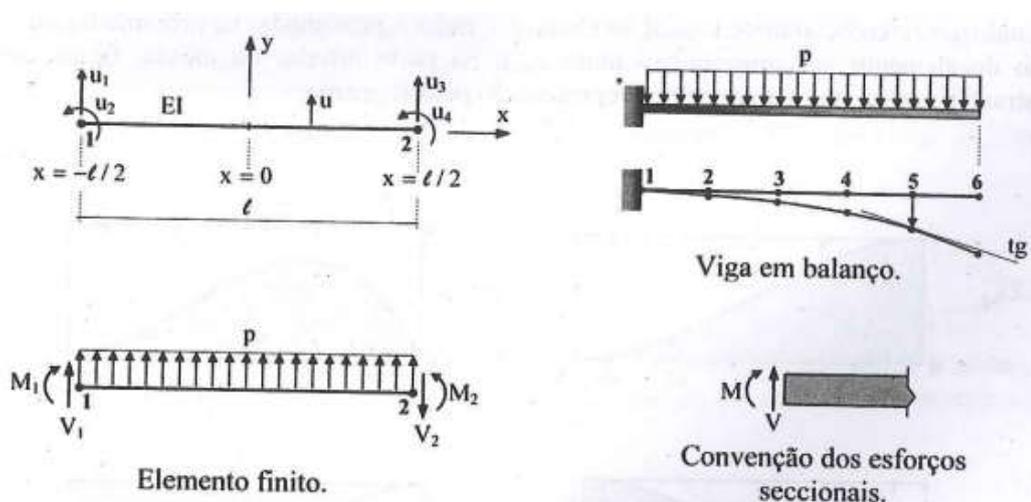
Resolvendo (29) e (30):

$$k^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$f^{(e)} = \frac{pl}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Para o problema de uma viga em balanço, discretizado na forma da figura abaixo, existe dois deslocamentos perpendiculares ao comprimento da viga e duas rotações.

Figura 4 – Viga com força cortante e momento fletor, discretizada em um elemento finito.



Fonte: (SORIANO, 2009)

Neste caso, a solução prepositiva é adotada por um polinômio de terceiro grau.

$$u = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Particularizando o problema para os pontos nodais do elemento, tem-se:

$$u^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u|_{x=-l/2}}{\frac{du|_{x=-l/2}}{dx}} \\ u|_{x=l/2} \\ \frac{du|_{x=l/2}}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l/2 & l^2/4 & l^3/8 \\ 0 & 1 & -l & 3l^2/4 \\ 1 & l/2 & l^2/4 & l^3/8 \\ 0 & 1 & l & 3l^2/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \psi_0 \alpha \quad (34)$$

Invertendo a matriz de solução prepositiva, pode-se obter os parâmetros generalizados:

$$\alpha = \psi_0^{-1} u^{(e)} = \begin{bmatrix} 1/2 & l/8 & 1/2 & l/8 \\ -3/2l & -1/4 & 3/2l & -1/4 \\ 0 & -1/2l & 0 & 1/2l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} u^{(e)} \quad (35)$$

Substituindo os parâmetros generalizados em (35), pode-se obter o campo de deslocamentos e as N_i funções de interpolação:

$$u = \psi \psi_0^{-1} u^{(e)} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] u^{(e)} \quad (36)$$

$$N = \begin{bmatrix} 1/2 & l/8 & 1/2 & -l/8 \\ -3x/2l & -x/4 & 3x/2l & -x/4 \\ 0 & -x^2/2l & 0 & x^2/2l \\ 2x^3/l^3 & x^3/l^2 & -2x^3/l^3 & x^3/l^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Para desenvolver o elemento, utiliza-se a equação diferencial que rege o problema e a técnica de resíduos ponderados por Galerkin (17):

$$\int_{-l/2}^{l/2} N^T \left(\frac{EI}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} - pu \right) dx = 0 \quad (38)$$

Utilizando integração por partes e as condições de contorno, chega-se a:

$$\left(\int_{x_1}^{x_2} B^T EIB dx \right) u^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} N^T p dx + \begin{bmatrix} V_1 \\ -M_1 \\ -V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Percebe-se que:

$$k^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} B^T EIB dx \quad (40)$$

$$f^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} N^T p dx + \begin{bmatrix} V_1 \\ -M_1 \\ -V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Neste caso:

$$B = \frac{d^2 N}{dx^2} \quad (42)$$

Então, a matriz de rigidez do problema é:

$$k^{(e)} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/l^2 & 6/l & -12/l^2 & 6/l \\ 6/l & 4 & -6/l & 2 \\ -12/l^2 & -6/l & 12/l^2 & -6/l \\ 6/l & 2 & -6/l & 4 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Através da composição das duas matrizes de rigidez dos casos particulares acima, pode-se utilizar o princípio da superposição de efeitos. Gerando então, a matriz de rigidez de um pórtico plano.

$$k^{(e)} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ \cdot & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ \cdot & \cdot & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \cdot & \cdot & \cdot & EA/L & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ sim. & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (44)$$

As primeiras e quartas linhas e colunas estão relacionadas com o deslocamento longitudinal da barra. As segundas e quintas linhas e colunas tem relação com o deslocamento perpendicular a barra. Por último, as terceiras e sextas linhas e colunas são referentes aos movimentos de rotações.

No caso de um elemento de barra, com dois pontos nodais em suas extremidades, que possui uma rotação em torno do próprio eixo. Pode-se encontrar a sua matriz de rigidez por meio da mesma metodologia adotadas no pilar e na viga das figuras 3 e 4. Essa matriz é da forma:

$$k^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{GJ_T}{L} & -\frac{GJ_T}{L} \\ -\frac{GJ_T}{L} & \frac{GJ_T}{L} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Por analogia e superposição de efeitos, pode-se definir a matriz de rigidez do elemento de pórtico tridimensional, que permite deslocamentos e rotações no plano. A equação (46), demonstra a forma dessa matriz.

$$k^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_Y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ_T}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{-6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_Z}{L^2} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_Z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ_T}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{-6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_Z}{L^2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

2.3.6 Matriz de massa do elemento de barra para pórtico tridimensional

Para encontrar a matriz de massa de um elemento, é necessário analisar um caso de equilíbrio dinâmico, em que as forças elásticas se equilibram com as forças inerciais (considerando amortecimento nulo). Para um elemento de barra, a equação diferencial que rege o problema dinâmico da figura 4 é:

$$\rho A \ddot{u}(x, t) + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - p(x, t) = 0 \quad (47)$$

Primeiramente, calcula-se o campo de deslocamentos (48). Em seguida, através do método de Galerkin, pode-se desenvolver a equação diferencial de equilíbrio (49).

$$u(x, t) = N(x)u(t)^{(e)} \quad (48)$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N^T \left(\rho A \ddot{u} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - p \right) dx = 0 \quad (49)$$

Com (48), pode-se desenvolver a equação (47), chegando em:

$$\left(\int_{-l/2}^{l/2} N^T \rho A N dx \right) \ddot{u}^{(e)} + \left(\int_{-l/2}^{l/2} B^T E I B dx \right) - \int_{-l/2}^{l/2} N^T p dx + \begin{bmatrix} V_1 \\ -M_1 \\ -V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Pode-se perceber que:

$$k^{(e)} = \int_{-l/2}^{l/2} B^T E I B dx \quad (51)$$

$$M^{(e)} = \int_{-l/2}^{l/2} N^T \rho A N dx \quad (52)$$

Para o presente caso, a matriz de massa é:

$$M^{(e)} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Para um elemento de barra carregado axialmente, como no caso da figura 3, a equação diferencial que rege o problema dinâmico é:

$$\rho A \ddot{u}(x, t) + EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - p(x, t) = 0 \quad (54)$$

Com o campo de deslocamentos e , em seguida, utilizando método de Galerkin, chega-se à matriz de massa:

$$M^{(e)} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 70 \\ 70 & 140 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Para o mesmo elemento de barra, que só possui uma rotação em torno da própria seção (neste caso, adotado pela rotação do eixo X). Pode-se

encontrar a sua matriz de massa por meio da mesma metodologia adotada para os outros casos mostrados acima. Essa matriz é da forma:

$$M^{(e)} = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} \frac{140I_x}{A} & \frac{-70I_x}{A} \\ \frac{-70I_x}{A} & \frac{140I_x}{A} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$r_x^2 = \frac{I_x}{A} \quad (57)$$

Pelo princípio da superposição de efeitos, a matriz de massa do elemento de barra de um pórtico plano é:

$$M^{(e)} = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Por analogia e superposição de efeitos, pode-se montar a matriz de massa do elemento de barra de um pórtico tridimensional, demonstrada pela equação (59).

$$M^{(e)} = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22l & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13l \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22l & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140r_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -70r_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22l & 0 & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & -13l & 0 & -3l^2 & 0 \\ 0 & 22l & 0 & 0 & 0 & 4l^2 & 0 & 13l & 0 & 0 & 0 & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13l & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22l \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13l & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -70r_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140r_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13l & 0 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 22l & 0 & 4l^2 & 0 \\ 0 & -13l & 0 & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & -22l & 0 & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

2.3.7 Matrizes globais de rigidez e massa.

Após obter as matrizes de rigidez dos elementos, é necessário uni-las em um sistema global. Tornando-as então, em uma matriz global de rigidez.

Primeiramente, deve-se rotacionar as matrizes dos elementos para um sistema global, caso todos os elementos sejam paralelos entre si, não haverá rotações. Caso contrário, deve-se multiplicar a matriz do elemento por duas matrizes de rotação correspondentes, na seguinte forma:

$$K^{(G)} = [I]_{(G)}^{(e)} K^{(e)} [I]_{(e)}^{(G)} \quad (60)$$

Como as matrizes de rotação são operadores ortogonais, a transposta de uma é igual a inversa da outra. Com esse procedimento, pode-se alterar o sistema de coordenadas da matriz de rigidez do elemento de local para global.

Depois de rotacionadas, as matrizes dos elementos devem ser acopladas. Para isso, deve-se observar quando os elementos possuem pontos nodais em comum. Os elementos matriciais que correspondem aos graus de liberdade em comum, devem ser somados. Os demais elementos matriciais devem ser inseridos sem qualquer operação.

Depois de acopladas, a matriz global terá a quantidade de linhas e colunas igual aos graus de liberdades de todos os elementos unidos.

O mesmo procedimento deve ser feito para as matrizes de massa dos elementos (SORIANO, 2009).

2.3.8 Resolução de problema físico pelas matrizes globais.

Com as matrizes globais de rigidez e massa, pode-se montar problemas físicos da malha MEF.

Uma análise estática, que relaciona força com deformação, pode ser descrita por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(G)}\mathbf{U} \quad (61)$$

Com:

$\mathbf{K}^{(G)}$: matriz de rigidez global.

\mathbf{F} : vetor de força.

\mathbf{U} : vetor de deslocamentos.

Pode-se também, realizar uma análise modal:

$$(\omega^2\mathbf{M}^{(G)} + \mathbf{K}^{(G)})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (62)$$

Com:

$\mathbf{M}^{(G)}$: matriz de rigidez global.

ω^2 : vetor de frequências angulares naturais.

$\mathbf{K}^{(G)}$: matriz de rigidez global.

\mathbf{U} : vetor de deslocamentos.

2.4 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Segundo Clough e Penzien(2003), a dinâmica das estruturas trabalha com respostas variantes no domínio do tempo (aceleração, deslocamento, força). Os sistemas de um grau de liberdade são representados por uma massa presa a uma mola e um amortecedor. O exemplo básico de dinâmica das estruturas é de um carregamento dinâmico $f(t)$ atuando na massa, equilibra com as forças que impedem o movimento (inércia, elástica e amortecimento) pela seguinte equação diferencial:

$$f_i + f_a + f_e = f(t) \quad (63)$$

As forças elásticas (f_e) são proporcionais ao deslocamento ($u(t)$) e relacionadas a uma constante (k) que varia de acordo com o material que é tensionado. As forças de amortecimento (f_a) são proporcionais a velocidade e uma constante que também varia em função do com o material. A força de inércia (f_i) é obtida por meio da primeira e segunda lei de Newton, que descreve a tendência de corpos a manterem o seu estado natural de movimento. A força resultante sobre o corpo é dada pela sua massa multiplicado por sua aceleração.

Com as forças descritas anteriormente é possível reescrever a equação diferencial de equilíbrio dinâmico (64) como:

$$m.\ddot{u}(t) + k.u(t) + c.\dot{u}(t) = f(t) \quad (64)$$

2.4.1 Sistemas com um grau de liberdade

2.4.1.1. VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS

Na vibração livre não amortecida, não ocorre atuação de forças externas ($f(t) = 0$). Neste caso a equação de equilíbrio dinâmico é dada por:

$$m.\ddot{u}(t) + k.u(t) = 0 \quad (65)$$

A solução dessa equação diferencial é dada por:

$$u(t) = a.\cos(\omega_n . t) + b.\sen(\omega_n . t) \quad (66)$$

Para a solução ser real:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (67)$$

A simbologia ω_n significa frequência angular natural. Isso porque pela equação (64), a velocidade de oscilação depende apenas de características intrínsecas do material, rigidez e massa, por isso a denominação natural. Outras duas denominações importantes são frequência natural e período natural, descritos pelas expressões:

$$f_n = \omega_n/2\pi \quad (68)$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} \quad (69)$$

2.4.2 Sistemas com múltiplos graus de liberdade (MDOF)

Como as propriedades físicas de estruturas reais estão sempre espalhadas por toda a dimensão do corpo, as repostas dinâmicas variam de acordo com esta distribuição. Caso se queira obter um resultado mais próximo da realidade, devem ser considerados vários graus de liberdade ao longo do domínio de definição da estrutura. Com isso, todas as características modais, massa e rigidez da estrutura serão concentradas em pontos nodais e, quanto maior o número de pontos, maior a aproximação desse modelo com a realidade (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

A equação de equilíbrio dinâmico deve ser imposta para cada grau de liberdade, em um sistema com N graus de liberdade dado por:

$$\begin{aligned} f_{I1} + f_{D1} + f_{E1} &= p_1(t) \\ f_{I2} + f_{D2} + f_{E2} &= p_2(t) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f_{IN} + f_{DN} + f_{EN} &= p_N(t) \end{aligned} \quad (70)$$

As variáveis envolvidas são:

f_{IN} é a força de inércia no grau de liberdade n

f_{DN} é a força de amortecimento no grau de liberdade n

f_{EN} é a força elástica no grau de liberdade n

$p_N(t)$ é a força externa dinâmica atuando no grau de liberdade n

A equação (63) pode ser escrita na forma matricial por:

$$FI + FD + FE = P(t) \quad (71)$$

Ou da forma:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t) \quad (72)$$

Onde:

$M_{n \times n}$ é Matriz de massas.

$C_{n \times n}$ é Matriz de coeficiente de amortecimento.

$K_{n \times n}$ é Matriz de rigidez elástica.

U é Vetor de deslocamentos.

\dot{U} é Vetor de velocidades.

\ddot{U} é Vetor de acelerações.

$P(t)$ é Vetor de forças externas aplicadas.

Nos sistemas com múltiplos graus de liberdade, as grandezas massa, amortecimento e rigidez elástica são relacionadas com os próprios elementos e os elementos próximos, ou seja, a vizinhança de um elemento também influencia nele mesmo.

Como exemplo a matriz de rigidez elástica com grau de liberdade n dado por:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (73)$$

O elemento k_{11} é a influência da rigidez do próprio elemento, já o k_{21} é a influência da rigidez elástica do elemento 1 no elemento 2, e assim por diante. O mesmo acontece nas matrizes de amortecimento \mathbf{C} e massa \mathbf{M} dadas por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{23} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{23} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (75)$$

2.4.2.1. MDOF de vibração livre não amortecida

Esse caso é semelhante ao sistema com um grau de liberdade, a diferença vem da equação do equilíbrio dinâmico que é formada por matrizes e vetores dados por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (76)$$

Para obtenção das frequências e formas modais, a equação matricial do movimento dinâmico é utilizada. No caso da vibração livre não amortecida com um grau de liberdade, a solução harmônica é dada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \cdot \cos(\omega t - \theta) \quad (77)$$

Onde:

\mathbf{U} é o vetor de amplitudes nodais de deslocamento

Substituindo (77), na equação do movimento (76), tem-se:

$$\omega^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U} \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta) = \mathbf{0} \quad (78)$$

Na forma simplificada:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{U} = \omega^2 \cdot \mathbf{U} \quad (79)$$

Fazendo $\mathbf{K} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{B}$; $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{U}$ e $\lambda = \omega^2$, tem-se um problema de autovalor e autovetor:

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\phi} = \lambda \cdot \boldsymbol{\phi} \quad (80)$$

Onde:

\mathbf{B} é a matriz dinâmica; $\boldsymbol{\Phi}$ é o autovetor do problema de valores característicos, e é denominado como as formas modais de vibração. $\lambda = \omega^2$ é o autovalor do problema de valores característicos, sendo as frequências naturais. Com isso, como $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{0}$, o sistema de equações livres poder ser reescrito como:

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (81)$$

O autovetor não pode ser nulo. Então, para que o sistema de equações lineares não tenha solução trivial:

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (82)$$

Chega-se então em uma equação polinomial de grau n , com n soluções e com n sendo o número de graus de liberdade:

$$\lambda^n + c_2 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n = 0 \quad (83)$$

2.5 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

Atualmente existe uma vasta literatura sobre calibração de modelos numéricos de estruturas civis. Os procedimentos para calibração são divididos em dois tipos, as técnicas diretas e técnicas indiretas iterativas. Centenas de artigos foram publicados nas últimas décadas abordando estes métodos (ALKAYEM et al., 2018).

Um dos primeiros procedimentos de atualização direta de matrizes foi o elaborado por Baruch (1978). Desde então, diversos métodos diretos de atualização de modelos foram desenvolvidos por pesquisadores. Procedimentos de calibração direta são eficientes e precisos do ponto de vista computacional, pois resolvem o problema de otimização com apenas uma iteração, e os erros entre modelo numérico e dados coletados experimentalmente são praticamente zerados, o que torna este tipo de procedimento atrativo. Porém, os métodos diretos possuem diversas desvantagens, são muito sensíveis a interferências e podem produzir resultados não realistas. Por exemplo, pode-se ocorrer a perda de simetria na matriz de rigidez do modelo e perda de conectividade da estrutura (MARWALA, 2010).

Berman(1984) concluiu que é impossível identificar modelos numéricos fisicamente significativos quando são utilizados métodos diretos. Possivelmente por causa das constatações mencionadas, poucos trabalhos acadêmicos de métodos diretos de calibração de modelos foram publicados nos últimos anos.

Por outro lado, os métodos indiretos tem sido foco de estudo em diversos trabalhos científicos de calibração de modelos numéricos. É um procedimento iterativo, que realiza calibrações de modelos por meio da minimização de resíduos entre respostas coletadas experimentalmente e respostas obtidas numericamente. O uso de métodos indiretos para calibração de modelos numéricos é encontrado em diversos trabalhos publicados nos últimos anos.

Behmanesh, Moaveni, Lombaert e Papadimitriou (2015) desenvolveram um método de algoritmos de otimização, baseado no método de hierarquia Bayesiana.

Tal procedimento foi utilizado para calibrar e identificar danos em um edifício de três andares, modelado por três graus de liberdade. Este modelo simples foi

adotado para verificar o desempenho da técnica. As respostas experimentais foram simuladas por meio de uma técnica de amostragem probabilística, onde geraram 400 frequências naturais e modos de vibração, para situações de respostas modais completas e incompletas.

Os parâmetros de calibração adotados foram rigidez e massa da estrutura. A calibração do modelo numérico ocorreu em 4 condições. Primeiro, para situação de respostas modais completas e sem erros de modelagem, seguido por respostas modais completa e com erros de modelagem. A penúltima condição é de respostas modais incompletas e sem erros de modelagem, e por último respostas modais incompletas e com erros de modelagem.

A técnica desenvolvida foi proposta para lidar com incertezas e para quantificar danos de modelos numéricos. Os autores concluíram que, na ausência de erros de modelagem, danos estruturais podem ser previstos de forma precisa mesmo quando mudanças das respostas devido danos são menores que mudanças causadas por condições do ambiente.

Os autores também concluíram que se comparado com a abordagem clássica Bayesiana, o método utilizado é mais adequado para avaliar danos estruturais em construções civis que estão em operação, onde variações da condição ambiental podem afetar a identificação de parâmetros modais.

Moaveni, Stavridis e Lombaert (2013) realizaram calibrações de modelos numéricos de um prédio com 3 andares. A construção passou por testes experimentais na mesa vibratória UCSD-NEES, para investigar o seu desempenho sísmico e com o objetivo de detectar, localizar e quantificar danos estruturais.

A mesa introduziu danos progressivamente na construção, por meio de vibrações de intensidade crescente. O modelo numérico da estrutura foi constituído por 35 pontos nodais, 12 elementos de casca e 42 elementos de barra.

O procedimento de calibração adotado foi o método da sensibilidade, por meio de um algoritmo de minimização da função penalidade, denominado região de confiança de Newton. Os parâmetros selecionados para calibração foram os coeficientes de rigidez dos materiais de todos os elementos, que foram variados em conjunto.

A função penalidade buscou minimizar os resíduos entre frequências naturais e entre modos de vibração. O objetivo foi de detectar localizar e quantificar danos estruturais. Os resultados demonstraram que o método pôde detectar localizar e quantificar danos estruturais crescentes para cada nível crescente de vibração introduzido.

Qin, Zhang, Zhou e Kang (2018) realizaram calibrações de um modelo numérico que simula uma ponte ferroviária, de 250 metros de comprimento, composta por concreto armado. A estrutura simulada é real, onde é utilizada para circulação de trens de alta velocidade, e se encontra na cidade de Calatayud, Espanha.

Para a seleção de parâmetros sensíveis, os autores realizaram análises de sensibilidade, onde a densidade de dois elementos, modulo de Young de outros dois elementos e rigidez de dois apoios foram selecionados para calibração.

Utilizando a técnica de amostragem estocástica denominada hipercubo latino, 800 amostras foram geradas para cada parâmetro a ser calibrado. Os parâmetros respeitaram limites inferiores e superiores pré-definidos pelos autores. Então, foi utilizado o método da Krigagem para encontrar relações entre as amostras geradas e as frequências naturais e MAC. Tal relação foi desenvolvida por meio de uma análise de regressão. Quatorze frequências naturais e modos de vibração foram utilizadas pelo procedimento.

A função penalidade utilizada é a diferença entre frequências naturais numéricas e experimentais e o critério MAC. Então, foi utilizado um método de algoritmo de otimização, baseado na otimização por enxame de partículas, para minimizar a função penalidade, de forma iterativa.

Os autores concluíram que os modos de vibração e frequências naturais numéricos foram muito aprimorados após a calibração, e que o modelo numérico apresenta respostas próximas as respostas coletadas experimentalmente. Além disso, consideraram que o procedimento adotado tem bom desempenho para calibração dinâmica de pontes.

Por último, os autores mencionaram que o custo computacional da metodologia aplicada é baixo, podendo ser utilizada em futuras aplicações de engenharia.

Ren e Hen (2010) utilizaram o método da sensibilidade combinado com o método da resposta da superfície para calibrar uma viga simplesmente apoiada e uma ponte viga-caixão. Os resultados das calibrações foram comparados com outras calibrações que utilizaram apenas o método da sensibilidade. Foi concluído que a utilização do método da resposta de superfície é eficiente e faz com que os modelos sejam convergidos mais rapidamente. Os autores também afirmaram que a técnica utilizada pode ser facilmente implementada em softwares comerciais do MEF.

Dentre os artigos analisados, a maioria tomou as rigidezes das condições de contorno e módulo de Young como parâmetros de calibração. Além disso, os modos de vibração e frequências naturais são os principais parâmetros modais utilizados na função penalidade.

Os autores mencionaram que para uma calibração de modelos que preserva o significado físico é necessário a utilização de frequências naturais e modos de vibração na função a ser minimizada. Foi observado que o método indireto iterativo de calibração tem recebido representativa atenção dos pesquisadores nos últimos anos, sendo que todos os artigos analisados utilizaram este tipo de procedimento. Acredita-se que a preservação de significado físico do modelo e a precisão na calibração seja o responsável pela alta adoção. Dentre os artigos analisados, percebeu-se que os autores mencionaram a necessidade da realização de mais experimentos e estudos sobre os procedimentos abordados.

O método utilizado neste trabalho não pode ser considerado igual a nenhum dos procedimentos utilizados nos artigos científicos analisados nesta revisão bibliográfica. Entretanto, o procedimento adotado também foi o método baseado em algoritmo de otimização, em que uma função penalidade deve ser minimizada.

O algoritmo utilizado foi de desenvolvimento próprio, e é baseado na tentativa e erro de todas as amostras de parâmetros geradas a partir de uma técnica de amostragem. O algoritmo gera automaticamente uma amostra de parâmetros para

cada iteração, e armazena, de forma crescente e substitutiva, as que geraram menores resíduos da função penalidade. A quantidade de amostras e o espaço amostral é definido pelo software após a entrada de informações. Estas informações são os parâmetros sensíveis, quantidade de variações de cada parâmetro, alcance inferiores e superiores dos parâmetros.

A seleção de amostras, em cada iteração, ocorre de forma sequencial, em que todas as amostras geradas a partir da técnica de amostragem são utilizadas após o software calcular a última iteração. A sequência de seleção amostral, para cada iteração, segue um padrão de aumento progressivo e independente dos valores dos parâmetros sensíveis, sendo que a última e a primeira iteração representam o valor máximo e mínimo que todos os parâmetros sensíveis podem assumir respectivamente.

Apesar do elevado custo computacional, acredita-se ser possível realizar calibrações de modelos numéricos em tempo hábil e com alta confiabilidade de resultados.

3. METODOLOGIA

O método para a realização deste trabalho segue as etapas:

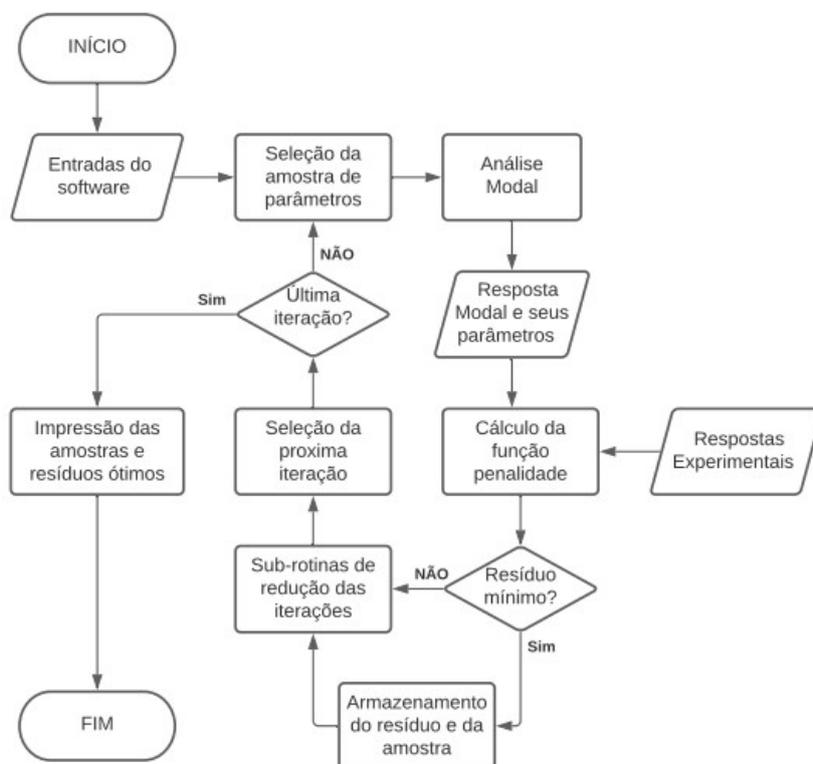
- Revisão bibliográfica para fundamentação teórica dos seguintes tópicos: Dinâmica das estruturas, método dos elementos finitos, calibração de modelos numéricos, decomposição de valores singulares.
- Elaboração de modelos numéricos de vigas metálicas em software próprio, que utiliza o método dos elementos finitos, escrito na linguagem Fortran.
- Planejamento e desenvolvimento do software de calibração de modelos numéricos na linguagem Fortran, que é baseado um algoritmo próprio de otimização. A minimização de uma função de resíduos entre frequências naturais experimentais e numéricas será o principal procedimento utilizado para a extração dos parâmetros modais. As propriedades mecânicas e vinculações que melhor se ajustam aos valores experimentais serão aquelas correspondentes à variação do modelo numérico que melhor se ajuste aos resultados de frequências experimentais, ou seja, a escolha será

simplesmente a configuração de propriedades, dentre as diversas simulações efetuadas, que apresenta valor mais próximo ao experimental.

- Organização das informações referentes aos ensaios modais das vigas metálicas e da torre metálica, analisadas nos trabalhos de Campos (2020) e Tarabay (2015).
- Realização das calibrações numérica utilizando os parâmetros modais experimentais das vigas metálicas e da torre metálica.
- A partir de todas as etapas realizadas anteriormente, e após a comparação das informações obtidas pós calibração, será possível determinar a precisão do software desenvolvido.

O fluxograma abaixo demonstra os procedimentos adotados, para a realização da calibração de modelos numéricos através do software desenvolvido neste trabalho

Figura 5- Fluxograma do software de calibração de modelos numéricos



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A parte do programa que utiliza o MEF é de autoria própria, e foi desenvolvido na linguagem Fortran. O software trabalha com elementos finitos de barra reticuladas. As barras são inseridas no espaço tridimensional e possuem dois pontos nodais, localizados em suas extremidades. Os pontos nodais possuem os três deslocamentos (X, Y, Z) e três rotações ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) no espaço, totalizando 6 graus de liberdade. As condições de contorno são simuladas por molas elásticas, que restringem os movimentos de translação e rotação no espaço.

As matrizes de rigidez e de massa dos elementos são formadas pelos graus de liberdade de seus pontos nodais, gerando então, matrizes 12×12 , como demonstrado no item 2.4.5 e 2.4.6. A formulação MEF segue a técnica de Galerkin, dos resíduos ponderados, como indicado no item 2.4.

O software realiza análise estática e modal. Neste trabalho, será utilizado a análise modal. As frequências de vibração natural são obtidas por meio da formulação indicada no item 2.5.2. Primeiramente, considera-se que o vetor de deslocamentos é diferente de zero, chegando na equação abaixo:

$$-\omega^2 \mathbf{M}^{(G)} + \mathbf{K}^{(G)} = \mathbf{0} \quad (84)$$

Em seguida, a matriz inversa da rigidez é multiplicada em (84):

$$-\omega^2 \mathbf{M}^{(G)} \mathbf{K}^{(G)-1} + \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (85)$$

Dividindo (85) pelo vetor de frequência angular ao quadrado, tem-se:

$$\mathbf{M}^{(G)} \mathbf{K}^{(G)-1} = \frac{1}{\omega^2} \mathbf{I} \quad (86)$$

$$\mathbf{A}^{(G)} = \mathbf{M}^{(G)} \mathbf{K}^{(G)-1} \quad (87)$$

Então, foi utilizado a técnica de decomposição dos valores singulares em $\mathbf{A}^{(G)}$, que foi decomposta em:

$$A^{(G)} = USU^* = I \frac{1}{\omega^2} I \quad (88)$$

Com:

U : Matriz composta de vetores inversos de deslocamento unitário.

S : Matriz diagonal, formada por valores inversos de frequências (s^2/rad^2).

U^* : Matriz composta de vetores de deslocamento unitário.

Em seguida, os elementos matriciais de S são invertidos, elevados a meio e multiplicados por 2π . Chegando-se então, aos valores de frequências naturais, na unidade hertz (Hz).

Cada linha da matriz U^* representa os deslocamentos e rotações de toda a estrutura, em relação a uma frequência natural associada. Ou seja, cada linha é um modo de vibração.

As rotinas de cálculo do modelo numérico estão em conjunto com as rotinas de otimização dos modelos. O software não foi desenvolvido separadamente devido à grande quantidade de informações que deveriam ser armazenadas. Afinal, o programa trabalha com o cálculo de milhares ou até milhões de análises modais diferentes.

Antes da realização da análise modal, em cada iteração, é selecionado um conjunto de parâmetros sensíveis, tal conjunto é denominado amostra. Esta é gerada a partir de um conjunto de amostras contidas em um espaço amostral. A dimensão, os limites mínimos e máximos deste espaço e o conjunto de amostras é definido pelo usuário do software.

Após o usuário inserir quais e quantos serão os parâmetros sensíveis, limites inferiores e superiores destes parâmetros e o número de variações que cada parâmetro terá, o software delimita o espaço amostral, define o número de amostras que serão utilizadas e define os valores linearmente crescentes de cada variação de parâmetro. As equações (89) e (90) demonstram o mecanismo de acréscimo linear de cada um dos parâmetros sensíveis.

$$ALPX = \frac{LSPX - LIPX}{NVPX - 1} \quad (89)$$

$$PX = VX * ALPX \quad (90)$$

Com:

ALPX : Acréscimo linear do parâmetro x

LSPX : Limite superior do parâmetro x

LIPY : Limite inferior do parâmetro x

NVPX: Número total de variações do parâmetro x

PX: Parâmetro x

VX: Variação de x da iteração

O valor de *ALPX*, *LSPX*, *LIPY* são fixos e determinados na primeira iteração, já os valores de *PX* e *VX* variam em cada iteração.

O algoritmo segue uma sequência crescente na geração e utilização de amostras pertencentes ao espaço amostral. A primeira iteração realiza a análise modal com a amostra contendo os parâmetros definidos pelos seus respectivos limites inferiores. Na última iteração, a amostra contém os parâmetros definidos como os seus respectivos limites superiores. Mais detalhes sobre esta geração sequencial de amostras é apresentada no item 3.2.

Em cada iteração, uma amostra de parâmetros da estrutura é definida e a resposta da análise modal é calculada. Em seguida, na mesma iteração, a rotina de otimização calcula a diferença das frequências naturais numéricas e experimentais, dado pela equação:

$$fp_i = \frac{\left| \frac{f_{e1} - f_{n1}}{f_{e1}} \right| + \left| \frac{f_{e2} - f_{n2}}{f_{e2}} \right| + \dots + \left| \frac{f_{en} - f_{nn}}{f_{en}} \right|}{nmode} \quad (91)$$

Com:

fp_i : função penalidade, que descreve o resíduo entre as frequências naturais experimentais e numéricas da análise modal i.

f_{en} : Frequência natural, extraída experimental, do modo de vibração n.

f_{nn} : Frequência natural, calculada numericamente, do modo de vibração n.

$nmode$: número total de modos de vibração utilizados.

Em sequência, caso seja a primeira iteração, o valor do resíduo é salvo na primeira posição de um vetor. Esse vetor tem o tamanho definido como a quantidade de menores resíduos a serem impressos no arquivo de saída e é representado por $res(n)$. Os parâmetros modais correspondentes são salvos em uma matriz de dados chamada **OTI**. Essa matriz tem as colunas definidas como o número de parâmetros das amostras, e as linhas definidas como quantidade de resíduos mínimos a serem impressos.

Para todas as outras iterações, se o resíduo mínimo r_i da equação (89) for menor do que o resíduo $res(x)$, então o valor de $res(x)$ é salvo em $res(x+1)$ e o valor de $res(x+1)$ é salvo em $res(x+2)$, assim ocorre até que o último valor do vetor $res(n)$ é substituído. Em seguida, o valor de r_i é salvo em $res(x)$. Procedimento análogo ocorre com as linhas e colunas da matriz **OTI**, em que a amostra anterior de menor resíduo é salva na linha subsequente da matriz. Em resumo, os resíduos mínimos são armazenados em ordem crescente, juntamente com as amostras da estrutura que geraram os resultados de tais resíduos. Por último, os resultados armazenados no vetor $res(n)$ e na matriz **OTI** são impressos de forma conveniente.

O objetivo é encontrar em quais amostras de parâmetros as frequências naturais numéricas e experimentais tem os menores resíduo, o que é demonstrado na saída do software. A otimização realizada nesse software é classificada como um método de calibração por meio de um algoritmo de otimização. O procedimento adotado por este algoritmo realiza análises modais de todas as amostras de parâmetros contidas em um espaço amostral.

Para poupar custo computacional duas sub-rotinas foram implementadas no software. Ambas diminuem as iterações a serem realizadas, excluindo amostras que a rotina prevê gerar grandes resíduos. A primeira, compara o resíduo das duas últimas análises modais. Se não houve alteração significativa e se o resíduo é maior que 10% da soma das frequências experimentais, um número definido de análises

modais e amostras de parâmetros subsequentes são descartadas. Este número é definido como o número de variações máximo que se tem entre os parâmetros dividido por 20.

A segunda sub-rotina analisa o resíduo da análise modal que acabou de ser efetuada. Se o resíduo for maior que 25% da soma das frequências naturais experimentais, um número definido de análises modais e amostras de parâmetros subsequentes são descartadas. O número é definido como o número de variações máximo que se tem entre os parâmetros dividido por 3.

As sub-rotinas, mencionadas nos parágrafos acima, foram testadas para diversas calibrações. Além de diminuir o tempo de execução da calibração, não houve perda de resíduos e amostras ótimas.

Em cada iteração, ocorre a substituição de valores armazenados na iteração anterior pelos valores da iteração atual. Tal procedimento foi adotado para restringir o número de memória alocada, permitindo o software de rodar milhões de iterações sem que ocorra problemas associados a falta de memória. Por este motivo, o computador que executar este programa necessitará de uma quantidade ínfima de memória ram.

3.1 ENTRADAS E SAÍDAS DO SOFTWARE MEF E DE OTIMIZAÇÃO

Para a execução o software necessita de entradas, que são lidas pelo programa em um arquivo de texto denominado Entradas.txt. As entradas necessárias são:

- Número de nós
- Número de elementos
- Número de nós com molas
- Número de nós com forças externas
- Parâmetros com variações
- Número de variação de cada parâmetro: Neste software, foi desenvolvido a possibilidade de variação das seguintes propriedades: Área da seção, inércias, coeficiente de rigidez, coeficiente de Poisson e massa específica. A primeira iteração de cada parâmetro começa com a suas propriedades iniciais definidas pelos seus limites inferiores. A última, com a suas propriedades definidas pelos seus limites superiores. Já as intermediárias, terão suas propriedades definidas como sendo os valores médios entre os dois limites, de acordo com as equações (89) e (90). Esta variação pode ser aplicada em cada elemento e aumenta linearmente.
- Número de molas com vínculos. Essas propriedades também podem ser variadas, da mesma forma descrita no item anterior. Porém, as variações são aplicadas nos pontos nodais de escolha do usuário.
- Número de nós com forças. Essa propriedade também pode ser variada, da mesma forma que as molas.
- Tipo de análise: Análise modal ou Análise estática.
- Número de modos a serem imprimidos.
- Coordenadas (X, Y, Z) de cada nó.
- Conectividade dos elementos: Nesta entrada, a conectividade dos elementos deve ser escrita, de dois a dois.
- Número de frequências naturais a serem otimizadas.

- Valor das frequências experimentais da estrutura real.
- Número de resíduos mínimos que serão impressos.

Existe também o arquivo Saida.txt, que contém várias informações armazenadas e calculadas pelo software. Entre elas o número total de nós, número total de elementos, número total de graus de liberdade, coordenadas de todos os nós, matriz de conectividade dos elementos, frequências naturais de vibração e modos de vibração.

Por último, o arquivo Saidaotimização.txt, contém os valores mínimos da função penalidade, as amostras de parâmetros que geraram tais valores e suas frequências naturais numéricas correspondentes.

3.2 NÚMERO DE AMOSTRAS, CUSTO COMPUTACIONAL, FATORES LIMITANTES E TEMPO DE EXECUÇÃO

Utilizando da teoria de análise combinatória e o princípio multiplicativo, demonstrado em Morgado (1991), pode-se chegar a uma equação que define todas as amostras de parâmetros. Sendo que o número de amostras é igual ao número de todas as combinações das variações dos parâmetros. A equação do número total de amostras é descrita pela equação (92).

$$NC = ncc1ncc2 \dots nccN npv1npv2 \dots npvN \quad (92)$$

Com:

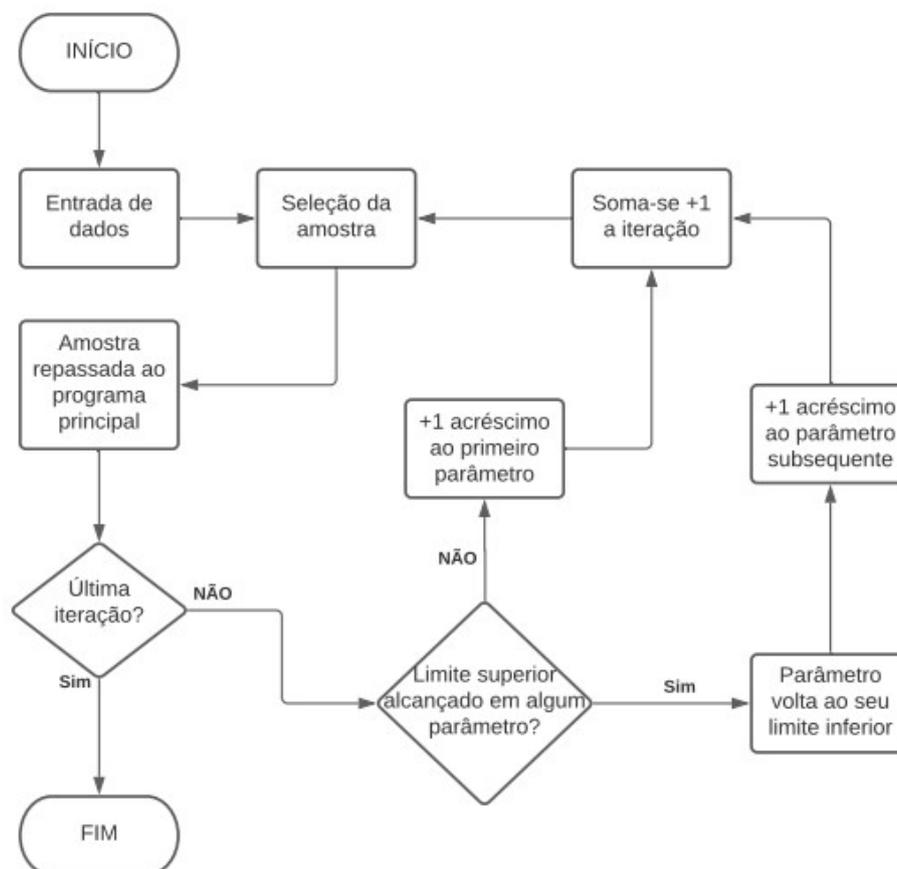
$nccN$: número de variações da condição de contorno N.

$npvN$: número de variações do parâmetro N.

NC : Número total de combinações.

A produção de amostras segue uma sequência lógica de acréscimo em cada iteração. Tal sequência é definida por uma sub-rotina, demonstrada pelo fluxograma da figura 6

Figura 6- Fluxograma da sub-rotina de redução de custo computacional do software de otimização.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Juntas, as equações (89), (90), (92) e a sub-rotina de seleção de amostras representam, em fundamento, uma técnica de amostragem sistemática. Nesta técnica, todas as combinações de parâmetros são geradas a partir de um conjunto de amostras. O espaço amostral deste conjunto de amostras é definido pelo usuário do software, por meio da entrada de dados. Tais informações são: o número de parâmetros, quais parâmetros, limites superiores e inferiores de cada parâmetro e número de variações de cada parâmetro.

O software desenvolvido neste trabalho utiliza da equação (92) para determinar a quantidade de amostras e, conseqüentemente, análises modais a serem calculadas. Em uma estrutura, que foram selecionados 6 ou 12 parâmetros

para calibração, tem o número total de amostras definidas de acordo com a tabela 1.

Tabela 1– Relação entre especificações dos parâmetros e número de amostras.

SEIS PARÂMETROS	Nº DE VARIAÇÕES DOS PARÂMETROS	SEIS PARÂMETRO	Nº DE VARIAÇÕES DOS PARÂMETROS
P1	5	P1	10
P2	5	P2	10
P3	5	P3	10
P4	5	P4	10
P5	5	P5	10
P6	5	P6	10
Nº DE AMOSTRAS	15625	Nº DE AMOSTRAS	1000000
DOZE PARÂMETROS	Nº DE VARIAÇÕES DOS PARÂMETROS	DOZE PARÂMETROS	Nº DE VARIAÇÕES DOS PARÂMETROS
P1	5	P1	10
P2	5	P2	10
P3	5	P3	10
...
P11	5	P11	10
P12	5	P12	10
Nº DE AMOSTRAS	244140625	Nº DE AMOSTRAS	1000000000000

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a tabela 1, pode-se perceber que o número de amostras sobe exponencialmente com o aumento no número de variações. Chegando a 1 milhão quando são 6 parâmetros e 10 variações por parâmetro. Pode-se perceber que o número de variações é um fator que limita a execução do software em tempo hábil.

Além disso, vale ressaltar que cada parâmetro tomado como desconhecido eleva a ordem de combinações a uma potência superior, como demonstrado na tabela 1, 12 parâmetros geram 1 trilhão de amostras quando o número de variações é 10. Sendo assim, parâmetros desconhecidos são outro fator limitante.

O último fator limitante é o número de elementos da estrutura simulada, sabe-se que o custo computacional sobe exponencialmente com o número de elementos da estrutura. Cabe ao usuário, do software de calibração, lidar com os fatores limitantes de forma que consiga executar sua calibração em tempo hábil e chegar a resultados relevantes.

Devido a especificidades do software, sabe-se que a placa de vídeo e a capacidade de armazenamento da memória ram não influenciam na eficiência de execução do programa. Entretanto, a velocidade de transferência da memória ram tem influência na execução. Todas as operações realizadas são executadas pelos processadores principais do computador, como pouca memória é alocada por variáveis, a quantidade de memória ram necessária é mínima (inferior a 100megabytes).

Para estruturas simuladas com 30 elementos, um processador de 2.4GHz e uma memória ram com taxa de transferência de 1600MT/s executa 2400 análises modais por hora. Já uma estrutura de 4 elementos, são calculados 750mil análises modais por hora. Computadores com diversos núcleos de processadores podem dividir o tempo de execução pelo número de núcleos. Então, 4 núcleos de processadores de 2.40Ghz, calculando estruturas com 30 elementos, realizam 9600 análises modais por hora. Quando o número de elementos é 4, são 3milhões de análises modais por hora.

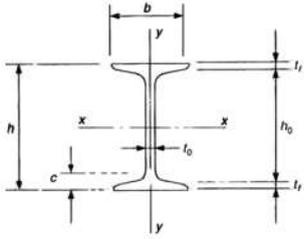
3.3 RESPOSTAS EXPERIMENTAIS EXTRAIDAS DAS VIGAS E TORRE METÁLICA

No trabalho de Campos (2020), vigas metálicas foram submetidas a diversas análises modais operacionais. para extração de suas frequências naturais. Danos estruturais foram simulados nestas vigas, por meio de cortes subsequentes em suas seções transversais. Os percentuais de cortes e suas especificações são demonstrados na tabela 2 e 3, com valores sequenciais de 0%, 2.25%, 8.15%, 16.30%, 21.36% e 24.45% na redução da área do perfil. Estes cortes foram efetuados com a finalidade de verificar a redução das frequências naturais da estrutura devido a perda de seção transversal.

As vigas metálicas, denominadas como V1 e V2, tem comprimentos de 3,0m e 1,5m respectivamente. As seções transversais de V1 e V2 são as mesmas, assim como suas propriedades físicas, tais características são demonstradas na figura 7. Durante a análise modal operacional, as vigas foram simplesmente apoiadas a 10cm de suas extremidades, como apresentado na figura 8.

Figura 7– Propriedades físicas e geométricas das vigas.

Perfil I – 76 x 8,5	
h (mm)	76,2
h ₀ (mm)	63,0
c (mm)	14,3
t _r médio (mm)	6,6
t ₀ (mm)	4,32
b (mm)	59,2
Área (cm ²)	10,8
I _x (cm ⁴)	105,1
W _x (cm ³)	27,6
i _x (cm)	3,12
I _y (cm ⁴)	18,9
W _y (cm ³)	6,41
i _y (cm)	1,33
Z _x (cm ³)	32,0
Z _y (cm ³)	10,7
E (GPa)	200
ρ (Kg/m ³)	7850,0
Poisson	0,30
P (Kg/m)	8,5



Fonte: CAMPOS (2020).

Figura 8 – Viga V2 simplesmente apoiada, com acelerômetro fixado durante ensaio experimental.



Fonte: CAMPOS (2020).

As análises modais operacionais foram realizadas por meio de um acelerômetro triaxial, um conversor analógico digital e um computador. Durante os ensaios, apenas as vibrações do ambiente foram suficientes para a realização do

procedimento. Tais vibrações podem ser definidas como o deslocamento de pessoas dentro do edifício em que a viga se encontra, ação do vento na construção e trânsito de veículos automotores em via localizada a 500 metros do local.

Após os sinais de acelerações serem coletados, técnicas de processamento de sinais foram utilizadas, obtendo-se então as frequências naturais. Os procedimentos de processamento utilizados são descritos pela figura 9.

Figura 9- Técnicas adotadas para o processamento dos sinais de aceleração coletados experimentalmente nas vigas metálicas.



Fonte: Campos (2020)

Após o processamento de sinais, foram encontradas as frequências naturais experimentais associadas aos dois primeiros modos de vibração. A tabela 2 apresenta tais frequências, para cada nível de corte percentual na área da seção transversal. Os modos de vibração não foram identificados, pois apenas um acelerômetro triaxial foi utilizado nos ensaios. Mais informações, sobre os procedimentos adotados, podem ser encontradas em Campos (2020).

Tabela 2- Frequências naturais, extraídas experimentalmente, das vigas metálicas intactas e danificadas.

Comprimento da Viga (m)	Modos	Frequências Naturais (Hz)					
		0	2.25%	8.15%	16.30%	21.36%	24.45%
V1: 3,0 m	1	12.50	12.50	11.23	11.00	10.45	10.16
	2	34.77	34.77	34.18	34.06	33.01	32.13
V2: 1,50 m	1	54.30	54.10	53.42	52.92	52.44	52.25
	2	116.80	114.84	113.18	112.01	110.45	110.35

Fonte: Campos (2020)

Tabela 3– Valores de Área e Inercia de seções transversais cortadas, das duas vigas metálicas.

Danos	Comprimento (cm)	Área da viga (cm ²)	Ix (cm ⁴)	Iy (cm ⁴)
Sem danos	-	10,58	103,66	19,38
Dano de 2,25%	0,5	10,34	100,63	17,57
Dano de 8,15%	0,15	9,57	90,84	13,78
Dano de 16,3%	0,30	8,85	78,11	11,19
Dano de 21,36%	0,40	8,32	73,89	7,55
Dano de 24,45%	0,45	7,99	71,13	6,25

Fonte: Campos (2020).

A torre metálica, analisada em Tarabay (2015), tem 60 metros de altura, é constituída por treliças metálicas de perfil L. A fundação é constituída por 3 tubulões de concreto armado, cada um com profundidade de 7,5m. A figura 10 demonstra a estrutura descrita.

Figura 10– Tore metálica que foi moldada e calibrada numericamente.



Fonte: Tarabay (2015).

Tarabay realizou análises modais operacionais para a extração de frequências naturais e modos de vibração da torre metálica. Os equipamentos utilizados foram um acelerômetro triaxial, um conversor analógico digital e um computador. Ensaios com estes equipamentos foram realizados em três alturas da torre, que são 0 metros, 30 metros e 60 metros, com a finalidade de identificar os modos de vibração da estrutura.

Com os dados de aceleração coletados, Tarabay (2015) realizou o processamento de sinais no software ARTeMIS, onde identificou vários modos de vibrações e suas frequências naturais associadas, as 4 primeiras são demonstradas na tabela 4. Mais informações, sobre os procedimentos adotados, podem ser encontradas em Tarabay (2015).

Tabela 4– Modos de vibração e frequências naturais experimentais, extraídas da torre metálica autoportante.

Descrição do movimento predominante relacionado ao modo	Frequência experimental (Hz)
1 - Translação do topo no eixo X	1,204
2 - Translação do topo no eixo Y	1,233
3 - Movimento no eixo X com 1 nó	3,539
4 - Movimento no eixo Y com 1 nó	4,034

Fonte: Tarabay (2015).

3.4 APLICAÇÃO DO SOFTWARE NAS VIGAS METÁLICAS

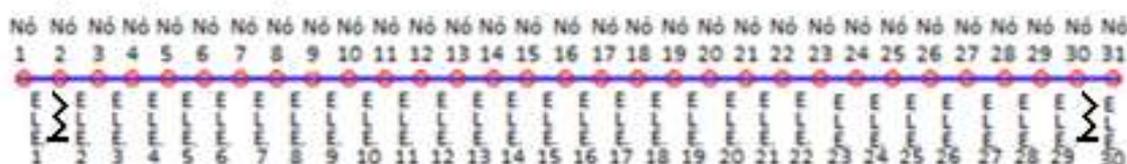
O software desenvolvido foi utilizado para calibrar modelos numéricos das vigas metálicas descritas no item 3.3. Os parâmetros modais destas estruturas são conhecidos e foram extraídos por meio de ensaios experimentais, no trabalho de Campos (2020).

Pela tabela 2, as duas primeiras frequências naturais experimentais, da viga V1 intacta, são de 12,50Hz e 34,77Hz respectivamente. Para viga V2 intacta, as frequências experimentais são de 54,30Hz e 116,80Hz.

As vigas foram simuladas no software por 31 nós e 30 elementos. As condições de contorno foram posicionadas a 10cm de suas extremidades, como demonstrado na figura 11. Os apoios foram simulados por molas elásticas lineares, tanto nas translações quanto nas rotações. A disposição das malhas dos modelos numéricos é demonstrada na figura 11.

Figura 11– Discretização dos modelos das vigas metálicas - 31 nós, 30 elementos, 186 graus de liberdade.

V1 - 3,0m



Legenda:

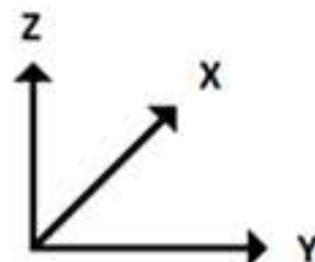
: Molas $K_x, K_y, K_z, K_{rx}, K_{ry}, K_{rz}$

Coordenadas (x, y, z) em cm:

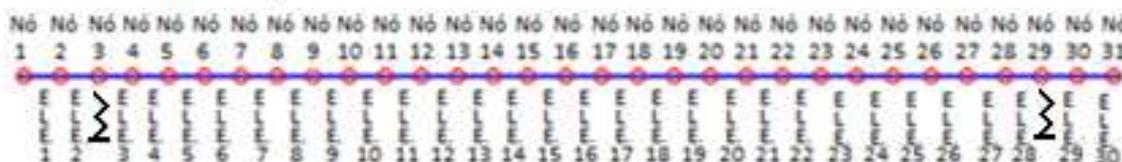
Nó 1: (0,0,0)

Nó30:(0,300,0)

Distância entre cada Nó: 10cm



V2 - 1,5m



Legenda:

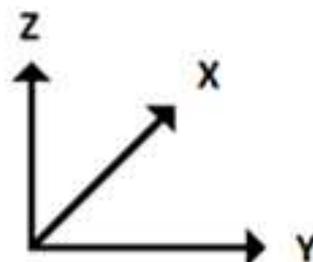
: Molas $K_x, K_y, K_z, K_{rx}, K_{ry}, K_{rz}$

Coordenadas (x, y, z) em cm:

Nó 1: (0,0,0)

Nó30:(0,150,0)

Distância entre cada Nó: 5 cm



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Antes de realizar o processo de calibração, realizou-se uma análise modal inicial para cada uma das vigas, foi considerado que as molas elásticas dos apoios são rígidas para translação e com coeficientes de rotação como 10^2kNm/rad . As duas primeiras frequências naturais numéricas, destas análises modais, são de 17,82Hz e 30,57Hz para V1 e 52,94Hz e 94,23Hz para V2.

Os parâmetros físicos e geométricos das estruturas são conhecidos e foram fixados de acordo com a figura 7, com exceção do módulo de Young. Algumas condições de contorno também foram consideradas como desconhecidas. Estas são os coeficientes de rigidez das molas elásticas, que restringem os movimentos de rotação nos eixos X, Y e Z, definidas por K_{rx} , K_{ry} , K_{rz} . Tais condições de contorno estão localizadas nos pontos nodais 2 e 30. Entretanto, como os apoios são idênticos, foi considerado que as molas elásticas são idênticas nos dois pontos nodais. Com estas especificações chega-se a 4 parâmetros, sendo 3 referentes as condições de contorno e 1 referente ao módulo de Young das estruturas.

O peso das vigas são de 31,608kg e 15,804kg para as vigas V1 e V2 respectivamente, e o coeficiente de atrito estático aço-aço é conhecido como aproximadamente 0,74, gerando forças restritivas de deslocamento de 23,39kgf e 11,69kgf respectivamente.

Para a pequena dimensão e esforços realizados nas vigas durante o ensaio experimental, concluiu-se que os coeficientes de rigidez das molas elásticas de deslocamento possuem valores elevados, e foram consideradas como de rigidez infinita. Em condições ideais, as molas de rotação que simulam apoios simples seriam nulas. Entretanto, em casos reais sabe-se que estes apoios apresentam rigidezes não-nulas.

Selecionou-se 10 variações para cada coeficiente de rigidez das molas e 5 variações para o módulo de Young. De acordo com a equação (92), chega-se a 5mil amostras. O intervalo de variação foi fixado em 10kNm/rad a 10^4kNm/rad para os coeficientes das molas elásticas e 198Gpa a 202Gpa para o módulo de Young. Os valores de rigidez foram acrescentados em passos lineares, com incrementos de $99,9 \text{kNm/rad}$. Já no módulo de Young, incrementos de 0,8GPa foram utilizados.

Estes intervalos foram definidos por julgamento de engenharia e por testes preliminares no software.

Com a amostra ótima, encontrada na calibração descrita, foi realizado uma outra calibração, tomando esta amostra como base para desenvolver novos limites superiores e inferiores dos parâmetros.

Na primeira calibração, foi possível chegar a uma ordem de magnitude dos parâmetros tomados como desconhecidas. Em sequência, a nova calibração pode prever com maior precisão os valores destes parâmetros.

A segunda etapa da calibração adotou uma maior sensibilidade, realizando incrementos lineares de menor magnitude. Desta vez, o intervalo de valores dos coeficientes de rigidez das molas foi de 2.0 a 0.5 vezes os valores dos parâmetros da amostra ótima, obtida na primeira calibração. Cada coeficiente de rigidez das molas elásticas, tomados como desconhecidas, foi variado mais 10 vezes, com intervalos de variação de 0,99kNm/rad. O módulo de Young foi variado da mesma forma que na calibração anterior. Chegou-se então, pela equação (92), a mais 5mil amostras geradas e análises modais realizadas.

Conhecendo os valores calibrados dos coeficientes das molas elásticas, realizou-se mais uma calibração dos modelos numéricos no software. Nesta nova calibração, foi considerado uma redução de 24,45% na área da seção transversal nos elementos localizados no meio das vigas.

Esse procedimento foi adotado para verificar se o software consegue identificar pequenos danos estruturais, onde deve encontrar pequenos resíduos da função penalidade, gerado por amostras, de parâmetros numéricos, que estão próximas das propriedades reais da estrutura danificada.

As frequências naturais experimentais, das vigas danificadas, têm valores de 10,74Hz e 33,79Hz para V1 e 50,68Hz e 115,31Hz para viga V2. Os cortes foram realizados no meio das vigas, as áreas e inercias do perfil danificado também foram coletados, e seus valores são demonstrados na tabela 2.

A espessura do corte realizado em Campos (2020) foi medida por uma trena, pelo autor deste trabalho, e tem o valor de aproximadamente 5mm. Para aproximar o tamanho dos elementos com a espessura do corte, as vigas foram divididas em

300 elementos e 301 nós, com a distância entre nós sendo de 5mm para V1 e 2,5mm para V2.

Em V1, o elemento central 150 foi selecionado para variações de inercia em relação ao eixo X, inercia em relação ao eixo Y e área da seção transversal. As variações destas propriedades têm limite superior como os valores das vigas intactas encontrados na tabela 3. No limite inferior, os valores das propriedades são iguais a 20% do limite superior. A quantidade de variações de cada parâmetro foi definida como 10, chegando-se em mil amostras, segundo a equação (92).

Em V2, procedimento semelhante foi desenvolvido, com a diferença de que os elementos 150 e 151 foram selecionados para variações dos parâmetros, com a finalidade de totalizar a espessura de 5mm do corte na estrutura real.

3.5 APLICAÇÃO DO SOFTWARE EM TORRE METÁLICA AUTOPORTANTE

O software desenvolvido foi utilizado para calibrar uma torre metálica autoportante. As quatro primeiras frequências naturais, obtidas experimentalmente, têm valores de 1,204Hz, 1,233Hz, 3,539Hz e 4,034Hz, como demonstrado na tabela 4.

Inicialmente, a estrutura foi simulada por meio de 6 elementos e 7 nós. Os nós 1 a 7 tem suas coordenadas, em metros, localizadas em (0,0,0), (0,0,10), (0,0,20), (0,0,30), (0,0,40), (0,0,50) e (0,0,60) respectivamente.

A fundação da estrutura foi simulada por molas elásticas, localizadas no primeiro nó, e restringem movimentos espaciais de translação e rotação. A distribuição geométrica dos elementos, dos nós e suas condições de contorno são apresentados na figura 12.

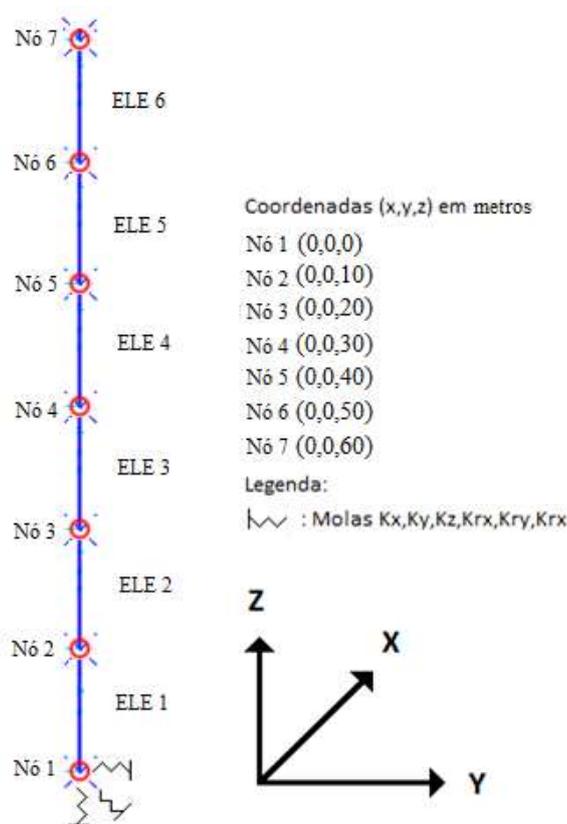
A estrutura foi simulada por apenas um elemento por seção transversal, as inercias foram calculadas para centro de gravidade das seções correspondentes. A área da seção de cada elemento foi considerada como a soma da área de cada treliça contida na seção transversal correspondente.

Os coeficientes de rigidez das molas elásticas k_x , k_y , k_{rx} , k_{ry} , que simularam a fundação, foram tomadas como parâmetros desconhecidos. Por meio de testes preliminares e análise da estrutura, concluiu-se que os coeficientes de rigidez das

molares elásticas kz e krz apresentam valores elevados, e foram consideradas como rigidez infinita.

Antes de realizar o processo de calibração, uma análise modal foi realizada após a discretização da torre metálica no software MEF. Considerou-se que os coeficientes das molares elásticas kz e krz , que representam parte da fundação, são rígidas. Os demais coeficientes de mola foram considerados com os valores de 10^6kN/m para movimentos translacionais e 10^6kNm/rad para movimentos rotacionais.

Figura 12– Discretização do modelo da torre metálica autoportante - 7 nós, 6 elementos, 42 graus de liberdade



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

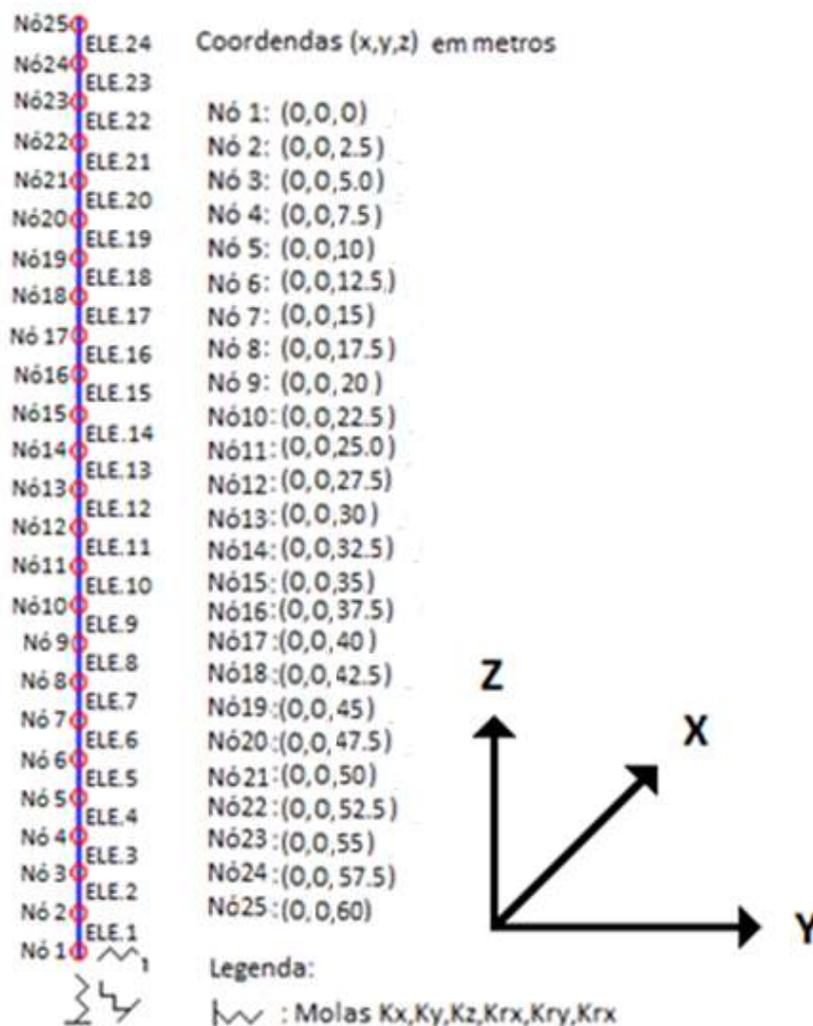
As quatro primeiras frequências naturais numéricas, encontradas nesta análise modal, são de 1,459Hz, 1,459Hz, 6,792Hz e 6,792Hz, deixando um resíduo de aproximadamente 50%, como demonstrado na tabela 11.

Na primeira etapa de calibração, o intervalo de variação de cada coeficiente de rigidez foi definido como de 10^3kN/m a 10^7kN/m para os coeficientes de

translação e 10^3kNm/rad a 10^7kNm/rad para os coeficientes de rotação. Cada coeficiente de rigidez possui 20 variações lineares. De acordo com a equação (92), chega-se a 16mil análises modais.

Na segunda etapa, a estrutura foi modelada com 24 elementos e 25 nós, cada nó com distâncias de 2,5m um do outro, como demonstrado na figura 13. O intervalo de variações foi de 10 a 0,1 vezes os valores dos coeficientes de rigidez que estão contidas na amostra ótima da etapa de calibração anterior. Foram utilizadas 10 variações lineares para cada coeficiente, totalizando 10mil amostras e 10mil análises modais, de acordo com a equação (92).

Figura 13– Discretização do modelo da torre metálica - 25 nós, 24 elementos, 150 graus de liberdade



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na última etapa, com mesmo modelo estrutural da segunda etapa, o intervalo de variações, dos coeficientes de rigidez das molas, foi de 1.1 a 0.9 vezes os valores encontrados na amostra ótima da calibração anterior. Foram utilizadas 10 variações lineares para cada coeficiente de rigidez, que geraram mais 10mil amostras e 10mil análises modais, de acordo com a equação (92).

Tal procedimento foi adotado para reduzir custo computacional e aumentar a precisão da calibração. Os acréscimos lineares foram gerados pelas equações (89) e (90) no software. O conjunto de amostras foram geradas pela sub-rotina representada pelo fluxograma da figura 6.

4. RESULTADOS

O presente capítulo apresenta os resultados encontrados por meio da aplicação do software nas vigas e torre metálica, descritas no capítulo anterior.

4.1 RESULTADOS DE CALIBRAÇÃO DAS VIGAS METÁLICAS

O resíduo mínimo, encontrado na viga V1, foi de 0,26%, gerado pelas primeiras frequências naturais numéricas de 12,513Hz e 34,621Hz e pelas frequências naturais experimentais de 12,50Hz e 34,77Hz. A tabela 5 apresenta o resultado da calibração da viga V1.

Na viga V2, o menor resíduo encontrado foi de 1,14%, gerado pelas frequências naturais numéricas 53,869Hz e 118,537Hz e pelas frequências naturais experimentais 52,880Hz e 116,700Hz. A tabela 6 apresenta o resultado da calibração da viga V2.

A calibração, que simulou corte na área da seção transversal no centro das vigas, apresentou pequenos resíduos. Para a viga V1, as frequências numéricas encontradas foram de 10,860Hz e 34.307Hz, deixando resíduo de 1,32%. Na viga V2, as frequências numéricas encontradas foram de 50,892Hz e 117,82Hz, deixando resíduo de 1,29%. Além disso, os parâmetros calibrados apresentaram

valores próximos aos valores reais das propriedades geométricas das seções transversais cortadas. Tal proximidade é demonstrada pela tabela 9, onde o maior desvio entre propriedades calibradas e propriedades reais foi de 12,48%.

A tabela 10 apresenta as respostas numéricas e experimentais das vigas e os resíduos antes e depois das calibrações realizadas.

Tabela 5– Menor resíduo, frequências numéricas, condições de contorno e módulo de Young após calibração da viga V1

1º menor resíduo				
Resíduo: 0,26%				
Frequências naturais numéricas (Hz)		12,513	34,621	----
Nó com molas	Krx(Nm/rad)	Kry(Nm/rad)	Krz(Nm/rad)	E(GPa)
Nó 2	1,00E+07	1,00E+07	1,35E+04	202
Nó 30	1,00E+07	1,00E+07	1,35E+04	
Limite superior	1,00E+07	1,00E+07	1,00E+07	202
Limite inferior	1,00E+04	1,00E+04	1,00E+04	198

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 6– Menor resíduo, frequências numéricas, condições de contorno e módulo de Young após calibração da viga V2

1º menor resíduo				
Resíduo: 1,14%				
Frequências naturais numéricas (Hz)		53,869	118,537	----
Nó com molas	Krx(Nm/rad)	Kry(Nm/rad)	Krz(Nm/rad)	E(GPa)
Nó 2	4,45E+05	1,12E+05	5,56E+05	202
Nó 14	4,45E+05	1,12E+05	5,56E+05	
Limite superior	1,00E+07	1,00E+07	1,00E+07	202
Limite inferior	1,00E+04	1,00E+04	1,00E+04	198

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 7– Menor resíduo, frequências numéricas e propriedades geométricas após calibração da viga V2 danificada

1º menor resíduo			
Resíduo: 1,29%			
Frequências naturais numéricas (Hz)		50,892	117,819
ELEMENTO	A(m²)	Ix(m⁴)	Iy(m⁴)
150	8,88E-02	7,71E-06	5,47E-05
151	8,88E-02	7,71E-06	5,47E-05
Limite superior	10,6E-02	10,37E-06	19,38E-05
Limite inferior	2,12E-02	2,07E-06	3,88E-05

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 8– Menor resíduo, frequências numéricas e propriedades geométricas após calibração da viga V1 danificada

1º menor resíduo			
Resíduo: 1,32%			
Frequências naturais numéricas (Hz)		10,860	34,307
ELEMENTO	A(m²)	Ix(m⁴)	Iy(m⁴)
150	7,92E-02	7,71E-06	5,47E-05
Limite superior	10,6E-02	10,37E-06	19,38E-05
Limite inferior	2,12E-02	2,07E-06	3,88E-05

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 9– Diferença percentual entre parâmetros calibrados no modelo numérico danificado e propriedades geométricas das seções transversais danificadas nas vigas metálicas

VIGAS DANIFICADAS	PARÂMETROS EXPERIMENTAIS		
	ÁREA	INÉRCIA EIXO X	INÉRCIA EIXO Y
V1	100%	100%	100%
V2	100%	100%	100%
---	PARAMÊTROS NUMÉRICOS		
	ÁREA	INÉRCIA EIXO X	INÉRCIA EIXO Y
V1	99,12%	108,39%	87,52%
V2	111,14%	108,39%	87,52%
RESÍDUO TOTAL (%)	105,13%	108,39%	87,52%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 10– Frequências experimentais e numéricas antes e após calibração das vigas intactas e danificadas.

VIGAS INTACTAS SEM CALIBRAÇÃO					
VIGA	FREQUENCIAS EXPERIMENTAIS		FREQUENCIAS NUMÉRICAS		RESÍDUOS (%)
	1ºMODO	2ºMODO	1ºMODO	2ºMODO	
V1	12,50Hz	34,77Hz	17,82Hz	30,57Hz	22,2%
V2	52,88Hz	116,70Hz	52,94Hz	94,23Hz	12,4%
VIGAS INTACTAS CALIBRADAS					
VIGA	FREQUENCIAS EXPERIMENTAIS		FREQUENCIAS NUMERICAS		RESÍDUOS (%)
	1ºMODO	2ºMODO	1ºMODO	2ºMODO	
V1	12,50Hz	34,77Hz	12,65Hz	34,75Hz	1,12%
V2	52,88Hz	116,70Hz	53,87Hz	118,54Hz	1,14%
VIGAS DANIFICADAS CALIBRADAS					
VIGA	FREQUENCIAS EXPERIMENTAIS		FREQUENCIAS NUMERICAS		RESÍDUOS (%)
	1ºMODO	2ºMODO	1ºMODO	2ºMODO	
V1	10,74Hz	33,57Hz	10,86Hz	34,31Hz	1,32%
V2	50,68Hz	115,31Hz	50,89Hz	117,82Hz	1,29%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

4.2 RESULTADOS DE CALIBRAÇÃO DA TORRE METALICA AUTOPORTANTE

O resíduo mínimo, encontrado na última etapa de calibração, foi de 2,0%. Tal resíduo foi gerado pelas quatro primeiras frequências naturais numéricas de valores 1,202Hz, 1,308Hz, 3,491Hz e 4,05Hz, e pelas quatro frequências naturais experimentais de valores 1,204Hz, 1,240Hz, 3,539Hz e 4,034Hz.

A tabela 11 apresenta o menor resíduo, as frequências naturais e os parâmetros sensíveis calibrados. Os modos de vibrações numéricos e experimentais são similares, sendo flexões laterais em torno do eixo X e Y. A tabela 12 apresenta as frequências naturais numéricas e experimentais, da torre metálica, e os resíduos antes e após as calibrações realizadas.

Tabela 11– Resíduos, frequências naturais numéricas e parâmetros após calibração do modelo numérico da torre metálica.

1º menor resíduo					
Resíduo: 2,00%					
Frequências naturais numéricas (Hz)		1,202	1,307	3,489	4,051
Nó com molas	Kx(N/m)	Ky(N/m)	Krx(Nm/rad)	Kry(Nm/rad)	----
Nó 1	2,32E+06	1,35E+06	1,41E+09	7,10E+08	----
Limite superior	1,00E+10	1,00E+10	1,00E+10	1,00E+10	----
Limite inferior	1,00E+06	1,00E+06	1,00E+06	1,00E+06	----

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Tabela 12– Respostas modais das torres metálicas sem calibração, com calibração e respostas modais experimentais da torre metálica

TORRE METÁLICA AUTOPORTANTE				
FREQUENCIAS NATURAIS EXPERIMENTAIS				
1ºMODO	2ºMODO	3ºMODO	4ºMODO	----
1,204Hz	1,240Hz	3,539Hz	4,034Hz	----
FREQUENCIAS NUMÉRICAS SEM CALIBRAÇÃO				RESÍDUO
1ºMODO	2ºMODO	3ºMODO	4ºMODO	
1,459Hz	1,459Hz	6,792Hz	6,792Hz	49,99%
FREQUENCIAS NUMÉRICAS COM CALIBRAÇÃO				RESÍDUO
1ºMODO	2ºMODO	3ºMODO	4ºMODO	
1,202Hz	1,305Hz	3,491Hz	4,052Hz	2,00%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

5. DISCUSSÃO

Diante do resultado obtido na calibração das vigas metálicas, foi possível notar que pequenos resíduos foram encontrados. Além disso, devido a quantidade de elementos utilizados e devido ao grande número de análises modais realizadas nas etapas de calibração, acredita-se que os parâmetros anteriormente desconhecidos foram obtidos com elevada precisão.

Notou-se uma diferença significativa dos coeficientes de rigidez das molas elásticas nas vigas V1 e V2, mesmo com elas contendo apoios idênticos. Acredita-se que isso ocorreu devido a diferença de localização dos apoios no solo durante os ensaios experimentais. Além disso, existe uma diferença elevada na força de atrito entre os apoios das estruturas, devido pesos diferentes. Micro relevos no solo podem gerar diferenças de rigidez nos apoios, assim como diferentes forças de restrições de movimentos.

Com as rigidezes das molas elásticas calibradas, foi possível realizar uma outra calibração das vigas danificadas. Os resultados da calibração demonstraram pequenos resíduos entre frequências naturais experimentais e numéricas. Além disso, pequenas diferenças entre os parâmetros calibrados e os parâmetros reais foram observados. Estes fatores são indicativos que os modelos, das vigas danificadas, foram calibrados corretamente.

Com isso, acredita-se que o modelo calibrado pode ser utilizado para identificar respostas de ações a serem realizadas nas vigas. Segundo Mottershead, Link e Friswell (2011), modelos calibrados que consigam prever ações futuras podem ser chamados de modelos validados.

A extração de frequências naturais de forma experimental, por meio da análise modal operacional, frequentemente lida com ruídos. Estes ruídos podem causar diferenças entre as frequências naturais coletadas e as reais. Além disso, devido a erros inerentes da teoria MEF e a utilização de elementos reticulados de barra, pode-se encontrar frequências naturais numéricas com erros de simplificações. Acredita-se que, os resíduos encontrados na calibração das vigas são devido a estas fontes de erro.

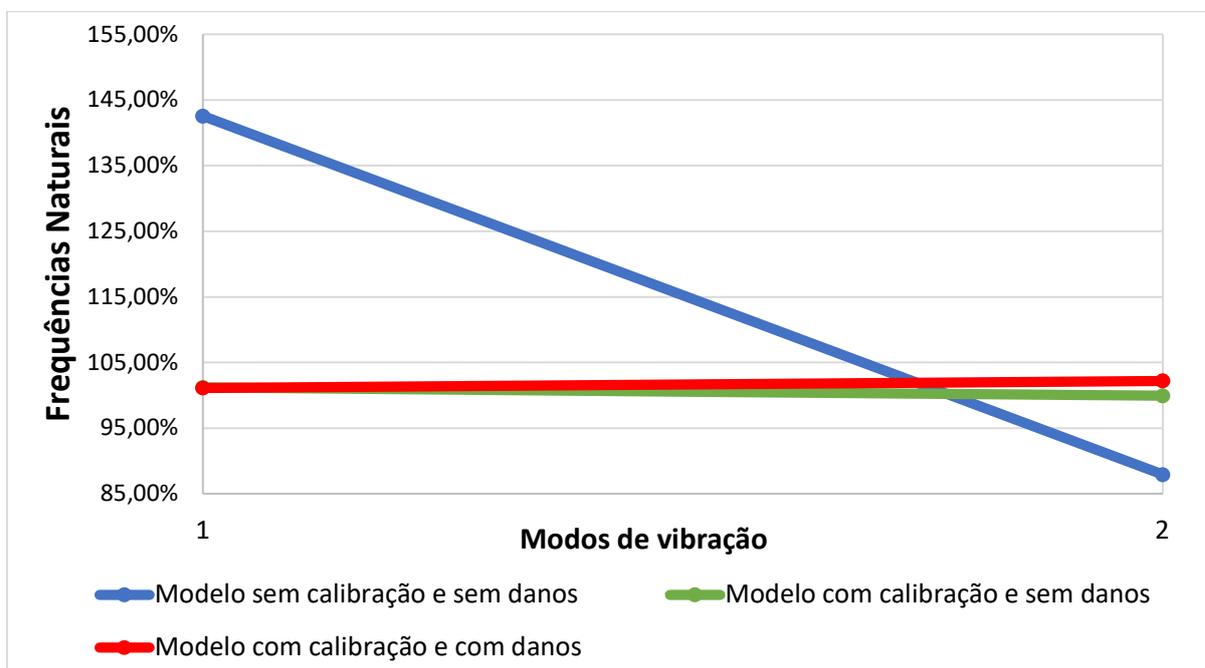
Para visualizar e comparar os resultados de forma mais clara, os resultados foram apresentados na ótica de valores relativos e em formato gráfico. A tabela 13, apresenta frequências naturais normalizadas em relação as frequências experimentais. As figuras 13 e 14 apresentam os desvios normalizados de forma gráfica.

Tabela 13– Frequências experimentais e numéricas normalizadas e resíduos dos modelos sem calibração e com calibração.

VIGAS SEM CAIBRAÇÃO					
VIGA	FREQUENCIAS EXPERIMENTAIS		FREQUENCIAS NUMERICAS		RESÍDUOS
	1ºMODO	2ºMODO	1ºMODO	2ºMODO	
V1	100%	100%	142,56%	87,92%	22,2%
V2	100%	100%	100,11%	80,74%	12,4%
VIGAS COM CALIBRAÇÃO					
VIGA	FREQUENCIAS EXPERIMENTAIS		FREQUENCIAS NUMERICAS		RESÍDUOS
	1ºMODO	2ºMODO	1ºMODO	2ºMODO	
V1	100%	100%	101,20%	99,94%	1,12%
V2	100%	100%	101,87%	101,58%	1,14%
VIGAS COM DANO					
VIGA	FREQUENCIAS EXPERIMENTAIS		FREQUENCIAS NUMERICAS		RESÍDUOS
	1ºMODO	2ºMODO	1ºMODO	2ºMODO	
V1	100%	100%	101,12%	102,20%	1,32%
V2	100%	100%	100,41%	102,17%	1,29%

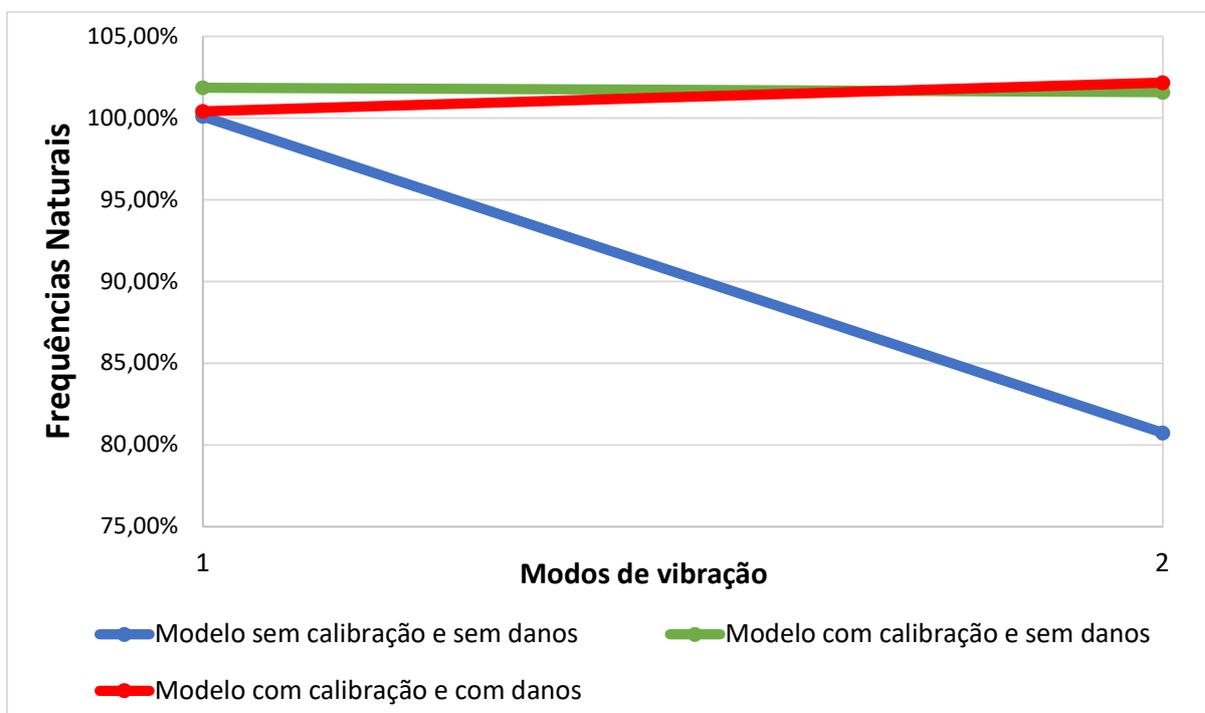
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 14– Desvio (%) de frequências naturais numéricas normalizadas em relação as frequências experimentais da viga V1.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 15 - Desvio (%) de frequências naturais numéricas normalizadas em relação as frequências experimentais da viga V2.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Pode-se observar pela tabela 13 e pelas figuras 14 e 15 que as frequências naturais numéricas calibradas, das vigas intactas, obtiveram diferenças não superiores a 1,14% das frequências coletadas experimentalmente.

Na tentativa de calibrar as frequências naturais, devido danos estruturais, os modelos calibrados obtiveram maiores erros percentuais. Entretanto, esses erros são inferiores a 1,32%. Além disso, os parâmetros calibrados possuem valores próximos aos valores dos parâmetros reais das estruturas, com diferenças percentuais inferiores a 12,52%, segundo a tabela 9.

Na calibração da torre metálica autoportante, foi possível encontrar pequenos resíduos entre as frequências naturais numéricas e experimentais. Além disso, devido a quantidade de elementos na última etapa de calibração, acredita-se que os parâmetros anteriormente desconhecidos foram obtidos com elevada precisão. Acredita-se que o resíduo, encontrado na calibração da torre, seja proveniente de erros de simplificação da estrutura, simulada por meio de barras reticuladas. Outra fonte de erro deve-se a simplificação própria do método dos elementos finitos, que neste caso não considera amortecimentos.

Devido os valores elevados de rigidezes das molas elásticas k_z e k_{rz} , não foi possível identificar seus valores com precisão, seriam necessárias frequências naturais experimentais de maior valor, associadas a movimentos que essas molas elásticas restringem.

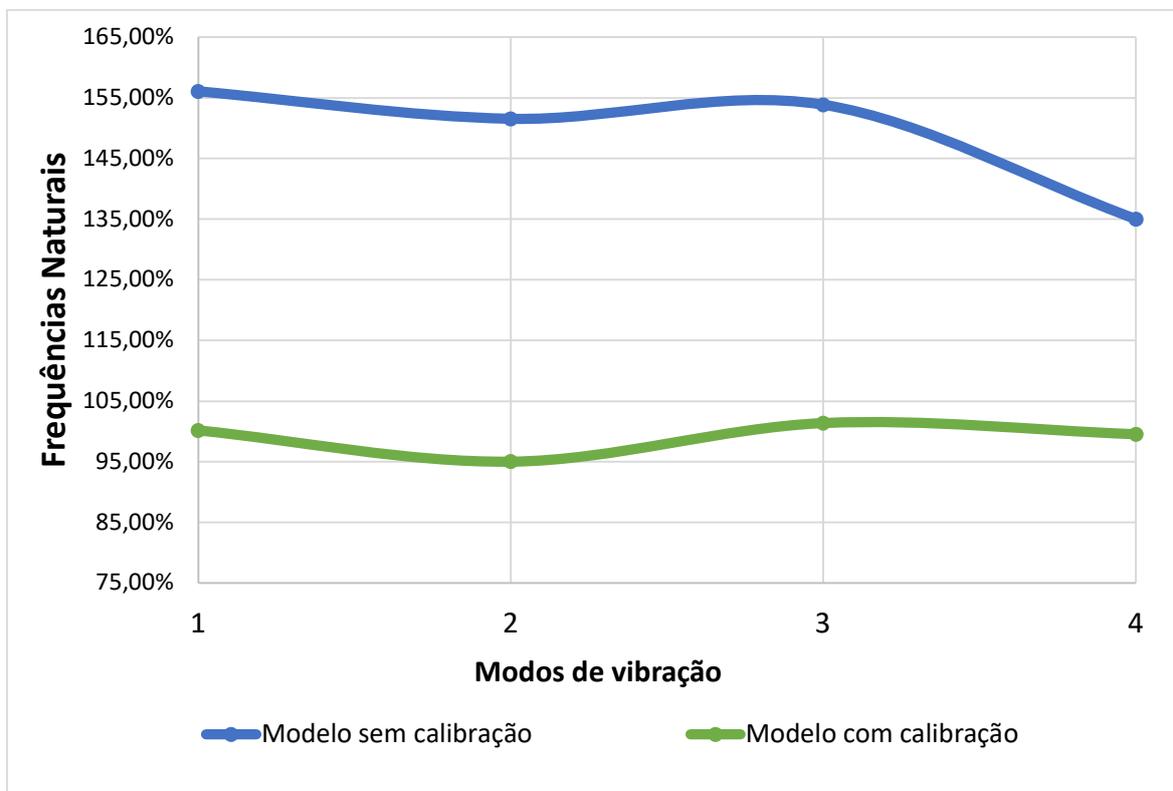
Para visualizar os resultados de forma mais clara, a tabela 14 e figura 16 apresentam os resultados na forma gráfica e de valores relativos. Percebe-se pela tabela e gráfico que as diferenças percentuais, entre resultados numéricos e experimentais não ultrapassam 5%, para o modelo calibrado.

Tabela 14– Frequências naturais normalizadas em relação as frequências naturais experimentais e resíduos da calibração da torre metálica.

TORRE METÁLICA AUTOPORTANTE				
FREQUENCIAS EXPERIMENTAIS				
1ºMODO	2ºMODO	3ºMODO	4ºMODO	----
100%	100%	100%	100%	----
FREQUENCIAS NUMÉRICAS SEM CALIBRAÇÃO				RESÍDUOS
1ºMODO	2ºMODO	3ºMODO	4ºMODO	
156,06%	151,53%	153,83%	135%	25,43%
FREQUENCIAS NUMÉRICAS COM CALIBRAÇÃO				RESÍDUOS
1ºMODO	2ºMODO	3ºMODO	4ºMODO	
100,17%	95,03%	101,37%	99,56%	0,91%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 16 - - Desvio (%) de frequências naturais numéricas normalizadas em relação as frequências experimentais da torre metálica.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi desenvolvido um software de calibração de modelos numéricos. O procedimento de calibração utilizado é baseado em um algoritmo de otimização, que realiza análises modais para todas as amostras de parâmetros sensíveis pré-determinados. As amostras são geradas por meio de uma técnica de amostragem, que gera todas as combinações possíveis de variações dos parâmetros.

O programa foi testado em estruturas reais e calibrou duas vigas metálicas e uma torre metálica autoportante, todas constituídas de aço, por meio das suas primeiras frequências naturais. Essas frequências foram previamente coletadas, de forma experimental, no trabalho de Campos (2020) e Tarabay (2015). O programa gerou diversas análises modais das estruturas, para várias amostras de parâmetros sensíveis. A calibração ocorreu por meio da seleção de menores resíduos entre frequências naturais numéricas e experimentais.

O programa foi executado em tempo conveniente, todo o procedimento de calibração das vigas e da torre metálica levou cerca de 5 horas, onde realizou cerca de 50 mil análises modais em um processador de 2.40 Ghz.

O software foi capaz de calibrar os parâmetros desconhecidos dos modelos numéricos, deixando pequenos resíduos. Acredita-se que esses pequenos resíduos ocorreram devido a simplificação do modelo numérico, que considerou elementos de barras reticuladas e devido a erros de aproximações do próprio método dos elementos finitos.

Os resultados de calibrações numéricas forneceram informações relevantes sobre os valores dos coeficientes de rigidez das molas elásticas que simularam as vinculações. Tais condições de contorno eram desconhecidas antes da calibração.

O software conseguiu calibrar estados de danos nas vigas metálicas, com precisão significativa. Então, acredita-se que, se manuseado corretamente, o software tem elevada sensibilidade de calibração.

O software, desenvolvido neste trabalho, pode ser utilizado para estruturas com maior quantidade de vínculos e graus de liberdade. Entretanto, deve-se limitar

a quantidade de parâmetros tomados como sensíveis e o número de variações de cada parâmetro deve ser limitado. Tais medidas devem ser adotadas para que não sejam geradas quantidades extremamente elevadas de amostras.

É recomendado que a calibração seja feita em duas etapas ou mais, como foi feito neste trabalho. A primeira etapa, consiste em calibrar um modelo com poucos elementos, muitas amostras e um grande alcance de valores dos parâmetros. Chegando-se assim, em uma noção do intervalo de valores que os parâmetros desconhecidos podem se encontrar. As próximas etapas, os modelos serão cada vez mais refinados e terão menor quantidade de variações dos parâmetros, já que se conhece com maior confiança o intervalo de valores que os parâmetros sensíveis podem assumir.

Na literatura de calibrações numéricas, os modos de vibração são frequentemente utilizados na minimização de resíduos. Entretanto, este trabalho teve como objetivo verificar a possibilidade de calibrar modelos numéricos dando maior foco as frequências naturais, analisando a precisão e o custo computacional. Apesar disso, o software desenvolvido pode ser facilmente adaptado para minimizar resíduos com modos de vibração.

Em trabalhos futuros, o software pode ser aprimorado para calibrar modos de vibração. Com isso, a função penalidade terá, além das diferenças de frequências naturais, diferenças entre modos de vibração experimental e numérico. Uma variável peso pode ditar a relevância de cada resposta modal na geração do resíduo. O valor da variável pode ser encontrado por meio de testes ou por meio de valores já definidos por autores.

O software também pode ser adaptado para trabalhar com elementos bi e tridimensionais, aumentando ainda mais a precisão dos modelos numéricos. Além disso, as sub-rotinas de minimização, da função penalidade, podem ser aprimoradas, podendo utilizar técnicas de inteligência artificial ou computação evolucionária. Ao adicionar estes aprimoramentos ao software, calibrações numéricas mais complexas podem ser realizadas.

REFERÊNCIAS

- ALKAYEM, N. F. et al. Structural damage detection using finite element model updating with evolutionary algorithms: a survey. **Neural Computing and Applications**, v. 30, n. 2, p. 389–411, 22 jul. 2018.
- ARGYRIS, J. H. Energy theorems and structural analysis: a generalized discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and non-linear stress-strain relations part I. General theory. **Aircraft Engineering and Aerospace Technology**, v. 27, n. 2, p. 42–58, 1955.
- BARTILSON, D. T.; JANG, J.; SMYTH, A. W. Finite element model updating using objective-consistent sensitivity-based parameter clustering and Bayesian regularization. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 114, p. 328–345, jan. 2019.
- BARUCH, M. Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests. **AIAA journal**, v. 16, n. 11, p. 1208–1210, 1978.
- BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. [s.l.] Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- BEHMANESH, I. et al. Hierarchical Bayesian model updating for structural identification. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 64, p. 360–376, 2015.
- BERMAN, A. LIMITATIONS ON THE IDENTIFICATION OF DISCRETE STRUCTURAL DYNAMIC MODELS. **KAMAN AEROSPACE CORP BLOOMFIELD CT.**, p. 427, 1984.
- BREHM, M. **Vibration-based model updating: Reduction and quantification of uncertainties**, 2011.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. Dynamics of Structures, (revised). **Computers and Structures, Inc., Berkeley, Calif**, 2003.
- COURANT, R. **Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations**. [s.l.] Verlag nicht ermittelbar, 1943.
- DAS, A.; DEBNATH, N. A Bayesian finite element model updating with combined normal and lognormal probability distributions using modal measurements. **Applied Mathematical Modelling**, v. 61, p. 457–483, set. 2018.

- FRISWELL, M.; MOTTERSHEAD, J. E. **Finite element model updating in structural dynamics**. [s.l.] Springer Science & Business Media, 2013. v. 38
- GOLUB, G. H.; REINSCH, C. Singular value decomposition and least squares solutions. In: **Linear Algebra**. [s.l.] Springer, 1971. p. 134–151.
- JENSEN-ERIKSEN, N. **Building trust: the history of DNV 1864–2014** Taylor & Francis, , 2015.
- KYURKCHAN, A. **Introdução à dinâmica das estruturas**. [s.l.] Elsevier Brasil, 2014. v. 1
- MARWALA, T. **Finite element model updating using computational intelligence techniques: applications to structural dynamics**. [s.l.] Springer Science & Business Media, 2010.
- MOAVENI, B. et al. Finite-Element Model Updating for Assessment of Progressive Damage in a 3-Story Infilled RC Frame. **Journal of Structural Engineering**, v. 139, n. 10, p. 1665–1674, out. 2013.
- MORGADO, A. C. DE O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. [s.l.] Instituto de Matemática pura e aplicada, 1991.
- MOTTERSHEAD, J. E.; FRISWELL, M. I. Model updating in structural dynamics: a survey. **Journal of sound and vibration**, v. 167, n. 2, p. 347–375, 1993.
- MOTTERSHEAD, J. E.; LINK, M.; FRISWELL, M. I. The sensitivity method in finite element model updating: a tutorial. **Mechanical systems and signal processing**, v. 25, n. 7, p. 2275–2296, 2011.
- QIN, S. et al. Model Updating in Complex Bridge Structures using Kriging Model Ensemble with Genetic Algorithm. **KSCE Journal of Civil Engineering**, v. 22, n. 9, p. 3567–3578, 30 set. 2018.
- REN, W.-X.; CHEN, H.-B. Finite element model updating in structural dynamics by using the response surface method. **Engineering Structures**, v. 32, n. 8, p. 2455–2465, ago. 2010.
- RIBEIRO, D. R. F. Efeitos dinâmicos induzidos por tráfego em pontes ferroviárias: modelação numérica, calibração e validação experimental. 2012.
- RITZ, W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. **Annalen der Physik**, v. 333, n. 4, p. 737–786, 1909.

SABAMEHR, A.; LIM, C.; BAGCHI, A. System identification and model updating of highway bridges using ambient vibration tests. **Journal of Civil Structural Health Monitoring**, v. 8, n. 5, p. 755–771, 4 nov. 2018.

SÁNCHEZ-APARICIO, L. J. et al. The combination of geomatic approaches and operational modal analysis to improve calibration of finite element models: A case of study in Saint Torcato Church (Guimarães, Portugal). **Construction and Building Materials**, v. 70, p. 118–129, 2014.

SHABBIR, F.; OMENZETTER, P. Particle Swarm Optimization with Sequential Niche Technique for Dynamic Finite Element Model Updating. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, v. 30, n. 5, p. 359–375, maio 2015.

SORIANO, H. L. **Elementos finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas**. [s.l.] Ciência Moderna, 2009.

STRANG, G.; FIX, G. J. **An analysis of the finite element method**. [s.l.] Prentice-hall Englewood Cliffs, NJ, 1973. v. 212

YANG, Y. B.; CHEN, Y. J.; HSU, T. W. Direct Updating Method for Structural Models Based on Orthogonality Constraints. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 16, n. 5, p. 390–401, 19 jun. 2009.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. 1-The standard discrete system and origins of the finite element method. **The Finite Element Method Set**, p. 1–18, 2005.