



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

MODELAGEM DO MERCADO FINANCEIRO BASEADO NA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES E EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS NÃO LINEARES

JORGE HENRIQUE CORRÊA MELGAÇO

Orientador: Leonardo dos Santos Lima
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

BELO HORIZONTE
FEVEREIRO DE 2021

JORGE HENRIQUE CORRÊA MELGAÇO

**MODELAGEM DO MERCADO FINANCEIRO
BASEADO NA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES E
EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS
NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: Leonardo dos Santos Lima
Centro Federal de Educação Tecnológica
de Minas Gerais

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
FEVEREIRO DE 2021

S521m Melgaço, Jorge Henrique Corrêa
Modelagem do mercado financeiro baseado na equação de black-scholes e em equações diferenciais estocásticas não lineares / Jorge Henrique Corrêa Melgaço. – 2021.
50 f. : il.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Leonardo dos Santos Lima.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Modelos matemáticos. 2. Equações diferenciais estocásticas. 3. Mercado financeiro. I. Lima, Leonardo dos Santos. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD: 511.8



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**“MODELAGEM DO MERCADO FINANCEIRO BASEADO NA
EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES E EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ESTOCÁSTICAS NÃO LINEARES”**

Dissertação de Mestrado apresentada por **Jorge Henrique Correa Melgaço**, em 25 de fevereiro de 2021, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Leonardo dos Santos Lima (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Luis Angel Poveda Calvino
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática e Computacional

Resumo

Neste trabalho são apresentados dois modelos matemáticos baseados em uma equação diferencial estocástica de Itô, na qual foram incluídos termos não lineares, e analisou-se os efeitos dessa inclusão. Mais especificamente, verificou-se se a inclusão dos termos não lineares altera as características do modelo, enquanto candidato a modelo matemático para o comportamento da dinâmica de preços do mercado. Os modelos foram confrontados com os fatos estilizados do mercado, propriedades gerais que são observadas em quase todos os mercados financeiros. A volatilidade, que representa uma medida da magnitude das flutuações do mercado, foi extraída dos modelos matemáticos e analisada através da sua distribuição de probabilidade acumulada e de correlações de longo alcance. Nesta análise, foi calculado o expoente de Hurst α através do *detrended fluctuation analysis* de ordens 2 a 6 para ambos os modelos, onde se pode observar um comportamento persistente ($\alpha > 0,5$) nas variadas ordens do DFA. Foi investigado o comportamento da distribuição de cauda longa das volatilidades, e verificada se a lei de escala obedece a lei cúbica inversa. Esta, citada por autores em inúmeros índices e mercados ao redor do mundo como um fato estilizado. Neles, o expoente γ comumente se aproxima de 3. Na análise dos modelos, foram estimados valores de $\gamma = 3,0666$ e $\gamma = 3,2774$, o que pode evidenciar o comportamento dos modelos semelhante aos mercados financeiros.

Palavras-chave: Econofísica, Equações diferenciais estocásticas, Movimento browniano, fatos estilizados, Processo de Itô

Lista de Figuras

Figura 1 – Movimento browniano geométrico	17
Figura 2 – <i>Integração Estocástica - Divisão do intervalo t em n partições</i>	20
Figura 3 – <i>Solução de $dX(t)$ através do Método Euler-Maruyama para o modelo 1. O passo usado na simulação é $\Delta t = 0,001$, e $\beta = 0,6$</i>	36
Figura 4 – <i>Solução de $dX(t)$ através do Método Euler-Maruyama para o modelo 2. O passo usado na simulação é $\Delta t = 0,001$ e $\mu = 1,1$</i>	36
Figura 5 – <i>Índice S&P 500 diário, observado no intervalo de 16/01/2014 a 31/12/2019</i>	37
Figura 6 – <i>Evolução do retorno e volatilidade para o modelo 1. O retorno foi obtido por $r(t) \approx S(t) = \ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t))$, e a volatilidade é dada por $r(t)$ (MANTEGNA E STANLEY, 2000). O passo usado para a simulação é $\Delta t = 0,001$.</i>	39
Figura 7 – <i>Evolução do retorno e volatilidade para o modelo 2. O retorno foi obtido por $r(t) \approx S(t) = \ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t))$, e a volatilidade é dada por $r(t)$ (MANTEGNA E STANLEY, 2000). O passo usado para a simulação é $\Delta t = 0,001$.</i>	39
Figura 8 – <i>Gráfico Log-Log de detrended fluctuation analysis: função de flutuação $F(s)$ vs. comprimento s para o retorno $r(t)$ do modelo 1. As linhas sólidas representam o ajuste linear dos mínimos quadrados para os dados analisados. Os valores obtidos para o DFA de ordem 2 a 6 são, respectivamente, 0,5325, 0,556, 0,5449, 0,5528 e 0,5413.</i>	41
Figura 9 – <i>Gráfico Log-Log de detrended fluctuation analysis: função de flutuação $F(s)$ vs. comprimento s para a volatilidade $r(t)$ do modelo 1. As linhas sólidas representam o ajuste linear dos mínimos quadrados para os dados analisados. Os valores obtidos para o DFA de ordem 2 a 6 são, respectivamente, 0,5292, 0,5864, 0,5876, 0,6223 e 0,6155.</i>	41
Figura 10 – <i>Gráfico Log-Log de detrended fluctuation analysis: função de flutuação $F(s)$ vs. comprimento s para o retorno $r(t)$ do modelo 2. As linhas sólidas representam o ajuste linear dos mínimos quadrados para os dados analisados. Os valores obtidos para o DFA de ordem 2 a 6 são, respectivamente, 0,5287, 0,5566, 0,5444, 0,5517 e 0,529.</i>	42

Figura 11 – Gráfico Log-Log de detrended fluctuation analysis: função de flutuação $F(s)$ vs. comprimento s para a volatilidade $ r(t) $ do modelo 2. As linhas sólidas representam o ajuste linear dos mínimos quadrados para os dados analisados. Os valores obtidos para o DFA de ordem 2 a 6 são, respectivamente, 0,5354, 0,5951, 0,5974, 0,6269 e 0,6189.	42
Figura 12 – Gráfico Log-Log da probabilidade acumulada das volatilidades $P r $ vs $ r $ para o modelo 1. O ajuste de mínimos quadrados da lei de potência é dado por $P r \sim vs. r ^{-\gamma}$, e o valor de γ obtido é de $\gamma = -3,0666$. O passo usado na simulação é de $\Delta t = 0,001$. A linha em destaque mostra o melhor ajuste para γ .	44
Figura 13 – Regressão linear para o modelo 1, a partir do ajuste dos ajustes dos mínimos quadrados na região em destaque na figura 9.	44
Figura 14 – Gráfico Log-Log da probabilidade acumulada das volatilidades $P r $ vs $ r $ para o modelo 2. O ajuste de mínimos quadrados da lei de potência é dado por $P r \sim vs. r ^{-\gamma}$, e o valor de γ obtido é de $\gamma = -3.2774$. O passo usado na simulação é de $\Delta t = 0,001$. A linha em destaque mostra o melhor ajuste para γ .	45
Figura 15 – Regressão linear para o modelo 2, a partir do ajuste dos ajustes dos mínimos quadrados na região em destaque na figura 11.	45

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Fundamentação Teórica	5
2.1 Probabilidade	5
2.1.1 Variável aleatória discreta	6
2.1.2 Variável aleatória contínua	7
2.1.3 Média e variância	7
2.1.4 Probabilidade conjunta	9
2.2 Processos estocásticos e Cadeias de Markov	11
2.2.1 Cadeia de Markov	11
2.2.2 Martingales	12
2.3 Movimento browniano	16
2.3.1 Equação de Langevin	18
2.3.2 Equação de Fokker-Planck	18
2.4 Equações diferenciais estocásticas e cálculo de Itô	20
2.4.1 Integração estocástica	20
2.4.2 Processo de Itô	21
2.4.3 Lema de Itô	21
2.5 Modelo de Black Scholes	23
3 – Metodologia	26
3.1 Modelo matemático	26
3.1.1 Método Euler-Maruyama	29
3.2 Análise estatística	30
3.2.1 Expoente de Hurst	30
3.2.2 Detrended fluctuation ananlysis – DFA	31
3.2.3 Lei cúbica inversa da distribuição de probabilidade acumulada para a volatilidade	32
3.3 O S&P 500	33
4 – Resultados e discussão	35
4.1 Modelo matemático	35
4.2 Retorno e volatilidade	38

4.2.1	Retorno	38
4.3	DFA e índice de Hurst	40
4.4	Lei cúbica inversa para a distribuição de probabilidade acumulada da volatilidade	43
5	– Conclusões	47
6	– Referências Bibliográficas	49

1 Introdução

A partir do final da década de 1990, adotou-se o termo “Econophysics”, ou Econofísica, para se referir às aplicações da física estatística na economia. Nesta década aconteceram as primeiras conferências na área, “Workshop on Econophysics”, com a consequente publicação de livros dedicados ao tema, destacando-se o trabalho de Mantegna e Stanley (2000).

Apesar de a formalização da Econofísica ocorrer somente no final do século XX, pode-se observar ao longo da história que o envolvimento de físicos com análises do comportamento de mercados financeiros é bastante comum. Dentre vários exemplos, podemos citar Isaac Newton, que perdeu parte de seus bens na Bolsa de Londres, através de tentativas frustradas de prever a cotação de um ativo. Já Carl Friederich Gauss (1777-1855) logrou êxito em suas operações financeiras, haja vista que deixou uma grande fortuna, pouco compatível com seu salário na época.

Mas foi com Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier, um matemático francês, em 1900, através de sua tese Teoria da Especulação, que foi plantada a semente da Econofísica. Bachelier trouxe vários conceitos surpreendentes para a época, como formalizar o movimento browniano, cinco anos antes dos trabalhos em difusão de Einstein; determinar a probabilidade de variações de preços ao formular o que hoje é conhecido como equação de Chapman-Kolmogorov, e ao reconhecer que o processo de Wiener satisfaz a equação de difusão. O trabalho de Bachelier, entretanto, não foi muito apreciado à época, vindo a ser “redescoberto” somente décadas depois, dando origem à teoria do *random walk*.

Na década de 1960, Benoit Mandelbrot, em um de seus trabalhos sobre fractais, observou traços de autossimilaridade nos preços de commodities de algodão em diferentes escalas e tempo. Posteriormente, os resultados obtidos por Mandelbrot foram tomados como leis de potência.

A partir da década de 1970 ocorreram várias mudanças no mercado financeiro, como por exemplo, moedas começaram a ser negociadas, e seus valores determinados em mercados de diferentes países, e passamos a ter um mercado financeiro ativo vinte e quatro horas por dia no mundo todo. Nesse mesmo período, mais precisamente em

1973, o matemático americano Fisher Black e o economista canadense Myron Scholes publicaram seu trabalho que expõe um modelo matemático para determinar o valor de opções, tipo de investimento no qual se pode negociar o direito de compra ou venda de ativos. Este trabalho foi desenvolvido a partir das pesquisas de Samuelson e Merton, e Sprenkle, que por sua vez, trouxeram a então esquecida, teoria da especulação de Bachelier, modificando o seu processo estocástico.

Neste modelo, Black e Scholes utilizam a opção europeia. Uma opção é um tipo de derivativo, e é um contrato que dá a seu titular o direito de comprar ou vender um ativo, sob certas condições, num determinado período de tempo (BLACK E SCHOLES, 1973). Sobre a opção europeia exerce-se o poder de compra ou venda somente em uma data futura especificada previamente, que é a data de seu vencimento; ao contrário da opção americana, sobre a qual se exerce o poder de compra ou venda desde o momento da sua aquisição até a data de seu vencimento. Para se estimar os valores de uma opção seguindo este modelo, é necessário conhecer termos como prazos de vencimento e o preço da ação, com este seguindo um processo de Wiener num intervalo contínuo de tempo.

Nas décadas seguintes, a quantidade de informações e dados aumentou drasticamente, e juntamente com a constante evolução tecnológica, praticamente nenhuma transação no mercado financeiro acontece sem que haja algum registro. Milhões de registros de negociações e preços são gerados a todo tempo, o que permite até mesmo reconstruir o estado do mercado num determinado instante de tempo (MIKE; FARMER, 2008).

A quantidade de informações cada vez maior proporciona um verdadeiro superlaboratório para estudar comportamentos do ser humano. Os agentes do mercado tomam decisões em um ambiente extremamente complexo, mas no fim, tais decisões se reduzem a simplesmente a negociações de compras e vendas de ativos (MIKE; FARMER, 2008). Uma modelagem do mercado de ações deve, em geral, simular alguns fatores importantes, tais como a estrutura do mercado, os mecanismos de negociação e a dinâmica de preços. Mike e Farmer estudaram o comportamento empírico acerca dos agentes do mercado. A partir daí, desenvolveram um modelo para simular a dinâmica da formação do preço de uma ação e o compararam aos dados reais da bolsa de valores de Londres (*London Stock Exchange*, também conhecida como LSE). O modelo apresentado nesse estudo fica conhecido como Modelo MF.

Gu e Zhou observaram que o modelo MF traz várias informações de grande importân-

cia, como o retorno, que é distribuído de acordo com a lei do inverso do cubo, o índice de Hurst dos retornos é próximo de 0,5, e as diferenças de preços entre compras e vendas de ações, conhecidas como spreads, apresentam leis de potência nas caudas (GU; ZHOU, 2009), o que é comumente observado em distribuições empíricas, como o modelo MF. Gu e Zhou modificaram esse modelo, incorporando a memória de longo prazo e tornando-o mais realístico sem destruir as informações originárias do modelo MF, que são características estatísticas comuns aos vários tipos de ativos em diferentes períodos de tempo, e são conhecidas como fatos estilizados (GOPIKRISHNAN et al., 1999).

Através da observação dos comportamentos dos agentes dos mercados financeiros, nota-se que sistemas socioeconômicos apresentam um comportamento complexo, muito semelhante a sistemas complexos, que atualmente são aplicados aos mais diversos campos científicos. Diante dessa interdisciplinaridade dos sistemas complexos, pode-se também relacioná-los a métodos matemáticos aplicados na física, como o modelo de Ising bidimensional, no qual retorno e volatilidade são representados, respectivamente, através da magnetização do modelo de Ising, $M = 1/N \sum_{i=1}^N s_i(t)$ e por seu módulo. O preço s_i é dado como uma variável aleatória e é equivalente aos spins no modelo de Ising (LIMA, 2016).

Séries temporais financeiras são conhecidas por seu comportamento imprevisível, ou seja, é praticamente impossível de se prever seus valores futuros (MANTEGNA E STANLEY, 2000). Assim, outra forma de se modelar o mercado financeiro é através de equações diferenciais estocásticas. Leis de potência obtidas através das variações de preços também são informações importantes na análise do comportamento do mercado financeiro.

Os modelos analisados neste trabalho são baseados em uma equação diferencial estocástica não linear de Itô. Eles foram analisados, e os resultados confrontados com os fatos estilizados do mercado financeiro. Com isso, pretende-se mostrar sua eficácia enquanto um bom modelo para a dinâmica do mercado. Mais especificamente, verificou-se se a inclusão dos termos não lineares altera as características do modelo, enquanto candidato a modelo matemático para o comportamento da dinâmica de preços do mercado. O processo de difusão de Itô tem sido muito empregado como um modelo bioeconômico com flutuações estocásticas (YUE et al, 2016).

O modelo é definido por:

$$dX(t) = \mathfrak{F}(X(t))dt + \mathfrak{h}(X(t)) \circ dWt \quad (1)$$

Pode-se considerar a equação acima semelhante ao comportamento de uma partícula sob a força conservativa do tipo:

$$\mathfrak{F}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x \quad (2)$$

com coeficientes $\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1\} \in \mathbb{R}$. Adicionalmente, temos um ruído branco estocástico $\xi(t)$ é relacionado ao processo de Wiener como se segue:

$$W(t) = \int_{t_0}^t \xi(t') dt' \quad (3)$$

Ele apresenta uma distribuição normal e é um processo markoviano.

A sequência do trabalho dá-se da seguinte forma: no capítulo 2 apresenta-se a Fundamentação Teórica, que foram os conceitos necessários para o desenvolvimento da pesquisa. No capítulo 3 apresenta-se a metodologia, onde trouxemos os modelos matemáticos, a proposta de trabalho e os resultados esperados. No Capítulo 4, os resultados obtidos e as observações acerca destes, e em seguida, as conclusões e as possibilidades para um maior desenvolvimento da pesquisa apresentada.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Probabilidade

Existe uma quantidade infindável de fenômenos na natureza, aos quais podemos reconhecer como aleatórios. Tais fenômenos acontecem de forma imprevisível, que podem ocorrer ao acaso, ou de forma espontânea, ao contrário de situações previsíveis, as quais sempre terão um resultado já determinado. Podemos citar como exemplo (TOMÉ, 2014), uma maçã abandonada a alguns metros do solo a partir do repouso. Essa maçã sempre atingirá o solo num ponto que está posicionado verticalmente abaixo do qual foi solta. Não importa quantas vezes repita esse fenômeno, o resultado obtido será sempre o mesmo. Por outro lado, se a maçã for substituída por uma folha de papel, pode-se observar que os resultados obtidos nesse experimento serão diferentes do anterior. A folha cairá em pontos distintos, mesmo se, aparentemente, nada influenciar na sua queda. O primeiro fenômeno é previsível, ou determinístico. Já o segundo, podemos dizer que é aleatório, ou estocástico.

À primeira vista, um fenômeno aleatório pode não aparentar possuir algum padrão ou regularidade. Mas, com uma melhor observação, pode-se notar que há regularidades que os caracterizam. Um exemplo bastante simples a se considerar é o lançamento de uma moeda justa ou honesta, por uma determinada quantidade de vezes (N). Após várias execuções desse experimento, observa-se que os resultados são próximos entre si. Realizando uma quantidade suficientemente grande desse experimento, o resultado se aproxima de um determinado limite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{resultados observados}}{N} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

Em experimentos aleatórios, o conjunto de resultados possíveis é chamado de espaço amostral. No caso do lançamento da moeda, os resultados podem ser cara ou coroa.

Uma σ -álgebra é uma classe \mathfrak{F} de subconjuntos de um espaço amostral Ω que obedece às seguintes condições:

i) $\Omega \in \mathfrak{F}$

ii) Se $A \in \mathfrak{F}$ então $A^c \in \mathfrak{F}$

iii) Se $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$

Com os elementos acima apresentados, se pode definir um espaço de probabilidades, o qual é formado pela tripla $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, onde Ω é um espaço amostral, \mathfrak{F} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e P é uma função de densidade de probabilidade definida sobre \mathfrak{F} .

Dado um experimento x e um espaço amostral associado, existe uma função $X(x)$ que assume certo valor real para cada x . Essa função é denominada de variável aleatória. A variável aleatória pode ser discreta, quando seus valores podem ser enumeráveis ou estes são finitos, e pode ser contínua, quando seus valores se associam a medidas uma escala contínua, ou estes são infinitos.

2.1.1 Variável aleatória discreta

Seja uma variável aleatória X discreta. Suponha que a cada valor de X associa-se um número real $p(X)$, tal que:

$$p(X) \geq 0 \quad (5)$$

E

$$\sum_x p(X) = 1 \quad (6)$$

Sob tais condições, $p(X)$ é a distribuição de probabilidade da variável aleatória X . Podem-se mencionar algumas distribuições de probabilidade relevantes, como

- Distribuição Binomial – Dados os parâmetros a , tal que $0 < p < 1$, e $q = 1 - p$, tem-se:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (7)$$

- Distribuição de Poisson – Numa distribuição binomial em que o número de ensaios n cresce infinitamente, tem-se

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (8)$$

Onde λ é um parâmetro tal que $\lambda > 0$.

2.1.2 Variável aleatória contínua

Seja uma variável aleatória X contínua. Existe uma função que determina uma probabilidade a cada intervalo de X . Ou seja, dado um intervalo $[a,b]$, a probabilidade de que X pertença a este intervalo é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \quad (9)$$

Tal função é denominada função densidade de probabilidade, e deve obedecer às seguintes propriedades:

$$f(x) > 0 \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (11)$$

Distribuição gaussiana – também conhecida como distribuição normal, é a mais importante distribuição contínua, pois diversas variáveis, nos mais diferentes campos, se aproximam de uma distribuição gaussiana.

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (12)$$

Onde μ é a média e σ^2 é a variância.

2.1.3 Média e variância

Numa variável aleatória, a média, também chamada de esperança ou valor esperado, é o somatório de todos os possíveis resultados da variável aleatória associada à probabilidade que acontece quando esta assume um determinado valor. A média é também o primeiro momento de uma variável aleatória. Para uma variável aleatória X a média é calculada através da série:

$$\mu = E(X) = \sum x_i p(x_i) \quad (13)$$

e para uma variável contínua é dada pela integral de todos os valores da função densidade de probabilidade:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (14)$$

Variância - é uma medida de dispersão que indica o grau de concentração da distribuição de X ao redor da média. A variância é o segundo momento de uma variável aleatória, e é dada por:

$$Var(x) = \sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = \sum_x [(x - \mu)^2] f(x) \quad (15)$$

Para uma variável aleatória contínua

$$Var(x) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [(x - \mu)^2] f(x) dx \quad (16)$$

Propriedades - sejam X e Y duas variáveis aleatórias, e k constante. São válidas as seguintes propriedades:

- i) $Var(X) \geq 0$
- ii) $Var(k) = 0$
- iii) $Var(kX) = k^2 Var(X)$
- iv) $Var(X + k) = Var(X)$
- v) $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$
- vi) $Var(X + Y) \neq Var(X) + Var(Y)$

A igualdade em vi somente é válida quando X e Y são independentes.

Função característica – a função característica de uma variável aleatória é obtida através da transformada de Fourier da densidade de probabilidade. Para a distribuição gaussiana, tem-se

$$g(k) = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} \quad (17)$$

Nota-se que a função característica de uma distribuição gaussiana é também uma função gaussiana.

Distribuição de Lorentz – também chamada de distribuição de Cauchy, essa distribuição não apresenta média e variância definidas. Ela pode ser interpretada como a razão entre duas distribuições gaussianas independentes

$$f(x) = \frac{p}{\pi(p^2 + x^2)} \quad (18)$$

A função característica da distribuição de Lorentz é dada por

$$g(k) = e^{-p|k|}$$

2.1.4 Probabilidade conjunta

Sejam duas variáveis aleatórias x e y . A probabilidade de que x esteja num intervalo $[a,b]$ e y esteja num intervalo $[c,d]$ é dada por (TOMÉ, 2014)

$$\int_a^b \int_c^d p(x,y) dx dy \quad (19)$$

A densidade de probabilidade conjunta $p(x,y)$ possui as seguintes propriedades:

$$p(x,y) \geq 0 \quad (20)$$

$$\int \int p(x,y) dx dy = 1 \quad (21)$$

Pode-se obter daí as densidades de probabilidade $p_1(x)$ de x e $p_2(y)$ de y , como se segue:

$$p_1(x) = \int p(x,y) dy \quad (22)$$

$$p_2(y) = \int p(x,y) dx \quad (23)$$

A covariância C é uma medida de dependência entre as variáveis x e y :

$$C = \langle (x - \langle x \rangle) (y - \langle y \rangle) \rangle \quad (24)$$

Se $p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$ as variáveis aleatórias são independentes entre si. Nesse caso, a covariância é nula.

Teorema central do limite – a relação da distribuição gaussiana com diversos fenômenos se dá pelo teorema central do limite, o qual afirma que uma variável aleatória composta pela soma de vários termos independentes, mas arbitrariamente distribuídos, é gaussiana (GARDINER, 1985). O teorema central do limite abrange uma enorme gama de aplicações, definindo-se como se segue:

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias independentes e distribuídas identicamente, com média μ e variância σ^2 . Para uma variável aleatória Z , o teorema se define por:

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \left\{ \sum_i^n X_i - n\mu \right\} \quad (25)$$

e possui a distribuição gaussiana

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2} \quad (26)$$

no limite $n \rightarrow \infty$. Para que o teorema central do limite seja válido, é necessário que exista a média μ e a variância σ^2 .

Investimentos em bolsa de valores podem ser modelados através de uma gaussiana, pois a variação no preço de um ativo depende de vários fatores, como negociações e especulações, embora estes fatores não tenham necessariamente essa distribuição.

2.2 Processos estocásticos e Cadeias de Markov

Um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias independentes, que podem ser utilizadas para analisar sistemas que evoluem de forma probabilística ao longo do tempo. Dado um processo estocástico de tempo discreto, uma variável aleatória x_t que assuma valores inteiros e tempos t_1, t_2, t_3, \dots

O processo estocástico fica definido por completo pela distribuição de probabilidade conjunta

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) \quad (27)$$

A seguir, definamos a probabilidade condicional nos termos da distribuição de probabilidade conjunta:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots) = \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)}{p(y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots)} \quad (28)$$

Essa definição é válida independente da ordem dos tempos t , mesmo sendo usual considerar

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots \tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \quad (29)$$

O processo estocástico mais simples é do tipo que apresenta completa independência entre os valores de x no tempo t , seja no passado ou no futuro. Quando, num processo estocástico, a probabilidade de uma variável x assumir um determinado estado num instante t depende somente do seu estado atual e seus estados anteriores não influenciam, este processo estocástico é um processo markoviano, conhecido como cadeia de Markov, em homenagem ao matemático russo Andrei Markov.

2.2.1 Cadeia de Markov

Andrei Markov introduziu o conceito em 1905, onde pretendia criar um modelo probabilístico que analisaria a presença e a frequência de vocais em poemas e textos literários (Rincon, 2014). O modelo proposto por Markov consegue descrever características não triviais de diversos fenômenos físicos e sociais não triviais, tendo inúmeras aplicações.

Definição (RINCON, 2012) – Uma cadeia de Markov é um processo estocástico em tempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$, para qualquer $n \geq 0$ que satisfaz a propriedade

de Markov, isto é, para qualquer número inteiro $n \geq 0$, e para quaisquer estados x_0, x_1, \dots, x_{n+1} se cumpre

$$p(x_{n+1}|x_0, x_1, \dots, x_n) = p(x_{n+1}|x_n) \quad (30)$$

Se o tempo $n + 1$ é dado como um tempo futuro, o tempo n é dado como tempo presente, e os tempos $0, 1, \dots, n - 1$ como passado, então a condição acima estabelece que a distribuição de probabilidades do estado do processo no tempo $n + 1$ depende somente do estado do processo no tempo n , e é independente dos valores dos estados anteriores $0, 1, \dots, n - 1$.

Probabilidade de transição - Dados dois estados i e j de uma cadeia de Markov, a probabilidade

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (31)$$

Representa a probabilidade de transição de um estado i no tempo n para um estado j no tempo $n+1$, em um passo. Se pode denotar a probabilidade de transição por $p_{ij}(n, n+1)$. Quando a probabilidade não depende de n diz-se que a cadeia é estacionária. Ao variar os valores de i e j sobre um conjunto de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$, obtém-se uma matriz de probabilidades de transição em um passo (Rincon, 2012). Uma matriz de probabilidades de transição, chamada de matriz estocástica, é uma matriz na qual

$$p_{ij}(n, n+1) \geq 0 \quad (32)$$

$$\sum p_{ij}(n, n+1) = 1 \quad (33)$$

Equação de Chapman-Kolmogorov - Esta equação permite decompor a probabilidade de se passar de um estado i para um estado j e m n passos, ao se somar todas as possíveis trajetórias de i a j . Diz-se que para quaisquer dois números naturais tais que $0 \leq r \leq n$ e para quaisquer estados de i e j é válida a equação

$$p_{ij}(n) = p_{ik}(r)p_{kj}(n-r) \quad (34)$$

2.2.2 Martingales

O termo martingale foi cunhado por J.Ville, e vem da estratégia de jogo denominada "la grand martingale", uma estratégia onde o apostador dobra a sua aposta a cada

perda, e assim recuperaria o seu dinheiro investido no momento em que ganhar uma aposta, obtendo também um pequeno lucro. (Doob, 1971, Mantegna e Stanley, 1999). A primeira teoria completa foi formulada por Joseph Doob.

Pode se dizer que, de forma intuitiva, num martingale, dada a informação do processo no presente, representado por \mathfrak{F}_s , se tivermos que intuir sobre o estado futuro $X_t, t \geq s$, na média, os valores do processo permanecem no mesmo estado (Ruffino, 2009).

Ainda de acordo com Ruffino (2009), uma situação comumente abordada na modelagem estocástica de finanças, quando há o fechamento da cotação de uma moeda estrangeira num determinado dia, o ideal é que, em média, a melhor aproximação feita para o dia seguinte é a de que o valor será o mesmo desse fechamento.

Existem várias definições para se determinar um martingale. Uma maneira que o descreve basicamente é através de um processo estocástico que obedece a identidade a seguir:

$$E(X_{n+1}|X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = x_n \quad (35)$$

Filtrações

Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Dadas duas sub σ -álgebras \mathfrak{F}_1 e \mathfrak{F}_2 , tais que $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Ou seja, \mathfrak{F}_1 , contem mais informação que \mathfrak{F}_2 . Entretanto, podemos observar uma sucessão de σ -álgebras $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \dots$ não decrescente, como por exemplo, para o processo estocástico discreto $\{X_n : n \geq 1\}$, pode se construir a sucessão $\{\mathfrak{F}_n\}_{n \geq 1}$ como se segue: $\{\mathfrak{F}_n\} = \sigma\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

Nesse caso, é verdadeiro que $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \dots$ e a σ -álgebra \mathfrak{F}_n contém os eventos que podem ou não ocorrer, através da informação do tempo n . Desse modo, chega-se à definição de filtração (Rincon, 2012):

Definição – uma filtração é um conjunto de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_n\}_{n \geq 1}$, tal que $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}_m$. Num caso particular, a filtração de um processo estocástico $\{X_n : n \geq 1\}$ definida pela sucessão de σ -álgebras $\mathfrak{F}_n = \sigma\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $n \geq 1$, é chamada de filtração canônica ou natural.

Para um processo contínuo, são análogas as definições, onde a filtração é um conjunto de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$, tal que $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$, quando $0 \leq s \leq t$. A filtração canônica de

um processo contínuo $\{X_t : t \geq 0\}$ é o conjunto de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ dado por $\mathfrak{F}_t = \sigma\{0 \leq s \leq t\}$.

Definição – Um processo estocástico $\{X_n : n \geq 1\}$ é adaptado a uma filtração \mathfrak{F}_n se X_n é \mathfrak{F}_n mensurável para todo $n \geq 1$.

Sabe-se que cada variável aleatória X_n do processo é \mathfrak{F}_n mensurável. A condição de adaptação exige que X_n também seja uma variável aleatória da σ -álgebra \mathfrak{F}_n . Todo processo estocástico é adaptado à filtração canônica, e esta é a menor filtração à qual um processo é adaptado. Pode-se dizer que a σ -álgebra é o conjunto de todos as possibilidades que pode ocorrer até n (SILVA, 2005). Dada uma filtração \mathfrak{F}_n , ainda se definem os limites laterais de uma filtração como:

$\sigma\mathfrak{F}_{t-} = \bigcup_{s < t} \mathfrak{F}_s$ à esquerda e $\mathfrak{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathfrak{F}_s$ à direita. Uma filtração é contínua à direita se $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+}$.

Tempo de parada - dado um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, um tempo de parada em uma filtração $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ é uma variável aleatória τ com valores pertencentes ao intervalo $[0, \infty]$ se para cada $t \geq 0$, tem-se que $(\tau \leq t) \in \mathfrak{F}_t$. Uma comparação simples com a estratégia de jogo de onde surgiu o termo “martingale” é o momento quando o jogador, após perder algumas rodadas e dobrar sua aposta sucessivamente, finalmente vence uma rodada, recupera o valor perdido e pára sua aposta.

Martingales

Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, um espaço de probabilidades, e $\{\mathfrak{F}_n\}_{n \geq 0}$ é uma filtração, ou seja, uma sequência de σ -álgebras de conjuntos de \mathfrak{F} que satisfaz a condição $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{F}$. Um processo $\{X_t, t \geq 0\}$ é um martingale em relação a filtração $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ quando são obedecidas as seguintes condições:

- i) X_t é mensurável em relação à \mathfrak{F}_t ;
- ii) X_t é integrável;
- iii) Para qualquer $0 \leq s \leq t$

$$E(X_t | \mathfrak{F}_s) = X_s$$

Da igualdade acima pode se obter dois conceitos diferentes. Se $E(X_t|\mathfrak{F}_t) \geq x_t$, o processo é um submartingale. Nesse caso, a esperança é crescente. Por outro lado, se $E(X_t|\mathfrak{F}_t) \leq x_t$, o processo é chamado de supermartingale, e a esperança é decrescente. Assim, pode se observar que um martingale é, ao mesmo tempo, um submartingale

2.3 Movimento browniano

O movimento Browniano é um processo estocástico que recebe este nome graças ao botânico inglês Robert Brown, que em 1827 observou o movimento aleatório de grãos de pólen imersos em um fluido. Inicialmente, Brown acreditou que os grãos de pólen estivessem vivos, devido ao caráter aleatório dos seus movimentos. Posteriormente, verificou-se que incessantes colisões entre os grãos e moléculas de água causam o fenômeno observado.

Entretanto, somente alguns anos depois, Bachelier, em 1900, e Einstein, em 1905, abordaram de forma quantitativa o movimento Browniano. A formalização rigorosa de um modelo matemático fundamentado nesse fenômeno veio em 1923, através do matemático americano Norbert Wiener. Por essa razão, o movimento Browniano é conhecido também como processo de Wiener.

Um processo de Wiener unidimensional $W(t)$ com $t > 0$, apresenta algumas propriedades, como se segue:

- inicia-se em $W(0) = 0$; - suas trajetórias são contínuas - seus incrementos $W(t) - W(s)$ são independentes - Para quaisquer tempos $t > s$, $W(t) - W(s)$ tem distribuição gaussiana e variância $t - s$

A última propriedade é uma consequência do teorema central do limite, que, observando ainda o fenômeno físico, se dá pelas múltiplas colisões da partícula com as moléculas do fluido. A densidade de probabilidade do incremento $W(t) - W(s)$ depende somente do intervalo de tempo $t - s$, ou seja, o processo é estacionário. A densidade de probabilidade do movimento browniano é, portanto, uma distribuição Gaussiana com média zero e variância igual a $t - s$, como segue abaixo:

$$p(w, t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp \left[-\frac{(w-w_0)^2}{2(t-s)} \right] \quad (36)$$

A probabilidade de transição é dada por

$$T(w, t | w_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp \left[-\frac{(w-w_0)^2}{2(t-t_0)} \right] \quad (37)$$

Dado que $W(t_0) = w_0$, pode-se escrever

$$W(t) = w_0 + \int_0^t \xi(t') dt' \quad (38)$$

Onde " $\xi(t)$ " é um ruído branco.

Incremento de Wiener – para intervalos de tempo Δt , temos que $\Delta W = W(t + \Delta t) - W(t)$. Assim, ΔW tem distribuição gaussiana, com média zero e variância Δt . Escrevendo em termos de diferenciais, $\langle [dW^2] \rangle = dt$, onde dW é o incremento de Wiener.

Movimento browniano geométrico – em econofísica, o movimento browniano geométrico denomina o retorno de um ativo num pequeno intervalo de tempo Δt , considerando fatores determinísticos, como a taxa média de crescimento de um ativo em Δt , e uma variável aleatória, representando fatores externos imprevisíveis que podem afetar o preço do ativo. Pode-se descrever o movimento browniano geométrico pela equação diferencial estocástica a seguir:

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW \quad (39)$$

Sendo dx o retorno, e μ e σ constantes ao longo do tempo, podemos estimá-los através de informações vindas da série histórica de preços do ativo. O retorno é, portanto, composto de duas partes, sendo a primeira determinística, em que μ representa a média, e a segunda, estocástica, em que σ é a volatilidade, relacionada ao desvio padrão do retorno.

Figura 1 – Movimento browniano geométrico

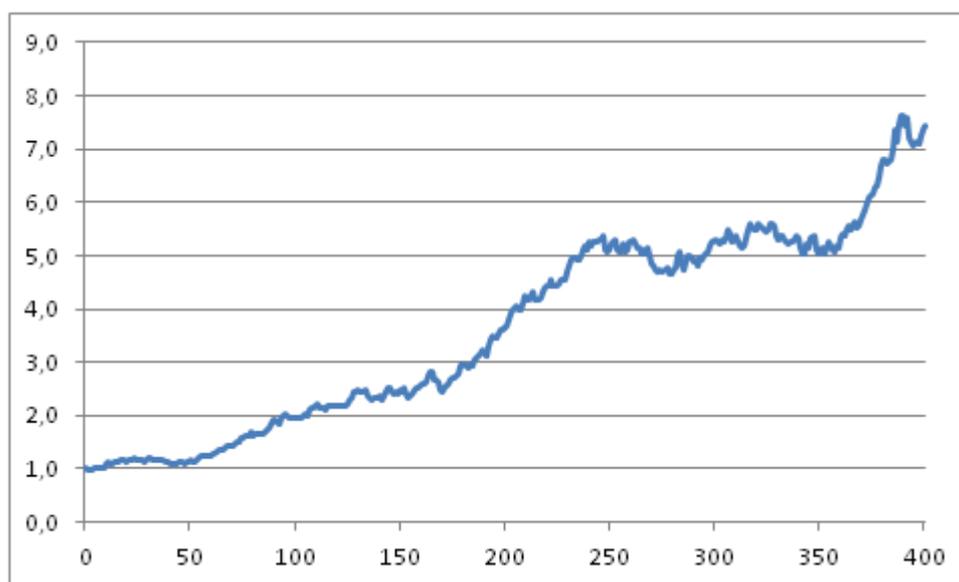


Fig. 1 - Simulação do movimento browniano geométrico, com $\mu = 0.5$ e $\sigma = 2$

A solução da equação diferencial estocástica acima pode ser dada por meio da integral de Itô, onde se encontra:

$$x = x_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} t \right) + \sigma W \right\} \quad (40)$$

2.3.1 Equação de Langevin

Uma partícula de massa m que executa o movimento browniano está sujeita à ação de duas forças. Uma delas, α , dissipativa, que é proporcional à sua velocidade, e outra, de caráter aleatório, oriundo das múltiplas colisões das moléculas do meio com a partícula, $F(t)$, na qual $\langle F(t) \rangle = 0$, ou seja, a média da força devida às colisões é nula, e admite-se que os impactos são independentes. Tomando por base o caso unidimensional, a equação de movimento dessa partícula é representada por (TOMÉ, 2014):

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + F(t) \quad (41)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (42)$$

A equação acima é conhecida como Equação de Langevin. Dividindo-se os dois lados da equação por m , a equação de Langevin assume a forma

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \xi(t) \quad (43)$$

Em que $\gamma = \alpha/m$ e $\xi(t) = F(t)/m$ é um ruído branco, variável estocástica dependente do tempo. Para situações mais gerais, para que a intensidade do ruído e as demais forças dependam de $X(t)$ e do tempo t , escreve-se a equação estocástica da seguinte forma (SCHERER, 2010)

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(X(t), t) + B(X(t), t)\xi(t) \quad (44)$$

2.3.2 Equação de Fokker-Planck

A origem do nome da equação de Fokker-Planck vem dos trabalhos de Adriaan Fokker e Max Planck, no qual foi investigado o movimento browniano de uma partícula num meio radioativo. A equação também é encontrada em outros campos, como em processos de difusão, sendo um caso particular do diferencial de Chapman-Kolmogorov

(GARDINER, 1997). A equação de Fokker-Planck também é conhecida como equação de Smoluchowski, sendo este o primeiro a usar o termo “Fokker-Planck”. Equação em uma variável – a equação diferencial estocástica de Itô

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dW \quad (45)$$

está associada à equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} [K(x,t)f(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D(x,t)P(x,t) \quad (46)$$

Onde $K(x,t) = -\mu(x,t)$ e $D(x,t) = \sigma^2(x,t)$

A equação acima determina a evolução temporal da densidade de probabilidade de $f(x,t)$ (TOMÉ, 2014). Os coeficientes K e D da equação são conhecidos respectivamente como coeficiente de *drift* e de difusão (SCHERER, 2010). Em alguns casos especiais, é possível encontrar a solução da equação de Fokker-Planck de forma analítica, mas para a maioria das aplicações, o interesse maior é na sua distribuição de probabilidade. Em particular, considerando x_0 e a condição inicial $P(x,0) = \delta(x - x_0)$, a distribuição de probabilidade, solução da equação de Fokker-Planck, é denotada por (SCHERER, 2010):

$$p(x,t | x_0,0) = f(x,t) \quad (47)$$

quando

$$P(x,0) = \delta(x - x_0) \quad (48)$$

E é chamada de probabilidade de transição de x_0 em $t = 0$ para x em t . A seguir, serão explorados alguns conceitos elementares do Cálculo Diferencial Estocástico e da Integral de Itô, observando com detalhes a solução acima.

2.4 Equações diferenciais estocásticas e cálculo de Itô

Uma equação diferencial estocástica, ou SDE (do inglês, *Stochastic Differential Equation*) possui em um ou mais termos um processo estocástico. Por consequência, sua solução também será um processo estocástico.

O surgimento de equações diferenciais estocásticas é intrínseco ao estudo de modelos econômicos, haja vista que o primeiro grande trabalho relacionado ao movimento browniano foi a Teoria da Especulação, de Louis Bachelier.

Algumas definições importantes para a sequência deste trabalho serão expostas a seguir.

2.4.1 Integração estocástica

A integral estocástica mais usada é chamada de Integral de Itô, vinda do Cálculo de Itô. Esse nome é em homenagem ao matemático japonês Kiyoshi Itô, que o desenvolveu originalmente para a construção de um processo de difusão.

Seja uma função $F(t)$ e o processo de Wiener $W(t)$. Define-se a integral estocástica

$$\int_{t_0}^t F(t') dW(t') \quad (49)$$

como uma integral de Riemann. Ou seja, divide-se o intervalo $[t_0, t]$ em n partições, como se segue

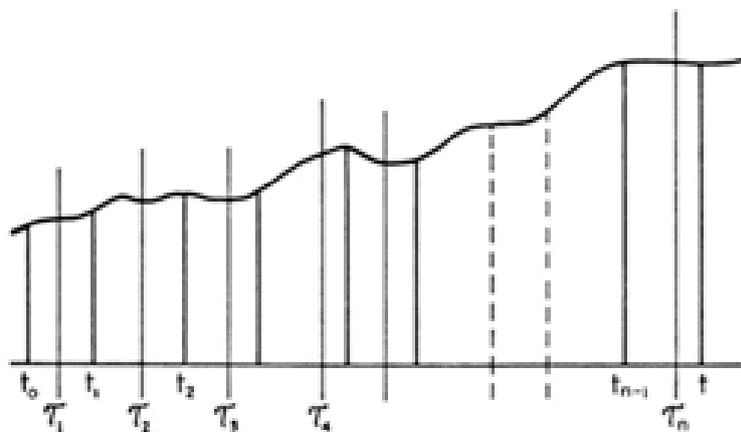


Figura 2 – Integração Estocástica - Divisão do intervalo t em n partições

De onde se define os pontos intermediários τ_i , tais que $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$. Assim, a integral estocástica é o limite das somas das n partições.

$$S_n = \sum_{i=1}^n F(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \quad (50)$$

É fácil observar que a integral definida depende da escolha dos pontos intermediários τ_i . Se esses pontos forem suficientemente próximos de $t_{(i-1)}$, ou seja, se a norma da partição estiver se aproximando de zero, a integral estocástica de Itô da função $F(t)$ será dada por:

$$\int_{t_0}^t F(t')dW(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} F(t_{(i-1)}) [W(t_i) - W(t_{(i-1)})] \quad (51)$$

Existência – a integral estocástica de Itô $\int_{t_0}^t F(t')dW(t')$ existe se o processo $F(t')$ é contínuo no intervalo $[t_0, t]$, e é adaptado para todo t pertencente a este intervalo.

2.4.2 Processo de Itô

Foi visto que o movimento browniano é representado por $dx = \mu x dt + \sigma x dW$, onde μ e σ são constantes e dW é o incremento de Wiener. Se os parâmetros μ e σ variarem em função da variável x e do tempo t , se define um processo de Itô. Ou seja, uma variável x segue um processo de Itô se

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dW \quad (52)$$

Este processo também é conhecido como processo de Wiener generalizado, ou movimento browniano com *drift*, onde $\mu(x,t)$ é um parâmetro de desvio, e $\sigma(x,t)$ é um parâmetro de dispersão. Como visto anteriormente, na aplicação do movimento browniano geométrico, tais parâmetros representam a média e desvio padrão, respectivamente.

2.4.3 Lema de Itô

Seja x um processo de Itô dado pelo movimento browniano geométrico, e as condições dadas anteriormente, tem-se uma função $G(x,t)$, então

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \mu(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \sigma(x,t) \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} \sigma(x,t) dW \quad (53)$$

Em que dW é o mesmo incremento de Wiener representado anteriormente. O que significa que G segue um Processo de Itô, cujos parâmetros de *drift* e variância são, respectivamente

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \mu(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \sigma(x,t) \right) dW \quad (54)$$

e

$$\frac{\partial G}{\partial x} \sigma(x,t) dW \quad (55)$$

O Lema de Itô é fundamental para modelar o comportamento de um ativo no mercado financeiro. O modelo de Black-Scholes (também conhecido como fórmula de Black-Scholes) é um exemplo clássico e muito importante para demonstrar tal fato.

2.5 Modelo de Black Scholes

No ano de 1973, os economistas Fischer Black, Robert C. Merton e Myron S. Scholes publicaram o artigo intitulado *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* na *Journal of Political Economy*, de Chicago. O artigo descreve o comportamento de uma opção do tipo europeia, através de um modelo de equação diferencial parcial, do qual a solução ficou conhecida como fórmula de Black-Scholes. Tal modelo permitiu que, ao se fazer um investimento, é possível analisar se os preços de compra e venda de um ativo podem ser considerados justos.

O modelo se tornou então, um dos mais utilizados para precificação de ativos financeiros, e ainda hoje, é comumente aplicado inclusive em outras áreas de pesquisa, como avaliação de contratos e garantia de seguro. Em 1997, o modelo rendeu a Merton e Scholes o Prêmio Nobel de Economia. Black faleceu em 1995.

Para o cálculo do preço de uma opção através do modelo de Black-Scholes, assumem-se as seguintes condições (BLACK AND SCHOLES, 1973)(MANTEGNA,1999):

- O preço do ativo segue um processo estocástico de Itô;
- A taxa de juros do mercado r é constante;
- Não há custos nas transações;
- Não há oportunidades de arbitragem;
- Não há dividendos entre $t = 0$ e $t = T$;
- A segurança na negociação é contínua;
- É possível negociar quantidades fracionárias do ativo;

Seja $f(X,t)$ o preço justo a ser encontrado, e $X(t)$ uma variável aleatória, que é descrita como um processo estocástico de Itô. O preço do ativo é, portanto, representado através equação do movimento browniano geométrico, vista anteriormente:

$$dx = \mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dW \quad (56)$$

Onde dW é um Processo de Wiener, μ e σ são constantes. Através do Lema de Itô,

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial X} \mu X + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2 X^2 \right] dt + \frac{\partial f}{\partial X} \sigma X dW \quad (57)$$

Considere o portfólio com uma opção f e ativo $-\Delta$. O valor deste portfólio é

$$\Pi = f - \Delta X \quad (58)$$

A mudança no valor deste portfólio num intervalo de tempo dt é

$$d\Pi = df - \frac{\partial f}{\partial X} dX \quad (59)$$

Usando o lema de Itô, tem-se

$$d\Pi = \left[\frac{\partial f}{\partial X} \mu X + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2 X^2 \right] dt + \frac{\partial f}{\partial X} \sigma X dW - \frac{\partial f}{\partial X} \sigma X dW \quad (60)$$

Como Black and Scholes assumiu que o preço da opção segue o movimento browniano geométrico, simplifica-se a equação

$$d\Pi = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2 X^2 \right] dt \quad (61)$$

E como se assume também que não há oportunidades de arbitragem, o retorno de $d\Pi$ será igual ao retorno de Π ao final do intervalo de tempo dt . Ou seja, $d\Pi = r\Pi dt$. Igualando-se a equação acima, obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2 X^2 dt + rX \frac{\partial f}{\partial X} - rf = 0 \quad (62)$$

Que é a equação de Black-Scholes para o preço justo de uma ação. Observa-se que a equação é válida para *call* e *put* em opções europeias.

A solução da equação depende das condições de contorno escolhidas. Para uma opção *call*, as condições são:

$$f(X,t) = \max \{X - K, 0\}, \text{ quando } 0 < x$$

$$f(0,t) = 0 \text{ quando } 0 \leq t \leq T$$

$\lim_{X \rightarrow \infty} f(x,t) = X$ quando $0 \leq t \leq T$

Para uma opção put, as condições são:

$f(X,t) = \max \{X - K, 0\}$, quando $0 < x$

$f(0,t) = K$ quando $0 \leq t \leq T$

$\lim_{X \rightarrow \infty} f(X,t) = x$ quando $0 \leq t \leq T$

Onde K é um preço pré-definido.

A solução analítica para a equação de Black-Scholes, dadas as condições de contorno acima para a opção de *call* é

$$f(X,t) = XN(d_1) - Ke^{r(t-T)}N(d_2) \quad (63)$$

Onde N é uma função densidade de probabilidade com distribuição normal, de média 0 e variância 1. E

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{X}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (64)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{X}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (65)$$

3 Metodologia

Neste trabalho adotou-se os seguintes procedimentos:

- Modelo matemático - modelagem de equações diferenciais estocásticas através do cálculo de Itô como possível modelo matemático para o mercado financeiro;
- Resolução numérica da equação obtida na modelagem, a partir do método de Euler-Maruyama;
- Análise estatística da resolução do modelo matemático, baseando-se nos fatos estilizados;
- Apresentação dos resultados e discussões, inclusive através de gráficos e dados obtidos.

3.1 Modelo matemático

Modelos baseados em equações diferenciais estocásticas se apresentam como uma forma de analisar mercados financeiros, haja visto que o conjunto de informações destes formam series temporais, que por muitas vezes apresentam comportamento imprevisível, tanto que para Mantegna e Stanley (2000) é praticamente impossível se prever seus valores futuros.

O conhecido modelo de Black e Scholes para a dinâmica de preços de opções do mercado europeu é talvez o mais conhecido modelo baseado em equações diferenciais estocásticas. Bouchaud e Cont (1998), por sua vez, propuseram um modelo baseado na equação não linear de Langevin. Eles observam que descrever o comportamento de cada agente do mercado é impossível em termos quantitativos, mas o comportamento coletivo do mercado e os seus impactos nos preços podem ser representados em termos estatísticos, e em particular, por uma equação estocástica com um pequeno número de termos (BOUCHAUD, 1998). Lima (2017) traz um modelo de dinâmica de preços dado por uma equação diferencial estocástica de Itô com um ruído multiplicativo e um potencial de interação não linear do tipo ϕ^4 , que pode representar momentos nos quais o mercado se torna instável, com um aumento ou declínio exponencial dos

valores do mercado, correspondendo a uma bolha especulativa (LIMA E SANTOS, 2017).

As grandes variações de preços apresentam leis de potência, as quais trazem informações importantes na análise do comportamento do mercado financeiro. Nesse ponto observa-se as leis de escala. A distribuição dos retornos de dados do mercado, que é dada por $r(t) \approx S(t) = \ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t))$, apresenta um comportamento hiperbólico nas suas caudas, e a distribuição de probabilidade acumulada de cauda longa segue a lei cúbica inversa, ou seja, $P(r) \sim |r|^{-\gamma}$, onde $\gamma \sim 3$. A volatilidade é definida como o módulo do retorno, $|r(t)|$ (MANTEGNA E STANLEY, 2000).

O modelo é definido por:

$$d(X(t)) = \mathfrak{F}(X(t))dt + \mathfrak{h}(X(t)) \circ dW(t) \quad (66)$$

onde $W(t)$ é um processo de Wiener. A equação apresentada acima mostra comportamento similar ao de uma partícula sob a ação de uma força conservativa do tipo $\mathfrak{F}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x$ com constantes reais $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$. O termo $dW(t)$ é relacionado a um ruído branco $\zeta(t)$ por $dW(t) = d\zeta(t)$, e é um processo de Markov que apresenta uma distribuição normal.

O caso com o potencial quadrático é o modelo de Bouchaud-Cont Langevin para o mercado financeiro, e observa-se que termos não lineares modelam instabilidades e crises, como "crashes" onde há um auto-reforço de "pânico". Pode também representar bolhas de especulação (BOUCHAUD, 2016).

Usando o Lema de Itô, escreve a equação acima para o caso $\mathfrak{h}(X(t)) = \beta(X(t), t)$ da seguinte forma:

$$df = \frac{\partial f}{\partial X} [\mathfrak{F}(X(t))dt + g(X(t)) \circ dW(t)] + \frac{\partial f}{\partial x} dt + [\mathfrak{h}(X(t))]^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dt \quad (67)$$

Aqui supõe-se ainda que o preço de uma opção tem valores definidos em $f(X(t))$, e depende apenas do seu valor atual de mercado, e não de seu histórico. Tem-se que $dW^2 \rightarrow dt$ e $dX^2 \rightarrow \beta^2 X^2 dt$. Assim, o processo de Wiener e f dependem somente da variável aleatória dX . Isso pode ser explorado através de uma variável Π , da qual a variação $d\Pi$ é determinística no pequeno intervalo de tempo dt . Fazendo $\Pi = f - \Delta X$, onde Δ é constante durante o intervalo dt , obtém-se

$$d\Pi = df - \Delta dX \quad (68)$$

E, portanto,

$$d\Pi = \beta \left(\frac{\partial f}{\partial X} - \Delta \right) [\mathfrak{F}(X(t))dt + \mathfrak{h}(X) \circ dW] + \frac{\partial f}{\partial X} dt + \frac{\mathfrak{h}(X)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dt \quad (69)$$

Escolhendo-se

$$\frac{\partial f}{\partial X} - \Delta = 0 \quad (70)$$

Sendo Δ o preço no instante inicial do passo Δt . O salto no preço da opção, cujo incremento é determinístico, em um passo, é dado por

$$d\Pi = \left[\frac{\mathfrak{h}(X)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right] dt \quad (71)$$

Onde $\mathfrak{h}(X(t))$ é uma função arbitrária do processo estocástico $(X(t))$. O retorno de um montante Π investido em ativos de risco mostraria um crescimento de $r\Pi dt$ no intervalo dt .

Observando-se o lado direito da equação acima, se o seu valor for maior do que o montante, uma negociação de arbitragem poderia ser feita através de um empréstimo do montante Π para ser investido no portfólio. O retorno r para essa estratégia poderia ser maior do que o custo do empréstimo, e é uma operação praticamente sem riscos. Por outro lado, se esse valor for menor do que $r\Pi dt$, a negociação traria lucro instantâneo ao arbitrador. A existência de arbitradores com habilidade para comprar e vender no intervalo de tempo em que o valor de um portfólio não se ajustou, tem por consequência que, em qualquer caso, o risco é praticamente o mesmo. Logo,

$$r\Pi dt = \left[\frac{\mathfrak{h}(X)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right] dt \quad (72)$$

Substituindo-se (66) e (68) na equação acima, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{(\mathfrak{h}(X))^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + rX \frac{\partial f}{\partial X} - rf = 0 \quad (73)$$

A qual é a equação diferencial parcial de Black-Scholes para o modelo apresentado.

Foi usado o método Euler-Maruyama para resolução numérica e análise dos modelos dados acima.

3.1.1 Método Euler-Maruyama

Uma equação estocástica pode ser escrita na forma integral, como se segue

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s), 0 \leq t \leq T \quad (74)$$

Onde f e g são funções escalares e a condição inicial de X_0 é uma variável aleatória. A integral à direita é referente ao processo de Wiener. $X(t)$ é uma variável aleatória para cada t . Não se define $X(t)$ como uma solução da equação, mas sim, se define um método numérico para resolver a equação. A equação é comumente encontrada na forma

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), X(0) = X_0, 0 \leq t \leq T \quad (75)$$

E convencionalmente usa-se mais a forma diferencial do que a anterior. Se $g = 0$ e X_0 é constante, a equação se reduz a uma equação diferencial ordinária $d(X(t))/dt = f(X(t))$, com $X(0) = X_0$. Para se aplicar o método de resolução através de $[0, T]$, deve-se discretizar o intervalo, onde $\Delta t = T/L$, em que L é um número natural, e $\tau_j = j\Delta t$. X_j é a aproximação numérica de $X(\tau_j)$. Obtém-se então

$$X(\tau_j) = X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{j-1})(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})), j = 1, 2, \dots, L \quad (76)$$

Nota-se que no caso determinístico, no qual $g = 0$ e X_0 é uma constante, o método se reduz ao método de Euler.

3.2 Análise estatística

Séries temporais financeiras apresentam características estatísticas comuns em diferentes períodos de tempo, e estas ficaram conhecidas como fatos estilizados (GOPI-KRISHNAN et al. ,1999). Essas características são observadas em todos os mercados financeiros.

3.2.1 Expoente de Hurst

Em 1906, o governo britânico nomeou o engenheiro Harold Edwin Hurst para desenvolver no Cairo, o projeto de um reservatório de água no Rio Nilo. Seu problema era desenvolver um reservatório ideal, o qual nunca deveria transbordar nem esvaziar.

Para resolver tal problema, Hurst estudou os mais de 800 anos de registros acerca dos níveis de água do Rio Nilo, e propôs um método estatístico para analisar os dados do reservatório ao longo do tempo. Esse método é chamado de Rescaled Range Analysis, ou Análise de Reescalamento R/S (FAVARO, 2007).

Seja um ano t em análise, o lago recebe uma quantidade $\xi(t)$ de água. O volume médio de entrada água em n anos é:

$$\langle \xi(t) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi(t) \quad (77)$$

Para manter o nível do reservatório em condições ideais, a mesma quantidade de água deve ser liberada. Assim, $X(t,n)$ determina a quantidade acumulada de água no reservatório, subtraindo-se a quantidade média de entrada, como se segue:

$$X(t,n) = \sum_{i=1}^n \xi(m) - \langle \xi(t) \rangle \quad (78)$$

A diferença entre os valores máximo e mínimo de $X(t,n)$ é chamada de *range*, que neste caso, é a capacidade necessária para se manter a descarga media no período

$$R(n) = X_{max}(t,n) - X_{min}(t,n); 1 \leq t \leq n \quad (79)$$

Dividindo-se a relação encontrada R pelo desvio padrão S , chega-se à razão adimensional

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} [\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle]^2} \quad (80)$$

Hurst aplicou este método em diferentes fenômenos naturais, e encontrou de forma empírica, que a razão adimensional R/S é proporcional ao tempo de observação elevado a um expoente H , denominado expoente de Hurst (FAVARO, 2007).

$$\frac{R}{S} = kn^H \quad (81)$$

Estimativa do expoente de Hurst – os valores estimados de H estão entre 0 e 1, e traz informações quanto à correlação do sistema em análise. Para $H = 0,5$, os valores da série temporal não possuem correlação, ou seja, são independentes. Um exemplo clássico para esse caso é um processo de Wiener. Para $H < 0,5$, a série é chamada de anti persistente, ou seja, os incrementos de valores positivos são seguidos de incrementos com valores negativos, e vice versa. Associando-se ao valor de um ativo, há um risco alto em investir-se num ativo com esse comportamento, pois não apresenta nenhuma tendência. Para $H > 0,5$, a série é chamada de persistente, o que significa que os incrementos futuros se comportam de forma semelhante aos incrementos passados, implicando numa tendência em seu comportamento. Um ativo persistente é considerado um investimento de maior segurança.

3.2.2 Detrended fluctuation analysis – DFA

O detrended fluctuation analysis foi proposto por Peng em 1994 (Kantelhardt, 2001) e, desde então, se mostra como uma ferramenta de grande importância para a detecção da correlação de longo alcance em séries temporais não estacionárias. Suas aplicações abrangem séries temporais em diferentes áreas, como meteorologia, análise espectral, neurociência e economia. A ideia do DFA é eliminar possíveis tendências determinísticas, e então analisar a flutuação da série retificada. O procedimento para se implementar o DFA consiste de quatro etapas. Na primeira, integra-se a série temporal inicial (x_i) onde

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (82)$$

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i x_k - \langle x \rangle \quad (83)$$

Em que

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_k^n x_k \quad (84)$$

No segundo passo, divide-se $Y(i)$ em intervalos $N_s = N/s$ segmentos de comprimento s . Em seguida, calcula-se a tendência local para cada segmento v por meio de uma função Y_s

$$Y_s = Y(i) - p_v(i) \quad (85)$$

Onde $p_v(i)$ é um polinômio de ajuste de mínimos quadrados no intervalo. Podem ser feitos ajustes por meio de polinômios de ordem linear, cúbica ou ordens superiores, que são nomeados como DFA1, DFA3 e assim por diante. Esses métodos se diferem a capacidade de eliminar tendências no conjunto de dados. Na n -ésima ordem do DFA, tendências de ordem $n - 1$ nos dados originais são eliminadas (KANTELHARDT, 2001). Para o quarto passo calcula-se a variância da serie $Y(i)$ em relação a Y_s , e determina-se uma função de flutuação $F(s)$

$$F_s^2(v) = \langle Y_s^2(i) \rangle = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s Y_s^2[(v-1)s + i] \quad (86)$$

$$F(s) = \left[\frac{1}{2N_s} \sum_{i=1}^s F_s^2(v) \right]^{1/2} \quad (87)$$

Para ordens diferentes de DFA obtém-se funções de flutuação diferentes, que são denotadas por $F^n(s)$, definida quando $s \leq n + 2$. Se os dados analisados possuem uma lei de potência de cauda longa, a função de flutuação cresce conforme a lei de potência

$$F^n(s) \propto s^\alpha \quad (88)$$

Para se mensurar α , assume-se $F^n(s)$ como uma função de s , ambos em escala logarítmica. Para dados correlacionados de curto alcance, espera-se $\alpha = 0,5$, e para dados correlacionados de longo alcance, $\alpha > 0,5$.

3.2.3 Lei cúbica inversa da distribuição de probabilidade acumulada para a volatilidade

Vários fenômenos naturais seguem comportamentos descritos por leis de potência. Elas são descritas por expressões do tipo $Y = aX^k$, em que a é uma constante de

proporcionalidade e k é o expoente da escala. Em mercados financeiros diversos, leis de potência também têm sido observadas através da distribuição acumulada da volatilidade, medida da flutuação média do mercado financeiro, a qual se relaciona diretamente à quantidade de informação disponível sobre o mercado financeiro. Através dela, se pode quantificar o risco de um ativo, sendo assim uma variável muito importante ao se analisar um determinado mercado ou ativo. Como visto no capítulo 2, modelos como o Black and Scholes se baseiam na volatilidade para se precificar uma opção. A volatilidade pode ser determinada através do módulo do retorno (MANTEGNA E STANLEY, 2000).

Para se observar o comportamento de uma distribuição, define-se a distribuição acumulada da variável $g(t)$, na qual

$$g(t) \equiv \left| \frac{S(t)}{\sigma} \right| \quad (89)$$

e σ é o desvio padrão da série obtida através do modelo.

A distribuição de probabilidade acumulada $F(g)$ segue uma lei de potência de potência de comportamento assintótico, definida por (GOPIKRISHNAN, 2008):

$$F(g) \sim g^{-\gamma} \quad (90)$$

O expoente γ pode ser estimado aplicando-se o logaritmo comum aos dois termos da lei acima, onde obtém-se

$$\gamma = -\frac{\log F(g)}{\log g} \quad (91)$$

Séries temporais de mercados financeiros, ações de empresas, cotação de moedas e índices como o *S&P 500*, entre outros, apresentam um padrão de comportamento semelhante, o qual mostra o valor $\gamma \approx 3$ (GOPIKRISHNAN, 2008), (MANTEGNA E STANLEY, 2000). Tal observação é adotada como um fato estilizado das séries temporais financeiras.

3.3 O S&P 500

O Standart and Poor's 500, ou de forma abreviada, S&P 500, é uma família de índices de ações das quinhentas maiores empresas presentes no mercado de ações dos

Estados Unidos da América, e consta de uma gama de índices, com base em seus tamanhos, setores e estilos. Assim, cada empresa que o compõe apresenta um peso diferente, e o percentual de participação delas depende do seu valor de mercado. Tem esse nome oriundo de duas companhias financeiras que se fundiram em 1941, a Standard Statistics Co. e Poor's Publishing Co. O S&P 500 foi lançado em 04 de Março de 1957.

Para que uma empresa faça parte do índice S&P 500, ela deve ter seguir alguns critérios avaliados por um comitê, tais como a sua sede fiscal deve se localizar nos Estados Unidos, bem como seus ativos permanentes e suas receitas, os quais, majoritariamente, devem estar dentro do país. Além disso, deve entregar anualmente à *U.S. Securities and Exchange Commission* um relatório anual chamado *10-K*, o qual fornece uma visão abrangente da condição financeira da empresa e seus negócios, bem como demonstrações financeiras auditadas. Dentre as empresas que fazem parte do S&P 500, pode-se destacar algumas, como Microsoft, Apple, Amazon, Facebook, Berkshire Hathaway, Johnson & Johnson, Visa, Coca-Cola. Entretanto, as empresas que compõem o índice não são fixas, dado que o mesmo comitê monitora e atualiza periodicamente estas empresas.

Um índice de ações funciona como uma referência para investidores e para os mercados, de uma forma geral. Ou seja, através de um índice, se pode analisar o desempenho de empresas e observar se uma aplicação proporciona um resultado satisfatório. O S&P 500 é talvez o principal índice do mundo, sendo considerado uma das melhores representações para o mercado americano.

4 Resultados e discussão

4.1 Modelo matemático

A partir da equação diferencial estocástica apresentada em (67) adotou-se o termo não linear dado por

$$\mathfrak{F}(X(t)) = X(t) + (X(t))^3 + (X(t))^5 + (X(t))^7 \quad (92)$$

obtendo-se

$$dX(t) = [X(t) + (X(t))^3 + (X(t))^5 + (X(t))^7] dt + \beta(X(t),t) \circ dW(t) \quad (93)$$

Foram adotados dois valores para $\beta(X(t),t)$. No primeiro caso, $\beta(X(t),t) = \beta \neq 0$:

$$dX(t) = [X(t) + (X(t))^3 + (X(t))^5 + (X(t))^7]dt + \beta dW(t) \quad (94)$$

Para efeito de uma maior praticidade da exposição dos resultados obtidos neste trabalho, adota-se nomear a equação (94) como "modelo 1".

Em outro caso, adotou-se o ruído multiplicativo $\beta(X(t),t) = X^\mu$, onde $\mu \in \mathbb{R} > 1$. Obtém-se assim, a equação

$$dX(t) = [X(t) + (X(t))^3 + (X(t))^5 + (X(t))^7]dt + X(t)^\mu \circ dW(t) \quad (95)$$

Onde $dW(t)$ possui largura igual a \sqrt{dt} . Assim, temos $\beta dW(t) \sim \sqrt{dt}\beta R_G$, onde R_G é um gerador de números aleatórios com uma distribuição gaussiana, isto é, média 0 e variância $\sigma^2 = 1$.

Adota-se nomear a equação (95) como "modelo 2".

Com o objetivo de investigar as equações acima enquanto possíveis modelos matemáticos para a dinâmica do mercado financeiro, a equação foi resolvida numericamente. Pode-se observar através da figura abaixo o comportamento das equações diante dessa solução:

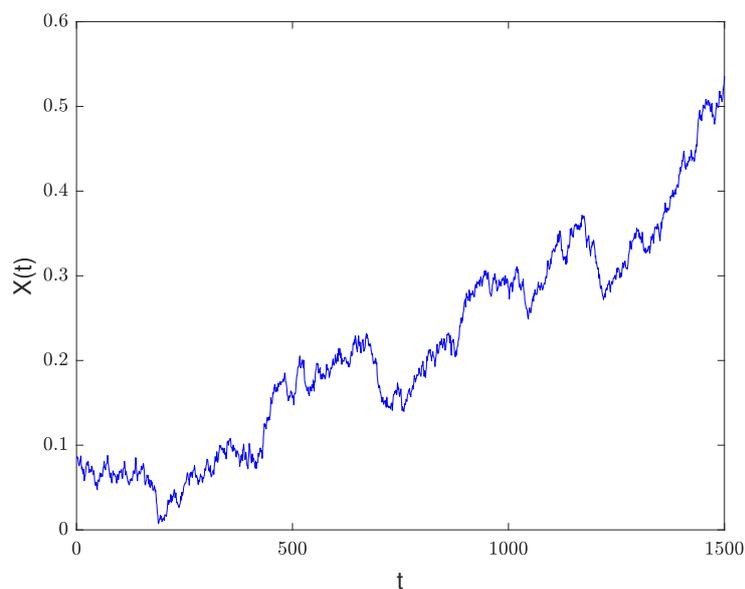


Figura 3 – Solução de $dX(t)$ através do Método Euler-Maruyama para o modelo 1. O passo usado na simulação é $\Delta t = 0,001$, e $\beta = 0,6$

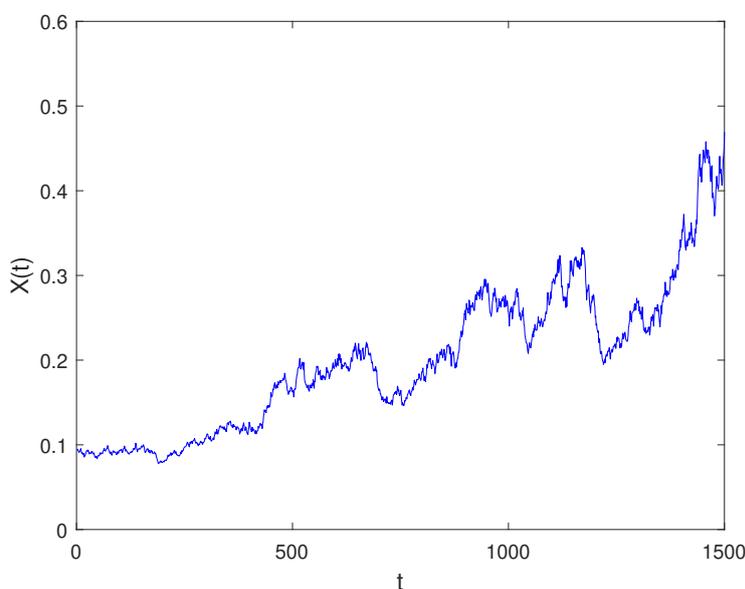


Figura 4 – Solução de $dX(t)$ através do Método Euler-Maruyama para o modelo 2. O passo usado na simulação é $\Delta t = 0,001$ e $\mu = 1,1$

Os resultados acima exibidos são comparáveis ao comportamento de uma série temporal real, como por exemplo, o índice S&P 500, exibido a seguir

Entretanto, apesar de visualmente haver certa semelhança entre modelos e a série

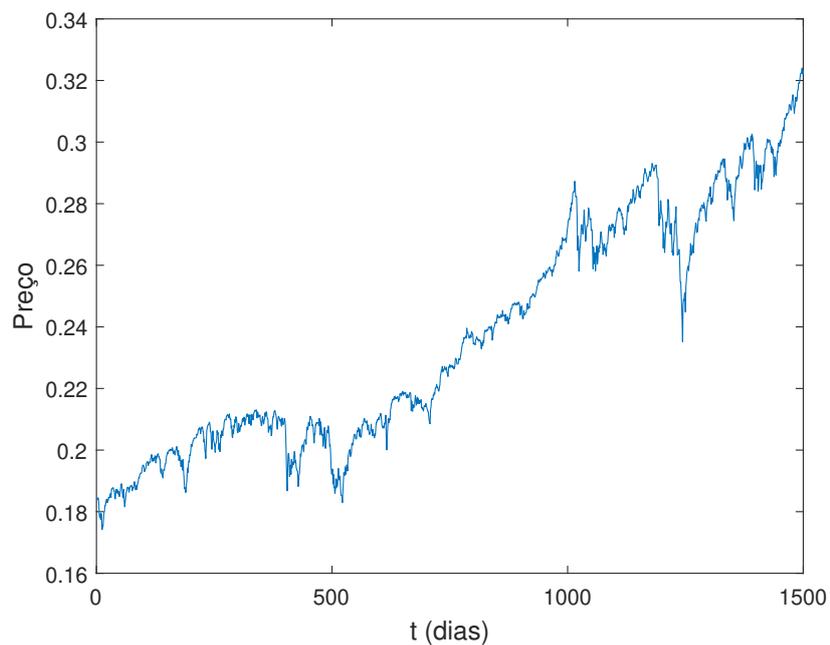


Figura 5 – Índice S&P 500 diário, observado no intervalo de 16/01/2014 a 31/12/2019

temporal real, é através da análise estatística dos fatos estilizados que um modelo pode ser testado de fato, podendo ou não ser adotado como um modelo para o mercado financeiro.

4.2 Retorno e volatilidade

4.2.1 Retorno

A variação de preços de um ativo financeiro denota o risco de uma carteira, e a avaliação destes é um dos principais objetivos em finanças. Dado um preço de um ativo no instante t , $X(t)$, pode-se representar a variação de preços entre os instantes t e $t + \Delta t$ por $\Delta P(t) = P(t + \Delta t) - P(t)$, e a variação relativa de preços, ou retorno, é definido por:

$$R(t) = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)} = \frac{\Delta X}{X(t)} \quad (96)$$

O retorno fornece uma porcentagem de ganho ou perda num dado período de tempo. Para se analisar um grande período de tempo, é comumente usada a definição (MANTEGNA E STANLEY, 2000)

$$r(t) \approx S(t) = \ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t)) \quad (97)$$

Pois, por essa definição, também conhecida como log-retorno, possíveis flutuações presentes em dados de baixa frequência são suavizadas, já que os log-retornos são aditivos (SAMPAIO, 2008).

Retornos raramente apresentam tendências, ao contrário de séries de preços ou taxas de câmbio, por exemplo. Os retornos possuem características próprias, como a distribuição em cauda longa, incompatível com a distribuição normal. Logo, séries de retornos apresentam a tendência a serem não lineares.

O retorno, de uma forma geral, proporciona uma análise sem escalas. Pode se dizer que é um resumo completo de um ativo. A análise do retorno, portanto, se mostra mais eficiente do que a análise pura dos preços.

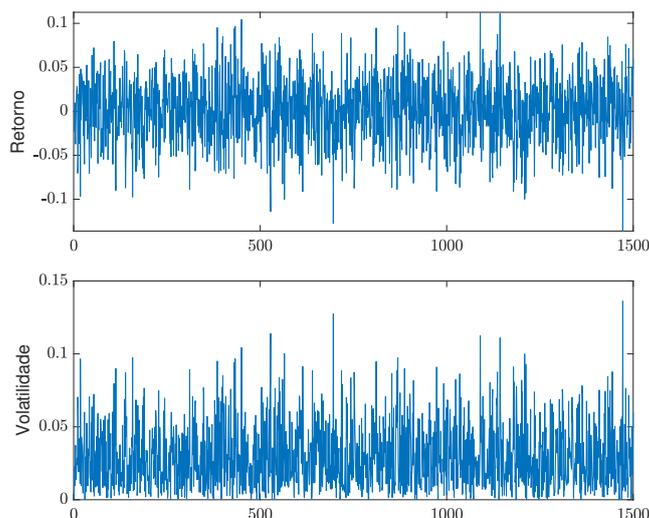


Figura 6 – *Evolução do retorno e volatilidade para o modelo 1. O retorno foi obtido por $r(t) \approx S(t) = \ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t))$, e a volatilidade é dada por $|r(t)|$ (MANTEGNA E STANLEY, 2000). O passo usado para a simulação é $\Delta t = 0,001$.*

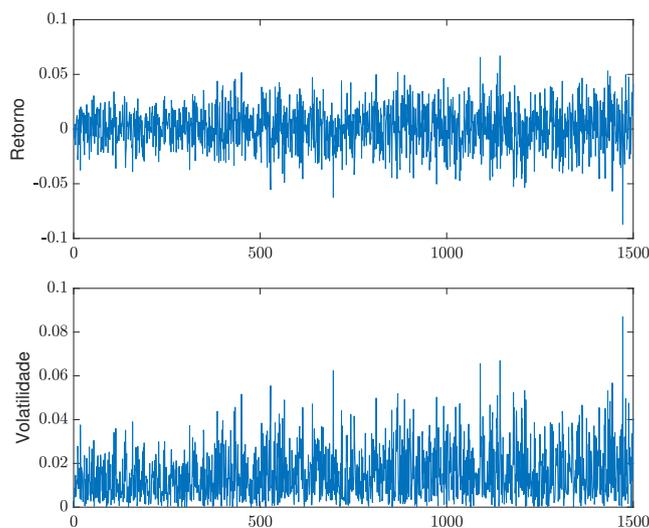


Figura 7 – *Evolução do retorno e volatilidade para o modelo 2. O retorno foi obtido por $r(t) \approx S(t) = \ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t))$, e a volatilidade é dada por $|r(t)|$ (MANTEGNA E STANLEY, 2000). O passo usado para a simulação é $\Delta t = 0,001$.*

Como observado nas imagens acima, em ambos os casos, o retorno não apresenta tendências e sazonalidades, fato observado comumente em séries temporais de retornos financeiros. As figuras 6 e 7 mostram a oscilação do retorno e da volatilidade oscilando rapidamente como esperado. O passo usado na simulação é de 0,001, com o tempo t percorrendo a unidade escolhida (segundos, minutos, dias, meses ou anos).

Para quantificar a força da memória de longo alcance dos dados obtidos nos modelos para o retorno e a volatilidade, foi implementado o *detrended fluctuation analysis (DFA)*, cujos resultados obtidos estão a seguir.

4.3 DFA e índice de Hurst

Através do índice de Hurst analisa-se a memória de cauda longa da série temporal do retorno e da volatilidade, onde se observa as características dos dados obtidos. O *detrended fluctuation analysis* tem se mostrado um método mais eficiente do que a Análise R/S para encontrar o índice de Hurst, que é um método mais antigo e padronizado. O índice de Hurst H é usado como uma medida da memória de cauda longa de uma série temporal (LIMA, 2016), e como observado em na seção anterior, quando $H = 0,5$, os valores da série temporal não possuem correlação, ou seja, são independentes. Para $0 < H < 0,5$, a série é chamada de anti persistente, ou seja, os incrementos de valores positivos são seguidos de incrementos com valores negativos, e vice versa, o que significa que um valor alto provavelmente será seguido de um valor baixo, e o valor seguinte tende a ser alto, e assim por diante. Essa tendência segue por um longo intervalo de tempo. Para $H > 0,5$, a série é chamada de persistente, o que significa que os incrementos futuros se comportam de forma semelhante aos incrementos passados, implicando numa tendência em seu comportamento.

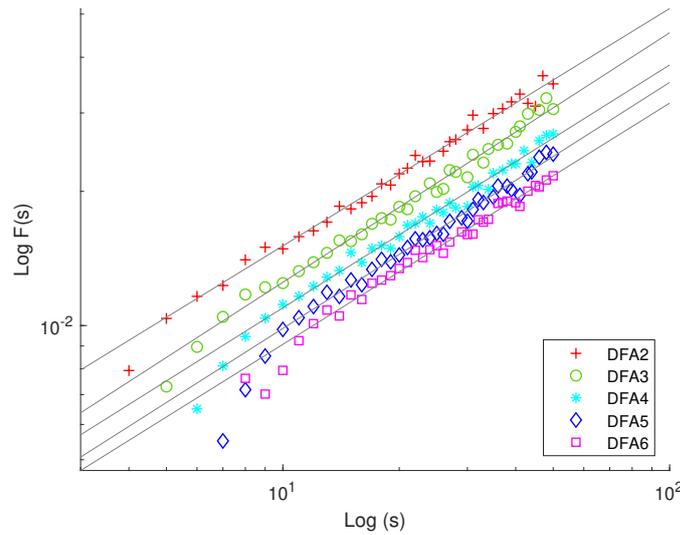


Figura 8 – Gráfico Log-Log de detrended fluctuation analysis: função de flutuação $F(s)$ vs. comprimento s para o retorno $r(t)$ do modelo 1. As linhas sólidas representam o ajuste linear dos mínimos quadrados para os dados analisados. Os valores obtidos para o DFA de ordem 2 a 6 são, respectivamente, 0,5325, 0,556, 0,5449, 0,5528 e 0,5413.

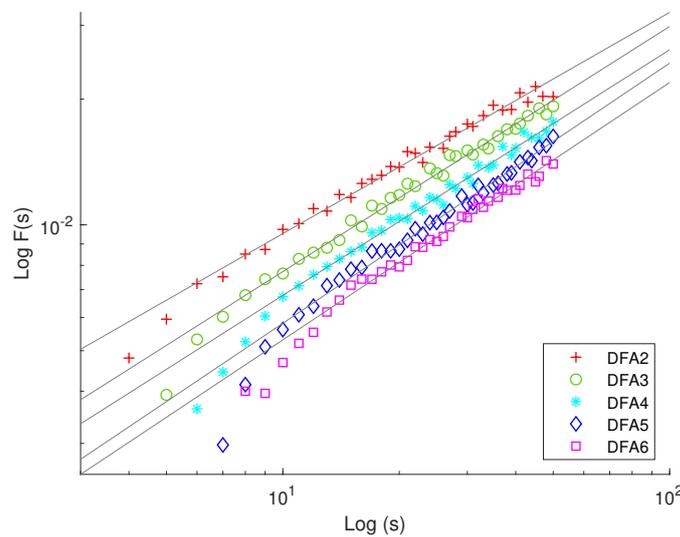


Figura 9 – Gráfico Log-Log de detrended fluctuation analysis: função de flutuação $F(s)$ vs. comprimento s para a volatilidade $|r(t)|$ do modelo 1. As linhas sólidas representam o ajuste linear dos mínimos quadrados para os dados analisados. Os valores obtidos para o DFA de ordem 2 a 6 são, respectivamente, 0,5292, 0,5864, 0,5876, 0,6223 e 0,6155.

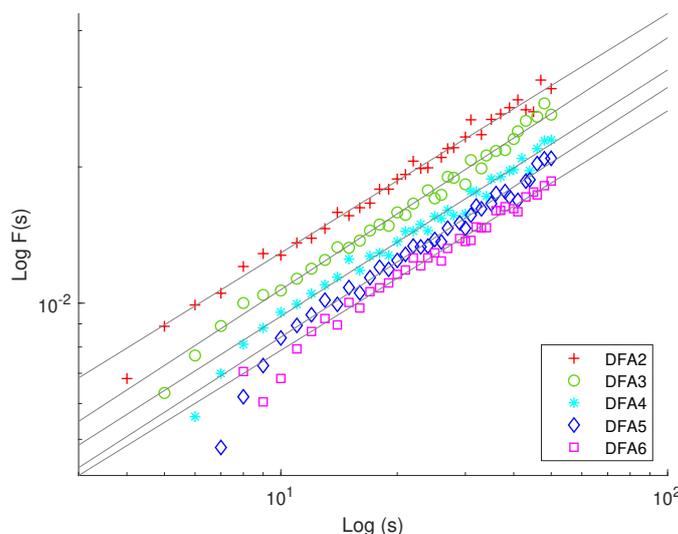


Figura 10 – Gráfico Log-Log de detrended fluctuation analysis: função de flutuação $F(s)$ vs. comprimento s para o retorno $r(t)$ do modelo 2. As linhas sólidas representam o ajuste linear dos mínimos quadrados para os dados analisados. Os valores obtidos para o DFA de ordem 2 a 6 são, respectivamente, 0,5287, 0,5566, 0,5444, 0,5517 e 0,529.

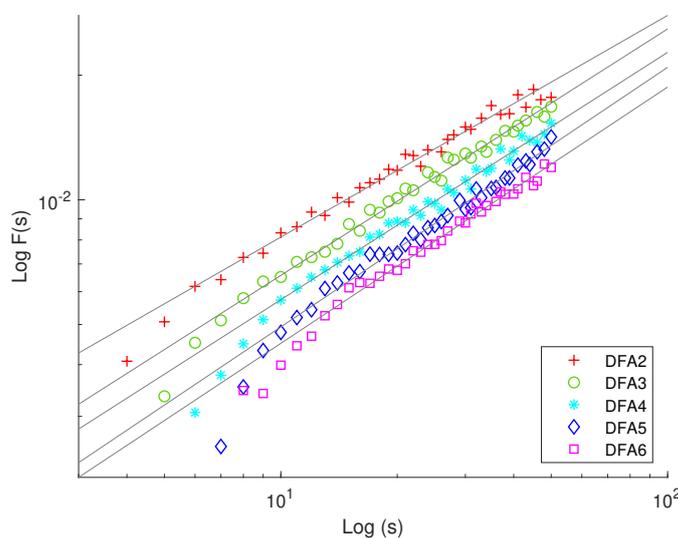


Figura 11 – Gráfico Log-Log de detrended fluctuation analysis: função de flutuação $F(s)$ vs. comprimento s para a volatilidade $|r(t)|$ do modelo 2. As linhas sólidas representam o ajuste linear dos mínimos quadrados para os dados analisados. Os valores obtidos para o DFA de ordem 2 a 6 são, respectivamente, 0,5354, 0,5951, 0,5974, 0,6269 e 0,6189.

A correlação temporal de longo alcance pode ser melhor caracterizada através da análise do expoente de Hurst. Foi utilizado o método *detrended fluctuation analysis*, apresentado na seção 3.2.2, para analisar as correlações de longo alcance para as séries temporais do retorno $r(t) \approx S(t) = \ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t))$ e da volatilidade $|r(t)|$ dos modelos expostos em 4.1. O DFA tem se mostrado um método mais confiável do que a análise R/S , e atualmente tem sido usado com maior frequência. As figuras 8 e 10 exibem os gráficos da aplicação do método DFA aplicado às séries temporais do retorno, e as figuras 9 e 11, os gráficos da volatilidade.

Retorno – foram obtidos, respectivamente, os valores aproximados de 0,53, 0,56, 0,54, 0,55 e 0,54 pelo método DFA de ordens 2 a 6 aplicado à série temporal gerada a partir do modelo 1, e os valores 0,53, 0,56, 0,54, 0,55 e 0,53 para a série temporal do modelo 2. Em ambos os casos, todos os valores são entre 0,5 e 1, o que significa a existência de uma memória de longo alcance persistente, porém com valores próximos a 0,5, o que pode implicar numa tendência menor em seu comportamento.

Volatilidade – foram obtidos, respectivamente, os valores aproximados de 0,53, 0,59, 0,59, 0,62 e 0,62 pelo método DFA de ordens 2 a 6 aplicado à série temporal gerada a partir do modelo 1, e os valores 0,54, 0,6, 0,6, 0,63 e 0,62 para a série temporal do modelo 2. Em ambos os casos, novamente foram obtidos valores entre 0,5 e 1, o que significa a existência de uma memória de longo alcance persistente. Os valores nesse intervalo indicam um comportamento não estacionário ilimitado para a série temporal.

4.4 Lei cúbica inversa para a distribuição de probabilidade acumulada da volatilidade

Séries temporais de mercados financeiros, ações de empresas, cotação de moedas e índices como o *S&P 500*, entre outros, apresentam um padrão de comportamento semelhante, o qual mostra o valor $\gamma \approx 3$ (GOPIKRISHNAN, 2008), (MANTEGNA E STANLEY, 2000). Tal observação é adotada como um fato estilizado das séries temporais financeiras.

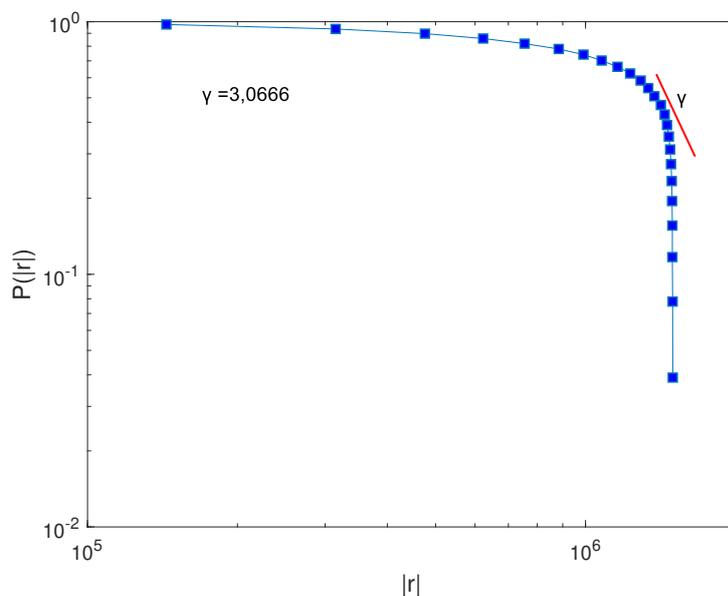


Figura 12 – Gráfico Log-Log da probabilidade acumulada das volatilidades $P |r|$ vs $|r|$ para o modelo 1. O ajuste de mínimos quadrados da lei de potência é dado por $P |r| \sim vs. |r|^{-\gamma}$, e o valor de γ obtido é de $\gamma = -3,0666$. O passo usado na simulação é de $\Delta t = 0,001$. A linha em destaque mostra o melhor ajuste para γ .

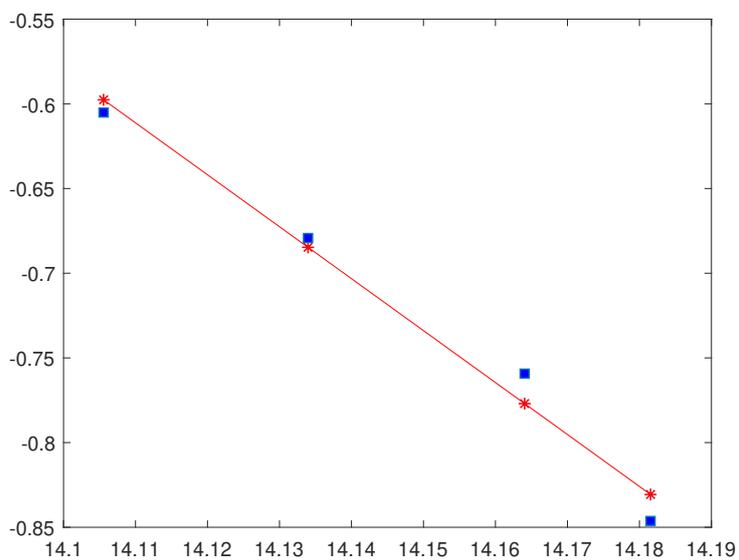


Figura 13 – Regressão linear para o modelo 1, a partir do ajuste dos ajustes dos mínimos quadrados na região em destaque na figura 9.

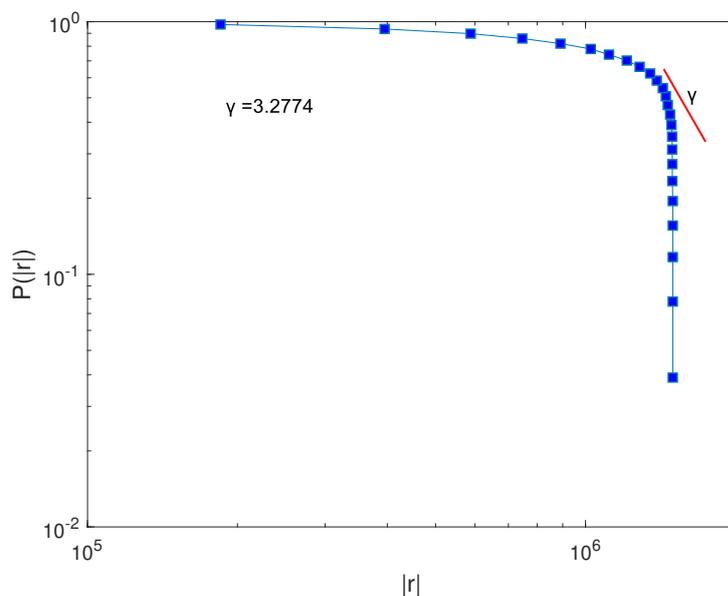


Figura 14 – Gráfico Log-Log da probabilidade acumulada das volatilidades $P |r|$ vs $|r|$ para o modelo 2. O ajuste de mínimos quadrados da lei de potência é dado por $P |r| \sim vs. |r|^{-\gamma}$, e o valor de γ obtido é de $\gamma = -3.2774$. O passo usado na simulação é de $\Delta t = 0,001$. A linha em destaque mostra o melhor ajuste para γ .

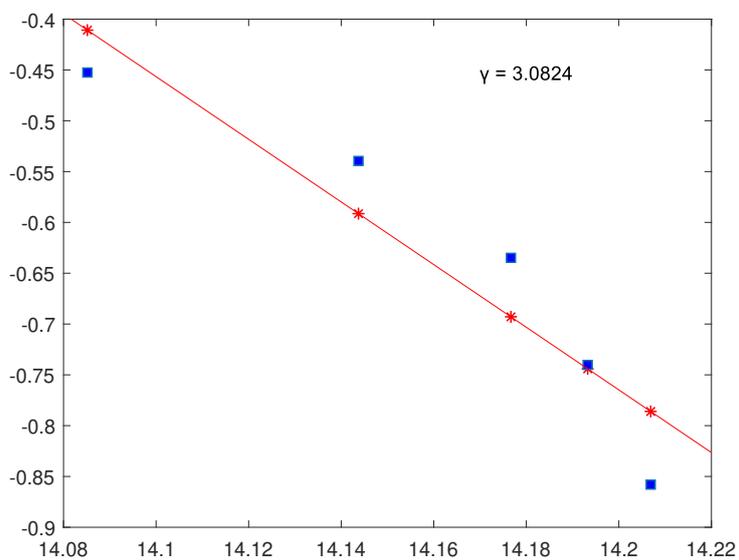


Figura 15 – Regressão linear para o modelo 2, a partir do ajuste dos ajustes dos mínimos quadrados na região em destaque na figura 11.

Nas figuras 12 e 14 são mostrados os comportamentos da distribuição de cauda longa para a distribuição acumulada $P(> |r|)$ da volatilidade $|r(t)|$ nos modelos 1 e 2, respectivamente. Comportamento que segue a lei de potência cúbica inversa $P |r(t)| = |r(t)|^{-\gamma}$, onde γ é o índice da cauda, e deve assumir um valor próximo de 3, que como observado acima, é tido um fato estilizado para as séries temporais financeiras.

Para o modelo 1 foi obtido o expoente $\gamma = 3,0666$ através do ajuste de mínimos quadrados. O passo usado para a simulação é $\Delta t = 0,001$. O valor se aproxima de 3, o que evidencia um comportamento próximo à lei cúbica inversa. Foram feitos testes com diferentes valores de Δt , onde foram obtidos os expoentes: para $\Delta t = 1$, $\gamma = 3,2476$; para $\Delta t = 2$, $\gamma = 3,8708$; e para $\Delta t = 4$, $\gamma = 3,4023$.

Para o modelo 2 foi obtido o expoente $\gamma = 3,2774$ nos mesmos moldes do modelo 1. O valor também se aproxima de 3, o que evidencia um comportamento próximo à lei cúbica inversa. Foram feitos testes com diferentes valores de Δt , onde foram obtidos os expoentes: para $\Delta t = 1$, $\gamma = 3,3272$; para $\Delta t = 2$, $\gamma = 3,8708$; e para $\Delta t = 4$, $\gamma = 2,6573$.

Variando os valores de Δt , se pode observar o comportamento da distribuição acumulada das volatilidades em diferentes escalas de tempo. Assim como observado por Gopikrishnan et al.(1999), em intervalos de tempo maiores, o índice S&P 500 também apresenta o expoente menor, o que caracteriza um decaimento mais rápido do que o exponencial. De fato, os expoentes de γ encontrados para o S&P 500 foram: 3,2938 para $\Delta t = 0,001$, 3,2932 para $\Delta t = 1$, 2,6437 para $\Delta t = 2$ e 2,7371 para $\Delta t = 4$.

5 Conclusões

Neste trabalho, estudamos dois modelos baseados em equações diferenciais estocásticas de Itô e no conhecido modelo de Black e Scholes. O retorno, obtido por $r(t) \approx S(t) = \ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t))$, diz sobre a variação de preços entre os instantes t e $t + \Delta t$, e é uma das variáveis mais importantes no estudo de mercados financeiros e a sua distribuição tem grande impacto nos preços de ativos (GU et al., 2007). O retorno foi extraído dos modelos, e a partir deste, foi obtida a volatilidade, dada por $|r(t)|$. A série temporal obtida oscilou rapidamente dentro de uma faixa, assim como observado em mercados financeiros reais, como o S&P 500, o qual é uma família de índices das 500 maiores empresas dos Estados Unidos.

Através da volatilidade, foi observada o comportamento do modelo perante os fatos estilizados do mercado financeiro, que são propriedades gerais observadas em quase todos os mercados financeiros. Foi empregado o detrended fluctuation analysis para se observar o comportamento da memória de longo alcance da volatilidade para ambos os modelos. O mesmo método foi utilizado para se observar também o retorno.

No modelo 1, os valores obtidos para a volatilidade estiveram no intervalo de 0,53 a 0,62 pelo método DFA de ordens 2 a 6, e para o modelo 2, entre 0,54 e 0,63. Em ambos os casos, os valores obtidos para a série temporal da volatilidade indicam um comportamento não estacionário e ilimitado. O S&P 500, no período de 16/01/2014 a 31/12/2019, obteve os valores entre 0,69 e 0,72, também apresentando o mesmo comportamento.

Para o retorno, os valores obtidos ficaram entre 0,53 e 0,56 para ambos os modelos. De acordo com Gu e Zhou (2009), o expoente de Hurst dos retornos é próximo de $\alpha = 0,5$, e as diferenças de preços entre compras e vendas de ações, conhecidas como *spreads*, apresentam leis de potência nas caudas, o que é observado em distribuições empíricas, como observado no modelo MF(MIKE; FARMER, 2008). De fato, os retornos observados para o S&P 500 para o mesmo período citado acima ficaram entre 0,47 e 0,51, próximo de um processo de Wiener, tendo uma dependência de curto alcance e pouca correlação.

Foi estudado também o comportamento da distribuição de cauda longa para as volatili-

dades e verificou-se uma aproximação satisfatória da lei cúbica inversa, obtendo-se os expoentes $\gamma = 3,0666$ e $\gamma = 3,2774$ para os modelos 1 e 2, respectivamente. A lei de potência foi analisada para valores de $\Delta t = 0,001$. Observou-se também que em intervalos de tempo maiores, os valores de γ se comporta de maneira semelhante à observada no índice S&P 500 (GOPIKRISHNAN et al., 1999), bem como também observado em testes no período de 16/01/2014 a 31/12/2019, onde foi obtido o expoente $\gamma = 3,2938$, e para períodos maiores de tempo também oscilou para um decaimento mais rápido que o exponencial.

Há na literatura muitos modelos matemáticos para descrever o comportamento do mercado financeiro. Entretanto, não há um modelo definitivo que atenda fielmente às situações reais. Mas através dos dados estatísticos conhecidos como fatos estilizados, se pode analisar as propriedades do modelo, e verificar se essas propriedades estão em acordo com as informações empíricas de índices como o S&P 500. Equações diferenciais estocásticas tem se mostrado como uma alternativa interessante para investigar o mercado financeiro, dadas às suas propriedades estatísticas, próximas às dos fatos estilizados.

Os modelos desenvolvidos neste trabalho apresentaram resultados semelhantes aos fatos estilizados comuns à maioria dos mercados financeiros (GU; ZHOU, 2009), (MIKE; FARMER, 2008), (MANTEGNA; STANLEY, 2000). Analisando o comportamento de mercados como o S&P 500, pode-se notar que apresenta um comportamento semelhante ao obtido através dos modelos matemáticos apresentados neste trabalho, o que pode mostrar a força dos modelos teóricos propostos. Acerca dos termos não lineares adicionados à equação diferencial estocástica de Itô, observa-se que eles podem modelar situações de instabilidade e quebras, bem como serem responsáveis por modelar colapsos súbitos de bolhas de especulação.

Portanto, estudar polinômios no termo de "drift" pode ser interessante, pois as quebras no mercado financeiro são grandes instabilidades, e a combinação deste polinômio com o termo de difusão mostrou bons ajustes quanto à estas instabilidades.

Como os resultados obtidos até aqui mostram que os modelos atendem bem aos fatos estilizados, até então conclui-se que os modelos são boas aproximações à dinâmica do mercado financeiro.

6 Referências Bibliográficas

Black, F. & Scholes, M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy , pp. 81,637-654.

C.W.Gardiner. (1997). *Handbook of Stochastic Methods*. New York: Springer.

Favaro, G. M. (2007). *Dinâmicas Autoregressivas em Econofísica*. São Carlos, SP, Brasil: USP.

Gopikrishnan, P., Meyer, M., Amaral, L. A.N. & Stanley, H. (1998). *Inverse Cubic Law for the Distribution of Stock Price Variants*. Fonte: <https://doi.org/10.1007/s100510050292>

Gopikrishnan, P., Plerou, V., Amaral, L.A.N. & Stanley, H. (1999). *Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices*. Fonte:<https://arxiv.org/pdf/cond-mat/9905305.pdf>

Gu, G.-F., Chen, W. & Zhou, W.-X. *Empirical distributions of Chinese stock returns at different microscopic timescales*. Fonte: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.10.012>

Gu, G.-F. & Zhou, W.-X. (26 de Maio de 2009). *Emergence of long memory in stock volatilities from a modified Mike-Farmer model*. Europhysics Letters Association .

Bouchaud,J.P. & Cont, R. (1998). *A Langevin approach to stock market fluctuation and crashes*. The European Physical Journal B , pp. 543-550.

Kantelhardt, J. W., Koscielny-Bunde, E., Rego, H. H., Havlin, S. & Bunde, A. (2001). *Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis*. Physica A , pp. 441-454.

Lima, L. S. (2017). *Modeling of the financial market using the two-dimensional anisotropic Ising Model*. Physica A 482 , pp. 544-551.

Lima, L. S. & K.C.Santos, G. (2018). *Stochastic Process with multiplicative structure for the behavior of the financial market*. Physica A 222 , pp. 222-229.

- Mike, S. & Farmer, J. (2005). *An empirical behavioral model of price formation*. J.Econ.Dyn. Control.
- Misturini, R. (2010). *Movimento Browniano, Integral de Itô e Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas*. Porto Alegre: UFRGS.
- Mantegna, R. & Stanley, H. (2000). *An Introduction to Econophysics - Correlations and Complexity in Finance*. New York: Cambridge.
- Oksendal, B. (2013). *Stochastic Differential Equations - An Introduction with applications*. Oslo: Springer.
- Prudente, L. d. (2009). *Estimação da superfície de volatilidade dos ativos através da Equação de Black-Scholes Generalizada*. Campinas, SP, Brasil: Unicamp.
- Rincon, Luis (2014). *Introducción a la probabilidad*. México, DF: UNAM.
- Rincon, Luis (2012). *Introducción a los procesos estocásticos*. México CDMX: UNAM.
- Ruffino, Paulo Regis C. (2009) *Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: IMPA
- Sampaio Filho, Cesar Ivan Nunes (2008). *Econofísica: dinâmica de agentes heterogêneos no estudo da volatilidade*. Recife, PE, Brasil: UFPE.
- Scherer, C. (2010). *Métodos Computacionais da Física*. São Paulo: Livraria da Física.
- Shreeve, S. (1997). *Stochastic Calculus and Finance*. New York: Springer.
- Tomé, T. & Oliveira, M. J. (2014). *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. São Paulo: EDUSP.
- W.-X.Zhou & Sornette, D. (2007). *Self-organizing Ising model of financial markets*. The European Physical Journal , pp. 175-181.