CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

MODELOS DE REDES NEURAIS, REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA E MÁQUINA DE VETORES DE SUPORTE NA PREVISÃO DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO

VANDERCI FERNANDES ARRUDA

Orientador: Gray Farias Moita

BELO HORIZONTE

MARÇO DE 2021

VANDERCI FERNANDES ARRUDA

MODELOS DE REDES NEURAIS, REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA E MÁQUINA DE VETORES DE SUPORTE NA PREVISÃO DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.
Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional.
Linha de pesquisa: Sistemas Inteligentes
Orientador: Gray Farias Moita
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

BELO HORIZONTE
MARÇO DE 2021

Arruda, Vanderci Fernandes
A779m Modelos de redes neurais, regressão linear múltipla e máquina de vetores de suporte na previsão da resistência à compressão do concreto / Vanderci Fernandes Arruda. – 2021.
83 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.
Orientador: Gray Farias Moita.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Redes neurais (Computação) – Teses. 2. Inteligência artificial – Teses. 3. Análise de regressão – Teses. 4. Máquina de vetores de suporte – Teses. 5. Aprendizado do computador – Teses. 6. Inteligência Computacional – Teses. I. Moita, Gray Farias. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 001.64404

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

Esta folha deverá ser substituída pela cópia digitalizada da folha de aprovação fornecida pelo Programa de Pós-graduação.

Primeiramente a Deus e à minha família pela força e amparo em horas difíceis.
E aos meus professores e amigos de caminhada.

AGRADECIMENTOS

A Deus que foi meu amparo para superar adversidades e ter me dado saúde e perseverança.
Aos meus pais Jose Arruda e Maria de Fatima por terem me criado e terem me feito buscar sempre o melhor.
Aos meus irmãos Vanilda, Vanderson e a minha cunhada Mara pelo incentivo nas horas sombrias.
Ao meu orientador Gray Farias Moita, pelo incentivo, correções e suportes.
Ao CEFET-MG, seu corpo docente, em especial aos meus professores que me possibilitaram o vislumbre de conhecimento.
A CAPES e ao CEFET-MG por concederem minha bolsa de estudos do curso de mestrado.
Às minhas amigas de jornada Priscila e Simone, pelo apoio na minha caminhada.
E aos que possibilitaram me tornar a pessoa que sou hoje.

“A fé é o que mantém o ser humano firme mesmo nas circunstâncias mais negativas. É acreditar que melhores dias virão, mesmo quando a vida não apresenta motivos para sorrir.

Ter fé é andar confiante mesmo na escuridão, é ser grato pelas coisas boas antes de recebê-las. É ver o abismo e dar um passo em frente, confiando que você não irá cair.

Viver com fé pode ter um impacto essencial na sua vida, sendo um abrigo forte nos piores dias de tribulação. ”

RESUMO

O presente estudo propõe a análise de três metodologias com a finalidade de prever a resistência à compressão do concreto aos vinte e oito dias, a partir de uma base de dados conhecida e consagrada na literatura acadêmica. Utilizando a base de dados conhecida da literatura, foi possível utilizar métodos de inteligência computacional para obter os melhores resultados de previsão para a resistência à compressão do concreto. Foram propostos três métodos com tal finalidade, a primeira proposta foi a resolução deste problema a partir de uma Rede Neural Artificial (RNA), sendo usado o processo de aprendizagem supervisionada e as redes foram treinadas com base nos algoritmos de treinamento: *backpropagation* e suas variantes e o de Levenberg-Marquardt. Outro método utilizado foi a Regressão Linear Múltipla (RLM) na qual a sua solução é alcançada por meio da minimização da soma do quadrado dos resíduos. O último modelo utilizado é o Máquina de Vetor de Suporte (SVM) sendo usado nesse caso para a análise de regressão. O principal objetivo deste trabalho foi obter o resultado mais confiável para previsão da resistência à compressão do concreto pela utilização de métodos computacionais. A partir deste estudo, concluiu-se que as Redes Neurais Artificiais apresentam a melhor performance dentre os métodos testados. Foi feita a comparação dos três métodos: RNA, RLM e SVM e eles se mostraram da mesma ordem de grandeza que outros trabalhos da literatura, para a previsão de uma característica mecânica do concreto considerando os coeficientes de segurança utilizados em engenharia.

PALAVRAS-CHAVE: Redes Neurais Artificiais; Regressão Linear Múltipla; Máquina de Vetores de Suporte, Aprendizado de Máquina, Inteligência Computacional.

ABSTRACT

The present study proposes the analysis of three different methodologies to predict the compressive strength of concrete at twenty-eight days, from a database known and established in academic literature. Using the database known from the literature, it was possible to use computational intelligence methods to obtain the best prediction results for the compressive strength of concrete. Three distinct methods were proposed with this purpose. The first proposal was to solve this problem from an artificial neural network (ANN), using the supervised learning process. The networks were trained based on the training algorithms: backpropagation and its variants and that of Levenberg-Marquardt. Another method used was the Multiple Linear Regression (MLR) where its solution is achieved by minimizing the sum of squared residuals. The last model used is called the Support Vector Machine (SVM), being used in this case for the regression analysis. The main objective of this work was to obtain the most reliable result for predicting the compressive strength of concrete using computational methods. This study concluded that Artificial Neural Networks present the best performance among the tested methods. The three methods were compared: RNA, MLR and SVM. They were shown to be of the same order of magnitude as other works in the literature, to predict a mechanical characteristic of concrete considering the safety coefficients used in engineering.

KEYWORDS: Artificial Neural Networks; Multiple Linear Regression; Support Vector Machine, Machine Learning, Computational Intelligence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Obras de Niemeyer. 19
Figura 2 – Estado endurecido e fresco do concreto. 19
Figura 3 – Deformações longitudinais e transversais. 23
Figura 4 – Moldagem dos corpos de prova. 24
Figura 5 – Ensaios de compressão do concreto. 24
Figura 6 – Plano de fratura do corpo de prova. 25
Figura 7 – Relação entre a resistência à compressão e a relação a/c do concreto. 26
Figura 8 – Agregados graúdo e miúdo. 27
Figura 9 – Influência da cura sobre a tensão a compressão do concreto. 28
Figura 10 – Neurônio biológico e artificial. 30
Figura 11 – Modelo de rede neural artificial. 31
Figura 12 – Rede alimentada adiante com camadas múltiplas, possuindo uma ou mais camadas intermediárias. 32
Figura 13 – Funções de ativação. 33
Figura 14 – (a) processo *feed-forward* e (b) processo *backpropagation*. 35
Figura 15- Fluxograma da execução da rede *Multilayer Perceptron*. 36
Figura 16 – Parâmetros importantes nas Máquinas de Vetores de Suporte. 39
Figura 17 - Fluxograma da execução do SVM. 40
Figura 18 - Histograma e caixas de densidade da resistência à compressão. 57
Figura 19 - Diagrama de dispersão dos dados. 61
Figura 20 - Resultados original versus previsto para a ANN para o conjunto de teste. 64
Figura 21 - Resultados original versus previsto para a MLR. 65
Figura 22 - Resultados original versus previsto para a SVM. 66
Figura 23 - RMSE versus número de neurônios. 77
Figura 24 - RMSE versus número de neurônios. 78
Figura 25 - RMSE versus número de neurônios. 79
Figura 26 - RMSE versus Número de neurônios. 79

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
f_{ck}	Do Inglês Feature Compression Know traduzida para o português como Resistência Característica do Concreto à Compressão.
MLR	Do Inglês M*ultiple Linear Regression*, traduzida para o português como Regressão Linear Múltipla
NBR	Norma Brasileira
RNA	Redes Neurais Artificiais
RLM	Regressão Linear Múltipla
SVM	do Inglês *Support Vector Machine*, traduzida para o português como Máquinas de Vetores de Suporte
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
SVR	*Support Vector Regression*
MART	*Multiple Additive Regression Trees*
MPa	Unidade de Tensão
TGP	*Tree-Based Genetic Programming*
LGP	*Linear Genetic Programming*
MAPE	*Mean Absolute Percentage Error*
RRMSE	*Relative Root Mean Square Error*
v	Coeficiente de Poisson
F	Esforço de Compressão
A	Diâmetro do Corpo de Prova
a/c	Fator Água/Cimento
A	Área Transversal do Corpo De Prova
k_1, k_2	Constantes Empíricas da Lei de Abrams
f_c	Resistência a Compressão do Concreto
MLP	*Multilayer Perceptron*
RBF	*Radial Basis Function*
NNtool	*toolbox* de interface gráfica do *software MatLab*
MAE	*Mean absolute error*
ANN	*Artificial Neural Network*
CF	*correlation factor*
σ	Tensão de Compressão
RMSE	*Root Mean Square Error*
ANFIS	*Adaptive neuro fuzzy inference system*
EANN	*Evolutionary Artificial Neural Networks*

MARS	*Multivariate Adaptive Regression Splines*
M5P-MT	*M5P Model Tree*
CC	coeficiente de correlação
PC	*permeability coefficien*t
XGB	*extreme gradient boosting regression*
ELM-GWO	*extreme learning machine (ELM) is combined with a metaheuristic algorithm known as grey wolf optimizer (GWO)*
RSM	*Response Surface Methodology*
CPB	C*ement Paste Backfill*
PP	*Polypropylene fibers*
GA-SVM	SVM acoplada algoritmos genéticos
PSO-SVM	SVM acoplada otimização de enxame de partículas
SSA-SVM	SVM acoplada *salp swarm algorithm*
GS-SVM	SVM acoplada *GridSearchCV*
ESVR	*Evolved support vector regression*
UCS	*28-day unconfined compressive strength*
LSSVM	*Least Square Support Vector Machine*
MARS	*Multivariate Adaptive Regression Spline*
ELM	*Extreme Learning Machine*
RVM	*Relevance Vector Machine*
LS-SVM	*Least Square Support Vector Machines*
MLP-NN	*Multilayer Perceptron Neural Network*
FRC	*Fiber Reinforced Concrete*
MARS-WCA	*Multivariate Adaptive Regression Splines* Otimizado Usando *Water Cycle Algorithm*
MAPE	*Mean Absolute Percentage Error*
PI	*Performance Index*
AAE	*Average Absolute Error*
SD	*Standard Deviation*
EPS	*Concrete's stone aggregates with lightweight expanded polystyrene beads*
UPV	*ultrasonic pulse velocity*
R^2	Coeficiente de Determinação
MSE	do Inglês *Mean Square Error*, traduzida para o português como erro de quadrático médio
SSE	do Inglês *Sum Squares Error* traduzida para o português como soma dos erros de quadráticos

MAE	do Inglês *Mean Absolute Error* traduzida para o português como erro absoluto médio

LISTAS DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados da resistência à compressão para diversas dimensões e formas de corpos de prova. 28
Tabela 2 - Parâmetros dos atributos de entrada e saída do conjunto de dados. 56
Tabela 3 - Dados de treinamento e critérios de parada. 60
Tabela 4 - Dados de entrada do GridSearchCV. 62
Tabela 5 - Resultados obtidos na implementação. 63
Tabela 6 - Coeficientes de regressão parcial. 64
Tabela 7 - Parâmetros de performance da MLR. 65
Tabela 8 - Resultados da implementação do SVM. 66
Tabela 9 - Comparação entre resultados obtidos. 67
Tabela 10 - Resultados obtidos x resultados obtidos da literatura. 67
Tabela 11 - Resumo dos resultados da implementação. 78
Tabela 12 - Resumo dos resultados da implementação. 80

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 15

1.1. OBJETIVOS 17

1.2. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO 17

2. O CONCRETO E SUAS CARACTERÍSTICAS 19

2.1. O CONCRETO 19

2.2. DOSAGEM DO CONCRETO 21

2.3. PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CONCRETO 22

2.3.1. Resistência à tração 23

2.3.2. Coeficiente Poisson 23

2.3.3. Resistência à compressão do concreto 24

2.4. FATORES QUE AFETAM A RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO 25

3. MODELOS COMPUTACIONAIS: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 30

3.1. REDES NEURAIS ARTIFICIAIS 30

3.2. REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA 36

3.3. MÁQUINAS DE VETORES DE SUPORTE 38

4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: TRABALHOS RELACIONADOS 41

4.1. REDES NEURAIS ARTIFICIAIS 41

4.2. REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA 47

4.3. MÁQUINAS DE VETORES DE SUPORTE 50

5. DADOS EMPREGADOS, MÉTRICAS DE DESEMPENHO E METODOLOGIA 56

5.1. CONJUNTO DE DADOS 56

5.2. PRÉ-PROCESSAMENTO DOS DADOS 57

5.3. MÉTRICAS DE DESEMPENHO 58

5.4 METODOLOGIA 58

5.4.1. REDES NEURAIS ARTIFICIAIS 58

5.4.2. REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA 61

5.4.3. MÁQUINAS DE VETORES DE SUPORTE 61

6. RESULTADOS OBTIDOS X LITERATURA 63

6.1 REDES NEURAIS ARTIFICIAIS 63

6.2 REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA 64

6.3 MÁQUINAS DE VETORES DE SUPORTE 65

6.4 COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS OBTIDOS E OS DISPONÍVEIS NA LITERATURA 66

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS 69

7.1. CONCLUSÕES 69

7.2. PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS 69

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 71

APÊNDICE A 77

APÊNDICE B 81

1. INTRODUÇÃO

Como é amplamente conhecido, o concreto é um material constituído por agregados, água e cimento. O cimento funciona como aglomerante dos agregados, unindo-os. Os constituintes do concreto definem suas propriedades mecânicas como resistência à tração e à compressão, coeficiente de Poisson, módulo de elasticidade, dentre outros (CHOPRA; SHARMA; KUMAR, 2016). Existem diferentes abordagens na determinação das propriedades mecânicas do concreto, uma destas é o uso de métodos computacionais. Qualquer que seja a abordagem, a qualidade e a quantidade dos constituintes definem as características mecânicas do concreto (CHOPRA; SHARMA, R K.; KUMAR, 2014). Outros definidores de tais propriedades são o processo de fabricação, aplicação, cura e até mesmo os fatores climáticos exercem enorme influência sobre os resultados das características do concreto.

A resistência à compressão do concreto é uma das propriedades mais usadas no cálculo de estruturas. Essa resistência pode ser estimada, através de equações teóricas da NBR 6118 (ABNT, 2014), obtida por meio de ensaios experimentais ou através do diagrama de dosagem e de maneira alternativa pode ser utilizado métodos computacionais. Com objetivo de propor uma maneira alternativa de se obter a resistência do concreto, o presente trabalho faz uma análise de métodos computacionais na previsão dessa característica mecânica do concreto. Os métodos utilizados devem ser capazes de correlacionar os constituintes do concreto ao valor da resistência à compressão do concreto aos vinte oito dias, considerando os coeficientes de segurança utilizados na engenharia.

Problemas de engenharia podem ser solucionados por métodos empíricos, analíticos ou numéricos, no entanto, esses métodos são simplificados com diferentes hipóteses (BABANAJAD, 2015). O avanço tecnológico permitiu que estes problemas possam ser resolvidos de maneiras além das convencionais, como o uso de sistemas inteligentes. Os métodos de aprendizado de máquinas e inteligência artificial são campos explorados com expectativas variadas e com resultados realistas. Conforme Hoang (2019), sistemas artificialmente inteligentes se mostram eficazes na resolução de problemas da vida real, particularmente em tarefas não lineares.

Para este estudo, foi escolhido um conjunto de dados muito utilizado em diversos estudos com métodos computacionais, a base de dados de Yeh (1998). Nesta base, o concreto é caracterizado pela presença e quantidade dos seus constituintes, sendo eles: quantidade de agregado graúdo e miúdo, teor de cimento, cinzas volantes, água, teor de superplastificante e escória de alto forno.

Com o aumento da idade e com o tipo de cimento utilizado, ocorre um aumento da tensão de compressão do concreto. Deste modo, a resistência característica à compressão (f_{ck}) ideal utilizada para o cálculo estrutural é a obtida aos 28 dias. No projeto estrutural, essa característica é fundamental e impacta diretamente na sua concepção.

Diversos estudos têm utilizado os métodos computacionais para correlacionar os componentes do concreto à sua resistência à compressão. Os estudos de Kaplan *et al.* (2019), Hammoudi *et al.* (2019) e Chopra, Sharma e Kumar (2016) utilizam as Redes Neurais Artificiais (do Inglês *Artificial Neural Network* - ANN.). Os estudos de Javed *et al.* (2020), Mohammed *et al.* (2020) e Ashrafian *et al.* (2018) utilizam o Método da Regressão Linear Múltipla (do Inglês M*ultiple Linear Regression* - MLR) e os estudos de Sultana e*t al.* (2020), Li *et al.* (2020) e Shariati e*t al.* (2020) utilizam o Método das Máquinas de Vetores de Suporte (do Inglês *Support Vector Machine* – SVM). Esse estudo teve como abordagem o uso de métodos computacionais na previsão a resistência a compressão do concreto sendo utilizadosos três modelos citados acima com tal finalidade.

Com inspiração no neurônio biológico, as ANN são capazes de generalizar e entender as relações entre um conjunto de dados, o que produz soluções precisas mesmo quando os dados são incompletos ou contêm erros, conforme apresenta Getahun (2018). As ANN aprendem a relação entre os dados de um sistema, uma vez sendo utilizados algoritmos de aprendizado e treinamento adequados aos dados amostrais.

A Regressão Linear Múltipla é uma técnica estatística que utiliza diversas variáveis em sua implementação, com o intuito de obter o resultado em uma variável de saída. Ela tem como objetivo modelar a relação entre as variáveis independentes com a variável dependente. Em essência, é uma extensão do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) que envolve mais de uma variável independente. Sendo altamente flexível, a Regressão Linear Múltipla se presta a uma variedade de questões, trabalhando em medidas quantitativas como traços de personalidade, habilidades ou previsão da resistência à compressão do concreto; também pode ser utilizada em medidas categóricas como classificação de gênero ou etnia (SWEARINGEN, 2018).

Sendo baseado na teoria do aprendizado estatístico, o método Máquinas de Vetores de Suporte (SVM), possui a finalidade de obter um conjunto de mesmo domínio que ocorreu no aprendizado. Conforme Lorena e Carvalho (2007), o SVM emprega a indução para tirar conclusões a partir do conjunto de dados testado.

Portanto, este desenvolvimento visa corroborar os estudos da determinação da resistência à compressão do concreto, a fim de minimizar a quantidade de ensaios destrutivos que são realizados para este fim, processos que como se sabe, demandam tempo e dinheiro. Além de ser apresentada uma análise de métodos computacionais na previsão da resistência à compressão do concreto, pretende-se também apresentar uma discussão acerca dos modelos computacionais e das métricas de desempenho obtidas por outros autores.

1.1. OBJETIVOS

Tem-se como objetivo geral deste trabalho uma análise de métodos computacionais na previsão da resistência à compressão do concreto.

Os objetivos específicos são:

- ✓ Realizar uma pesquisa de referencial teórico de estudos que fazem o uso de modelos computacionais na previsão da resistência à compressão do concreto.
- ✓ Utilizar técnicas de pré-processamento como o *StandartScaler*, *Normalizer* e *RobustScaler*, de forma a deixar os dados em escalas comparáveis.
- ✓ Usar os seguintes modelos computacionais na obtenção da resistência à compressão do concreto:
    - ➢ Redes Neurais Artificiais:
    - ➢ Regressão Linear Múltipla:
    - ➢ Máquinas de Vetores Suporte:
- ✓ Confrontar os resultados obtidos nesse estudo com os resultados encontrados na literatura.

1.2. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este texto está estruturado em 7 capítulos. O Capítulo 1 descreve uma introdução geral do tema e define os objetivos. O Capítulo 2 trata de temas centrais como o concreto, dosagem, e as características mecânicas do concreto. No Capítulo 3 são explicitados os modelos computacionais e sua fundamentação teórica. No Capítulo 4 é feita uma revisão bibliográfica de estudos que fazem uso de métodos computacionais a fim de determinar propriedades mecânicas do concreto e no Capítulo 5 são expostos os dados empregados, as métricas de desempenho e a metodologia utilizada na implementação das Redes Neurais Artificiais, da Regressão Linear Múltipla e do Método das Máquinas de Vetores Suporte. No Capítulo 6 são

expostos os resultados obtidos, bem como, a comparação com resultados obtidos por outros autores e no Capítulo 7 são expostas as considerações finais expondo as conclusões, envolvendo a análise geral do trabalho desenvolvido também são sugeridas propostas para trabalhos futuros.

2. O CONCRETO E SUAS CARACTERÍSTICAS

Neste capítulo, são descritos o concreto, suas características e propriedades mecânicas e os fatores que afetam ou modificam tais propriedades.

2.1. O CONCRETO

O concreto é um produto versátil e é possível dizer que ele se adequa a diversos ambientes, podendo ser usado em edifícios, estradas, pontes, galerias de água fluvial, dentre outros. Conforme apresentado na Figura 1, o concreto se molda às mais diversas arquiteturas, podendo ser modelado em diferentes formas e tamanhos. Depois de endurecido, sua resistência é semelhante à das rochas naturais e, quando fresco, apresenta boa trabalhabilidade, conforme pode ser visto na Figura 2.

Figura 1 – Obras de Niemeyer.

Fonte: https://www.gazetadopovo.com.br visitado em 01/02/2021.

Figura 2 – Estado endurecido e fresco do concreto.

Fonte: http://www.civil.univasf.edu.br visitado em 01/02/2021.

Dentre as principais vantagens do concreto estão a resistência a agressões físicas do ambiente e a adaptabilidade às formas das construções.

Segundo Mehta (1991), a durabilidade do concreto depende de fatores básicos como o tipo de concreto utilizado e as condições do meio ambiente circundante da estrutura. O concreto simples, usualmente preparado com os quatro componentes básicos (água, agregados graúdo e miúdo e o cimento), possui baixa resistência a esforços de tração, mas alta resistência aos esforços de compressão. Devido à sua multifuncionalidade, o concreto é utilizado em diversos campos, podendo, muitas vezes, estar sujeito a ambientes quimicamente agressivos. Os sintomas da agressividade destes ambientes acarretam manifestações patológicas como ataques ácidos, corrosão de armaduras, reação álcali-agregado, desgaste superficial por abrasão ou erosão e lixiviação.

Existe uma gama de tipos de concretos, tais como o concreto projetado, o concreto armado, o concreto protendido, o concreto de alto desempenho, o concreto compactado com rolo e o concreto com adição de fibras. A principal característica do concreto projetado é seu transporte por uma tubulação e sua posterior projeção, a uma elevada velocidade, sobre uma superfície, sendo automaticamente compactado. O concreto armado pode ser definido como aquele no qual o comportamento solidário entre armadura e o concreto melhora a resistência a tração da estrutura. Já o concreto protendido pode ser visto como um tipo de concreto armado onde é realizado protensão de parte das armaduras, ou seja, a armadura protendida é previamente alongada com o objetivo de limitar ou impedir os deslocamentos de fissuração. O concreto de alto desempenho é um concreto que possui uma resistência característica superior a 50 MPa, sendo que, para tal, são utilizados aditivos com o intuito de se chegar no patamar de alto desempenho. Esses concretos possuem resistência mecânica e durabilidade superior aos concretos comuns. O concreto compactado com rolo possui baixo teor de cimento e sua consistência é seca. Esse concreto, também conhecido como concreto rolado, é compactado com o auxílio de equipamentos de compactação. Finalmente, o concreto com adição de fibras, dependendo das especificações de projeto, pode ser composto com materiais que inibem ou reduzem os efeitos de fissuração por retração. Normalmente é elaborado com a adição de fibras de nylon, vidro, aço ou polipropileno.

Sendo assim, a tecnologia do concreto possui grandes desafios, como o intuito de aumentar a longevidade das estruturas, recuperar estruturas com manifestações patológicas e entender os mecanismos físicos e químicos dos cimentos e concretos.

2.2. DOSAGEM DO CONCRETO

A dosagem é o processo de composição do concreto que visa a obtenção de um concreto afim de obter as características de resistência mecânica, durabilidade e trabalhabilidade adequadas ao projeto estrutural. A dosagem utiliza os principais materiais constituintes, conforme descrito a seguir:

- ✓ Cimento Portland, atuando como aglomerante;
- ✓ Pó de pedra, areia natural ou artificial como agregado miúdo;
- ✓ Seixo rolado ou pedra britada como agregado graúdo;
- ✓ Água como responsável pela hidratação do cimento, podendo essa ser utilizada em sua totalidade ou ter parte substituída por gelo;
- ✓ Aditivos podem ser adicionados à mistura, atuando como plastificante, retardador de pega ou para aumentar a fluidez;
- ✓ Cal, metacaulin ou pozolanas e outras adições.

Segundo Cavalier e Azevedo (2016), é possível ainda, na fabricação do concreto, diversos outros materiais serem adicionados com finalidades específicas, como aumento da resistência à compressão. Dentre esses materiais que podem ser adicionados, têm-se, por exemplo:

- ✓ Cinza volante;
- ✓ Sílica Ativa;
- ✓ Cinza de casca de arroz;
- ✓ *Filler* calcário;
- ✓ Cinza de bagaço de cana-de-açúcar.

Assim sendo, o concreto pode ser definido como um compósito constituído por um meio aglomerante contínuo formado por cimento e água. Nesse meio, os agregados e aditivos podem estar presentes, sendo que os aditivos podem ser incorporados com o intuito de modificar a trabalhabilidade do concreto. Estes aditivos também têm o dever de melhorar sua consistência, coesão e homogeneidade. Uma característica importante dos agregados é de serem inertes e não possuírem substâncias que influenciam na reação química entre cimento e água.

Segundo Andolfato (2002), a pasta formada entre o cimento e a água preenche os vazios entre os agregados. A hidratação do cimento é realizada quando se mistura a água ao cimento. O resultado disso é uma pasta que envolve os agregados, tornando o concreto

passível de ser manipulado. Após o endurecimento, o cimento adere aos agregados, conferindo a toda a massa características como resistência, impermeabilidade e durabilidade.

Uma pasta aglomerante é obtida quando se mistura água ao cimento, sendo a água a responsável por ativar a reação química do cimento. No entanto, deve se tomar um cuidado especial com a quantidade e com as particularidades da água adicionada. Na mistura, a quantidade de água deve ser estritamente a necessária para envolver os agregados, ou seja, a quantidade necessária para permitir a hidratação e garantir, posteriormente, a cristalização do cimento. Por um lado, uma pequena quantidade de água impossibilita a ocorrência de uma reação completa; por outro lado, o excesso de água resulta na segregação dos agregados.

Conforme Helene e Tutikian (2011), o Brasil não possui diretrizes consolidadas que enfatizem o estudo das proporções corretas da massa de concreto. Contudo, diversos institutos propõem métodos de dosagem próprios, dentre eles o Instituto de Pesquisas Tecnológicas, o Instituto Nacional de Tecnologia e o Instituto Tecnológico do Estado do Rio Grande do Sul. Os objetivos da dosagem são comuns a todos os métodos, sendo eles: resistir ao ambiente onde o concreto será exposto, reduzir o custo, melhorar suas propriedades mecânicas e a aumentar a trabalhabilidade de forma compatível com a peça a ser concretada.

2.3. PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CONCRETO

O concreto possui como principais propriedades mecânicas: a resistência à compressão, a resistência à tração, o módulo de deformação longitudinal ou de elasticidade e o coeficiente de Poisson. As propriedades mecânicas estão diretamente relacionadas à quantidade e à peculiaridade dos constituintes dentre outros fatores.

As propriedades mecânicas do concreto são, no Brasil, determinadas por normas específicas. Entre elas, pode-se citar:

- ✓ ABNT NBR 5739 (2018): Concreto – Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos;
- ✓ ABNT NBR 7222 (2011) Concreto e argamassa — Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos;
- ✓ ABNT NBR 8522 (2017) Concreto – Determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação à compressão.

2.3.1. Resistência à tração

A resistência à tração é uma característica fundamental do concreto, sendo um fator preponderante em alguns projetos estruturais como tirantes, pavimentos e reservatórios cilíndricos. Nestas estruturas, a solicitação principal é a tração pura. A resistência à tração permite o cálculo da carga a partir da qual ocorrerá fissuração e, assim, pode-se determinar a durabilidade do concreto.

Alguns fatores estão relacionados a resistência à tração do concreto, tais como:

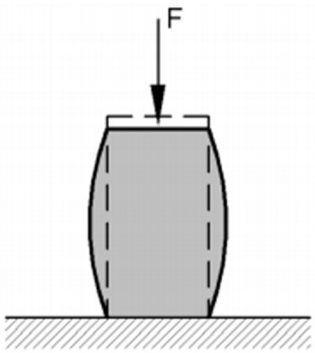
- ✓ Aderência entre concreto e armadura, no caso de concreto armado;
- ✓ Contribuição do concreto na contração ocasionada pela diferença de temperatura;
- ✓ Parte contribuinte que resiste à torção e à retração.

A resistência à tração pode ser obtida através de métodos distintos, tais como: tração direta, tração por compressão diametral e tração na flexão. O tipo de ensaio realizado também define a resistência à tração do concreto, uma vez que as tensões de tração se distribuem de maneira distinta para cada ensaio. É muito difícil determinar a resistência à tração de forma direta, desta forma, o ensaio de compressão diametral é comumente utilizado no Brasil para determinar a resistência à tração do concreto.

2.3.2. Coeficiente Poisson

Quando é aplicado um esforço F em uma peça de concreto, este esforço pode provocar deformações longitudinais e transversais, conforme apresentado na Figura 3. A relação entre essas deformações é conhecida como coeficiente de Poisson e indicada pela letra grega v.

Figura 3 – Deformações longitudinais e transversais.



Fonte: Pinheiro e Muzardo (2007).

2.3.3. Resistência à compressão do concreto

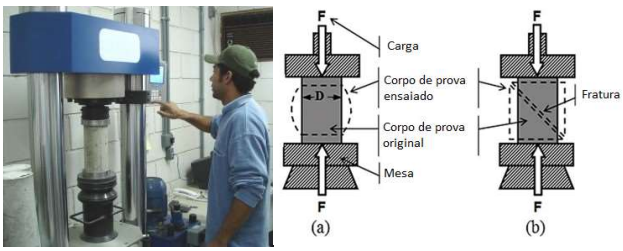
A resistência à compressão do concreto é influenciada por diversos fatores, tais como: tipo e dosagem de cimento; granulometria, diâmetro máximo, forma, textura, resistência e rigidez dos agregados; fator água/materiais cimentícios; tipo e dosagem dos aditivos químicos e minerais; grau de compactação; condições de cura; procedimento de ensaio, dentre outros.
O processo para determinar a resistência à compressão do concreto se inicia moldando e submetendo à cura os corpos de prova, podendo estes ter o formato cilíndrico ou prismáticos, conforme especificado pela NBR 5738 (ABNT, 2016), e apresentado na Figura 4 uma das geometrias mais utilizada no Brasil, os corpos de prova cilíndricos.

Figura 4 – Moldagem dos corpos de prova.

Fonte: https://www.mapadaobra.com.br visitado em 01/02/2021.

Uma vez moldados os corpos de prova e passado o tempo de cura, são efetuados os procedimentos do ensaio de compressão para corpos de prova cilíndricos estipulado pela NBR 5739 (ABNT, 2018). A Figura 5 exemplifica as fases do ensaio, onde o corpo de prova é submetido ao ensaio de compressão. Primeiramente, o corpo de prova é colocado em uma prensa hidráulica e é submetido a um esforço F de compressão, conforme a Figura 5. Com isso, o corpo de prova sofre deformações longitudinais e transversais, conforme a Figura 5(a). Já a Figura 5(b) e a Figura 6 demonstram quando o corpo de prova atinge uma carga máxima e é considerado rompido, mesmo se não apresentar sinais visíveis de fratura (METHA; MONTEIRO, 2008).

Figura 5 – Ensaios de compressão do concreto.



Fonte: https://biopdi.com.br visitado em 01/02/2021.

Figura 6 – Plano de fratura do corpo de prova.

Fonte: http://propriedadesdoconcreto.blogspot.com visitado em 01/02/2021.

A tensão de compressão σ é dada pelo esforço F dividido pela área transversal A do corpo de prova, conforme pode ser visto na Equação (1). Sendo assim, chega-se a Equação (2), definida pela NBR 5739 (ABNT, 2018) que é especifica para corpos de prova cilíndricos.

$$\sigma = \frac{F}{A}, \tag{1}$$

$$f_c = \frac{4F}{\pi D^2}. \tag{2}$$

Na Equação (2), f_c é a tensão de compressão (MPa), F é a carga máxima (N) e D é o diâmetro do corpo de prova em mm.

2.4. FATORES QUE AFETAM A RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO

Existem diversos fatores que afetam a resistência à compressão do concreto, para um mesmo cimento. Dentre estes fatores, pode-se citar a relação a/c. Conhecida como lei de Abrams, a fórmula que relaciona o fator água/cimento e a tensão à compressão do concreto é dada conforme a Equação (3):

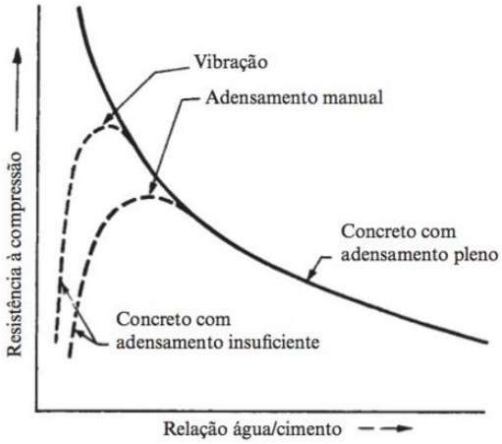
$$f_c = \frac{k_1}{{k_2}^{a/c}}. \tag{3}$$

Na Equação (3), a/c é a relação água/cimento da dosagem do concreto, k_1 e k_2 são constantes determinadas de forma empírica e f_c é a resistência à compressão do concreto (METHA; MONTEIRO, 2008).

Tanto quanto o a/c , as características dos agregados são de fundamental importância para a resistência do concreto. Tanto que na fórmula, as constantes k_1 e k_2 são constantes empíricas provenientes dos componentes específicos, ou seja, a lei de Abrams é válida somente só para uma mesma família de concretos. Ou seja, mesmo cimento (marca, tipo, finura, composição química, lote), mesmos agregados (mesma jazida, mesma mineralogia, mesmo lote, mesma textura, mesma morfologia, mesma granulometria, módulo de finura, diâmetro máximo de agregado, etc.).

O concreto quando adensado de maneira adequada apresenta resistência à compressão inversamente proporcional à relação água/cimento, o que pode ser constatado pela Figura 7. Os casos de adensamento insuficientes são uma anomalia que piora a resposta de resistência a compressão do concreto.

Figura 7 – Relação entre a resistência à compressão e a relação a/c do concreto.



Fonte: Neville (2016).

Pela Figura 7, é possível verificar que a relação entre a resistência à compressão do concreto e o fator água/cimento é restrita, pois quando não é possível executar o adensamento pleno, em relações a/c baixas, a curva deixa de ser obedecida. Segundo Neville (2016), o fator a/c é o fator mais correlacionado à resistência do concreto.

A resistência à compressão também pode ser afetada pelos agregados sendo está muito influenciada pela composição granulométrica dos agregados, que se dá o nome de empacotamento. Dentre os principais agregados estão o agregado miúdo e o graúdo, cada um com propriedades e funções específicas. Na Figura 8 são apresentados exemplos de agregado graúdo e agregado miúdo.

Figura 8 – Agregados graúdo e miúdo.

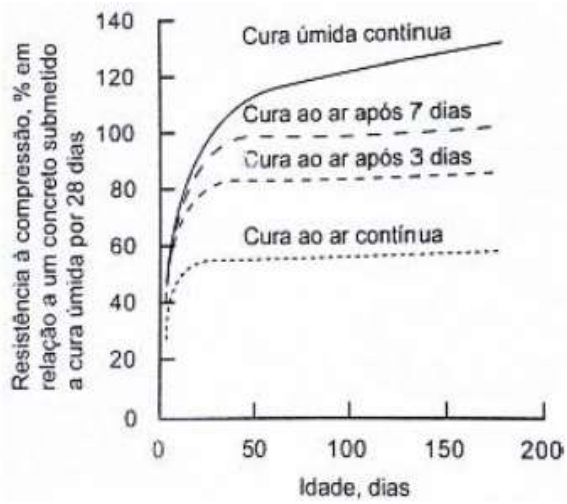
Fonte: https://www.tecnosilbr.com.br visitado em 01/02/2021.

Segundo a NBR 7211 (ABNT, 2019), o agregado para concreto deve possuir características específicas, como serem composto por grãos de minerais estáveis, duráveis, inertes, duros, compactos e que não interfiram na hidratação do cimento. Dentre as características mais importantes dos agregados estão: absorção de água, porosidade, distribuição granulométrica, forma, tipo de substâncias presentes e resistência à compressão. Os agregados têm a finalidade de transmitir as tensões ao concreto e reduzir o efeito das variações de retração. Conforme Li (2011), um aumento na resistência à compressão no concreto pode ser obtida com uma granulometria bem definida dos agregados, fato este explicado pela diminuição dos vazios no concreto, ou seja, o empacotamento.

A cura é definida por Bastos (2006) como um procedimento necessário, a fim de ocorrer a hidratação do cimento, afetando diretamente a resistência do concreto. Ela é a principal etapa da execução de estruturas de concreto, sendo responsável pela manutenção de água necessária para que ocorra as reações químicas no período de endurecimento, principalmente no período inicial. Ela é um procedimento essencial, seja qual for o tipo de concreto. Dentre eles pode se citar, concretos de alta resistência, concretos convencionais, leves ou compactados a rolo. Ela é uma combinação de umidade, tempo e temperatura do concreto (KUMMER *et al.*, 2016).

Observando a Figura 9, é possível verificar que a resistência do concreto aumenta com a idade até a idade de 28 dias, após esse período pode se observar que, em cura úmida contínua, o processo de hidratação dos componentes do cimento continua contribuindo para o aumento da resistência, enquanto nos outros tipos de cura praticamente não se altera.

Figura 9 – Influência da cura sobre a tensão a compressão do concreto.



Fonte: Metha e Monteiro (2008).

A dimensão e a forma dos corpos de prova também influenciam de forma significativa na determinação da resistência à compressão do concreto (METHA; MONTEIRO, 2008). No Brasil, de acordo com NBR 5738 (ABNT, 2018), os corpos de prova podem ser cilíndricos ou prismáticos. Na Tabela 1 é possível verificar a influência da forma e tamanho dos corpos de prova em sua resistência à compressão (KRISHNA; KUMAR; SRINIVAS, 2011).

Tabela 1 – Resultados da resistência à compressão para diversas dimensões e formas de corpos de prova.

ID CP	TIPO DE CP	TAMANHO DO CP (mm)	$f_{c7}(MPa)$	$f_{c28}(MPa)$
1	Cubo	100x100x100	18,20	30,30
2	Cubo	150x150x150	20,00	33,40
3	Cilindro	100x100	21,10	34,20
4	Prisma	100x100x200	16,30	28,20
5	Prisma	100x100x300	15,00	27,10
6	Prisma	150x150x450	16,20	29,80

Fonte: Adaptado de Krishna, Kumar; Srinivas (2011).

As propriedades do concreto também podem ser afetadas por outros fatores como:

- Quantidade de aditivos e adições;
- Duração e procedimento da mistura;
- Transporte e tipo de lançamento;
- Tipo e duração de solicitações;

- Umidade, temperatura e idade do concreto.

3. MODELOS COMPUTACIONAIS: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

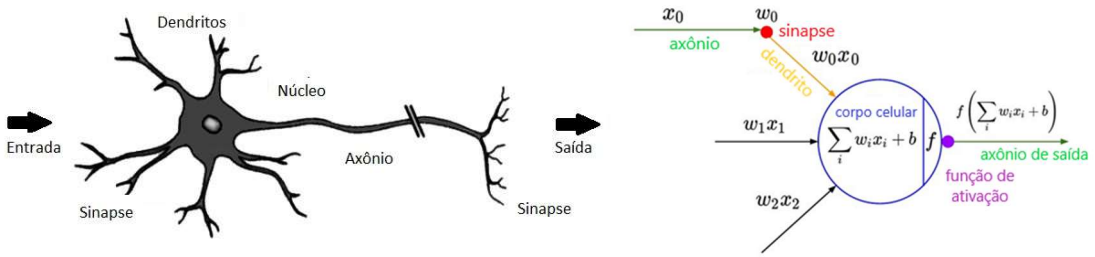
Neste capítulo são apresentados os métodos de inteligência computacional utilizados no presente trabalho, suas características e particularidades. Na Seção 3.1 são apresentadas as Redes Neurais Artificiais, tópicos a respeito da arquitetura de rede (número de camadas, número de neurônios, funções de ativação), bem como, o funcionamento básico de uma ANN. Na Seção 3.2 é apresentada a Regressão Linear Múltipla. Por fim, na Seção 3.3 é exposto o método das Máquinas de Vetores de Suporte.

3.1. REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

As redes neurais artificiais foram propostas no intuito de simular a estrutura neural de sistemas biológicos. Assim como o cérebro humano, funciona como um processador de informações, atuando nas atividades de criar, aprender, generalizar e memorizar. Segundo Araújo (2015), as ANN possibilitam estimativas robustas, com aplicação em diversas áreas, como: problemas de classificação, categorização de dados, aproximação, previsão e controle não-linear. O destaque dessas redes está na aproximação de funções não lineares, trabalhando em vetores de entrada e saída, e com a capacidade de reconhecer e reproduzir conhecimento na modelagem de sistemas complexos.

Nas redes neurais biológicas, o fluxo da informação é o seguinte: a entrada da informação chega a partir das sinapses com outros neurônios, passa pelos dendritos, é processada no núcleo e a resposta sai pelos axônios, e é transmitida pelas sinapses a outros neurônios, conforme Figura 10a. No neurônio artificial, as entradas x_i são multiplicadas pelos pesos w_i, é feito o somatório dos pesos versus as entradas e é somado a um termo constante b. Sua resposta passa por uma função de ativação, obtendo, assim, o valor de saída (Figura 10b). Desta maneira, programas de computador emulam o modo como o cérebro resolve problemas, utilizando uma rede encadeada de neurônios que trabalham paralelamente.

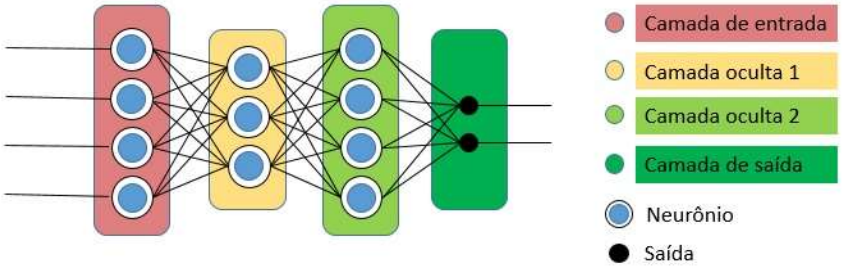
Figura 10 – Neurônio biológico e artificial.



Arquitetura de rede neurais artificiais (topologia)

A topologia é definida pela organização e interligação de um sistema neural. Segundo Haykin (1995), uma rede neural em camadas é formada por camadas de neurônios que se projetam em outra camada de neurônios, conforme Figura 11.

Figura 11 – Modelo de rede neural artificial.



A estruturação de uma ANN depende do problema a ser resolvido. Dessa maneira, conforme Haykin (1995), é necessário definir o número de camadas e o número de neurônios destas camadas, sendo elas: de entrada, ocultas e de saída; realizar o treinamento da rede, a partir de um conjunto de dados; realizar a validação utilizando dados ainda não apresentados à rede neural; e, por fim, a etapa de teste que avalia os resultados previstos em comparação aos alvos.

Número de neurônios

O número de neurônios a ser utilizado em cada camada da rede neural é um dos desafios da investigação. De acordo com Terko *et al.* (1995), a capacidade de generalizar é comprometida em redes neurais superdimensionadas. Essa situação é conhecida como *overfitting* ou *overtraining*, sendo caraterizada por um percentual baixo de erros para os dados de treinamento e elevadas taxas quando novos dados são avaliados (generalização). Uma forma comum adotada por diversos autores é a determinação do número de neurônios e camadas ocultas por tentativa e erro.

Números de camadas

O número de camadas ocultas de uma ANN está correlacionado ao problema a ser resolvido, bem como, sua complexidade. Segundo Jack Feng *et al.* (2005) e Cybenko (1989), a maior parte dos problemas podem ser resolvidos com apenas uma camada oculta.

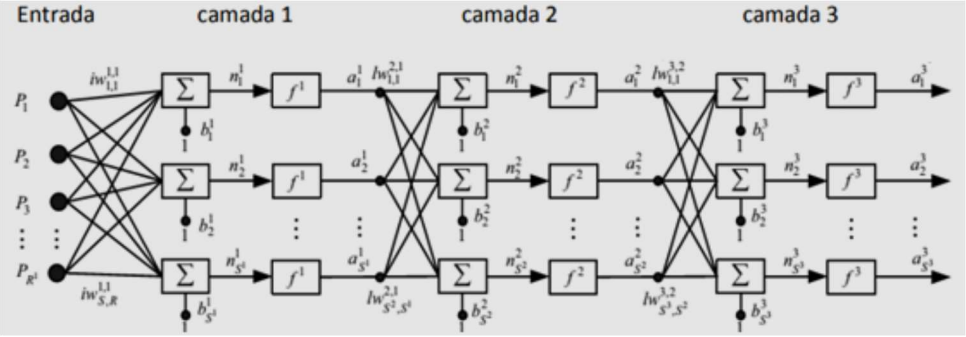
A forma de interligação dos neurônios define o tipo de rede a ser treinada, tendo como possiblidades: redes recorrentes (*feedback*), redes alimentadas adiante de múltiplas camadas

(*Multilayer Feedforward Networks*) e as alimentadas adiante (*Feedforwar*d) de uma única camada.

Dentre as topologias adotadas, pode-se citar as redes alimentadas adiante com camadas múltiplas, possuindo uma ou mais camadas intermediárias, conforme Figura 12. A rede é dita totalmente conectada quando os nós da rede estão conectados aos da camada subsequente. No entanto, se não existirem algumas conexões sinápticas, a rede é chamada parcialmente conectada.

Na Figura 12, a rede pode ser conhecida também como *Multilayer Perceptron* (MLP), sendo essa a rede mais comum e discutida por diversos autores (HORNIK; STINCHCOMBE; WHITE, 1989). Nessa rede, os neurônios de qualquer camada são conectados somente nos nós da camada seguinte, sem laços de realimentação. Segundo Chen *et al.* (2012), o número de camadas ocultas não é diretamente proporcional à melhora do desempenho.

Figura 12 – Rede alimentada adiante com camadas múltiplas, possuindo uma ou mais camadas intermediárias.

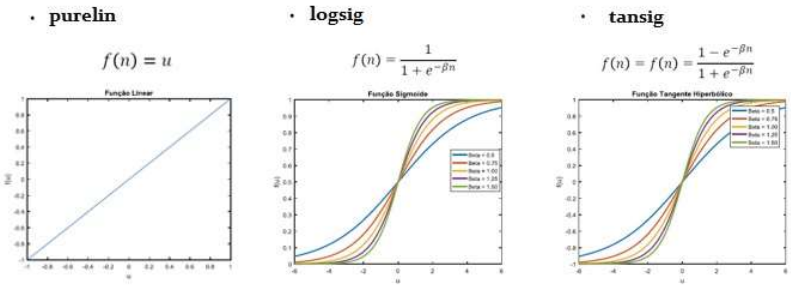


Fonte: Demuth (2000).

Funções de ativação

Um outro item fundamental da construção de uma ANN é a escolha das funções de ativação. Em se tratando de um aspecto crucial no desempenho da rede, dentre as funções de ativação mais utilizadas estão a linear, a sigmoide logarítmica e a tangente hiperbólica, conforme Figura 13.

Figura 13 – Funções de ativação.



A determinação da arquitetura de rede, número de neurônios, número de camadas ocultas e das funções de ativação é feita com base em simulações exaustivas ou por meio da experiência do *designer*. Desta maneira, o comum é escolher diversas arquiteturas para determinar uma topologia “ótima” (TEJ; HOLBAN, 2018). Uma arquitetura “ótima” é a que obtém sucesso com o número mínimo de camadas ocultas e menor número de neurônios.

Funcionamento básico de uma ANN

Uma das características principais de uma ANN é a melhora gradual de seu desempenho, seja na classificação ou na regressão. O aprendizado é um processo iterativo de ajustes de parâmetros. Um tipo de aprendizado é o supervisionado, que ocorre quando padrões de entrada pré-definidos são passados à rede neural artificial com a finalidade de ela aprender quais devem ser os resultados de saída, sendo utilizado para tal o ajuste nas previsões com base no erro.

No aprendizado supervisionado, é exposto um conjunto de dados alvos a serem atingidos. O erro é calculado a cada iteração, onde ocorre a conferência dentre os valores obtidos com as saídas alvo. Este erro é retornado ao sistema de aprendizagem e por meio da adaptação dos pesos entre os neurônios, procura-se obter a menor diferença entre a resposta obtida e a resposta desejada.

Outro fator preponderante na implementação das redes neurais são os algoritmos de treinamento, sendo essencial utilizar algoritmos de treinamentos compatíveis ao caso em estudo. Diversos algoritmos de treinamento foram evidenciados nas últimas décadas (HAGAN *et al.*, 2006). Dentre os utilizados nesse estudo, estão variações do *Gradient descent backpropagation* e de *Levenberg-Marquardt backpropagation*.

A utilização das ANN depende da existência de relação entre as variáveis de entrada e saída, uma vez que as redes possuem a capacidade de aprender a partir do conhecimento extraído

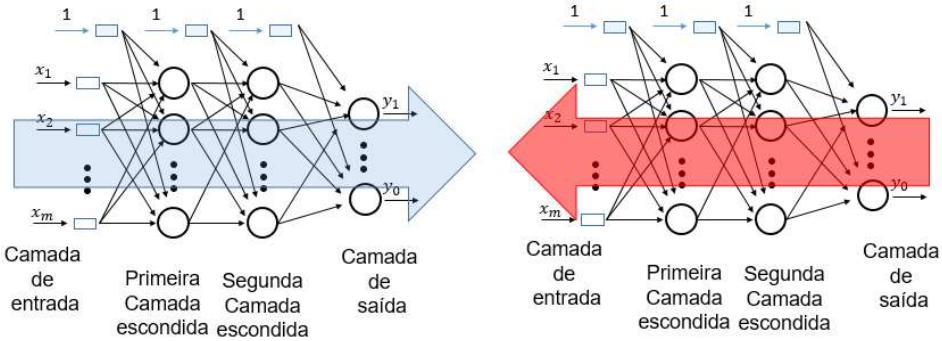
de um conjunto de dados, sendo capazes de fazer interpolações e extrapolações do que aprenderam. Sendo assim, a quantidade e a qualidade do conjunto de dados é um fator essencial para as simulações da rede. No caso das ANN, um passo anterior ao se passar para a fase de treinamento é a divisão do banco de dados em conjuntos distintos sendo eles: treinamento, validação e teste.

No estudo de uma ANN, almeja-se a maior capacidade de generalização possível; com isso, é importante apresentar com exatidão os resultados dos dados que não foram utilizados no processo de treinamento da rede neural. Na fase de treinamento ocorrem ajustes nos pesos sinápticos para a obtenção daqueles que obtenham, com confiabilidade, os dados de saída do modelo. O treinamento é feito por meio do conjunto de dados pertencente ao conjunto de treinamento, pois pretende-se apresentar dados para que a rede neural aprenda as relações existentes entre os dados. O segundo passo é utilizar o conjunto de validação, onde são testados valores que ainda não foram apresentados a rede. Eles têm a função de mensurar a capacidade de generalização da rede e servem para avaliar o comportamento do algoritmo quando submetido a dados incertos. O último grupo de dados é o de teste, onde os dados obtidos pela rede são comparados a valores ainda não apresentados a rede e, a partir destes, são calculadas as métricas de desempenho, sendo possível verificar a exatidão da rede.

Existem, segundo Hagan *et al.* (2006), diferentes possibilidades de algoritmos de treinamento, podendo estes ser baseados nos métodos do gradiente ou no método Jacobiano. O gradiente descendente é muito utilizado na resolução de problemas de *Machine Learning* e foi utilizado na implementação de alguns dos algoritmos de treinamento propostos nesse trabalho. De modo iterativo, o algoritmo obtém os valores dos parâmetros que minimizam determinada função de interesse.

Dentre os modelos neurais mais conhecidos está o *MultiLayer Perceptron Backpropagation* da Figura 14. O primeiro passo no funcionamento da rede é chamado *feedforward*, ou seja, a propagação de dados à frente (Figura 14a), onde os valores são atualizados em cada camada. No primeiro momento, a entrada é multiplicada pelos pesos do neurônio e somados ao *bias*, conforme Equação (4). Após esse procedimento, o resultado obtido é então utilizado na função de ativação, segundo a Equação (5), determinando o parâmetro de saída.

Figura 14 – (a) processo *feed-forward* e (b) processo *backpropagation.*



$$u_k = \sum_i W_{ki} x_i + b_k \,, \tag{4}$$

$$y_k = f(u_k) \,. \tag{5}$$

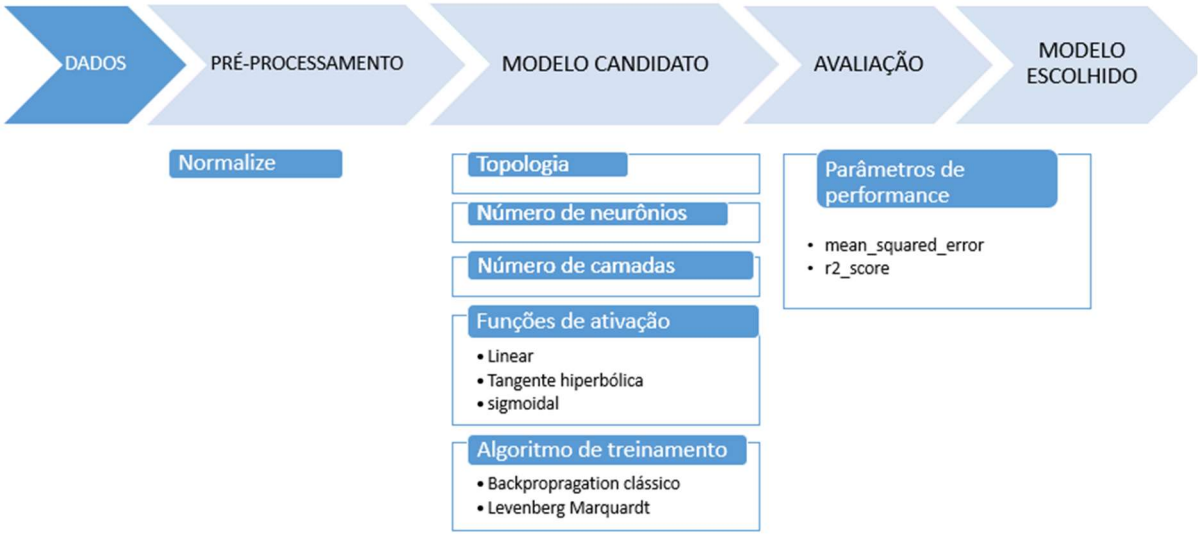
O segundo passo envolve o termo *backpropagation*, ou seja, a volta (Figura 14b). O valor previsto é comparado ao valor alvo e, desta maneira, é determinado o erro da iteração, conforme a Equação (6). Depois do cálculo do erro, ocorrem as atualizações dos pesos dos neurônios até que os parâmetros de performance ou os critérios de parada sejam atingidos. Sendo assim, a rede *MultiLayer Perceptron Backpropagation* faz cálculos a frente e para trás, (KOIVO, 2008).

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Y_I - \widehat{Y}_I)^2 \,. \tag{6}$$

Como mencionando, a Equação (6) calcula o erro da iteração, sendo que o termo $(Y_I - \widehat{Y}_I)^2$ representa a diferença quadrática do valor obtido pela rede e seu alvo.

A partir da Figura 15, verifica-se os passos metodológicos na resolução de um problema com uma rede neural artificial, determinando assim o número de neurônios, número de camadas, algoritmos de treinamento, bem como as funções de ativação que obtém melhores métricas de desempenho.

Figura 15- Fluxograma da execução da rede *Multilayer Perceptron.*



3.2. REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

A Regressão Linear Múltipla é uma generalização dos mínimos quadrados, onde são considerados a minimização das somas das potências *n*-ésimas dos resíduos. Conforme Andrews (2017), o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) é um procedimento ideal quando os erros em um modelo de regressão têm uma distribuição gaussiana ou quando estimativas lineares são necessárias. O método possui tratamento em resíduos, no entanto, essa análise requer experiência em uma área não matemática. O ajuste pode gerar alto índice de resíduos, o que indica que algo está errado.

A Regressão Linear Múltipla é uma abordagem estatística para descrever associações simultâneas entre várias variáveis. Um item essencial nessa modelagem inclui a estimativa, a inferência e a seleção das variáveis que constroem o modelo, bem como, a avaliação do ajuste do modelo (HAHS-VAUGHN *et al.*, 2020). Grande parte da computação estatística é feita em modelos de regressão linear. Sendo assim, essa é amplamente aplicada em estudos linguísticos, sociologia e história (ANDREWS, 2017). A escolha das variáveis preditoras que afetam a variável de resposta é fundamental, pois cada variável afeta de forma distinta e importante o modelo de regressão.

De acordo com Almeida (2015), a versatilidade do MMQ o torna uma ferramenta com potencial na modelagem matemática e no uso de recursos computacionais, agilizando e promovendo melhorias significativas na praticidade do método. O problema do MMQ consiste em relacionar

variáveis envolvidas num determinado fenômeno, a partir de um conjunto de dados e, desta forma, encontrar um modelo matemático que expresse de maneira satisfatória esse fenômeno. Assim, o método propõe uma forma de aproximação de funções. Nesse caso, o ajuste de curva não tem a necessidade de que a função passe exatamente pelos pontos ajustados, logo uma função φ(x) de um tipo pré-estabelecido (senoide, parábola ou reta dentre outras) é escolhida sendo a que melhor se ajusta ao conjunto de dados.

A análise por regressão múltipla também é altamente útil em situações experimentais, onde o experimentador pode controlar as variáveis preditoras. Um experimentador normalmente irá desejar investigar várias variáveis preditoras simultaneamente, porque quase sempre mais de uma influencia a resposta. Os modelos de regressão linear múltipla podem ser utilizados para qualquer observação de dados ou para dados experimentais de um desenho completamente aleatório. Conforme Tranmer *et al.* (2020), o método da Regressão Linear Múltipla é um modelo dedutivo, ou seja, se baseia na compreensão do mundo real do problema a ser modelado e é fundamentado na teoria.

Ensaios laboratoriais, medições e observações estão comumente sujeitos a erros e aproximações, ou seja, mesmo sendo efetuado um ensaio laboratorial cuidadoso, os erros são frequentes (HELENE, O., 2006). Um estudo apurado nos gráficos de resíduos deve ser realizado, no entanto, ele requer habilidade e o julgamento do designer.

Segundo Swearingen (2018), a análise de regressão múltipla é um sistema que examina a relação de uma série de variáveis independentes para uma única variável dependente, sendo um modelo amplamente utilizado em análises estatísticas. Segundo o autor, a relação entre as variáveis pode ser linear ou curvilínea, e a análise do método fornece uma avaliação de quão bem um conjunto de preditores contribuem para a estimativa do dado alvo. O método avalia a contribuição individual dos preditores e como estes afetam o parâmetro de saída. A regressão linear múltipla é uma extensão da regressão linear simples, no entanto, com múltiplas variáveis preditoras e um resultado com n unidades de observação.

Na Equação (7) são apresentadas as múltiplas variáveis preditoras e um resultado $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i,n}, y_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ unidades de observação, formalizando, assim, a relação estatística simultânea entre o único resultado contínuo Y e as variáveis preditoras X_k $(k = 1, 2, \dots, n)$. O termo β_0 representa a intercessão ao eixo, e cada β_{k} representa uma inclinação em relação a X_k, sendo chamados de coeficientes de regressão parcial. É importante observar que as suposições do método são as mesmas da regressão simples, dentre elas: os y_i são valores independentes entre si e os valores y_i seguem distribuição normal.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_n x_{i,n} + \varepsilon_i \,. \tag{7}$$

A sequência de execução do método de regressão linear múltipla é a seguinte:

i. Para cada preditor, verificar através dos gráficos se existe uma relação linear entre os dados alvo e cada preditor;
ii. Estimar o modelo de regressão linear;
iii. Avaliar se o modelo oferece um ajuste adequado para os dados;
iv. Usar o modelo para fazer inferências sobre os coeficientes de regressão;
v. Reavaliar por meio de diagnósticos se o modelo oferece um ajuste adequado para os dados.

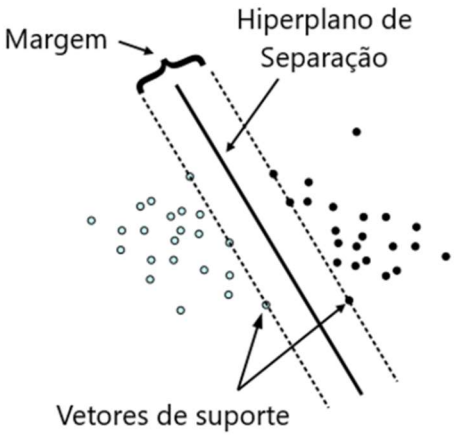
Segundo Scott e Holt (1982), a maioria dos métodos estatísticos foram desenvolvidos para dados coletados em experimentos controlados, onde é razoável supor que as observações são independentes.

3.3. MÁQUINAS DE VETORES DE SUPORTE

Baseado na teoria de aprendizado estatístico, as Máquinas de Vetores de Suporte (SVM – *Support Vector Machine*) são uma técnica de aprendizado de máquina e inteligência computacional onde é possível obter uma classificação de dados do mesmo domínio em que foi realizado o aprendizado. Segundo Lorena e Carvalho (2007), o método utiliza um princípio denominado indução, onde é possível tirar conclusões genéricas a partir de um conjunto de treinamento, sendo possível obter resultados melhores do que em outros algoritmos de aprendizagem.

As SVM são algoritmos de aprendizagem que funcionam em problemas de classificação e regressão. Além de realizar regressão linear e classificação, as SVM também funcionam bem em dados não lineares (LIN; WANG, 2002). No caso de classificação, deve ser obtido um hiperplano com a finalidade de maximizar a separação entre duas classes, conforme Figura 16.

Figura 16 – Parâmetros importantes nas Máquinas de Vetores de Suporte.



Fonte: adaptado de Hepworth *et al.* (2012).

No caso de variáveis que não são linearmente separáveis, não é possível a obtenção do hiperplano. Neste caso, é necessária uma adaptação do algoritmo de forma independente, e a abordagem mais comum é usar uma ferramenta geral chamada *kernel* para generalizar qualquer algoritmo linear para usar formas curvas. A regressão de vetor de suporte (SVR) é uma técnica de regressão não paramétrica que depende exclusivamente de funções de *kernel* (DRUCKER *et al.*, 1997).

Segundo Osuna *et al.* (1997), o *Kernel* é um truque que leva dados linearmente inseparáveis a um espaço de alta dimensão, onde os dados se tornam linearmente separáveis. De outra forma, a função de *kernel* transforma dados linearmente inseparáveis em dados separáveis, adicionando mais dimensão a estes dados (BENNETT; DEMIRIZ, 1999).

Os *Kernel* mais comumente usados são:

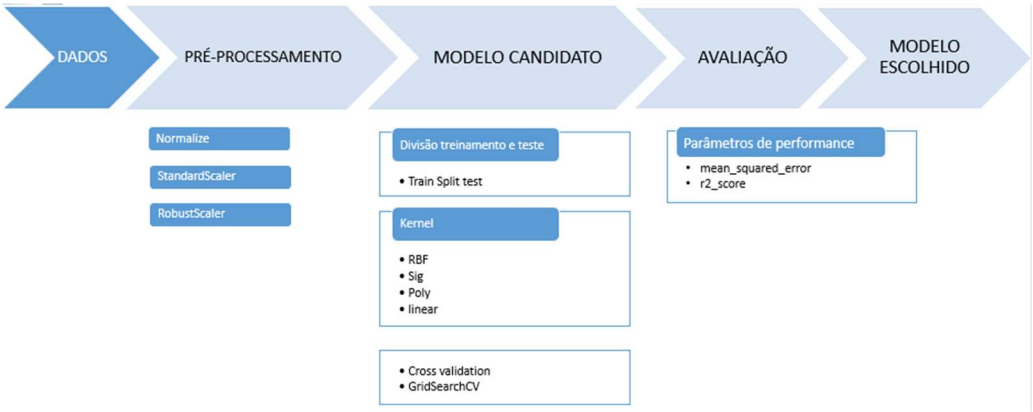
- Linear: $\boldsymbol{K(X_i, Y_i) = X_i^T Y_i}$
- Polinomial: $\boldsymbol{K(X_i, Y_i) = [(X_i^T Y_i) + 1]^d}$
- Função de base radial: $\boldsymbol{K(X_i, Y_i) = e^{-\gamma|X_i - Y_i|^2}}$
- Sigmóide: $\boldsymbol{K(X_i, Y_i) = \tanh(\beta_0 X_i^T Y_i + \beta_1)}$

Outro fator que pode ser preponderante nas SVM é a escolha dos parâmetros de entrada no modelo. Desta forma, é necessário chegar aos parâmetros que obtém melhor performance para a simulação. Para tanto, é utilizado o *GridSearchCV*, que é um método que faz uma busca exaustiva de parâmetros para a SVR. Dentre as possibilidades de entrada no *GridSearchCV* estão os parâmetros como *kernels* (linear, polinomial, função de base radial e sigmoide), C, *degree*, *Epsilon* e *gamma*, dentre outros. O objetivo do *GridSearchCV* é obter

os melhores parâmetros de entrada com a finalidade de prever de forma assertiva os resultados. O *GridsearchCV* avalia o melhor desempenho com base nos valores do coeficiente de determinação. Outro fator preponderante na qualidade do método é a divisão em dados de treinamento e teste. Dessa forma, o *Train Split Test,* que é uma técnica que visa pegar um conjunto de dados e os particionar em dois subconjuntos (treinamento e o teste), pode ser utilizado.

A sequência metodológica do SVM segue o fluxograma da Figura 17. A partir dos dados brutos é escolhida uma estratégia de pré-processamento, chegando-se ao modelo candidato e realizando-se a divisão de treinamento e teste pelo *Train Split Test*. Uma vez que o subconjunto for escolhido, é feito o ajuste de parâmetros pelo *GridSearchCV*, determinando-se os melhores parâmetros para cada *kernel*. Por fim, é feita uma avaliação da implementação através das métricas de desempenho.

Figura 17 - Fluxograma da execução do SVM.



4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: TRABALHOS RELACIONADOS

Neste capítulo será feito um apanhado de trabalhos já existentes sobre a determinação das propriedades mecânicas do concreto fazendo uso de inteligência artificial e métodos de aprendizado de máquina. Estes trabalhos são artigos e outros materiais cientificamente confiáveis. Sendo um apanhado do que já existe de mais atual na abordagem da obtenção da resistência à compressão do concreto, tem por finalidade fundamentar e dar consistência a todo o estudo realizado.

4.1. REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

Dentre os métodos de aprendizado de máquina e inteligência computacional, estão as Redes Neurais Artificiais, e diversos estudos têm este método como precursor. A seguir são apresentados alguns trabalhos que utilizaram esse método na determinação das propriedades mecânicas do concreto.

O estudo conduzido por Hoła e Schabowicz (2005) apresenta um método capaz de prever a resistência à compressão do concreto a partir de ensaios não-destrutivos. Sendo utilizados para obter os parâmetros de entrada do modelo: o método ultrassônico, métodos esclerométricos (martelo de rebote Schmidt e martelo de Poldi) e o método *pull-out*. Neste estudo, foram utilizados sete diferentes traços contendo: cimento Portland, água, agregado, superplastificante e sílica ativa. O conjunto de dados para treinamento e teste das redes neurais foi criado com sete concretos e suas resistências à compressão variaram de 24 a 105 MPa. Os parâmetros de entrada da rede neural testada são: *longitudinal ultrasonic wave velocities, reflection numbers (size of rebound), hardness, pulling-out force, concrete age, bulk density,* e como parâmetro de saída a resistência à compressão do concreto. O algoritmo de treinamento de Levenberg-Marquardt foi utilizado e se mostrou eficaz, fato evidenciado pelos baixos valores de RMSE (*Root Mean Square Error*). O coeficiente de correlação foi da ordem de 0,99 para os casos de treinamento e teste. Já os valores de desvio padrão do erro relativo foram baixos. Os resultados obtidos pela implementação e pelos ensaios destrutivos foram muito semelhantes.

A pesquisa relatada por Yeh (2006) também fez uso das redes neurais artificiais. O objetivo deste trabalho foi determinar o efeito da substituição de cinzas volantes, de 0 a 50%, na resistência à compressão inicial e tardia, de 3 a 56 dias, de concreto de baixa e alta resistência, em relações água-material cimentício na faixa de 0,3–0,7. O estudo conduziu a altas correlações entre a resistência à compressão do concreto e a sua composição. O valor

de RMSE foi de 3,01 MPa com um coeficiente de determinação de 0,940 para treinamento e de RMSE foi de 4,32 Mpa com um coeficiente de determinação de 0,929 para teste. Por meio deste estudo, foi possível concluir que as redes neurais podem ser utilizadas para testar os efeitos das variáveis e suas interações com a resistência do concreto. O estudo possibilitou verificar que misturas com maior teor de cinzas volantes resultou em valores de resistência mais baixos, sendo esta redução maior no caso do ensaio em uma idade precoce. Utilizando a metodologia aplicada, foi possível comprovar que o uso deste método computacional funciona de forma eficiente para simular o comportamento da resistência à compressão do concreto.

Outro estudo apresentado por Alshihri; Azmy e El-Bisy (2009) conclui que é possível verificar que a rede neural pode ser utilizada para desenvolver modelos estatísticos para sistemas intrinsecamente não lineares, apresentando vantagens de simular o comportamento complexo de muitos problemas. Neste estudo, as redes neurais foram usadas para prever a resistência à compressão de concretos leves após 3, 7, 14 e 28 dias de cura. Foram usados dois modelos: a rede *feed-forward backpropagation* e a correlação em cascata. Um cimento Portland comum produzido localmente foi usado nesta investigação. O teor de cimento pesava cerca de 450, 400 e 350 kg/m^3. Os espécimes de concreto foram cubos de 150x150x150mm. Para determinar a resistência à compressão do concreto agregado leve acima mencionado. Como variáveis de entrada, foram utilizadas areia, relação água/cimento, agregado fino leve, agregado graúdo leve, sílica ativa usada em solução, sílica ativa adicionada ao cimento, superplastificante, período de cura e a resistência à compressão do concreto. Para as redes neurais, os coeficientes de correlação de 0,972 e 0,977 foram obtidos para os dados de treinamento e teste de predição da resistência à compressão, respectivamente. Na correlação em cascata, os coeficientes de correlação de 0,974 e 0,982 foram obtidos para os dados de treinamento e teste de predição de força compressiva. Este estudo concluiu que a correlação em cascata apresentou resultados precisos e aprendeu com mais rapidez em comparação com o procedimento *feed-forward backpropagation*. Nesse estudo, ficou evidente que os modelos de redes neurais são ferramentas úteis na estimativa da resistência à compressão do concreto leve e sem dúvida este método reduz o custo e o tempo necessário para realização de ensaios destrutivos.

O estudo feito por Chou *et al.* (2011) apresentou como objetivo a otimização da previsão da resistência à compressão do concreto de alto desempenho, sendo apresentada uma comparação entre métodos de mineração de dados. Segundo autor, o concreto é um material que apresenta uma função altamente não linear entre seus componentes. Neste estudo, a resistência à compressão do concreto de alto desempenho é função dos componentes

utilizados, sendo eles: cimento, cinza volante, escória de alto forno, água, superplastificante, idade e agregado grosso e fino. Esta análise foi realizada usando cinco métodos diferentes de mineração de dados: dois modelos de aprendizado de máquina (redes neurais artificiais e máquinas de vetores de suporte), um modelo estatístico (regressão múltipla) e dois modelos metaclassificadores (*Multiple Additive Regression Trees* – MART e *Bagging Regression Trees*). O banco de dados deste estudo foi obtido através de 17 laboratórios de teste de resistência do concreto. O conjunto de dados experimentais foi obtido de um repositório de dados da Universidade da Califórnia. Um conjunto final de 1.030 amostras de cimento Portland comum contendo vários aditivos e submetido a cura em condições normais e avaliado em vários laboratórios de pesquisa universitários. Os métodos foram avaliados segundo as seguintes métricas como o coeficiente de determinação. O modelo MART apresentou um coeficiente de determinação de 0,9543 e a rede neural 0,9091. A análise realizada neste experimento, em comparação ao desempenho, é que a árvore de regressão múltipla aditiva (MART) foi superior em precisão de predição e tempo de treinamento. Seus resultados analíticos sugerem que a modelagem baseada em MART é eficaz para prever a resistência à compressão de diferentes idades do concreto de alto desempenho.

No estudo de Gandomi e Alavi (2011) foi apresentado o uso de técnicas de inteligência computacional na modelagem do comportamento do concreto. O conjunto de dados contém 1133 resultados de ensaios de resistência a compressão obtidos dos estudos de Yeh (1998). Especificamente, são usados a Programação Genética e as redes neurais artificiais. No primeiro, são usados ramos da programação genética como: *Tree-Based Genetic Programming (*TGP*) e Linear Genetic Programming (*LGP*)*. Também são propostas duas variantes das redes neurais artificiais a *MultiLayer Perceptron* (MLP) e *Radial Basis Function* (RBF). As habilidades da simulação são aplicadas em casos convencionais de obtenção das propriedades do concreto. Neste estudo, a resistência à compressão do concreto é obtida utilizando as propriedades da mistura, enquanto o módulo de elasticidade usa a resistência à compressão. O coeficiente de correlação apresentou valores maiores que 0,80 o que representa forte correlação entre os dados, já os valores do *Mean Absolute Error* (MAE) foram da ordem de 2. Desta forma os métodos propostos foram eficazes na previsão da resistência à compressão e do módulo de elasticidade. Os modelos foram validados por dados além dos de treinamento. A LGP forneceu previsões mais precisas que TGP, no entanto, as redes neurais testadas forneceram melhores resultados. A partir deste estudo foi possível dizer que a resistência à compressão pode ser obtida a partir das propriedades básicas da mistura, enquanto o módulo de elasticidade pode ser obtido usando a resistência à compressão. Deste modo, é possível concluir que a resistência à compressão e o módulo de elasticidade podem ser obtidos a partir de métodos computacionais.

O trabalho de Muthupriya, Subramanian e Vishnuram (2011) propõe o uso de redes neurais artificiais na previsão de resistência à compressão de cubos de concreto e a durabilidade de concreto contendo Metacaulin com cinza volante e sílica ativa com cinza volante nas idade de 3, 7, 28, 56 e 90 dias. Os conjuntos de treinamento e de teste foram obtidos por meio de resultados experimentais para 140 espécimes produzidos com 7 proporções de mistura diferentes são usados. O tipo da rede utilizada foi a *feedforward,* que foi projetada com oito parâmetros de entrada dentre eles: a idade da amostra, cimento, Metacaulin, cinza volante, água, areia, agregado e superplastificante e, em outro conjunto de espécimes, foi utilizado Sílica ativa ao invés de Metacaulin. O autor provou que as redes neurais possuem alto potencial para predizer os valores da resistência à compressão e a durabilidade do concreto contendo Metacaulim, sílica ativa e cinzas volantes. No treinamento do modelo ANN-I os valores estatísticos de RMSE, R^2 e *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) encontrados foram 2,1422, 99,12% e 1,8514%, respectivamente, e na etapa de teste os valores foram 2,2551, 99,01% e 0,4287%, respectivamente. Já para o modelo ANN-II os valores estatísticos de RMSE, R^2 e MAPE do treinamento foram encontrados como 4,4043, 99,65% e 3,7135%, respectivamente, e na etapa de teste 4,7382, 94,99% e 3,3920%, respectivamente. O melhor valor de R2 é 99,65% para o treinamento definido no modelo ANN-II. O valor mínimo de R2 é 99,01% para teste definido no modelo ANN-I. As ANN mostraram-se capazes de aprender e generalizar, a partir de exemplos, tornando-as uma ferramenta poderosa para resolver questões de engenharia. Os resultados apresentados estão muito próximos dos resultados experimentais, sendo que os valores estatísticos RMSE, e R^2 são utilizados nessa comparação. Sendo assim, as redes neurais artificiais multicamadas *feedforward* são métodos capazes de prever as características mecânicas do concreto e a sua durabilidade.

No estudo conduzido por Sadrmomtazi, Sobhani e Mirgozar (2013) foi realizado um estudo acerca do *Concrete's stone aggregates with lightweight expanded polystyrene beads* (EPS) que é um tipo de concreto leve feito com substituição do agregado grosso por grânulos leves de poliestireno expandido (EPS). Segundo os autores, esse tipo de concreto se mostrou muito sensível aos seus materiais constituintes, fato este que dificulta o processo de modelagem. O banco de dados foi obtido através de um programa experimental coletado com as resistências de concretos EPS, sendo os corpos de prova de concreto EPS preparados com base nas proporções de mistura estipuladas, constituído pelos seguintes componentes: cimento, sílica ativa, água, agregados finos, agregados graúdos, grânulos de poliestireno expandido e resíduos de fibras de polipropileno. Foram propostos para o desenvolvimento deste trabalho a comparação dos seguintes métodos computacionais: Rede Neural Artificial (ANN) e sistema de inferência *fuzzy* baseado em rede adaptativa (ANFIS). Para avaliar os métodos propostos foram utilizados dois parâmetros: RMSE e o *correlation factor* (CF). O RMSE da rede neural

teve média de 1,07 e o CF de 0,99 para treinamento e para etapa de teste RMSE de 2,82 e o CF 0,99. Foram obtidos resultados promissores usando as ANN e ANFIS, e foi possível concluir que os modelos propostos podem ser usados para prever a estabilidade das misturas de concreto EPS e minimizar a realização de testes experimentais dispendiosos.

O trabalho realizado por Gupta (2013) desenvolveu a aplicação de ANN para determinar a resistência à compressão do concreto com substituição parcial de cimento por nano-sílica. O conjunto de dados dessa pesquisa foi retirado de várias literaturas foram coletados no total, 32 conjuntos de dados. O autor explica que o uso de materiais nano-particulados no concreto traz muitos benefícios, que estão correlacionadas à durabilidade de diversos materiais cimentícios, além de reduzir as quantidades de cimento do compósito. O desempenho do modelo foi medido por meio do coeficiente de correlação (0,8685), do erro médio absoluto (6,0068) e da raiz do erro quadrático médio (8,1834) e, a partir destes, foi possível medir a diferença entre os resultados previstos e os valores alvos. Com base nestes resultados, o autor concluiu que é possível estimar a resistência à compressão do concreto sem a necessidade de ensaios experimentais em um período bastante curto de tempo e com taxas de erro que podem ser reduzidas usando outras técnicas de mineração de dados.

No estudo de Deshpande, Londhe e Kulkarni (2014) uma rede neural artificial com algoritmo de retro propagação foi utilizada para prever a resistência à compressão do concreto aos vinte oito dias com agregado reciclado e, também, foram propostas outras duas técnicas baseadas em dados nomeadas: Árvore Modelo e Regressão Não Linear. Conforme o autor, o agregado reciclado é um material ambientalmente correto, sendo uma necessidade atual de reutilização dos resíduos de construção. Os dados utilizados neste estudo foram obtidos a partir de experimentos feitos por autores e da literatura publicada, em um total de 257 conjuntos de dados. Os parâmetros de entrada utilizados neste estudo foram proporções em metros cúbicos de cimento, agregado fino natural, agregados grosseiros naturais, agregados reciclados e água. Neste estudo, a ANN obteve coeficiente de correlação de 0,93, a Árvore Modelo e a regressão não linear de 0,83. Dentre os métodos testados, a ANN obteve melhor performance. Sendo assim, conclui-se que as ANNs aprendem com exemplos e compreendem as regras no domínio que versa a resistência do concreto.

No estudo conduzido por Nikoo, Torabian Moghadam e Sadowski (2015) a resistência à compressão do concreto foi prevista usando Redes Neurais Artificiais Evolutivas (do inglês *Evolutionary Artificial Neural Networks* - EANN) que são uma combinação entre uma Rede Neural Artificial e Algoritmos Genéticos. O banco de dados deste estudo foi obtido a partir de amostras de peças cilíndricas de concreto com diferentes características, e foram utilizados

173 padrões de dados experimentais. Os valores obtidos do coeficiente de correlação para a resistência à compressão nas etapas de treinamento, teste e validação foram iguais a 0,910, 0,935 e 0,899, respectivamente. Com base nesses resultados, ficou comprovado a confiabilidade da estratégia sugerida neste estudo, a propriedade de generalização de EANN também foi usada na previsão dos valores de resistência à compressão com base em dados coletados não utilizados. Por meio deste estudo, verifica-se que o modelo ANN é recomendado, possuindo mais flexibilidade, capacidade e precisão na previsão da resistência à compressão do concreto.

Conforme Chopra, Sharma e Kumar (2016), técnicas emergentes de mineração de dados podem ser usadas na predição da resistência à compressão do concreto. Os dados experimentais usados para a previsão da resistência à compressão do concreto neste estudo foram retirados do trabalho de pesquisa conduzido por Kumar (2002). O conjunto de dados utilizado foi coletado em períodos de cura de 28, 56 e 91 dias para espécimes de concreto. Os resultados obtidos foram confrontados aos retirados da literatura. A ANN apresentou um R^2 médio de 0,98 e a programação genética um R^2 de 0,93. Sendo assim, foi possível concluir que o modelo de ANN com o algoritmo de treinamento de *Levenberg-Marquardt* se mostrou a melhor ferramenta de predição.

O estudo de Hammoudi *et al.* (2019) teve como objetivo prever a resistência à compressão do concreto contendo agregados graúdos reciclados de concreto. Uma abordagem de redes neurais artificiais e a *Response Surface Methodology* foram usadas. A *Response Surface Methodology* explora a relação entre as variáveis independentes e uma variável dependente. A ideia básica desta metodologia é usar um conjunto de dados com a finalidade de obter uma boa resposta. A *Response Surface Methodology* obteve como resposta um R^2 de 0,9871, 0,9880 e 0,9900 para 7, 28 e 56 dias, respectivamente, e RMSE de 0,8187, 1,1275 e 0,9983 para 7, 28 e 56 dias, respectivamente. Já a rede neural apresentou como resposta um R^2 de 0,9990, 0,9880 e 0,9900 para 7, 28 e 56 dias, respectivamente, e RMSE de 0,14759, 1,1275 e 0,3726. Os resultados obtidos indicam que a resistência à compressão do concreto reciclado é altamente influenciada pelo teor de cimento. Dentre os resultados obtidos, a ANN apresentou melhores resultados que a *Response Surface Methodology*, revelando que o modelo de ANN é uma ferramenta poderosa para previsão da resistência à compressão do concreto.

Por fim, ressalta-se que um tema recorrente na atualidade é a sustentabilidade. Versando nesse tema, o trabalho de Kaplan *et al.* (2019) propõe o uso de aditivos minerais e resíduos industriais como substitutos do cimento Portland, o que acarreta em emissões reduzidas de

CO_2. Este estudo explorou as características mecânicas do concreto endurecido. Dentre os parâmetros usados na modelagem, foram produzidas amostras usando cimento Portland, cimento de escória e cimento calcário. As amostras produzidas endurecidas foram produzidas em algumas proporções de água/cimento. Os corpos de prova de concreto foram submetidos a três condições de cura padrão, ao ar livre e saco plástico selado. Os valores do coeficiente de determinação para os conjuntos de dados de treinamento, validação e teste foram 0,9881, 0,9885 e 0,9776, respectivamente. A resistência à compressão apresentou alta precisão utilizando as Redes Neurais Artificiais, indicando uma boa correlação entre os valores de resistência à compressão previstos e os experimentais.

4.2. REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

A regressão linear múltipla é altamente flexível e se presta a uma variedade de questões, trabalhando em medidas quantitativas como traços de personalidade, habilidades ou previsão de variáveis dependentes. Outra maneira de ser utilizada é em medidas categóricas como classificação de gênero e etnia, sendo empregada em tarefas onde o aprendizado é supervisionado (AIKEN *et al.,* 2012). Neste item, serão apresentados estudos com a utilização deste método na engenharia civil, em especial, na obtenção das características mecânicas do concreto.

Conforme Ozturan, M. Kutlu e Ozturan, T. (2008), a previsão da resistência do concreto é uma questão importante, especialmente no fornecimento de novas misturas e para garantir a qualidade do concreto produzido. Dados experimentais foram coletados por um período de seis meses para um concreto de resistência especificada, produzido com o mesmo tipo de materiais, e foram usados para treinar e testar os modelos de previsão de resistência. O objetivo do artigo proposto pelos autores é utilizar as Redes Neurais Artificiais e a Regressão Linear Múltipla (MLR) para prever a resistência à compressão do concreto aos 28 dias. O banco de dados utilizado provém de diferentes centrais de dosagens e foram agrupados em cinco modelos diferentes, para o qual a rede neural e modelos de regressão linear múltipla foram aplicados. As precisões de predição por rede neural artificial e regressão linear múltipla foram calculados pela lei de Abrams e são comparados com base no coeficiente de determinação. Os melhores resultados para o coeficiente de determinação foram 0,919, 0,903 e 0,351 para os modelos ANN, MLR e Lei de Abrams, respectivamente. A Regressão Linear Múltipla apresentou um dos melhores resultados de previsões dos três modelos que incluem apenas os materiais constituintes. No entanto, a inclusão de dados de forças iniciais resulta em melhor predição pelos modelos de ANN. No caso do último modelo, o desempenho de ANN e MLR obtiveram quase o mesmo desempenho, sendo incluídos apenas dados iniciais

de resistência.

O estudo de Khademi e Jamal (2017) tem como objetivo prever a resistência à compressão do concreto aos 28 dias por meio de modelos baseados em dados experimentais. São considerados dois modelos, MLR e *Adaptive neuro fuzzy inference system* (ANFIS), que são construídos com a finalidade de obter a resistência à compressão do concreto em diferentes projetos de mistura de concreto. O conjunto de dados são 160 diferentes espécimes de concreto que foram coletados da literatura. O coeficiente de correlação entre os valores reais e calculados pertencentes aos subconjuntos de teste para os modelos MLR e ANFIS são $R^2 = 0,8399$ e $R^2 = 0,9047$, respectivamente. Com base nos resultados obtidos, a ANFIS pode ser usada para prever com eficiência a resistência à compressão do concreto, sendo a superioridade do modelo atribuída às relações não lineares entre as variáveis de entrada.

Conforme o estudo de Charhate, Suhedar e Adsul (2018), a trabalhabilidade e a resistência à compressão do concreto são parâmetros significativos que requerem atenção. Foram usados neste estudo os modelos MLR e ANN no intuito de determinar o *slump* e as resistências à compressão aos 7 e aos 28 dias. Os dados usados foram coletados de centrais de mistura localizadas em torno de Mumbai, Navi Mumbai e distrito de Raigad do estado de Maharashtra, Índia. Os parâmetros de entrada do modelo foram cimento, agregado fino, agregado grosso de 10mm e 20mm de tamanho e quantidade de água. Já os parâmetros de saída foram o *slump* e as resistências à compressão aos 7 e 28 dias. Verificou-se que o modelo MLR previu valores com menos precisão em termos de coeficiente de correlação que varia amplamente de 0,60 a 0,80. O coeficiente de correlação obtido da ANN para resistência à compressão de 28 dias foi de 0,98 a 0.99. Várias simulações foram realizadas, concluindo que a ANN executa melhor e produz uma previsão mais precisa em comparação com MLR para abatimento e resistência à compressão.

O estudo Ashrafian *et al.* (2018) sugere a comparação entre cinco modelos de Inteligência Artificial: *Multivariate Adaptive Regression Splines* (MARS), *M5P Model Tree* (M5P-MT), *Least Square Support Vector Machines* (LS-SVM), *Multilayer Perceptron Neural Network* (MLP-NN) e MLR. Estes métodos foram utilizados para obtenção da resistência à compressão e Velocidade de Pulso Ultrassônico de um Concreto Reforçado com Fibra (FRC) incorporando nano sílica. Como medidas de avaliação de desempenho estatísticos, o coeficiente de correlação (CC), a raiz do erro quadrático médio (RMSE), a porcentagem média absoluta de erro (MAPE), o índice de desempenho (PI), o erro médio absoluto (AAE), o desvio padrão (SD) e a média (M) foram utilizados para avaliar os modelos propostos nas etapas de treinamento e teste. Os valores de resistência a compressão previstos pelo método MARS

estão próximos dos valores experimentais tanto no treinamento (com RMSE = 3,35 MPa, PI = 0,019 e CC = 0,982) quanto no teste (com RMSE = 3,78 MPa, PI = 0,029 e CC = 0,971). Além disso, os valores de UPV (com RMSE = 0,049 km/s, PI = 0,004 e CC = 0,976) e (com RMSE = 0,046 km/s, PI = 0,004 e CC = 0,966) nos estágios de treinamento e teste, respectivamente, indicam estreita concordância com os resultados experimentais. A partir do conjunto de dados, o modelo MARS apresentou melhor desempenho em comparação com LS-SVM, M5P-MT, MLP-NN e MLR na previsão das características.

O estudo de Mohammed *et al.* (2020) propõe a previsão da resistência à compressão de argamassas de cimento contendo alto volume de cinzas volantes. Foi coletado um grande conjunto de dados experimentais, no total de 450 argamassas de cimento de diferentes estudos de pesquisa acadêmica. As técnicas utilizadas nestes estudos foram regressão linear (LR) e não linear (NLR), árvore M5P e uma rede neural artificial. No processo de modelagem, os parâmetros de entrada mais relevantes foram: proporção de cinzas volantes, proporção de água/cimento e idades de cura. Os resultados encontrados para os dados de treinamento 0,778, 0,914, 0,891 e 0,934 para o coeficiente de correlação para LR, NLR, M5P e ANN, respectivamente. Já o RMSE para os dados de treinamento foram 7,682, 5,571, 5,661 e 4,698 para LR, NLR, M5P e ANN, respectivamente. Os resultados encontrados para os dados de teste 0,808, 0,994, 0,950 e 0,988 para o coeficiente de correlação para LR, NLR, M5P e ANN, respectivamente. Já o RMSE para os dados de teste foram 7,435, 1,325, 3,941 e 1,998 para LR, NLR, M5P e ANN, respectivamente. Por meio deste estudo, ficou evidenciado que a regressão não linear e a ANN obtiveram melhor desempenho (coeficiente de correlação, e o RMSE) entre os métodos testados. A análise de sensibilidade conclui que o tempo de cura foi o parâmetro mais dominante na previsão da resistência à compressão da argamassa de cimento neste banco de dados.

O estudo de Javed *et al.* (2020) adota uma nova abordagem na predição da resistência à compressão do concreto composto com cinza de bagaço de cana-de-açúcar. Os modelos preditivos da resistência à compressão do concreto são simples para considerar todos os fatores contribuintes. Este estudo considera uma vasta gama de estudos da literatura e quinze amostras de concreto testadas em diversos laboratórios e contendo diferentes dosagens de cinza de bagaço. Este modelo usa esses dados para calibrar e validar o método, respectivamente. Os métodos testados foram: *Gene Expression Programming* (GEP), MLR e *Multiple Non-Linear Regression* (MNLR). Como variáveis de entrada do método, tem-se: relação água-cimento, o percentual de cinza do bagaço, a quantidade de agregado fino e grosso e o teor de cimento. Os indicadores estatísticos utilizados foram o coeficiente de determinação e a raiz do erro quadrático médio, que foram usados para avaliar o desempenho

dos modelos. O estudo indicou que teor de cimento foi considerado como o parâmetro mais sensível na análise. Durante a calibração do modelo GEP os indicadores estatísticos, ou seja, R^2 e RMSE, foram 0,83 e 6,67 durante a calibração do modelo, e 0,85 e 4,57 para a validação do modelo, respectivamente. Durante a calibração do modelo MLR, R^2 e RMSE foram 0,45 e 12,21, respectivamente. Da mesma forma, os valores de R^2 e RMSE foram 0,44 e 24,74, respectivamente, para o período de validação. Durante a calibração do modelo MNLR, o R^2 e RMSE foram encontrados como sendo 0,58 e 11,05, respectivamente, para calibração, e 0,56 e 5,52 para validação do modelo MNLR. O método *Gene Expression Programming* superou todos os modelos para prever a resistência à compressão do concreto, sendo que atendeu todos os critérios de validação externa.

4.3. MÁQUINAS DE VETORES DE SUPORTE

As máquinas de vetores de suporte são uma técnica de aprendizado de máquina e de inteligência computacional, sendo muito utilizada em estudos de classificação e em casos de regressão. Diversas pesquisas têm usado este método na obtenção das propriedades mecânicas dos materiais, como o concreto, obtendo resultados superiores à outras técnicas de aprendizado. Neste item serão expostos estudos a cerca deste método na previsão da resistência do concreto.

Conforme estudos de Yang e Dong (2013), as Máquinas de Vetores de Suporte são uma teoria de aprendizagem estatística onde a minimização de risco estrutural minimiza erros e termos de peso. Neste estudo, um modelo SVM e um de rede neural são apresentados para obter a resistência à compressão do concreto aos 28 dias. Um total de 30 conjuntos de dados provenientes da literatura foram utilizados. Destes conjuntos, 20 foram usados para treinar enquanto os 10 conjuntos restantes foram usados para testar o modelo criado. Para avaliar os modelos foram usadas as seguintes métricas a soma dos erros de quadráticos (do Inglês *Sum Squares Error* - SSE), erro de quadrático médio (MSE) e erro absoluto médio (MAE). A rede neural apresentou valores de 1,552, 0,159 e 0,554 para SSE, MSE e MAE, respectivamente. Já o SVM apresentou 0,191, 0,081 e 0,033 para SSE, MSE e MAE, respectivamente. Estes resultados mostram que as SVM apresentaram melhores resultados e têm potencial para ser uma ferramenta prática para prever a resistência à compressão do concreto aos 28 dias.

No estudo de Samui (2013) foram utilizados três algoritmos de aprendizado estatístico: SVM, *Least Square Support Vector Machine (LSSVM)* e *Relevance Vector Machine (RVM)* para determinar a resistência à compressão do concreto. Como parâmetros de entradas destes

métodos tem-se: cinzas volantes, fumo de sílica, material cimentício total, agregado fino, agregado grosso, teor de água, agente redutor de água, e idade das amostras. O parâmetro de saída dos métodos é a resistência à compressão do concreto. Os valores do coeficiente de correlação foi de 0,975 para dados de treinamento e de 0,972 para teste. Os modelos SVM propostos se mostraram ferramentas práticas para a previsão de resistência à compressão do concreto.

Segundo Abd e Abd (2017), a resistência do concreto é um fator essencial que é considerado no projeto estrutural. Essa característica do concreto pode ser obtida em um ensaio laboratorial de uma amostra envelhecida aos 28 dias ou por meio de métodos computacionais. Sendo assim, a previsão da resistência à compressão do concreto é um tema de muitos estudos. O autor propõe duas técnicas para determinar a resistência à compressão do concreto: as SVM e a Regressão Não Linear Multivariável. O conjunto de dados foi obtido a partir de um conjunto de 150 cubos de concreto e distintos traços de concreto e foram testados quanto à sua densidade e resistência à compressão aos 7 e 28 dias. As variáveis utilizadas nos modelos de previsão foram provenientes do conhecimento dos elementos de proporção da mistura e resistência à compressão de 7 dias. O melhor valor do coeficiente de correlação foi de 0,990 e MSE de 3,268 na etapa de teste e como *kernel* a função de base radial. Neste estudo, o modelo SVM provou ser uma ferramenta significativa na previsão da resistência à compressão de *lightweight foamed concrete* com erros quadráticos médios mínimos.

Conforme Yu *et al.* (2018), a resistência do concreto é um elemento crucial no projeto de estruturas de concreto. A previsão confiável desta variável pode reduzir o custo e o tempo do projeto e evita o desperdício por ensaios laboratoriais. O estudo dos autores propôs um modelo preditivo para prever a resistência à compressão do concreto de alto desempenho utilizando as SVM. Segundo o autor, esse método traz benefícios como mapeamento não linear, alta robustez e grande capacidade de generalização. O conjunto de dados foi coletado da literatura, tendo como parâmetros de entrada: teor de água, cimento, escória de alto forno, cinzas volantes, superplastificante, agregados graúdos e finos e idade de cura, e como parâmetro de saída a resistência à compressão do concreto. O modelo proposto obteve como métricas de desempenho o RRMSE e R^2 de 1,0463 e 0,9481, enquanto a ANN obteve como métricas de desempenho RRMSE e R^2 de 1,449 e 0,9601. Os resultados do estudo indicam que o método pode ser considerado eficaz para predizer uma propriedade mecânica de um concreto de alto desempenho na prática de infraestrutura.

O estudo de Yaseen *et al.* (2018) utiliza um modelo de aprendizado de máquina denominado Máquina de Aprendizado Extremo (do inglês *Extreme Learning Machine* - ELM) para prever a

resistência à compressão do concreto leve. O potencial deste método é comparado com os métodos *Multivariate Adaptive Regression Spline (*MARS*), M5 Tree models* e *Support Vector Regression (*SVR*)*. Um conjunto de dados foi recuperado de vários estudos anteriores e foi utilizado para treinar e testar os modelos de aprendizado de máquina propostos. Os parâmetros de entrada para os modelos preditivos incluem o teor de cimento, densidade da escória de alto forno, relação água-cimento e volume de concreto. Os quatro modelos foram avaliados por meio de vários indicadores de pontuação estatística. O melhor coeficiente de correlação alcançado entre a resistência à compressão medida e prevista com R = 0,941, 0,935, 0,727 e 0,879 para os modelos ELM, MARS, M5 Tree e SVR, respectivamente. Os resultados mostraram que o modelo ELM proposto atingiu um nível adequado de acurácia de predição. Conclui-se, portanto, que o modelo ELM é uma abordagem que pode ser utilizada para prever a resistência à compressão do concreto leve, economizando os trabalhosos lotes de testes necessários para atingir a qualidade de produto desejada.

O estudo de Tanyildizi (2018) faz uso de ANN e de SVM para obter a resistência à compressão e a flexão do concreto leve reforçado com fibra de carbono com sílica ativa exposta a alta temperatura. Neste estudo, a sílica ativa substitui parte do cimento e as fibras de carbono foram usadas em diferentes proporções. Os corpos de provas foram aquecidos e após esse processo, foram submetidos aos testes de resistência. O modelo conta como variáveis de entrada: quantidade de cimento, a quantidade de gases de sílica, a quantidade de fibra de carbono, a quantidade de agregados e a temperatura. As resistências à compressão e flexão do concreto leve foram utilizadas como variáveis de saída. Os modelos SVM previram as resistências à compressão e flexão com valores de R^2 de 0,9701 e 0,9160, respectivamente. O modelo de previsão de ANN mostrou os coeficientes de correlação (R^2) entre os resultados medidos e previstos para as resistências à compressão e flexão foram de 0,9902 e 0,9680, respectivamente. Uma vez sendo feita a comparação entre os resultados do modelo com os resultados experimentais, os melhores resultados foram obtidos com o modelo de rede neural artificial.

Segundo o autor Sun *et al.* (2019), o concreto permeável é um material de boas características de drenagem. As suas propriedades mais importantes são o coeficiente de permeabilidade (PC) e a resistência à compressão não confinada de 28 dias (UCS). A obtenção destas propriedades demanda a realização de testes de PC e UCS com múltiplas variáveis de influência que são demorados e caros. Desta maneira, o autor propõe resolver este problema utilizando uma Regressão de Vetor de Suporte Evoluída (do inglês *Evolved support vector regression* - ESVR) para prever com precisão e eficácia o PC e UCS de concreto permeável. O conjunto de dados utilizado para o modelo continha 270 espécimes no total, que foram

preparados e fundidos em um ambiente controlado no laboratório. As variáveis de entrada para o modelo foram: proporção de água para cimento, proporção de agregado para cimento e tamanho de agregado, enquanto PC e UCS foram as saídas deste modelo. A previsão do PC do coeficiente de correlação dos modelos foram 0,9816, 0,691 e 0,694 para os modelos ESVR, LR e MLR, respectivamente. Já o RMSE foram 0,218, 0,758 e 0,794 para os modelos ESVR, LR e MLR, respectivamente. A previsão do UCS do coeficiente de correlação dos modelos foram 0,996, 0,419 e 0,455 para os modelos ESVR, LR e MLR, respectivamente. Já o RMSE foram 0,577, 6,097 e 5,732 para os modelos ESVR, LR e MLR, respectivamente. Dentre os resultados obtidos, um baixo erro de raiz quadrada média (RMSE) e alto coeficiente de correlação (R) indicam uma capacidade preditiva relativamente alta obtida pelo modelo ESVR. Segundo os autores, este trabalho oferece uma forma simples e conveniente de método de avaliação de PC e UCS de concreto permeável.

O estudo de Azimi-Pour, Naddaf e Pakzad (2020) destaca o uso das SVM para modelar as propriedades do concreto auto adensável com adição de cinza volante. Modelos de SVM linear e não linear foram testados, explorando o uso das funções de kernel, sendo estes: linear, polinomial, base radial e sigmoide. O estudo propôs prever às propriedades frescas e a resistência à compressão do concreto contendo cinza volante. Os testes de resistência à compressão foram realizados com cubos de 150x150x150 mm que tiveram cura úmida em um tanque de água. As propriedades do concreto auto adensável fresco foram avaliadas pelos testes de abatimento, *V-funnel, orimet, U-box e L-box*, foram realizados de acordo com a Norma Europeia. A comparação dos resultados experimentais e previstos mostra que o novo modelo SVM-I tem boa concordância com os modelos SVM anteriores na previsão do concreto auto adensável com adição de cinza volante. Para o *Slump*, o R^2, RMSE e MAPE de SVM-I por RBF foram 0,9799, 21,47 e 1,90, respectivamente, enquanto esses parâmetros para SVM treinados por pesquisa de padrão foram 0,974, 26,92 e 26,9, respectivamente. Os resultados obtidos para o concreto auto adensável com adição de cinza volante mostraram que modelos como o SVM fornece bons resultados considerando o uso de parâmetros de entrada e saída apropriados. Dentre os modelos testados, os resultados mais precisos para a SVM foram obtidos com o uso da função de base radial como *kernel*.

Segundo Shariati e*t al.* (2020), a resistência à compressão do concreto é um fator determinante no projetos de estruturas. Este dado pode ser obtido através de ensaios laboratoriais que demandam tempo e dinheiro. Como alternativa a estes testes, podem ser usados métodos de aprendizado de máquina e inteligência computacional para estimar os resultados. A obtenção desta característica mecânica do concreto depende de diversas variáveis e torna essa predição um problema desafiador no caso de concreto com

substituições parciais de cimento. Neste trabalho foi utilizado uma combinação de Máquina de Aprendizado Extremo com um Algoritmo Metaheurístico (do inglês *extreme learning machine combinado com um algoritmo meta-heurístico grey wolf optimizer* - ELM-GWO). Foram também propostos outros modelos para avaliar o desempenho do modelo. Os modelos propostos para comparação foram: uma ANN, um Sistema de Inferência Neuro-Difuso Adaptativo (ANFIS), uma Máquina de Aprendizado Extremo, uma Regressão de Vetor de Suporte com o *kernel* de função de base radial (do inglês radial basis function - RBF) (SVR-RBF) e outro SVR com um *kernel* de função polinomial (Poly) (SVR-Poly). Os dados usados nesta investigação foram obtidos na literatura. Um conjunto de dados contendo 798 pontos de dados foi coletado. Os teores de cimento, água, cinza volante, escória de forno, agregado miúdo, agregado graúdo, superplastificante e idade foram considerados como as entradas dos modelos e resistência à compressão do concreto previsto como a saída. Os valores do coeficiente de correlação dos métodos foram 0,9679, 0,9754, 0,9757, 0,9692, 0,9583 e 0,9876 para ANN, ANFIS, SVR-RBF, SVR-Poly, ELM e ELM-GWO, respectivamente. O RMSE dos métodos foram 4,1887, 3,6785, 3,6568, 4,1110, 4,7659 e 2,6223 para ANN, ANFIS, SVM-RBF, SVR-Poly, ELM e ELM-GWO, respectivamente. Todos os modelos foram comparados e ficou evidenciado que o modelo ELM-GWO melhora o desempenho no modelo de predição.

O artigo proposto por Li *et al.* (2020) testa o impacto de diferentes proporções de mistura na resistência do *cement paste backfill*. Para melhorar a resistência deste material, dois tipos de fibra foram adicionados: fibras de polipropileno (PP) e fibras de palha. O conjunto de dados conta com um total de 144 cenários de preenchimento de *cement paste backfill* (CPB) com diferentes combinações de fatores, que foram testados por testes de compressão uniaxial. Nesta pesquisa, a técnica de SVM acoplada a quatro algoritmos heurísticos, sendo esses algoritmos genéticos (SVM acoplada algoritmos genéticos GA-SVM), otimização de enxame de partículas (SVM acoplada particle swarm optimization PSO-SVM) e *salp swarm algorithm (*SVM acoplada *salp swarm algorithm SSA-SVM) e GridSearchCV SVM (*SVM acoplada *GridSearchCV GS-SVM)*. A técnica foi desenvolvida para prever a resistência do *cement paste backfill* reforçada com fibra. Com o objetivo de obter os melhores parâmetros de performance para a SVM, foi utilizado o *GridSearchCV*. Para avaliar os métodos foi feito um ranking de pontuação relativa as métricas utilizadas; neste, quanto maior a pontuação melhor e o método. A pontuação do ranking foi 15, 13, 8 e 4 para SSA-SVM, GA-SVM, PSO-SVM e GS-SVM, respectivamente. A partir deste ranking o método SSA-SVM apresentou melhor pontuação no ranking, se mostrando eficaz para o problema em questão e obtendo um R^2 de 0,9245 e MSE de 0,01309.

Segundo Sultana e*t al.* (2020), diferentes tipos de fibras podem ser adicionados ao concreto

como material de reforço, sendo seu baixo custo e sua disponibilidade fatores que incentivam seu uso. Dentre os tipos de fibras naturais tem-se a fibras de juta, que são muito baratas e estão disponíveis em países tropicais. O estudo utiliza diversas abordagens para desenvolver modelos empíricos não lineares e para prever as propriedades mecânicas (resistência à tração e à compressão) do concreto reforçado com fibra de juta. Os métodos utilizados no estudo são: RSM *(Response Surface Methodology),* ANN *e* SVR *(Support Vector Regression).* No total, 13 conjuntos de experimentos foram realizados. Dois corpos de prova cúbicos de 150x150x150 mm de tamanho e dois corpos de prova cilíndricos de 100 mm de diâmetro e 200 mm de comprimento foram preparados para cada conjunto de experimentos. Amostras cúbicas foram usadas para determinar a resistência à compressão e amostras cilíndricas foram usadas para determinar a resistência à tração do concreto. Os espécimes foram mantidos 28 dias sob cura antes do momento do teste. Os valores de R de RSM, ANN e SVR para resistência à compressão foram calculados em 0,978, 0,982 e 0,993, respectivamente. Já em relação à resistência à tração, os valores R de RSM, ANN e SVR foram estimados em 0,913, 0,985 e 0,999, respectivamente. Os resultados indicam que o modelo SVR tem um desempenho melhor do que os modelos ANN e RSM com respeito as métricas de desempenho utilizadas para prever a resistência à compressão e à tração.

No trabalho de Silva, Moita e Arruda (2020) foram desenvolvidos os métodos ANN, SVM e *Random Forest* com a finalidade de obter a resistência a compressão do concreto. Foram também empregados tarefas de pré-processamento, métodos estatísticos e técnicas de visualização de dados para obter a melhor compreensão do banco de dados utilizado. O conjunto de dados disponível na literatura no artigo proposto por Yeh (1998). Os resultados obtidos para o RMSE foram 5,614, 7,456, 5,881 para Random forest, SVM e ANN, respectivamente, e valores de R^2 de 0,902, 0,829, 0,893 para Random forest, SVM e ANN, respectivamente. Os resultados obtidos foram comparados com o da literatura disponível e se mostraram similares.

5. DADOS EMPREGADOS, MÉTRICAS DE DESEMPENHO E METODOLOGIA

Neste capítulo são explicitados os dados empregados na Seção 5.1, as estratégias de pré-processamento na Seção 5.2, métricas de desempenho escolhidas para avaliar os métodos computacionais na previsão da resistência à compressão do concreto na Seção 5.3, e a metodologia na Seção 5.4.

5.1. CONJUNTO DE DADOS

O conjunto de dados utilizado neste trabalho foi escolhido a partir de uma pesquisa intensiva a bancos de dados. Deste modo, o conjunto de dados presente nos estudos de Yeh (1998) foi utilizado. O conjunto contém dados experimentais de 17 fontes diferentes, sendo que a resistência à compressão do concreto é caracterizada pela presença e quantidade dos seguintes constituintes: agregado graúdo e miúdo, teor de cimento, cinzas volantes, escória de alto forno, água, teor de superplastificante e idade. As amostras foram feitas com cimento Portland comum e curadas em condições normais. Algumas imprecisões foram notadas no estudo de Yeh (1998) como a ausência de dados a respeito das cinzas volantes, ou como, a dificuldade em identificar os fabricantes, composição química do superplastificante utilizado.

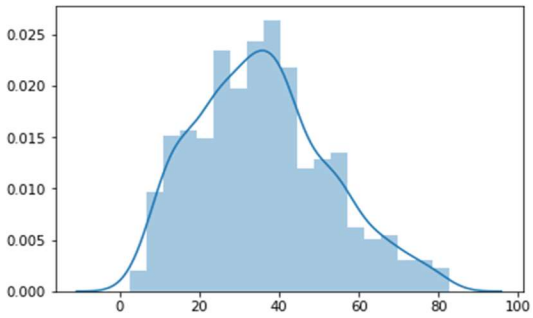
O conjunto de dados contém 1030 resultados de testes de resistência à compressão do concreto com base em várias proporções de constituintes. A fim de avaliar a dispersão dos dados, o intervalo de dados é mostrado na Tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros dos atributos de entrada e saída do conjunto de dados.

Variável	**Intervalo de dados**	
Cimento (kg/m³)	540,00	102,00
Escoria de alto forno (kg/m³)	359,40	0,00
Cinzas volantes (kg/m³)	200,1	0
Água (kg/m³)	247,00	121,80
Superplastificante (kg/m³)	32,20	0,00
Agregado graúdo (kg/m³)	1145,00	801,00
Agregado miúdo (kg/m³)	992,60	594,00
Idade (dias)	365,00	1,00
Resistência à compressão do concreto (MPa)	82,60	2,33

O histograma, caixa de densidade e gráfico de caixa obtido dos dados da resistência a compressão estão expostos na Figura 18, a partir deste é possível verificar que os dados de resistência a compressão possuem distribuição quase normal sendo essa distribuição uma premissa de muitos métodos computacionais melhorando assim a convergência do modelo computacional proposto.

Figura 18 - Histograma e caixas de densidade da resistência à compressão.



5.2. PRÉ-PROCESSAMENTO DOS DADOS

Os conjuntos de dados podem possuir valores que apresentam escalas diferentes, o que acarreta dificuldade para a visualização, podendo, inclusive, piorar o desempenho preditivo de alguns dos métodos computacionais. Dados não padronizados podem reduzir a velocidade da implementação ou mesmo impedir a convergência de estimadores (WANG; WANG; ALEXANDER, 2015).

Estimadores que utilizam métricas e gradiente assumem que os dados estejam padronizados (WANG; WANG; ALEXANDER, 2015). Contudo, para tratar essa questão, técnicas de pré-processamento se mostram eficazes e podem melhorar o desempenho de modelos computacionais.

Foram utilizadas três estratégias de pré-processamento distintas, cada um feita em uma simulação distinta. Desta maneira, os dados foram colocados em escalas comparáveis, seguindo as seguintes estratégias:

- ✓ StandardScaler (Padroniza os recursos removendo a média e escalonando para a variação da unidade);
- ✓ Normalizer (Normaliza as amostras individualmente para a norma da unidade);
- ✓ RobustScaler (Dimensiona recursos usando estatísticas robustas para outliers).

5.3. MÉTRICAS DE DESEMPENHO

Neste estudo são utilizados como métricas de desempenho o erro quadrático médio (MSE), dado pela Equação (8), a raiz do erro quadrático médio ($RMSE$), conforme Equação (9), e o coeficiente de determinação (R^2), dado pela Equação (10):

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y})^2, \tag{8}$$

$$RMSE = \sqrt{MSE}, \tag{9}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}. \tag{10}$$

Nas equações (8), (9) e (10), y_i é o valor observado, $\bar{y}$ é a média das observações, $\hat{y}$ é o valor previsto de y_i e N é o número total amostragem no conjunto de dados.

5.4 METODOLOGIA

Uma vez apresentados os modelos para a previsão da resistência à compressão do concreto, bem como as etapas para a determinação deste parâmetro por meio de ensaios experimentais, este item tem como finalidade apresentar a metodologia aplicada nos métodos ANN, Regressão Linear Múltipla e SVM.

5.4.1. REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

A implementação das Redes Neurais Artificiais utilizadas neste trabalho foi feita com uso do *software MatLab*, em específico a *toolbox* de interface gráfica (*NNtool*). A rede MLP foi a alternativa escolhida por ter capacidade de resolver problemas de reconhecimento de padrões bem como fazer análise de regressão.

A metodologia aplicada neste estudo foi a seguinte:

1. Seleção de dados de entrada

O primeiro passo na criação de uma ANN é a definição dos dados de entrada. O conjunto de dados foi particionado em dados de treinamento, validação e teste na proporção 70/15/15. Os dados brutos de entrada foram colocados em escalas comparáveis utilizando como estratégia de pré-processamento o *Normalizer*. Foi também selecionados os dados de saída do modelo não sendo realizada nenhuma tarefa de pré-processamento nos dados de saída da base.

2. Tipo de rede

Uma vez tendo sido realizada a entrada e saída de dados, escolheu-se o tipo de rede, sendo utilizada a rede *feedforward backpropagation*.

3. Escolha da topologia da rede neural

Um passo posterior foi a definição da arquitetura de rede. Foram empregadas nesse trabalho duas opções de topologia: a primeira com uma camada intermediária e outra com duas camadas intermediárias.

Outro item essencial no desenvolvimento da rede neural artificial é a escolha no número de neurônios utilizados. O presente estudo propõe o método de tentativa e erro para a obtenção do número de neurônios da arquitetura de rede “ótima”. Desta maneira, foram utilizados, na topologia com uma camada intermediária, de 4 a 13 neurônios. Já no caso da segunda topologia, na primeira camada foi utilizado o número de neurônios de melhor performance na primeira topologia para cada algoritmo de treinamento, variando o número de neurônios da segunda camada de 4 a 13 neurônios.

No APÊNDICE A encontram-se a metodologia utilizada nas implementações realizadas para as ANN neste trabalho; somente os melhores resultados são apresentados neste capítulo.

4. Seleção de parâmetros para realizar o treinamento

Um dos problemas referentes a construção de uma ANN está na definição de seus parâmetros e cada item tem sua função. O número de épocas define o número de ciclos de treinamento, ou seja, o número de vezes em que o conjunto de treinamento é apresentado à rede. O erro final desejado consiste em encerrar o treinamento após o erro médio quadrático ficar abaixo de um valor. A taxa de aprendizagem tem influência no processo de treinamento; uma taxa baixa torna o aprendizado muito lento, enquanto uma taxa alta provoca oscilações no treinamento e impede a convergência no processo de aprendizagem. A taxa de momentum tem por objetivo aumentar a velocidade de treinamento da rede e diminuir o perigo de instabilidade.

Para a realização do treinamento da rede foram empregados os critérios de convergência e os critérios de parada mostrados na Tabela 3.

Tabela 3 - Dados de treinamento e critérios de parada.

Dados de treinamento ou críterios de parada	
Número de épocas	1000,00
Erro final desejado	0,00
Taxa de aprendizado	0,01
Taxa de momentum	0,90

5. Treinamento dos modelos de ANN

Uma vez escolhidos a topologia de rede, número de neurônios, número de camadas, funções de ativação. As redes neurais foram treinadas levando em consideração a proporção de treinamento, validação e teste dos dados

A implementação realizada levou em consideração os seguintes algoritmos de treinamento:

- ✓ *Gradient descent backpropagation*
- ✓ *Gradient descent backpropagation* com momentum
- ✓ *Gradient descent backpropagation* com taxa adaptativa
- ✓ *Gradient descent backpropagation* com momentum e taxa adaptativa
- ✓ *Levenberg-Marquardt backpropagation*

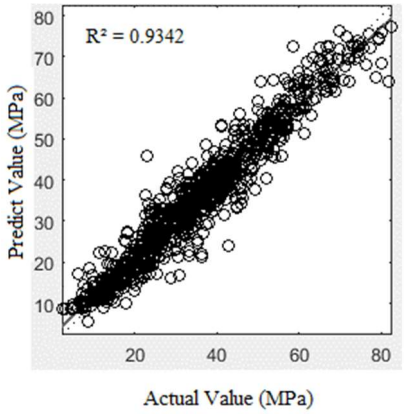
6. Identificação do melhor resultado (Erro e Correlação)

Uma vez definida as características da Rede Neural Artificial, ao fim de cada implementação foram obtidas as métricas de desempenho e as redes avaliadas a partir dessas.

7. Determinação da melhor topologia de rede neural

A partir das redes neurais testadas, foi escolhida a de melhor desempenho geral obtido pelas métricas de desempenho. A Figura 19 apresenta o desempenho da métrica R^2 obtido por uma dessas redes.

Figura 19 - Diagrama de dispersão dos dados.



5.4.2. REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

A implementação da Regressão Linear Múltipla, utilizada neste trabalho, foi feita com uso do *Jupiter Notebook*, utilizando a linguagem *Python*. A formulação matemática do método é apresentada no APÊNDICE B.

O primeiro passo na realização do método de Regressão Linear Múltipla é a escolha do conjunto de dados. Para isso, foi utilizado novamente o mesmo conjunto de dados obtidos no estudo de Yeh (1998). Os dados de entrada para a Regressão Linear Múltipla foram submetidos a uma estratégia de pré-processamento. Ao fim da execução da MLR, foram determinados os coeficientes de regressão parcial do processo, bem como, as métricas de desempenho.

5.4.3. MÁQUINAS DE VETORES DE SUPORTE

A implementação das SVM utilizadas neste trabalho foi feita com uso do *Jupiter Notebook*, utilizando a linguagem *Python*.

A primeira etapa do método é a utilização de estratégias de pré-processamento de dados, foram utilizadas as técnicas listadas abaixo:

- ✓ *Normalizer*
- ✓ *StandartScaler*
- ✓ *RobustScaler*

Uma vez escolhida a estratégia de pré-processamento, foi utilizado o *GridSearchCV* para determinação dos melhores parâmetros de entrada para cada *kernel*. Os *kernels* utilizados foram função de base radial, polinomial, linear e sigmoide.

A divisão de dados utilizada na SVM foi 85/15 para treinamento e teste, respectivamente.

A partir do *GridSearchCV*, foram determinados os melhores parâmetros de entrada para cada *kernel*. Os dados de entrada do *GridSearchCV* são apresentados na Tabela *4*.

Tabela 4 - Dados de entrada do GridSearchCV.

Parâmetros					**Escolhido**
Kernel	RBF	Poly	Linear	Sigmoide	**RBF**
C	1-1000	1-1000	1-1000	1-1000	**1000**
Degree	-	2-5	-	-	**-**
Epsilon	0,1-1	0,1-1	0,1-1	0,1-1	**0,1**
Gamma	scale/auto	scale/auto	scale/auto	scale/auto	**scale**

Utilizando os dados “ótimos” obtidos pelo *GridSearchCV* para cada *Kernel* foram feitas as implementações com distintas configurações determinando assim os parâmetros de performance de cada um destes.

6. RESULTADOS OBTIDOS X LITERATURA

Neste capitulo serão apresentados os resultados obtidos pelos métodos bem como sua comparação aos resultados de outros autores disponíveis na literatura. Na Seção 6.1 são apresentados os resultados das Redes Neurais Artificiais, na Seção 6.2 os resultados da Regressão Linear Múltipla, na Seção 6.3 os resultados das Máquinas de Vetores de Suporte e por fim na Seção 6.4 traz uma discussão acerca dos resultados alcançados pelos métodos e a comparação com outros estudos da literatura.

6.1 REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

A seguir, são apresentados os melhores resultados utilizando os algoritmos de treinamento e a descrição das topologias utilizados, os resultados foram obtidos a partir da média de 10 simulações, conforme a Tabela 5.

Tabela 5 - Resultados obtidos na implementação.

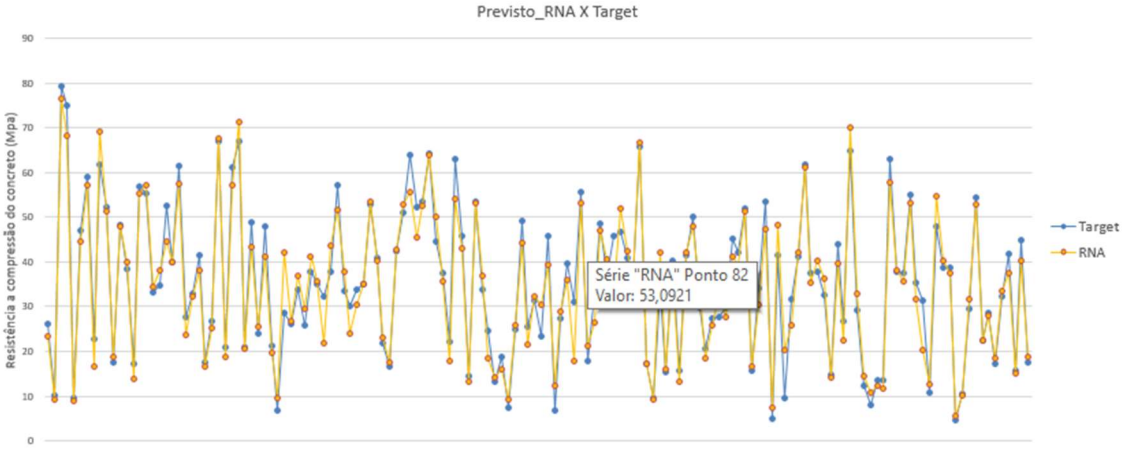
Número de camadas intermediárias	Tipo de função de ativação	Número de neurônios	Tipo da função de treinamento									
			Backpropagation								Levenberg Marquardt	
			Clássico		Momentum		Taxa adaptativa		Mom./ tx. Adap.			
			RMSE	R²	RMSE	R²	RMSE	R²	RMSE	R²	RMSE	R²
1	logsig/logsig	6	15,65	0,46								
	logsig/logsig	4			17,17	0,26						
	purelin/purelin	8					9,98	0,62				
	tansig/tansig	4							9,14	0,70		
	tansig/tansig	13									4,77	0,93
2	purelin/purelin/purelin	6_5	34,51	0,20								
	logsig/logsig/tansig	4_10			23,43	0,07						
	purelin/purelin/purelin	8_7					11,57	0,51				
	tansig/tansig/tansig	4_10							8,96	0,69		
	tansig/tansig/tansig	13_7									4,39	0,93

Dentre as topologias testadas, a que apresentou melhor performance foi obtida com o algoritmo de treinamento de *Levenberg-Marquardt,* sendo essa a topologia com duas camadas intermediárias, possuindo 13 neurônios na primeira camada intermediária e 7 neurônios na segunda camada intermediária. Como função de ativação, a que apresentou uma melhor resposta foi a função de tangente hiperbólica em todas as camadas, conforme apresentado na Tabela 5, obtendo um RMSE de 4,39 MPa e coeficiente de correlação de 0,93.

Na Figura 20 são apresentados uma à parcela dos dados de teste e seus alvos, ou seja, os valores originais e os previstos pela Rede Neural Artificial implementada nesse estudo,

comparando os valores previstos e os originais, pode-se verificar que alguns valores obtiveram erros e em outros os valores foram idênticos.

Figura 20 - Resultados original *versus* previsto para a ANN para o conjunto de teste.



6.2 REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

Este item apresenta os resultados alcançados pela Regressão Linear Múltipla proposta, sendo determinados os coeficientes de regressão parcial, conforme a Tabela *6*.

Tabela 6 - Coeficientes de regressão parcial.

		coeficiente
x_{i1}	Cimento	143,47
x_{i2}	Escoria de alto forno	112,91
x_{i3}	Cinza volante	86,73
x_{i4}	Água	-291,13
x_{i5}	Superplastificante	317,57
x_{i6}	Agregado grosso	23,91
x_{i7}	Agregado fino	18,07
x_{i8}	Idade	153,07

A Equação (11) apresenta uma expressão analítica obtida pela Regressão Linear Múltipla implementada.

$$y_i = 143{,}47x_{i1} + 112{,}91x_{i2} + 86{,}73x_{i3} - 291{,}13x_{i4} + 317{,}57x_{i5} + 23{,}91x_{i6} + 18{,}07x_{i7} + 153{,}07x_{i,8}\ . \qquad (11)$$

Na Equação (11), os valores x_{ij} são os valores normalizados para cada parâmetro.

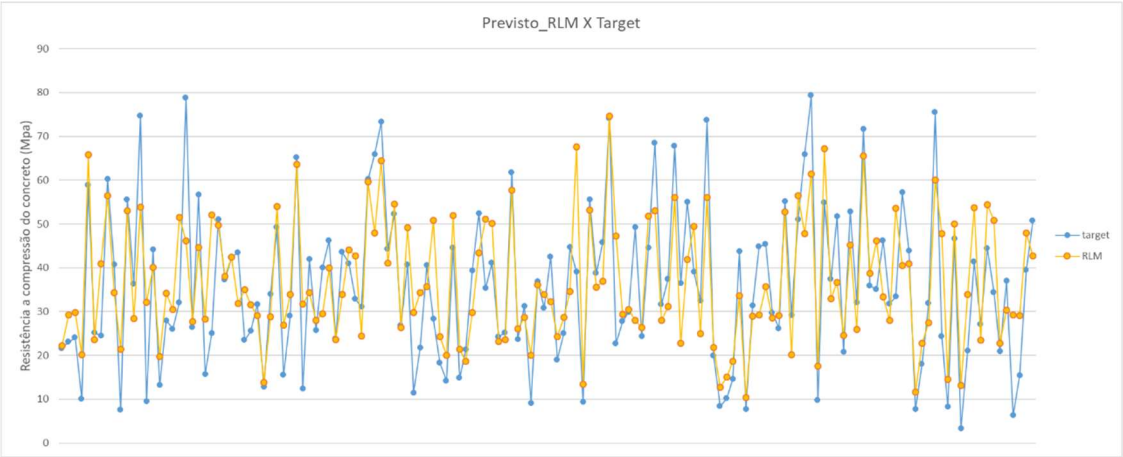
Uma vez calculada a equação analítica que descreve o fenômeno de obtenção da resistência à compressão do concreto, foram calculadas as métricas de desempenho obtidos pelo método, conforme Tabela 7.

Tabela 7 - Parâmetros de performance da MLR.

MÉTODO DA REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA	
RMSE	R²
10,35	0,93

Na Figura 21, são apresentados os valores originais e previstos pela Regressão Linear Múltipla de uma parcela dos dados utilizados nesse estudo.

Figura 21 - Resultados original *versus* previsto para a MLR.



6.3 MÁQUINAS DE VETORES DE SUPORTE

Este item apresenta os resultados obtidos a partir da implementação da Máquina de Vetores de Suporte. A Tabela 8 apresenta o resultado de cada simulação, usando diferentes estratégias de pré-processamento e distintas opções de *kernel*.

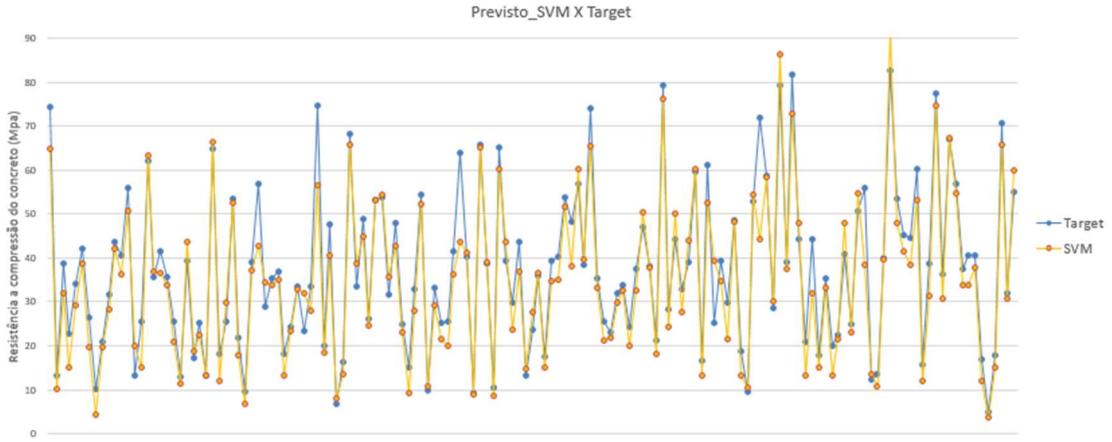
Tabela 8 - Resultados da implementação do SVM.

		Kernel	RBF	Linear	Polynomial	Sigmoide
Tipo de pré-processamento	StandartScaler	RMSE	5,98	11,12	7,36	12,75
		R²	0,89	0,62	0,83	0,50
	Normalizer	RMSE	6,15	10,65	7,66	11,67
		R²	0,88	0,65	0,82	0,58
	RobustScaler	RMSE	7,62	10,67	8,68	13,92
		R²	0,82	0,65	0,77	0,40

A partir da Tabela 8, pode-se verificar, visualizando por coluna, que a mudança no tipo de pré-processamento não resultou em melhoria significativa dos parâmetros de performance. No entanto, observando por linha, a estratégia de pré-processamento *StandartScaler* apresentou melhor performance entre as testadas com o *kernel* função de base radial, parâmetro C = 1000, *Epsilon* = 0,1 e *Gamma* = *Scale*. Ainda na Tabela 8, verifica-se que, para o melhor resultado desse método, foi obtido um RMSE de 5,98 MPa e R² de 0,89.

Na Figura 22 são apresentados os valores originais e previstos de uma parcela de dados alcançados pela SVM implementadas nesse estudo.

Figura 22 - Resultados original versus previsto para a SVM.



6.4 COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS OBTIDOS E OS DISPONÍVEIS NA LITERATURA

Este item traz uma discussão a respeito dos resultados obtidos neste estudo, bem como, a comparação com os resultados obtidos por outros autores. Os resultados obtidos nesta pesquisa são expostos na Tabela 9.

Tabela 9 - Comparação entre resultados obtidos.

Algoritmo	R^2	RMSE (MPa)
RNA	0,93	4,39
RLM	0,93	10,35
SVM	0,89	5,98

Dentre os métodos utilizados, as Redes Neurais Artificiais apresentaram o melhor resultado, seguida dos métodos das Máquinas de Vetores Suporte e, por fim, o Método da Regressão Linear Múltipla. A Tabela *10* traz a comparação entre os resultados obtidos no presente trabalho e resultados da literatura.

Para os resultados da literatura mostrados na Tabela *10*, o estudo de Chou *et al*. (2011) utilizou uma ANN de três camadas intermediarias, sendo 17 o número de neurônios nessas camadas, a taxa de aprendizagem usada foi de 1,00 e a taxa de momentum 0,30. Já no modelo SVM utilizado neste estudo utilizou como Kernel a RBF, parâmetros C de 50, Epsilon de 5 e o Gamma de 4. Já em Chou *et al*. (2014), como configuração da ANN foi empregada a topologia com uma camada intermediaria com taxa de aprendizado de 0,30 e taxa de momentum 0,20; os parâmetros do SVM são C igual a 1 e como *kernel* foi usada uma função de base radial. Por fim, o trabalho de Young *et al*. (2019), como configuração para a ANN, foi utilizada a topologia de duas camadas intermediarias, contendo 10 neurônios na primeira camada intermediaria e 5 na segunda camada intermediaria. Já a SVM apresentou como *kernel* Gaussian, Epsilon 2 e lambda de 13,5.

Tabela 10 - Resultados obtidos x resultados obtidos da literatura.

Pesquisa	Algoritmo	R^2	RMSE (MPa)
Chou et al. (2011)	ANN	0,91	-
	SVM	0,88	-
Chou et al. (2014)	ANN	-	7,95
	SVM	-	5,59
Young et al. (2019)	ANN	0,82	6,30
	SVM	0,83	6,40
Neste trabalho	ANN	0,93	4,39
	RLM	0,93	10,35
	SVM	0,89	5,98

Conforme a Tabela *10*, os resultados do desempenho medidos pelo RMSE obtidos neste

estudo estão na mesma ordem de grandeza do alcançados em estudos prévios. Porém, em termos gerais, a ANN agora desenvolvida apresentou o melhor resultado comparado com outros estudos, comparando os valores da raiz do erro quadrático médio. Os valores de R^2 apresentados pela ANN e o MLR foram superiores aos obtidos nos estudos listados. Os resultados de desempenho geral obtidos são significativamente melhores para ANN e SVM. Dentre os métodos utilizados, a pior performance foi a do MLR obtendo um alto valor de RMSE.

A partir dos resultados acima, é possível concluir que os métodos computacionais possam ser usados como uma maneira alternativa, em complemento a outras ferramentas nessa área como o diagrama de dosagem e o ensaio da resistência à compressão de concreto em corpos de prova, na determinação a resistência do concreto aos vinte oito dias.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1. CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo geral apresentar uma análise de métodos computacionais na previsão da resistência à compressão do concreto aos vinte oito dias, utilizando Redes Neurais Artificiais, Regressão Linear Múltipla e Máquinas de Vetores de Suporte, e empregando o conjunto de dados obtidos pelo estudo de (YEH, I. C., 1998).

Os resultados obtidos mostram que a ANN apresentou o melhor desempenho com um valor de RMSE de 4,39 MPa e R^2 = 0,93, dentre os métodos testados, seguido das SVM e, por fim, a MLR, que apresentou o pior resultado entre os métodos utilizados. A ANN e as SVM tiveram uma taxa de erro geral que pode ser considerada baixa em comparação aos estudos disponíveis na literatura. Por sua vez, o MLR apresentou um coeficiente de correlação alto, no entanto, com uma taxa de erro superior aos modelos propostos.

A fim de prever a resistência a compressão do concreto aos vinte oito dias, foi utilizado um conjunto de dados. Este contém a maior parte das amostras com essa idade fazendo com que as tendências dos valores sejam registradas nesse valor de resistência, o que faz com que a saída tenha tendência a determinado pelo método seja próximo a este valor. Desta forma valores desta ordem de grandeza terão maior concordância entre o previsto e o real enquanto valores acima deste valor apresentem maiores discrepâncias o que justifica os desvios mais significativos para valores que se afastam da tendência.

Desta forma, é possível concluir que o uso destas técnicas na obtenção da resistência à compressão do concreto se mostrou satisfatória em comparação a estudos disponíveis na literatura. Portanto, o uso destes métodos deve ser incentivado, pois eles são uma maneira alternativa na determinação da característica mecânica do concreto, no caso, a resistência à compressão com confiabilidade. Os resultados obtidos demonstram que os métodos possuem alto grau de consistência comparados a outros estudos disponíveis na literatura na obtenção desta característica mecânica do concreto.

7.2. PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

- Utilizar outros métodos computacionais inteligentes para prever a resistência do concreto.
- Segregar os dados pelo fator água/cimento, utilizando a lei de Abrams, como parâmetro de entrada.

- Empregar outras topologias, funções de ativação e algoritmos de aprendizagem na ANN.
- Ampliar o conjunto de dados e executar ensaios reais para validar os métodos computacionais.
- Empregar os métodos para estimar outras propriedades mecânicas, como módulo de elasticidade, a partir de outras bases de dados.
- Estudar mais detalhadamente a influência dos diversos componentes e como é possível melhorar o desempenho do concreto a partir de manipulação dos dados ou predição via sistemas inteligentes.
- Realizar outras implementações de redes neurais com a finalidade de melhorar os parâmetros de performance seguindo outras topologias, número de neurônios e funções de ativação distintas das usadas neste estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABD, A. M.; ABD, S. M. Modelling the strength of lightweight foamed concrete using support vector machine (SVM). *Case Studies in Construction Materials*, v. 6, p. 8–15, 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cscm.2016.11.002>.

ABNT. NBR 5739:2007 Concreto - Ensaios de compressão de corpos-de-prova cilíndricos. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, p. 14, 2007.

ABNT. NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, p. 221, 2003. Disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/valtencirgomes/disciplinas/construcao-de-edificios/abnt-6118-projeto-de-estruturas-de-concreto-procedimento>.

ABNT. NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento. *Rio de Janeiro*, p. 238, 2014.

ABNT. NBR 7222: Concreto e argamassa — Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, p. 8, 2011.

ABNT. Nbr 8522. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, p. 15–20, 2017.

ALMEIDA, R. N. D. E. O Método Dos Mínimos Quadrados : Estudo E Aplicações Para O Ensino Médio. 2015.

ALSHIHRI, M. M.; AZMY, A. M.; EL-BISY, M. S. Neural networks for predicting compressive strength of structural light weight concrete. *Construction and Building Materials*, v. 23, n. 6, p. 2214–2219, 2009.

ANDOLFATO, R. P. Controle tecnológico básico do concreto. *Ilha Solteira:[s. N.]*, 2002. Disponível em: <https://www.academia.edu/download/35980982/Controle_tecnologico_basico_do_concreto.pdf>.

ANDREWS, A. D. F. American Society for Quality A Robust Method for Multiple Linear Regression American Society for Quality Stable URL : http://www.jstor.org/stable/1267603 Linked references are available on JSTOR for this article : A Robust Method for Multiple Linear Regre. v. 16, n. 4, p. 523–531, 2017.

ARAÚJO, T. M. A. DE. Redes neurais incorporadas a métodos numéricos para solução de problemas de engenharia estrutural. 2015.

ASHRAFIAN, A. *et al.* Prediction of compressive strength and ultrasonic pulse velocity of fiber reinforced concrete incorporating nano silica using heuristic regression methods. *Construction*

and Building Materials, v. 190, p. 479–494, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.09.047>.

AZIMI-POUR, M.; ESKANDARI-NADDAF, H.; PAKZAD, A. Linear and non-linear SVM prediction for fresh properties and compressive strength of high volume fly ash self-compacting concrete. *Construction and Building Materials*, v. 230, p. 117021, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.117021>.

BABANAJAD, S. K. *Application of genetic programming for uniaxial and multiaxial modeling of concrete*. Switzerland: Springer, 2015.

BASTOS, P. S. DOS S. Fundamentos - Elementos Estruturais concreto. *Notas de aula*, v. 1, p. 89, 2006. Disponível em: <http://coral.ufsm.br/decc/ECC1006/Downloads/FUNDAMENTOS.pdf>.

BENNETT, K. P.; DEMIRIZ, A. Semi-supervised support vector machines. 1999, [S.l: s.n.], 1999. p. 368–374.

CAVALIER CABRAL, S.; ÁLVARES DE AZEVEDO, M. Materiais alternativos para adição ao cimento Portland. p. 95–2011, 2016. Disponível em: <www.ufvjm.edu.br/vozes%0Ahttp://www.ufvjm.edu.br/vozes%0Ahttp://lattes.cnpq.br/2452889693767673%0Ahttp://lattes.cnpq.br/9657221838451528>.

CHARHATE, S.; SUBHEDAR, M.; ADSUL, N. Prediction of Concrete Properties Using Multiple Linear Regression and Artificial Neural Network. *Journal of Soft Computing in Civil Engineering*, v. 2, n. 3, p. 27–38, 2018. Disponível em: <http://www.jsoftcivil.com/article_59743.html%0Ahttp://www.jsoftcivil.com/article_59743_69ad1d847a160a4a1b91cf459ce77650.pdf>.

CHEN, K.; YANG, S.; BATUR, C. Effect of multi-hidden-layer structure on performance of BP neural network: Probe. *Proceedings - International Conference on Natural Computation*, n. 2010, p. 1–5, 2012.

CHOPRA, P.; SHARMA, R K.; KUMAR, M. Regression models for the prediction of compressive strength of concrete with & without fly ash. *International Journal of Latest Trends in Engineering and Technology (IJLTET)*, v. 3, n. 4, p. 400–406, 2014.

CHOPRA, P.; SHARMA, R. K.; KUMAR, M. Prediction of compressive strength of concrete using artificial neural network and genetic programming. *Advances in Materials Science and Engineering*, v. 2016, 2016.

CHOU, J. *et al.* Optimizing the Prediction Accuracy of Concrete Compressive Strength Based on Optimizing the Prediction Accuracy of Concrete Compressive Strength Based on a Comparison of Data-Mining Techniques. *JOURNAL OF COMPUTING IN CIVIL*

ENGINEERING, 2011.

CYBENKO, G. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function. *Approximation Theory and its Applications*, v. 9, n. 3, p. 17–28, 1989.

DEMUTH, H. Neural Network Toolbox ™ 6 User ' s Guide. *Network*, v. 9, n. 4, p. 259–265, 2000.

DESHPANDE, N.; LONDHE, S.; KULKARNI, S. Modeling compressive strength of recycled aggregate concrete by Artificial Neural Network, Model Tree and Non-linear Regression. *International Journal of Sustainable Built Environment*, v. 3, n. 2, p. 187–198, 2014.

DRUCKER, H. *et al.* Support vector regression machines. 1997, [S.l: s.n.], 1997. p. 155–161.

GANDOMI, A. H.; ALAVI, A. H. *Applications of computational intelligence in behavior simulation of concrete materials*. *Studies in Computational Intelligence*. [S.l: s.n.]. , 2011

GETAHUN, M. A.; SHITOTE, S. M.; ABIERO GARIY, Z. C. Artificial neural network based modelling approach for strength prediction of concrete incorporating agricultural and construction wastes. *Construction and Building Materials*, v. 190, p. 517–525, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.09.097>.

GUPTA, S. Using artificial neural network to predict the compressive strength of concrete containing Nano-Silica. *Civil Engineering and Architecture*, v. 1, n. 3, p. 96–102, 2013.

HAGAN *et al.* Neural networks in a softcomputing framework. *Neural Networks in a Softcomputing Framework*, p. 1–566, 2006.

HAHS-VAUGHN, D. L. *et al.* Multiple Linear Regression. *Statistical Concepts*, v. 404, p. 527–599, 2020.

HAYKIN, S. *Neural networks*. [S.l: s.n.], 1995. v. 346.

HELENE, O. *Metodos dos Minimos Quadrados*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006.

HELENE, P.; TUTIKIAN, B. F. Dosagem dos Concretos de Cimento Portland. *Concreto: Ciência e Tecnologia*, n. 1927, p. 415, 2011.

HEPWORTH, P. J. *et al.* Broiler chickens can benefit from machine learning: support vector machine analysis of observational epidemiological data. *Journal of the Royal Society Interface*, v. 9, n. 73, p. 1934–1942, 2012.

HOANG, N. D. *et al.* A backpropagation artificial neural network software program for data classification in civil engineering developed in . NET framework. *DTU Journal of Science and Technology*, v. 03, n. 34, p. 51–56, 2019.

HOŁA, J.; SCHABOWICZ, K. New technique of nondestructive assessment of concrete

strength using artificial intelligence. *NDT and E International*, v. 38, n. 4, p. 251–259, 2005.

HORNIK, K.; STINCHCOMBE, M.; WHITE, H. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, v. 2, n. 5, p. 359–366, 1989.

JACK FENG, C. X. *et al.* Threefold vs. fivefold cross validation in one-hidden-layer and two-hidden-layer predictive neural network modeling of machining surface roughness data. *Journal of Manufacturing Systems*, v. 24, n. 2, p. 93–107, 2005.

JAVED, M. F. *et al.* Applications of gene expression programming and regression techniques for estimating compressive strength of bagasse ash based concrete. *Crystals*, v. 10, n. 9, p. 1–17, 2020.

KAPLAN, G. *et al.* Artificial Neural Network Estimation of the Effect of Varying Curing Conditions and Cement Type on Hardened Concrete Properties. *Buildings*, v. 9, n. 1, p. 10, 2019.

KHADEMI, F.; JAMAL, S. M. Estimating the compressive strength of concrete using multiple linear regression and adaptive neuro-fuzzy inference system. *International Journal of Structural Engineering*, v. 8, n. 1, p. 20–31, 2017.

KOIVO, H. N. NEURAL NETWORKS : Basics using MATLAB Neural Network Toolbox By. *Neural Networks*, p. 1–59, 2008.

KRISHNA, R.; KUMAR, R.; SRINIVAS, B. Effect of size and shape of specimen on compressive strength of glass fiber reinforced concrete (GFRC). *Facta universitatis - series: Architecture and Civil Engineering*, v. 9, n. 1, p. 1–9, 2011.

KUMMER, L. M. *et al.* Dos Concretos De Uma Central Dosadora De Concreto De Lajeado / Rs Dos Concretos De Uma Central Dosadora De Concreto De Lajeado / Rs. 2016.

LI, E. *et al.* Developing a hybrid model of salp swarm algorithm-based support vector machine to predict the strength of fiber-reinforced cemented paste backfill. *Engineering with Computers*, n. 0123456789, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01014-x>.

LI, Z. *Advanced_Concrete_Technology*. [S.l: s.n.], 2011.

LIBÂNIO M. PINHEIRO, CASSIANE D. MUZARDO, S. P. S. Fundamentos do Concreto e Projeto de Edifícios. *Universidade de São Paulo (USP), Departamento de Engenharia de Estruturas*, p. 116, 2007.

LIN, C.-F.; WANG, S.-D. Fuzzy support vector machines. *IEEE transactions on neural networks*, v. 13, n. 2, p. 464–471, 2002.

LORENA, A. C.; CARVALHO, A. C. P. L. F. DE. Uma Introdução às Support Vector Machines. 2007.

MEHTA, P. K. Durability of concrete--fifty years of progress? *Special Publication*, v. 126, p. 1–32, 1991.

METHA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. *Concreto: Microestrutura, propriedades e materiais.* [S.l: s.n.], 2008.

MOHAMMED, A. *et al.* ANN, M5P-tree and nonlinear regression approaches with statistical evaluations to predict the compressive strength of cement-based mortar modified with fly ash. *Journal of Materials Research and Technology*, v. 9, n. 6, p. 12416–12427, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2020.08.083>.

MUTHUPRIYA, P.; SUBRAMANIAN, K.; VISHNURAM, B. G. Prediction of compressive strength and durability of high performance concrete by artificial neural networks. *Iran University of Science & Technology*, v. 1, n. 1, p. 189–209, 2011.

NBR 7211. . [S.l: s.n.]. , [S.d.]

NEVILLE, A. M. *Propriedades do Concreto*. [S.l: s.n.], 2016.

NIKOO, M.; TORABIAN MOGHADAM, F.; SADOWSKI, Ł. Prediction of Concrete Compressive Strength by Evolutionary Artificial Neural Networks. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2015.

OSUNA, E.; FREUND, R.; GIROSIT, F. Training support vector machines: an application to face detection. 1997, [S.l.]: IEEE, 1997. p. 130–136.

OZTURAN, M.; KUTLU, B.; OZTURAN, T. Comparison of concrete strength prediction techniques with artificial neural network. *Building Research Journal*, v. 56, n. 1, p. 23–36, 2008.

SADRMOMTAZI, A.; SOBHANI, J.; MIRGOZAR, M. A. Modeling compressive strength of EPS lightweight concrete using regression, neural network and ANFIS. *Construction and Building Materials*, v. 42, n. 2, p. 205–216, 2013.

SAMUI, P. Determination of compressive strength of concrete by statistical learning algorithms. *Engineering Journal*, 2013.

SCOTT, A. J.; HOLT, D. The effect of two-stage sampling on ordinary least squares methods. *Journal of the American Statistical Association*, v. 77, n. 380, p. 848–854, 1982.

SHARIATI, M. *et al.* A novel hybrid extreme learning machine–grey wolf optimizer (ELM-GWO) model to predict compressive strength of concrete with partial replacements for cement. *Engineering with Computers*, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01081-0>.

SULTANA, N. *et al.* Soft computing approaches for comparative prediction of the mechanical properties of jute fiber reinforced concrete. *Advances in Engineering Software*, v. 149, n. July,

p. 102887, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2020.102887>.

SUN, J. *et al.* Prediction of permeability and unconfined compressive strength of pervious concrete using evolved support vector regression. *Construction and Building Materials*, v. 207, p. 440–449, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.02.117>.

SWEARINGEN, C. J. Multiple Linear Regression. *Handbook for Clinical Research*, 2018.

TANYILDIZI, H. Prediction of the strength properties of carbon fiber-reinforced lightweight concrete exposed to the high temperature using artificial neural network and support vector machine. *Advances in Civil Engineering*, v. 2018, 2018.

TEJ, M. L.; HOLBAN, S. Determining neural network architecture using data mining techniques. *2018 14th International Conference on Development and Application Systems, DAS 2018 - Proceedings*, p. 156–163, 2018.

TRANMER, M. *et al.* Multiple Linear Regression (2nd Edition). *Cathie Marsh Institute Workin Paper*, n. 01, p. 59, 2020. Disponível em: <https://hummedia.manchester.ac.uk/institutes/cmist/archive-publications/working-papers/2020/2020-1-multiple-linear-regression.pdf>.

WANG, L.; WANG, G.; ALEXANDER, C. A. Big data and visualization: methods, challenges and technology progress. *Digital Technologies*, v. 1, n. 1, p. 33–38, 2015.

YANG, H. Y.; DONG, Y. F. Modelling concrete strength using support vector machines. *Applied Mechanics and Materials*, v. 438–439, p. 170–173, 2013.

YASEEN, Z. M. *et al.* Predicting compressive strength of lightweight foamed concrete using extreme learning machine model. *Advances in Engineering Software*, 2018.

YEH, I.-C. Analysis of Strength of Concrete Using Design of Experiments and Neural Networks. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 18, n. 4, p. 597–604, 2006.

YEH, I. C. Modeling concrete strength with augment-neuron networks. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 10, n. 4, p. 263–268, 1998.

YU, Y. *et al.* A novel optimised self-learning method for compressive strength prediction of high performance concrete. *Construction and Building Materials*, v. 184, p. 229–247, 2018.

APÊNDICE A

Neste item serão apresentadas as configurações das Redes Neurais que deram frutos as tabelas explicitadas no texto. Os melhores resultados foram apresentados no texto, no entanto, sua descrição se encontra neste apêndice. Foram realizadas implementações em duas topologias, e um misto de funções de ativação e número de neurônios.

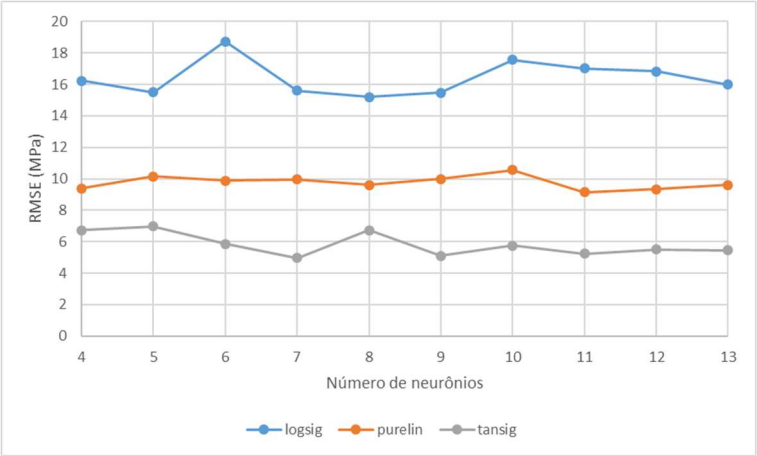
PRIMEIRA TOPOLOGIA

Levando em conta a topologia com apenas uma camada intermediaria, foram realizadas as configurações com diferentes algoritmos de treinamento, funções de ativação e número de neurônios. Neste item são apresentadas somente a da topologia “ótima”. No entanto, o procedimento realizado é semelhante em todas as implementações.

ALGORITMO DE TREINAMENTO: LEVENBERG-MARQUARDT BACKPROPAGATION

Utilizando o algoritmo de treinamento de Levenberg-Marquardt, foram realizadas as configurações das redes neurais mostradas na Figura 23. Essas redes apresentam as mesmas funções de ativação na entrada e saída, e o número de neurônios variou de 4 a 13.

Figura 23 - RMSE *versus* número de neurônios.

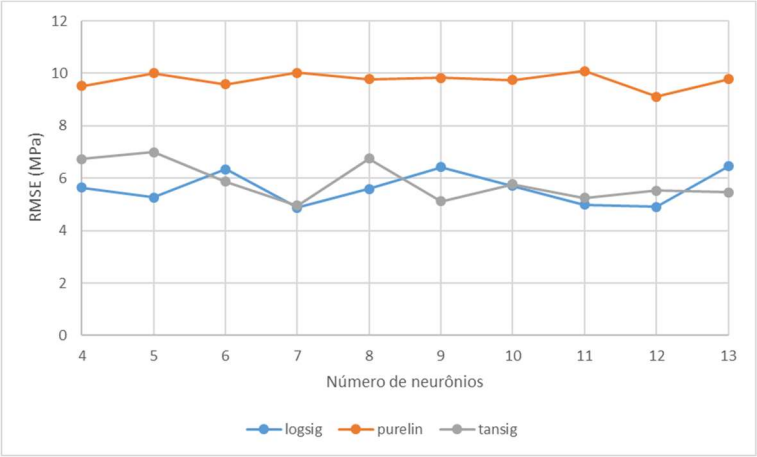


A partir da Figura 24, verifica se que a função de ativação que obteve melhor performance de RMSE e R^2 foi a tangente hiperbólica com 7 neurônios foram feitas 10 simulações e tirado a média das metricas de desempenho.

Tomando a função de ativação na saída como a tangente hiperbólica e variando a função de

ativação das demais camadas é obtida a Figura 24.

Figura 24 - RMSE *versus* número de neurônios.



A partir das figuras chega-se ao resultado final desta implementação, conforme apresentado na Tabela *11*.

Tabela 11 - Resumo dos resultados da implementação.

neurônios na camada de entrada	função de ativação tansig entrada tansig saída	
	RMSE	R²
13	4,77	0,93

SEGUNDA TOPOLOGIA

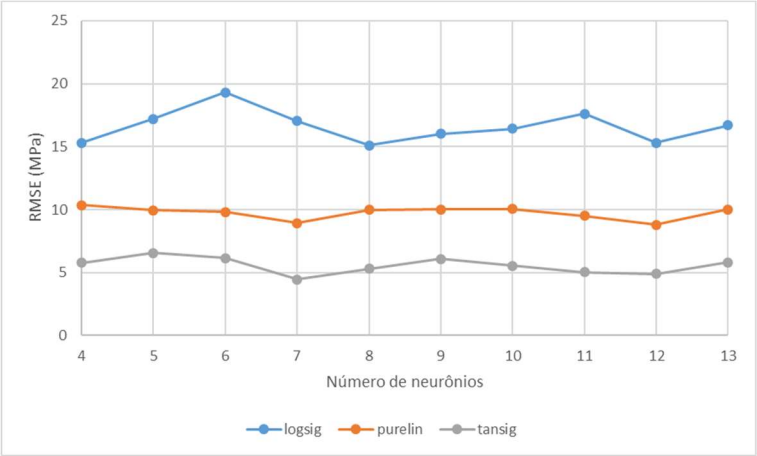
Utilizando a topologia com duas camadas intermediarias, foram feitas implementações com distintos algoritmos de treinamento, funções de ativação e número de neurônios na segunda camada. O número de neurônios da primeira camada foi definido como o que obteve a melhor performance na implementação da primeira topologia com cada um dos algoritmos de treinamento.

ALGORITMO DE TREINAMENTO: LEVENBERG-MARQUARDT BACKPROPAGATION

Para essa implementação foi utilizado, na primeira camada, o número de neurônios de melhor performance na implementação com uma única camada para este algoritmo de treinamento, sendo composta por 13 neurônios na primeira camada e variando o número de neurônios na segunda camada de 4 a 13 neurônios.

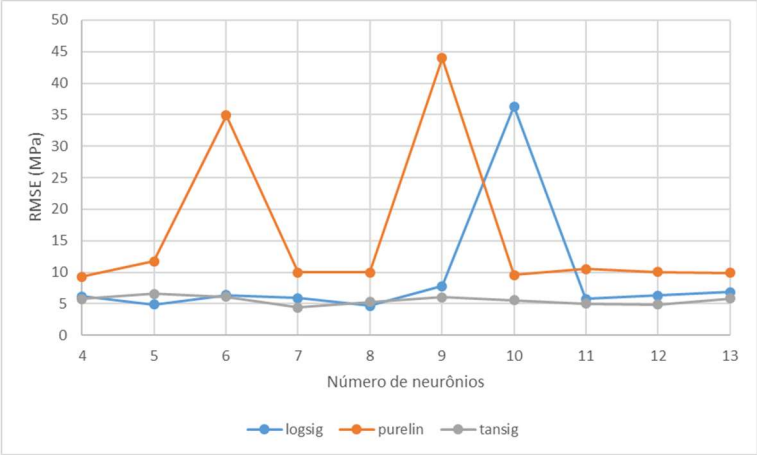
Na Figura 25 são mostrados os valores de RMSE para cada implementação, sendo usado a mesma função de ativação em todas as camadas.

Figura 25 - RMSE *versus* número de neurônios.



Observando a Figura 26, pode-se notar que a função de ativação tangente hiperbólica obteve o melhor resultado de RMSE. Por este motivo, a função de ativação utilizada na saída da próxima implementação foi a mesma tangente hiperbólica. Foi utilizada, nas primeiras camadas, a mesma função de ativação.

Figura 26 - RMSE *versus* Número de neurônios.



Foram feitas 10 simulações e foram tirada a media das metricas de desempenho, os resultados obtidos por este algoritmo de treinamento estão resumidos na Tabela 12.

Tabela 12 - Resumo dos resultados da implementação.

neurônios na camada de entrada	função de ativação tansig entrada tansig saída	
	RMSE	R^2
13_7	4,39	0,93

APÊNDICE B

Esse item apresenta a formulação matemática utilizada na Regressão Linear Múltipla que se baseia no Método dos Mínimos Quadrados.

Considere a Equação (12).

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_n x_{i,n} + \varepsilon_i. \tag{12}$$

A Equação (12) são apresentadas as múltiplas variáveis preditoras e um resultado $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i,n}, y_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ unidades de observação, a relação estatística simultânea entre o único resultado contínuo Y e as variáveis preditoras X_k $(k = 1, 2, \dots, n)$. Cada termo β_{k} representa uma inclinação em relação a X_k,, sendo chamados de coeficientes de regressão parcial.

Na regressão linear múltipla, a estimativa do modelo é feita com o critério dos mínimos quadrados: escolhemos o β_{k} para minimizar a soma do quadrado entre distâncias entre o y_i observado e o valor obtido pelo modelo, sendo a formulação do método dada pela Equação (13)

$$Q(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y - y_i)^2}{{\sigma_i}^2}, \tag{13}$$

$$Q(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y - \left(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_n x_{i,n}\right)\right)^2}{{\sigma_i}^2}. \tag{14}$$

Na Equação (14) os valores σ_i , $i = 1,2,3, \dots n$ são os desvios padrões dos respectivos valores de y.

Assim, derivando a Equação (14) pelo termo β_1:

$$\frac{\partial(Q)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\left(y_i - \left(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_n x_{i,n}\right)\right)^1 x_{i1}}{{\sigma_i}^2}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial(Q)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_{i1} - \left(\beta_1 {x_{i1}}^2 + \beta_2 x_{i2} x_{i1} + \cdots + \beta_n x_{i,n} x_{i1}\right)}{{\sigma_i}^2} = 0 \tag{16}$$

E fazendo o rearranjo da equação anterior:

$$\sum \frac{y_i x_{i1}}{\sigma_i^2} = \beta_1 \sum \frac{{x_{i1}}^2}{\sigma_i^2} + \beta_2 \sum \frac{x_{i2} x_{i1}}{\sigma_i^2} + \cdots + \beta_n \sum \frac{x_{i,n} x_{i1}}{\sigma_i^2}. \tag{17}$$

Depois, derivando a Equação (14) pelo termo β_2:

$$\frac{\partial(Q)}{\partial\beta_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\left(y_i - \left(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_n x_{i,n}\right)\right)^1 x_{i2}}{{\sigma_i}^2}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial(Q)}{\partial\beta_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_{i2} - \left(\beta_1 x_{i1} x_{i2} + \beta_2 {x_{i2}}^2 + \cdots + \beta_n x_{i,n} x_{i2}\right)}{{\sigma_i}^2} = 0 \tag{19}$$

E fazendo o rearranjo da Equação anterior:

$$\sum \frac{y_i x_{i2}}{\sigma_i^2} = \beta_1 \sum \frac{x_{i1} x_{i2}}{\sigma_i^2} + \beta_2 \sum \frac{{x_{i2}}^2}{\sigma_i^2} + \cdots + \beta_n \sum \frac{x_{i,n} x_{i2}}{\sigma_i^2}. \tag{20}$$

E, por fim, derivando a Equação (14) pelo termo β_n:

$$\frac{\partial(Q)}{\partial\beta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\left(y_i - \left(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_n x_{i,n}\right)\right)^1 x_{i,n}}{{\sigma_i}^2}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial(Q)}{\partial\beta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_{i,n} - \left(\beta_1 x_{i1} x_{i,n} + \beta_2 x_{i2} x_{i,n} + \cdots + \beta_n {x_{i,n}}^2\right)}{{\sigma_i}^2} = 0 \tag{22}$$

E fazendo o rearranjo da equação anterior:

$$\sum \frac{y_i x_{i,n}}{\sigma_i^2} = \beta_1 \sum \frac{x_{i1} x_{i,n}}{\sigma_i^2} + \beta_2 \sum \frac{x_{i2} x_{i,n}}{\sigma_i^2} + \cdots + \beta_n \sum \frac{{x_{i,n}}^2}{\sigma_i^2}. \tag{23}$$

Pode-se agrupar as Equações (17), (20) e (23), conforme abaixo:

$$\sum \frac{y_i x_{i1}}{\sigma_i^2} = \beta_1 \sum \frac{{x_{i1}}^2}{\sigma_i^2} + \beta_2 \sum \frac{x_{i2} x_{i1}}{\sigma_i^2} + \cdots + \beta_n \sum \frac{x_{i,n} x_{i1}}{\sigma_i^2}. \tag{24}$$

$$\sum \frac{y_i x_{i2}}{\sigma_i^2} = \beta_1 \sum \frac{x_{i1} x_{i2}}{\sigma_i^2} + \beta_2 \sum \frac{{x_{i2}}^2}{\sigma_i^2} + \cdots + \beta_n \sum \frac{x_{i,n} x_{i2}}{\sigma_i^2}. \tag{25}$$

$$\sum \frac{y_i x_{i,n}}{\sigma_i^2} = \beta_1 \sum \frac{x_{i1} x_{i,n}}{\sigma_i^2} + \beta_2 \sum \frac{x_{i2} x_{i,n}}{\sigma_i^2} + \cdots + \beta_n \sum \frac{{x_{i,n}}^2}{\sigma_i^2}. \tag{26}$$

Colocando as equações em termos matriciais, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \sum \frac{y_i x_{i1}}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{y_i x_{i2}}{\sigma_i^2} \\ \vdots \\ \sum \frac{y_i x_{i,n}}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{{x_{i1}}^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_{i2} x_{i1}}{\sigma_i^2} & \cdots & \sum \frac{x_{i,n} x_{i1}}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_{i1} x_{i2}}{\sigma_i^2} & \sum \frac{{x_{i2}}^2}{\sigma_i^2} & \cdots & \sum \frac{x_{i,n} x_{i2}}{\sigma_i^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \frac{x_{i1} x_{i,n}}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_{i2} x_{i,n}}{\sigma_i^2} & \cdots & \sum \frac{{x_{i,n}}^2}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \tag{27}$$

Finalmente, aplicando propriedades de matrizes, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{{x_{i1}}^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_{i2}x_{i1}}{\sigma_i^2} & \cdots & \sum \frac{x_{i,n}x_{i1}}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_{i1}x_{i2}}{\sigma_i^2} & \sum \frac{{x_{i2}}^2}{\sigma_i^2} & \cdots & \sum \frac{x_{i,n}x_{i2}}{\sigma_i^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \frac{x_{i1}x_{i,n}}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_{i2}x_{i,n}}{\sigma_i^2} & \cdots & \sum \frac{{x_{i,n}}^2}{\sigma_i^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum \frac{y_i x_{i1}}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{y_i x_{i2}}{\sigma_i^2} \\ \vdots \\ \sum \frac{y_i x_{i,n}}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Este procedimento de estimativa de Regressão Linear Múltipla minimizam uma função e trata sequencialmente uma variável de cada vez e leva à solução de sistemas de equações lineares.