



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO VIA OTIMIZAÇÃO DINÂMICA MULTIOBJETIVO DE PORTFÓLIOS DE INVESTIMENTOS

MAISA KELY DE MELO

Orientador: Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Tales Argolo Jesus
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

BELO HORIZONTE
NOVEMBRO DE 2021

MAISA KELY DE MELO

CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO VIA OTIMIZAÇÃO DINÂMICA MULTIOBJETIVO DE PORTFÓLIOS DE INVESTIMENTOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Sistemas Inteligentes

Orientador: Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Tales Argolo Jesus
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
NOVEMBRO DE 2021

Melo, Maisa Kely de.
M528c Controle preditivo baseado em modelo via otimização dinâmica
multiobjetivo de portfólios de investimentos / Maisa Kely de Melo. – 2021.
117 f.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática e Computacional.
Orientador: Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso.
Coorientador: Tales Argolo Jesus.
Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas
Gerais.

1. Finanças – Processamento de dados – Teses. 2. Otimização matemática
– Teses. 3. Controle preditivo – Modelos matemáticos – Teses. 4. Tomada de
decisão com vários critérios – Teses. I. Santos, Vinícius Fernandes dos.
II. Jesus, Tales Argolo. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas
Gerais. IV. Título.

CDD 519.6



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**“CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO VIA OTIMIZAÇÃO
DINÂMICA MULTIOBJETIVO DE PORTFÓLIOS DE
INVESTIMENTOS”.**

Tese de Doutorado apresentada por **Maisa Kely de Melo**, em 19 de novembro de 2021, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Tales Argolo Jesus (Coorientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Cristiano Arbex Valle
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Guilherme Vianna Raffo
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Sérgio Ricardo de Souza
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Flávio Vinícius Cruzeiro Martins
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Prof^a. Dr^a. Elizabeth Fialho Wanner
Presidenta do Colegiado do Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática e Computacional



Emitido em 27/12/2021

ATA DE DEFESA DE TESE Nº 50/2021 - DM (11.56.11)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 28/12/2021 09:41)

FLAVIO VINICIUS CRUZEIRO MARTINS

PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO

DECOM (11.56.03)

Matrícula: 2630495

(Assinado digitalmente em 27/12/2021 13:50)

RODRIGO TOMAS NOGUEIRA CARDOSO

PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO

DM (11.56.11)

Matrícula: 2412831

(Assinado digitalmente em 05/01/2022 10:22)

SERGIO RICARDO DE SOUZA

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR

DECOM (11.56.03)

Matrícula: 300700

(Assinado digitalmente em 28/12/2021 11:04)

TALES ARGOLO JESUS

PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO

DECOM (11.56.03)

Matrícula: 1663256

(Assinado digitalmente em 27/12/2021 19:42)

CRISTIANO ARBEX VALLE

ASSINANTE EXTERNO

CPF: 047.613.886-84

(Assinado digitalmente em 30/12/2021 10:36)

GUILHERME VIANNA RAFFO

ASSINANTE EXTERNO

CPF: 941.081.530-49

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sig.cefetmg.br/documentos/> informando seu número:
50, ano: **2021**, tipo: **ATA DE DEFESA DE TESE**, data de emissão: **27/12/2021** e o código de verificação:
660d8ac97f

Dedico esse trabalho a minha mãe, que sempre acreditou no meu sonho de estudar...

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe e ao Jader pelo apoio incondicional. Aos meus colegas de doutorado, por serem excelentes companhias e me ajudarem em muitos momentos difíceis. Aos professores do curso de pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET, especialmente aos professores Rodrigo e Tales, pela parceria nessa longa jornada. Ao IFMG por me proporcionar a oportunidade de realizar este curso de doutorado com o melhor da minha dedicação.

Resumo

Com o advento da tecnologia é possível aliar os modelos matemáticos complexos que representam o problema de otimização de portfólios de investimentos com técnicas computacionais extremamente eficientes e práticas. Busca-se construir neste trabalho um arcabouço matemático e computacional capaz de lidar com as peculiaridades reais do mundo financeiro ao mesmo tempo que se utiliza o conhecimento teórico disponível, utilizando-se um algoritmo genético para fazer a otimização e manipular as restrições. Portanto, propõe-se neste trabalho um arcabouço matemático e computacional composto por diferentes modelos que usam a metodologia de Controle Preditivo baseado em Modelo (do inglês, *Model Predictive Control-MPC*) na otimização de portfólios de investimentos. É proposta uma estratégia inovadora obtida pela combinação do MPC e da otimização multiobjetivo sujeita a restrições realísticas do mercado financeiro, como limites de investimento, autofinanciamento, cardinalidade e custos de transação. Os critérios de desempenho (funções objetivo) são os valores esperados da riqueza, da variância e do *Conditional Value at Risk*. Com os experimentos realizados foi possível obter uma variedade de constatações que envolvem o horizonte de predição, a cardinalidade, o risco e o retorno do portfólio. Por meio da análise *in-sample*, destacam-se: o horizonte de predição de fato beneficia o problema de otimização de portfólios, uma vez que proporciona valores de riqueza não obtidos pela estratégia miópica; portfólios com cardinalidades menores apresentam menor risco por estabelecerem maior alocação de capital no ativo livre de risco. As carteiras com cardinalidade cinco apresentam os maiores valores de riqueza. Na análise *out-of-sample*, a riqueza acumulada da estratégia proposta superou o Ibovespa e fundos de investimento de prestígio em 2020.

Palavras-chave: Finanças computacionais. Otimização de portfólio. Controle Preditivo baseado em Modelo. Otimização Multiobjetivo.

Abstract

Combining complex mathematical models that optimize investment portfolios with efficient and practical computational techniques is possible with the advent of technology. The aim is to build a computational framework capable of dealing with the actual peculiarities of the financial world while using available theoretical knowledge. A genetic algorithm is proposed to optimize the objective functions and manipulate the constraints. Therefore, this work proposes a computational framework composed of different models that use Model Predictive Control (MPC) to optimize investment portfolios. An innovative strategy that combines MPC, multi-objective optimization and realistic financial market constraints, such as investment limits, self-finance, cardinality, and transaction cost, is proposed. Performance criteria (objective functions) are the expected values of wealth, variance, and Conditional Value at Risk. We proposed multiperiod formulations for the objective functions and the genetic algorithm that performs the optimization since the multiperiod perspective is essential for the MPC strategy. With the experiments performed, it was possible to obtain various findings involving the prediction horizon, cardinality, risk, and return of the portfolio. Using an in-sample analysis can be highlighted, the prediction horizon benefits the portfolio optimization problem. It offers wealth value not obtained by the myopic strategy; portfolios with smaller cardinalities have greater risk because they have capital allocation in the risk-free asset. The portfolios with cardinality five have shown the highest wealth values. In the out-of-sample analysis, the accumulated wealth of the proposed strategy surpassed Ibovespa and prestigious investment funds in 2020.

Keywords: Computational finance. Portfolio optimization. Model Predictive Control. Multiobjective optimization.

Lista de Figuras

Figura 1 – Determinação da ação de controle via MPC.	18
Figura 2 – Técnica de janela deslizante utilizada pelo MPC.	24
Figura 3 – VaR baseado numa função densidade de probabilidade	30
Figura 4 – Ilustração conceitual do VaR e CVaR	32
Figura 5 – Fronteira de Pareto e soluções não dominadas.	40
Figura 6 – Passo a passo do algoritmo NSGA-II.	43
Figura 7 – Expectativa de convergência e diversidade que pretende-se alcançar.	43
Figura 8 – Ilustração num espaço de dois objetivos do conceito de dominância, fronteira Pareto Ótima e hipervolume.	44
Figura 9 – Diagrama de blocos do MPC.	53
Figura 10 – Cenários com diferentes tamanhos do horizonte de predição.	57
Figura 11 – Histograma da função de perda com a localização dos valores do VaR e do CVaR.	59
Figura 12 – Exemplo de dois pais para o caso de 10 ativos.	64
Figura 13 – Fluxograma do algoritmo mono-objetivo.	66
Figura 14 – Estratégia do MPC multiobjetivo.	68
Figura 15 – Análise do efeito da quantidade de cenários	74
Figura 16 – Análise do efeito da quantidade de cenários	74
Figura 17 – Valor esperado do CVaR após a otimização considerando várias quantidades de cenários e tamanhos de horizonte de predição.	75
Figura 18 – Erro relativo entre as riquezas com e sem cenários	76
Figura 19 – Tempo por execução do MPC com a maximização da riqueza com cenários	77
Figura 20 – Convergência do algoritmo genético por horizonte de predição - MMV	79
Figura 21 – Convergência do algoritmo genético por horizonte de predição - MMC	79
Figura 22 – Convergência do algoritmo genético por horizonte de predição - CVM	80
Figura 23 – Convergência do algoritmo genético por horizonte de predição - VM	80
Figura 24 – Comparação dos valores das funções objetivo de acordo com o problema de otimização.	81
Figura 25 – Análise do efeito do horizonte de predição - MMV e MMC	82
Figura 26 – Análise do efeito do horizonte de predição - CVM	83
Figura 27 – Análise do efeito do horizonte de predição - VM	83
Figura 28 – Boxplot da riqueza e do risco esperado <i>versus</i> cardinalidade para os horizontes de predição $m = 1$ e $m = 5$	84
Figura 29 – Mapa de calor da alocação de carteiras após o primeiro passo do MPC - MMV.	85
Figura 30 – Mapas de calor da alocação de carteiras após o primeiro passo do MPC.	87

Figura 31 – Volatilidade anualizada dos ativos	88
Figura 32 – Boxplot do risco esperado - sem renda fixa	89
Figura 33 – Mapas de calor da alocação de carteiras - sem renda fixa	90
Figura 34 – Melhores fronteiras obtidas após a primeira execução - MO-MPC Riqueza-Variância	92
Figura 35 – Média das métricas de avaliação no decorrer das gerações - MO-MPC Riqueza-Variância	93
Figura 36 – Melhores fronteiras obtidas após a primeira execução - MO-MPC Riqueza-CVaR	94
Figura 37 – Métricas de avaliação no decorrer das gerações - MO-MPC Riqueza-CVaR	94
Figura 38 – Alocação em renda fixa após a primeira execução do MPC considerando as carteiras com cardinalidade cinco obtidas na Seção 4.6.1.	95
Figura 39 – Boxplot dos retornos esperados de acordo com o perfil do investidor ($k = 5$).	96
Figura 40 – Boxplot dos riscos esperados de acordo com o perfil do investidor ($k = 5$).	97
Figura 41 – Tempo de execução por iteração (em segundos).	98
Figura 42 – Riqueza efetiva acumulada para a estratégia MO-MPC Riqueza-CVaR em 2019 e 2020 considerando os três perfis de investimento para $k = 5$	99
Figura 43 – Retorno acumulado das cinco ações com maior participação média em cada portfólio no decorrer de 2019 e 2020 - $k = 5, m = 5$	101
Figura 44 – Comparação dos retornos mensais entre a estratégia MO-MPC Riqueza-CVaR com fundos de investimento e o Ibovespa em 2019 e 2020 - $k = 5, m = 5$	102

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação dos trabalhos que usam o MPC aplicado à otimização de portfólios	15
Tabela 2 – Limites de porcentagens inferiores e superiores praticados na literatura. .	70
Tabela 3 – Carteiras selecionadas para análise da alocação entre os ativos - VM . .	86
Tabela 4 – Carteiras selecionadas para análise da alocação entre os ativos - CVM .	86
Tabela 5 – Medidas Índice de Sharpe e Máximo Drawdown para as riquezas apresentadas na Figura 42 considerando $m = 5$	100

Lista de Quadros

Quadro 1 – Ativos utilizados na análise <i>in-sample</i>	72
Quadro 2 – Ativos utilizados na análise <i>out-of-sample</i>	72

Sumário

1 – Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Justificativa	4
1.4 Trabalhos Relacionados	6
1.4.1 Otimização de Portfólios Financeiros	6
1.4.2 Trabalhos com o MPC	9
1.4.3 MPC aplicado à otimização de portfólios	10
1.5 Organização do trabalho	14
2 – Fundamentação Teórica	17
2.1 Controle Preditivo Baseado em Modelo	17
2.1.1 Stochastic Model Predictive Control	20
2.2 O MPC no contexto de otimização de portfólios	23
2.2.1 Horizonte de predição	25
2.2.2 Perspectiva temporal da estratégia de investimento	26
2.3 Risco	27
2.3.1 Variância	28
2.3.2 <i>Value at Risk</i>	29
2.3.3 <i>Conditional Value at Risk</i>	30
2.4 Risco Multiperíodo	32
2.4.1 Variância Multiperíodo	33
2.4.2 Conditional Value at Risk Multiperíodo	33
2.5 Custos de transação	35
2.6 Restrição de Cardinalidade	36
2.7 Otimização Multiobjetivo	39
2.8 Algoritmos genéticos	40
2.8.1 NSGA-II	41
2.8.2 Medidas de Desempenho	42
2.9 MPC Multiobjetivo	45
3 – Arcabouço matemático e computacional proposto	47
3.1 Formulação matemática da variância multiperíodo	47
3.1.1 Definição da equação dinâmica da riqueza	48
3.2 O mecanismo do MPC na otimização de portfólios de investimentos	53
3.3 Formulação Matemática das Restrições	54

3.4	Estratégia MPC aplicada a finanças - caso mono-objetivo	55
3.4.1	Problema de otimização da riqueza	55
3.4.2	Problema de otimização da variância	58
3.4.3	Problema de otimização do CVaR	58
3.5	Estratégia MPC aplicada a finanças - caso multiobjetivo	60
3.5.1	Problema de otimização da Riqueza-Variância	60
3.5.2	Problema de otimização da Riqueza-CVaR	60
3.6	Algoritmos genéticos utilizados	60
3.6.1	Alteração entre quantidade de dinheiro e peso	61
3.6.2	Adaptação para o horizonte de predição	61
3.6.3	Operadores	62
3.6.3.1	Criação da população inicial	62
3.6.3.2	Reparação do indivíduo	63
3.6.3.3	Cruzamento	63
3.6.3.4	Mutação	65
3.6.4	Algoritmo mono-objetivo	65
3.6.5	Algoritmo multiobjetivo	66
3.6.5.1	Seleção	66
3.7	MPC multiobjetivo	67
4	– Estudo de caso com ativos da B3	70
4.1	Definição de parâmetros	70
4.2	Dados de entrada	71
4.3	Ambiente computacional	72
4.3.1	Implementação do modelo autorregressivo vetorial	73
4.4	Definição da quantidade de cenários	73
4.5	Análise Mono-objetivo (<i>In-Sample</i>)	78
4.5.1	Análise do efeito do horizonte de predição	81
4.5.2	Análise da cardinalidade	83
4.6	Análise Multiobjetivo (<i>In-Sample</i>)	91
4.6.1	Avaliação das melhores fronteiras ao término do algoritmo	91
4.6.2	Alocação em Renda Fixa	94
4.6.3	Avaliação do risco e do retorno de acordo com o perfil de investidor	95
4.6.4	Tempo de execução algoritmos multiobjetivo	97
4.7	Análise Multiobjetivo (<i>Out-of-Sample</i>)	97
5	– Conclusões	103
5.1	Publicações científicas	105
5.2	Trabalhos Futuros	105

Referências 108

1 Introdução

1.1 Motivação

A busca por investimentos que possibilitam melhores oportunidades de retorno tem sido crescente nos últimos anos. Além dos fundos de investimentos clássicos e investidores profissionais, o mercado financeiro vem ganhando espaço entre os cidadãos comuns. Pelo site do [Tesouro Nacional \(2021\)](#), é possível constatar que a quantidade de CPFs cadastrados para investimentos no Tesouro Direto saltou de 752.094 em dezembro de 2018 para 1.464.804 em janeiro de 2021. Embora a renda fixa seja o ambiente mais seguro para os investimentos, sua rentabilidade não é tão atraente quanto a rentabilidade que os ativos de risco podem oferecer. Por isso, em busca de investimentos mais promissores, existe uma parcela crescente da população brasileira ingressando no mercado da renda variável. Mais precisamente, o número de investidores cadastrados na bolsa de valores brasileira, a B3, saltou de 1.666.082 em dezembro de 2019 para 3.230.551 em dezembro de 2020, um aumento de quase 100% ([B3, 2021a](#)). O que une todos esses investidores são a busca pelos maiores retornos e a aversão ao risco, isto é, à perda de dinheiro.

No entanto, a elaboração da melhor carteira de investimentos demanda muito estudo, uma vez que obter o maior retorno possível, expondo-se a um risco tão pequeno quanto desejável, não é uma tarefa fácil. O mercado financeiro movimenta negócios no mundo inteiro, mobilizando diariamente um considerável volume financeiro. As empresas dos mais diversos segmentos (bancário, alimentos, papel e celulose, petróleo, entre outros) possuem ações sendo negociadas em bolsas de valores e estão sujeitas às oscilações inerentes ao mercado. Em vista dessa vulnerabilidade gerada pela constante variabilidade do mercado, é justificável que os investidores se inclinam em busca de mecanismos que possam fornecer informações sobre a estratégia mais adequada para a carteira de investimento.

[Markowitz \(1952\)](#) trouxe uma nova concepção sobre o gerenciamento da composição de carteiras de investimentos. Ele mostrou que a redução do risco associado a um nível considerado de retorno de um investimento ocorre quando a carteira é formada com base no conceito da diversificação. Neste sentido, [Elton, Gruber e Brown \(2012\)](#) mostram que as características de retorno de carteiras de ativos podem diferir das características dos retornos de ativos individuais, ou mais precisamente, combinações adequadamente escolhidas de dois ativos apresentam menos risco do que o menos arriscado dos dois ativos. Desde então, procuram-se índices de desempenho que representam o risco e/ou o retorno e que possam ser otimizados levando em consideração algumas restrições. Segundo [Neto \(2009\)](#), em essência os modelos de avaliação almejam prever o comportamento futuro dos ativos financeiros com relação às variações de seus preços no mercado.

A otimização de portfólio busca obter o máximo de retorno associado a um nível mínimo de risco. [Pardalos \(1997\)](#) e [Konstantinou, Tzanetos e Dounias \(2020\)](#) enfatizam que o problema de seleção de portfólio é parte vital do gerenciamento financeiro e tomada de decisão em investimentos. Sendo que as técnicas de otimização podem eficientemente ser usadas para resolver muitas classes de problemas de seleção de portfólio, representando um papel proeminente nesse contexto. A vantagem de construir um portfólio que é ótimo com respeito a algum critério é que diferentes estratégias podem ser comparadas ([PARDALOS, 1997](#)). Estratégias que não são ótimas, não fornecem uma maneira consistente de avaliar técnicas de soluções alternativas. Aliado a isso, soma-se o fato de que é possível incluir na otimização fatores relevantes para os investidores, como custos de transação, seleção de uma meta de risco usando um limite predeterminado, maximização de índices fundamentais, dentre outros. Desta forma, a otimização é uma ferramenta vantajosa para construir um portfólio baseado nas melhores expectativas de retorno e risco, adaptado às necessidades específicas dos investidores.

Como o comportamento do mercado sofre oscilações e variações de tendências continuamente, a avaliação do desempenho da carteira para averiguar a necessidade de rebalanceamento é ininterrupta. Por isso, além de se possuir uma medida de risco eficaz, é essencial que se tenha um modelo que incorpore, juntamente com as medidas de risco e retorno, previsões eficientes utilizando os dados dos instantes de tempo mais recentes. Neste cenário, um critério de desempenho com natureza dinâmica que consiga, a cada instante de tempo, incorporar novas informações e se reajustar de forma a permanecer o mais próximo possível de um propósito desejado torna-se muito promissor. Com base nisso, neste trabalho propõe-se utilizar a estratégia de controle conhecida como *Model Predictive Control* (MPC) no processo da otimização do portfólio de investimentos.

Conforme definido por [Camacho e Bordons \(1999\)](#), o MPC é uma metodologia para resolver problemas de controle ótimo restritos, cujas principais vantagens em relação aos outros métodos de controle são a facilidade em tratar o caso multivariável, possuir compensação intrínseca de atraso no tempo e tratamento das restrições. No contexto da otimização de carteiras de investimentos, o que se pretende com o MPC é uma estratégia de investimento multiperíodo, em que é proposta, para cada instante de tempo, a melhor opção de rebalanceamento da carteira. Desta forma, ao resolver o problema de controle ótimo, o investidor tem definidos todos os movimentos de inclusão e exclusão de ativos da carteira que devem ser realizados em cada instante de tempo. Um portfólio elaborado com uma estratégia multiperíodo apresenta mais sensibilidade às tendências do mercado, o que permite delinear movimentos de compra e venda nos momentos mais propícios. O bom desempenho do MPC ao lidar com o processo de realimentação, quando ocorre a compensação de perturbações, o torna uma promissora ferramenta para trabalhar com as oscilações do mercado.

Chama-se a atenção para o fato de que o MPC, por definição, é uma estratégia multiperíodo. Por isso, tratar o MPC como uma estratégia multiperíodo é redundante. No entanto, no contexto de otimização de portfólios não é comum a utilização de um horizonte de predição (que configura a estratégia multiperíodo). Diante desse contexto alheio ao MPC, surge a denominação multiperíodo como uma característica diferenciada do problema de otimização de portfólio. Sendo assim, deixa-se firmado aqui que quando o termo multiperíodo for referenciado, é para se fazer alusão ao fato de que está sendo considerada uma estratégia com propostas de rebalanceamento para instantes de tempo futuros dado que se está no instante atual.

Para tornar a estratégia estudada mais atraente para fins práticos, são tratados tópicos comuns ao mercado financeiro, tais como custos de transação e cardinalidade. Para que o rebalanceamento seja efetivamente vantajoso, os custos envolvidos nas transações devem ser considerados no problema de otimização. A cardinalidade de uma carteira é a quantidade de ativos que compõem a carteira. Considerar um modelo que possui restrição de cardinalidade é importante, pois apesar do risco ser menor quando a carteira é composta por muitos ativos, não é recomendado agregar ativos numa quantidade sem critérios, uma vez que a quantidade de ativos que compõe uma carteira envolve custos.

Com o avanço dos sistemas computacionais, é possível aliar os modelos matemáticos complexos que representam o problema descrito acima com técnicas computacionais extremamente eficientes e práticas, e construir um sólido arcabouço matemático e computacional capaz de lidar com as peculiaridades reais do mundo financeiro ao mesmo tempo que utiliza o conhecimento teórico disponível.

1.2 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é propor um arcabouço matemático e computacional que forneçam portfólios de investimentos obtidos com o propósito de maximizar a riqueza obtida ao mesmo tempo que minimiza a exposição ao risco do investimento. Cada portfólio é planejado com a estratégia *Model Predictive Control* (MPC), que é uma estratégia de controle que ajusta o sistema operado dinamicamente com as informações mais recentes do processo. A estratégia de investimento multiperíodo fornecida pelo MPC pode ser utilizada para investimentos de longo prazo (com duração de meses ou anos) ou de curto prazo (com duração de dias ou horas).

Para que se cumpra o objetivo acima, propõe-se neste trabalho:

- A definição das funções objetivo de retorno (riqueza esperada) e risco (variância e CVaR¹ esperados) do portfólio a serem otimizados no problema de controle ótimo do MPC.

¹ Conditional Value at Risk

- O tratamento das restrições de cardinalidade, autofinanciamento e limites de investimentos individuais incorporados intrinsecamente ao problema.
- O tratamento dos custos de transação na definição da função objetivo.
- A otimização multiobjetivo para maximizar a riqueza e minimizar o risco realizada conforme os princípios do MPC.
- Realizar simulações de operações com dados da bolsa de valores brasileira e comparar os resultados com os melhores índices do mercado financeiro brasileiro.

1.3 Justificativa

O trabalho proposto contribui, de forma acadêmica, com várias áreas de pesquisa, por seu caráter interdisciplinar. O problema de controle ótimo proposto permeia os campos das finanças, do controle preditivo baseado em modelo e da otimização multiobjetivo. Cada uma dessas áreas contempla aplicações práticas, mas também peculiaridades que constituem um campo aberto para pesquisa e inovação.

No contexto das finanças, a instabilidade a que o mercado financeiro tende a ser submetido apresenta um grande desafio à estratégia de alocação de ativos, fato relatado por [Dombrovskii e Pashinskaya \(2020b\)](#). Conforme enfatizado por [Nystrup, Madsen e Lindström \(2018\)](#), as regras de decisões estáticas dificilmente são ótimas quando o modelo subjacente usado para a inferência do regime é variante no tempo. Para eles, uma abordagem alternativa é otimizar dinamicamente o portfólio baseado nas probabilidades inferidas do regime e parâmetros, levando em consideração os custos de transação, aversão ao risco e possibilidade de outras restrições.

Em se tratando de otimização dinâmica, [Mesbah \(2016\)](#) indica que a simplicidade conceitual, bem como a habilidade de efetivamente lidar com a dinâmica complexa de sistemas com múltiplas entradas e saídas, restrições nas entradas e saídas e objetivos de controle conflitantes, tem feito do MPC uma abordagem de controle com restrições atrativa. Ademais, a técnica de controle preditivo estocástico baseado em modelo (do inglês *Stochastic Model Predictive Control-SMPC*) surgiu recentemente com o objetivo de incorporar sistematicamente as descrições probabilísticas das incertezas em um problema de controle ótimo estocástico. O SMPC permite buscar sistematicamente compensações entre o cumprimento dos objetivos de controle e a garantia de satisfação de restrições probabilísticas devidas à incerteza. Nos últimos anos, o interesse pelo SMPC vem crescendo tanto no que se refere à teoria, quanto no âmbito das aplicações.

Por outro lado, a literatura da seleção de portfólio multiperíodo é predominantemente baseada em programação dinâmica, que propriamente leva em conta a ideia de recursos de atualização de informações disponíveis para decidir uma sequência de negociações. Infelizmente, conforme enfatizam [Nystrup et al. \(2018\)](#), atualmente, executar a programação

dinâmica para negociações é impraticável, exceto em alguns casos especiais ou muito pequenos, devido à maldição da dimensionalidade. Como consequência, muitos estudos incluem somente um número limitado de ativos, de objetivos e de restrições simples. Em contrapartida, [Nystrup et al. \(2018\)](#) afirmam que a abordagem multiperíodo do MPC é computacionalmente rápida, por isso, o MPC é considerado atraente para atuar num grande universo de ativos e implementar restrições e custos relevantes. A expectativa de [Nystrup et al. \(2018\)](#) é que o MPC será útil em pesquisas futuras, quando aplicado à avaliação do desempenho de problemas de previsão de retorno.

No tocante à otimização multiobjetivo dinâmica, [Flores-Tlacuahuac, Morales e Rivera-Toledo \(2012\)](#) apontam que quando se trata de sistemas dinâmicos não lineares, questões relevantes sobre otimização multiobjetivo não estão completamente resolvidas. Em contraste com o grande número de publicações sobre MPC de um único objetivo, as publicações sobre o MPC multiobjetivo são escassas. Por sua vez, eles acreditam que a solução do MPC multiobjetivo não deveria ser necessariamente tão mais difícil de se resolver do que os problemas de MPC de um único objetivo, uma vez que pode-se aproveitar a estrutura dos problemas de otimização subjacentes. [Yu et al. \(2020\)](#) também chamam a atenção para o quanto ainda são poucas as pesquisas acerca da otimização multiobjetivo e multiperíodo do problema de seleção de portfólio.

No âmbito da otimização de portfólios, minimizar as perdas e controlar a cardinalidade não são temas novos se vistos individualmente, no entanto, conforme enfatizado por [Zhao et al. \(2020\)](#), a combinação do CVaR dos excessos de retornos e a cardinalidade é um tanto quanto inexplorada na literatura recente e carece de apreciação.

Os relatos acima reforçam que há lacunas nas áreas abordadas neste trabalho que requerem melhorias. A proposição de novos problemas de controle que descrevem e estimam comportamentos de portfólios financeiros, além da otimização das funções de interesse dos investidores, constituem contribuições relevantes na área de Finanças. Concomitantemente, a otimização multiobjetivo dinâmica que aplica o conceito do MPC na área de otimização de portfólios é uma inovação na área da Pesquisa Operacional. Com base nas habilidades do MPC em lidar com problemas dinâmicos com atualização constante dos dados mais recentes e reajuste do sistema de acordo com essa atualização, o MPC constitui-se em uma ferramenta promissora para o cenário de otimização de portfólios. A inovação do MPC multiobjetivo aplicado a este problema potencializa esse desempenho favorecendo consideravelmente os aspectos mais importantes nos momentos de rebalanceamento da carteira.

Além das contribuições teóricas do trabalho, o arcabouço computacional desenvolvido, incorporado com melhorias das técnicas apresentadas na literatura, constitui-se em contribuições tecnológicas com potencial uso na prática. O desenvolvimento desse aparato prático fornece inovação teórica e aplicabilidade. Essas contribuições acontecem

num momento muito oportuno, uma vez que os investimentos mais seguros obtidos com a renda fixa estão desinteressantes devido às baixas taxas de juros, o que instiga o interesse pelo investimento em renda variável. Sendo assim, a implementação de novas técnicas contribui com o leque de ferramentas disponíveis para a elaboração de um portfólio de investimentos.

1.4 Trabalhos Relacionados

Os trabalhos relacionados presentes na literatura são analisados e expostos em seções, sendo agrupados de acordo com temas abordados em comum com este trabalho, a saber: Otimização de portfólios financeiros, trabalhos com o MPC aplicado fora do contexto de finanças e MPC aplicado à otimização de portfólios.

1.4.1 Otimização de Portfólios Financeiros

O trabalho pioneiro sobre otimização de carteiras de investimentos foi publicado por [Markowitz \(1952\)](#). Ele modelou matematicamente o retorno dos ativos e mostrou que um programa quadrático poderia ser resolvido para determinar o portfólio com o melhor compromisso entre risco (medido pela variância do portfólio) e retorno (medido pelo retorno esperado do portfólio) em um único período. Este trabalho abriu várias portas para desdobramentos e aperfeiçoamentos no âmbito da otimização de carteiras de investimentos. O mesmo autor em ([MARKOVITZ, 1959](#)) considerou uma medida de risco mais adequada, a semivariância, que é uma medida de risco que não trata perdas e ganhos da mesma maneira como acontece com a variância.

[Primbs \(2019\)](#) ressalta que a formulação de período único de Markowitz logo deu lugar a formulações dinâmicas do problema de otimização de portfólio em que o movimento do preço das ações foi modelado em uma estrutura de processo estocástico, e os investidores foram capacitados a ajustar dinamicamente suas participações no portfólio de longo prazo. Essa formulação dinâmica é naturalmente um problema de controle estocástico, na qual as variáveis de controle utilizadas pelo investidor são as ações mantidas em cada ativo, sendo o objetivo maximizar alguma medida do valor futuro da riqueza. Os primeiros trabalhos sobre otimização de portfólio multiperíodo foram publicados por [Merton \(1969\)](#) e [Samuelson \(1969\)](#). Eles propuseram modelos de natureza estocástica por assumirem retornos estocásticos, sendo que [Samuelson \(1969\)](#) trabalhou com modelos em tempo discreto e [Merton \(1969\)](#) com tempo contínuo.

Trabalhos com outras restrições e medidas de risco estão presentes na literatura. [Chagas \(2016\)](#) propôs um modelo de otimização de portfólio multiperíodo em que foi feita a otimização média-variância-CVaR, tendo como restrições os custos de transação e restrições regulamentares. A otimização multiobjetivo ocorreu pelo método ϵ -restrito

(TAKAHASHI, 2007). Meng e Zhou (2019) estudaram um problema de seleção de portfólio multiperíodo com restrição de cardinalidade num ambiente de incerteza e propuseram um modelo média-variância-liquidez com custos de transação, restrições de cardinalidade e limites de investimento. Chang, Yang e Chang (2009) analisaram cardinalidade para os problemas média-variância, semivariância e variância.

Na esfera do uso do CVaR e/ou cardinalidade, Mendonça et al. (2020) propuseram um problema de otimização de portfólio com objetivos de maximizar o retorno médio histórico e minimizar o risco CVaR com restrições de cardinalidade e rebalanceamento. Hanaoka, Cardoso e Paiva (2016) apresentaram um problema multiobjetivo de minimização do CVaR e maximização do retorno, descontados os custos de transação. Barroso et al. (2017) resolveram o problema de minimizar o CVaR e maximizar o retorno, com custos de transação incorporados nas restrições. Zhao et al. (2020) utilizaram o CVaR de retornos excedentes como medida de risco num problema de otimização com restrição de cardinalidade para controlar um portfólio de rastreamento e restrições de venda a descoberto ajustáveis à margem de cada ativo de forma adaptativa dentro do orçamento de vendas a descoberto.

Há um corpo considerável de trabalhos que abordam os custos de transação. Dombrovskiy, Dombrovskiy e Lyashenko (2004), Calafiore (2009), Hanaoka (2014), Dombrovskii e Obedko (2017) e Ferreira (2018) trataram os custos de transação diretamente na função objetivo. Dombrovskiy, Dombrovskiy e Lyashenko (2004) e Dombrovskii e Obedko (2017) consideraram custos de transação proporcionais adicionados como uma parcela quadrática na função objetivo. Calafiore (2009) considerou custos de transação proporcionais, Já Bemporad, Puglia e Gabbriellini (2011) e Ferreira (2018) trataram os custos de transação como uma restrição definidos como uma soma de um valor fixo e um valor proporcional ao montante negociado. Por sua vez, Primbs e Yamada (2018) e Yamada e Primbs (2012) usaram custos de transação proporcionais e incorporados à equação que define a dinâmica da riqueza. Yamada e Primbs (2012) compararam o valor da riqueza de acordo com os intervalos de rebalanceamento do portfólio, considerando rebalanceamentos diários, semanais e mensais. Concluíram que o melhor rebalanceamento foi o diário. Por outro lado, incorporar os custos de transação ao desempenho da riqueza com rebalanceamentos mensais é melhor do que com rebalanceamentos diários ou semanais. Com esse impasse, nota-se que os custos de transação afetam diretamente as conclusões sobre a frequência de rebalanceamento. Por isso, os autores ressaltam a importância de se levar em consideração os custos de transação.

Recentemente foram propostos alguns artigos que tratam da otimização multiobjetivo e multiperíodo de portfólio de investimento mas que não utilizam o MPC explicitamente. Li et al. (2020) propuseram um modelo de portfólio multiperíodo, multiobjetivo com retornos randômicos fuzzy. Consideraram riqueza terminal, CVaR e distorções como critério triplo na tomada de decisões sujeita à restrições de cardinalidade e limites de investimento

definidos por lotes. [Yu et al. \(2020\)](#) propuseram problemas de otimização de portfólio multiobjetivo e multiperíodo levando em consideração o retorno final, risco cumulativo e entropia. [Nigatu \(2020\)](#) propôs um suporte de seleção de portfólio automatizado que considera a otimização multiobjetivo (dada por um algoritmo de enxame de partículas) de risco e retorno num cenário multiperíodo. [Kumar et al. \(2021\)](#) propuseram uma abordagem de seleção de portfólio multiperíodo. Consideraram uma otimização multiobjetivo para maximizar a riqueza terminal e minimizar o CVaR do portfólio sujeito a restrições orçamentárias, limites de investimento e cardinalidade

Trabalhos que apresentam adaptações em busca de melhorias para técnicas de otimização multiobjetivo já existentes são frequentes na literatura. Dentro do escopo dos algoritmos genéticos, [Deb et al. \(2011\)](#) propuseram um algoritmo híbrido personalizado do *Non dominated sorting genetic algorithm-II* (NSGA-II) de forma a manipular situações que não são convencionais para a abordagem clássica de programação quadrática. Os autores desenvolveram esse aperfeiçoamento do NSGA-II para o caso particular de otimização de portfólio em que pretendeu-se minimizar o risco (variância) e maximizar o retorno esperado. Foram propostas novas definições da geração inicial da população e dos operadores de cruzamento e mutação para que as restrições de cardinalidade, limites de investimento por ativo e auto-financiamento fossem incluídas intrínseca e continuamente na formação dos indivíduos. Parte das adaptações propostas por [Deb et al. \(2011\)](#) será utilizada neste trabalho.

[Kaucic \(2019\)](#) propôs uma extensão da estrutura de alocação de ativos do problema média-variância de Markowitz, em que cardinalidade, limites de investimento nos ativos, restrições orçamentárias e condições de paridade de risco são tratados ao mesmo tempo. O problema de otimização de portfólio bi-objetivo foi resolvido por uma nova versão do algoritmo de otimização de enxame de partículas multiobjetivo. Este algoritmo usa um operador de mutação de troca para melhorar as capacidades de exploração do algoritmo original e lida com as restrições por uma técnica híbrida que combina um mecanismo de reparo com diferentes instâncias do princípio de dominação. [Meng e Zhou \(2019\)](#) propuseram um algoritmo de evolução diferencial melhorado para resolver o problema de otimização média-variância-liquidez. O modelo busca encontrar a riqueza ótima terminal obtida no fim do último instante do intervalo que contém os instantes de tempo da estratégia multiperíodo. Já [Kalayci, Polat e Akbay \(2020\)](#) propuseram um algoritmo de metaheurística híbrida que combina componentes críticas da otimização por colônia de formigas, da otimização por colônia de abelha artificiais e algoritmos genéticos para resolver o problema de otimização de portfólio com restrição de cardinalidade.

Outras alterações específicas da parte multiobjetivo são realizadas por [Zhou et al. \(2019\)](#) e [Graham e Craven \(2020\)](#). [Zhou et al. \(2019\)](#) sugeriram uma nova estratégia de transformação para converter um problema de otimização restrito a vários tamanhos de

cardinalidade num problema otimização multiobjetivo de baixa dimensão via algoritmos multiobjetivo evolucionários. O algoritmo proposto permite que indivíduos de diferentes cardinalidades troquem o conhecimento aprendido durante o processo por meio de operações genéticas. A estratégia proposta é validada para o problema das p -medianas e para o problema de otimização de portfólios. [Graham e Craven \(2020\)](#) propuseram um método eficiente e prático de construir as fronteiras eficientes com restrições de cardinalidade por meio da união de subfronteiras eficientes não dominadas obtidas por problemas de programação quadrática menores seguidos de um procedimento de peneiramento aos dados agrupados para produzir a fronteira eficiente com restrição de cardinalidade.

1.4.2 Trabalhos com o MPC

Os artigos ([MAYNE et al., 2000](#)) e ([MAYNE, 2014](#)) são dois trabalhos relevantes quando trata-se do estudo do MPC, uma vez que são marcos sobre o estado da arte nos respectivos períodos em que foram publicados. [Mayne et al. \(2000\)](#) extraíram de uma extensa literatura princípios essenciais de garantia de estabilidade e os utilizaram para apresentar uma caracterização concisa da maior parte das técnicas de controladores preditivos que foram propostos na literatura. Já [Mayne \(2014\)](#) forneceu uma visão geral do desenvolvimento de vários segmentos das abordagens do MPC e sugeriu alguns caminhos para pesquisas futuras que envolvem por exemplo, rastreamento de trajetória e rejeição de distúrbios, MPC adaptativo e otimização estocástica baseada em cenário.

Também importante, no que tange o estado da arte, mas neste caso para o SMPC, é o trabalho de [Mesbah \(2016\)](#), que trouxe, além dos aspectos básicos da formulação do MPC e do SMPC, uma vasta indicação da literatura disponível segmentada por cada tipo de particularidade intrínseca ao estudo do MPC e do SMPC. Ele também apresenta um direcionamento de pesquisas futuras, dentre elas controle preditivo averso ao risco, abordagens eficientes de propagação da incerteza e MPC econômico estocástico.

[Bemporad e Peña \(2009\)](#) consideraram o problema de MPC multiobjetivo no qual a sequência de controle ótimo corresponde a uma das soluções Pareto-ótimas, de maneira similar à abordagem utilizada por [Núñez et al. \(2014\)](#), com a diferença de que, neste caso, foi utilizada escalarização. Os pesos da escalarização atribuídos a cada função objetivo foram definidos de forma *on-line* (variando no tempo) e de forma *off-line* (constantes no tempo).

[Zavala e Flores-Tlacuahuac \(2012\)](#) propuseram um modelo de otimização multiobjetivo que visa minimizar a distância da função custo em relação ao ponto de utopia. A estratégia não requer a construção da fronteira de Pareto, nem a seleção de fatores de pesos. Em geral, o ponto de utopia é inatingível porque os objetivos são conflitantes, no entanto, ele pode ser usado como um ponto de referência quando busca-se calcular o ponto

da fronteira mais próximo dele.

Núñez et al. (2014) propuseram uma formulação do MPC multiobjetivo para o problema de coleta e entrega de passageiros visando a criação de uma rede virtual de carona. Foram considerados dois objetivos: custo do usuário e custo de operação. O custo do usuário inclui o tempo que cada passageiro espera pela chegada do veículo e o tempo no trajeto. O custo de operação é o custo operacional gerado pela circulação dos veículos. Como os dois objetivos são conflitantes, é necessário recorrer aos mecanismos da otimização multiobjetivo para a elaboração de ferramentas mais transparentes para tomadas de decisão ao longo do processo. Em termos práticos, o modelo proposto segue o procedimento: em cada instante de tempo um problema multiobjetivo é resolvido e uma fronteira de Pareto é obtida. De acordo com um critério de seleção definido pelo usuário escolhe-se um ponto desta fronteira para ser a ação de controle aplicada ao sistema. Após a ação ser enviada ao sistema, evolui-se o modelo em um instante de tempo, atualiza-se o sistema com as informações mais recentes e repete-se o processo. Como será demonstrado posteriormente, a formulação multiobjetivo do MPC utilizada para otimização de risco e retorno deste trabalho foi inspirada neste modelo.

Yamashita, Zanin e Odloak (2016) propuseram uma otimização multiobjetivo baseada em métodos ajustados ao MPC: técnica lexicográfica e otimização por compromisso. Eles utilizam uma estrutura lexicográfica cujas metas e classificação dos objetivos são definidas pelo usuário. Em cada passo, um único problema de otimização é resolvido, em que uma única meta é direcionada seguindo a ordem de importância. Nos passos subsequentes, o valor ótimo da função custo obtido anteriormente é incluído como uma restrição do novo problema de otimização. Este último aborda uma nova, menos importante meta, enquanto preserva o desempenho das metas anteriores mais importantes.

Grüne e Stieler (2017) demonstraram que, por meio da escolha de uma solução apropriada para o problema de otimização multiobjetivo em cada passo do MPC, obtém-se um desempenho próximo do horizonte infinito ótimo. Em cada passo do MPC multiobjetivo, uma aproximação da Fronteira de Pareto é calculada e, de acordo com alguns critérios pré-definidos, um ponto Pareto-ótimo é escolhido.

1.4.3 MPC aplicado à otimização de portfólios

O MPC aplicado à otimização de portfólios é uma estratégia que vem ganhando força na última década. Suas características que permitem modelar de forma prática as restrições realísticas do mercado financeiro vêm apresentando êxito e reforçando que o MPC é uma estratégia apta a apresentar bons resultados para o problema de otimização de portfólios. A seguir são relacionados os principais trabalhos que forneceram um apoio crucial para o desenvolvimento desta tese no que diz respeito à aplicabilidade do MPC no contexto de otimização de portfólios.

Primbs (2007a) formula dois problemas de otimização de portfólio. O primeiro é a otimização do risco (variância) ajustado à riqueza, enquanto o segundo é o problema de rastrear um índice com poucos ativos. A dinâmica do problema foi modelada como sistema linear sujeito a ruídos multiplicativos no estado e no controle. Com os resultados obtidos, concluiu-se que esta é uma abordagem com potencial para efetivamente se abordar aos problemas de otimização de portfólios restritos, fato que foi verificado conforme relatos dos trabalhos a seguir.

Calafiore (2009) apresentou um problema computacional de média e variância para alocação dinâmica de ativos. O termo do risco dado pela variância foi representado como uma função quadrática convexa e a riqueza final esperada foi dada como uma função afim das variáveis de decisão. Custos de transação proporcionais foram incorporados diretamente na função objetivo.

Bemporad et al. (2010), Bemporad, Puglia e Gabbriellini (2011), Bemporad, Bellucci e Gabbriellini (2014), Plessen et al. (2019) tratam o problema do SMPC aplicado à estratégia de cobertura dinâmica de opções². Bemporad et al. (2010) e Bemporad, Bellucci e Gabbriellini (2014) propuseram abordagens com o critério de variância mínima do erro de cobertura futuro utilizando uma otimização por mínimos quadrados simples para determinar a estratégia ótima do portfólio.

Bemporad, Puglia e Gabbriellini (2011) utilizaram o SMPC considerando três formulações, em que cada uma foi dada por uma função custo distinta. Os cenários foram gerados tanto pelo Método de Monte Carlo quanto por amostragem da distribuição Gaussiana. As formulações objetivavam:

- (i) minimizar a variância e a expectativa do erro obtido entre a riqueza e uma curva de referência,
- (ii) minimizar o CVaR considerando a função perda como o valor absoluto do erro obtido entre a riqueza e uma curva de referência
- (iii) minimizar o pior caso do erro obtido entre a riqueza e uma curva de referência.

Plessen et al. (2019) propuseram um SMPC com três medidas de funcional de custo: o *trade-off* entre a variância e a esperança do erro de cobertura, o CVaR e o maior erro de cobertura previsto (min-max). Os problemas de otimização requerem que se resolva, em cada instante de tempo, um programa quadrático, um programa linear e um programa linear de menor escala, respectivamente. Para geração de cenários foram considerados três mecanismos: um modelo log-normal de ativos identificados recursivamente a partir dos dados, um método baseado em suporte a regressão vetorial e um esquema mais simples

² O termo cobertura neste caso refere-se à cobertura de um contrato de derivativo, que implica reequilibrar dinamicamente uma carteira (autofinanciável) de ativos subjacentes em intervalos periódicos de modo que, na data de vencimento do contrato, o valor da carteira seja tão próximo quanto possível do valor de compensação a pagar ao cliente.

baseado em perturbação de ruído.

[Dombrovskii, Dombrovskii e Lyashenko \(2005\)](#), [Dombrovskii e Obyedko \(2015\)](#), [Dombrovskii e Obedko \(2017\)](#), [Dombrovskii, Obyedko e Samorodova \(2018\)](#), [Dombrovskii e Pashinskaya \(2020a\)](#), [Dombrovskii e Pashinskaya \(2020b\)](#) fazem parte de uma série de artigos de otimização de portfólios que utilizam o MPC cujo objetivo principal é rastrear uma curva de referência e reduzir os custos de transação. Os trabalhos diferem-se basicamente pelas propriedades dos ativos utilizados e pelo modelo do sistema, sendo que em ([DOMBROVSKII; PASHINSKAYA, 2020a](#)), além do critério de rastreamento, também é considerado o critério de média-variância. Em todos os casos o problema proposto é transformado num problema de programação quadrática.

[Nystrup et al. \(2018\)](#) e [Nystrup, Madsen e Lindström \(2018\)](#) usaram o MPC para otimizar dinamicamente um portfólio com base em predições de média e variância de retornos financeiros de um modelo oculto de Markov com parâmetros variando no tempo. Para os autores, a maior vantagem do MPC é a capacidade de resolver problemas de controle com restrições de uma maneira computacionalmente factível.

[Yamada e Primbs \(2012\)](#) propuseram uma estratégia de MPC que calcula o portfólio ótimo de um problema de média e variância condicional para um dado horizonte de predição em cada passo. Nesta estratégia, foram incorporados ao MPC os valores de compra e venda dos ativos de risco como uma proporção da riqueza. Os autores mostraram que essa formulação representa um problema de programação quadrática convexo. O artigo ([YAMADA; PRIMBS, 2018](#)) é uma extensão do artigo ([YAMADA; PRIMBS, 2012](#)) em que foram acrescentados custos de transação e valores limitantes para compra e venda que podem ser atingidos por cada ativo. A extensão também conta com o aprimoramento da maneira como se calculam a média e a variância do portfólio e a inclusão de custos de transação. Em todos os casos foi utilizado um modelo autoregressivo para o cálculo dos retornos futuros.

([PRIMBS, 2019](#)) é o capítulo de um *handbook* sobre o MPC que organiza de forma sucinta as principais características dessa estratégia de controle aplicada à otimização de portfólios. É sugerida uma forma básica para definir as variáveis de controle e de estado, bem como a dinâmica do preço dos ativos. É proposta uma formulação para o problema de otimização de portfólio usando o MPC em que é considerada a função custo sendo o retorno ajustado ao risco. As únicas restrições são o valor do capital inicial disponível e a equação da dinâmica da riqueza. Também são propostos custos de transação e limites de investimento por ativo, além de uma formulação do MPC para uso no mercado de opções.

[Molina \(2012\)](#) propôs uma nova solução para o problema de seleção de portfólio com base na teoria de controle que utilizou estimadores ótimos para fazer uma previsão da tendência dos ativos e o MPC para fazer o gerenciamento ótimo do portfólio. [Uysal, Li e Mulvey \(2021\)](#) utilizaram o modelo oculto de Markov na série histórica de retornos

para estimar o retorno e as matrizes de covariância para períodos futuros e resolver dois problemas de alocação de carteira multiperíodo com base no MPC com objetivo de média-variância e MPC com objetivo de paridade de risco³. Oprisor e Kwon (2021) propuseram o MPC formulado como problema de otimização convexa que gerencia o equilíbrio entre retorno esperado e risco (variância) considerando os custos de transação, utilizando o modelo de Black Litterman (CHEUNG, 2010) para a estimativa do risco e do retorno.

O MPC para otimização de portfólio também já foi tema de outras teses de doutorado. Herzog (2005) caminhou por várias abordagens do MPC aplicado à otimização de portfólios. Para o tempo contínuo, o problema de otimização de portfólio foi resolvido analiticamente, considerando-se que o modelo do preço dos ativos depende dos retornos esperados, os quais são dados por funções afins. Foi proposto um método numérico para resolver o problema de controle ótimo estocástico e provada sua convergência. Em tempo discreto, foram propostos dois métodos de aproximação: uma estratégia de controle subótima que usa a ideia de MPC determinístico e uma aproximação por programação estocástica que aproxima a dinâmica do portfólio estocástico por um número finito de cenários e resolve o problema de realimentação para a dinâmica aproximada. Simulações com poucos ativos foram realizadas em todos os casos. Sínteses dos resultados são encontradas em (HERZOG et al., 2006; HERZOG; DONDI; GEERING, 2007).

Na tese de Noorian (2015), o principal objetivo foi desenvolver um sistema para melhorar o gerenciamento de risco do mercado de câmbio. Ele aplicou o MPC para lidar com as incertezas e minimizar a função custo dada pelo risco (CVaR e variância) e o retorno do portfólio. Venkatasubramanian (2018) utilizou uma estratégia numérica para o SMPC utilizando o CVaR. Esta estratégia consiste num método de penalidade exata tendo o CVaR como a função que determina a penalidade. Esta abordagem é importante porque o problema em questão lida com a probabilidade das restrições serem violadas. Para que sejam passíveis de aplicação, permite-se que algumas dessas restrições sejam violadas, o que ocasiona certa degradação. Essa quantidade de degradação é vista como um risco e, desse modo, o CVaR pode atuar visando minimizar esse risco.

Na Tabela 1 há uma síntese dos aspectos abordados por cada um dos trabalhos que usam o MPC na otimização de portfólios de investimentos. A maioria desses trabalhos usou a quantidade de cinco ativos em seus experimentos, mas como este número é uma quantidade pequena para o mercado financeiro, eles não foram capazes de instigar desdobramentos da influência da cardinalidade da carteira nos resultados obtidos pelo MPC. Sendo assim, ao incluir a restrição de cardinalidade no modelo proposto, este trabalho contribui com uma inovação na formulação do MPC para otimização de portfólios. Além disso, para que os efeitos da cardinalidade sejam validados, será considerada uma base

³ Paridade de risco é uma estratégia de investimento estável que busca distribuir riscos uniformemente para cada um dos ativos

de dados com mais que cinco ativos nas simulações numéricas, o que favorece uma investigação pormenorizada sobre o alcance e os resultados que o MPC pode atingir neste contexto. Como já foi salientado anteriormente, trabalhos sobre o MPC multiobjetivo são escassos em todas as áreas. Com esta nova abordagem do MPC no contexto de otimização de portfólios, espera-se potencializar o desempenho da estratégia, uma vez que otimizar risco e retorno a cada instante de tempo proporciona um leque maior de escolhas para a ação de controle que será enviada ao sistema, o que torna o processo mais transparente e promissor.

1.5 Organização do trabalho

O restante do trabalho está estruturado da seguinte maneira:

Capítulo 2: Consiste na apresentação da fundamentação teórica. São apresentados os fundamentos matemáticos e conceituais do MPC, bem como o seu funcionamento no contexto da otimização de portfólios. São discutidos tópicos como: tamanho do horizonte de predição e perspectiva temporal da estratégia de investimento. São definidos os conceitos das medidas de risco Variância, *Value at Risk* e *Conditional Value at Risk*. Em seguida, é tratada a transição das medidas de risco de um período para multiperíodo. São discutidos os custos de transação. É definida matematicamente a restrição de cardinalidade de um portfólio e a restrição de desigualdade que permite controlar a quantidade de ativos presentes no portfólio dentro de um limite mínimo e um limite máximo. São definidos os conceitos básicos da otimização multiobjetivo e é descrito o algoritmo *Non dominated sorting genetic algorithm-II* (NSGA-II). É apresentado o conceito do MPC multiobjetivo. Por fim, são definidas as medidas de desempenho para avaliação da melhor fronteira ao término do algoritmo. A revisão de literatura de forma concisa e sistematizada é uma contribuição desta tese.

Capítulo 3: Apresenta as principais contribuições teóricas e práticas. É realizada a formulação da equação dinâmica da riqueza que rege a estratégia do MPC. É proposta a formulação matemática da variância multiperíodo considerando ativos de risco definidos por montante de dinheiro. Esta formulação havia sido proposta por [Primbs e Yamada \(2018\)](#) para o contexto de derivativos. Uma reformulação foi realizada para caracterizar a variância multiperíodo no contexto de ativos financeiros e é uma das contribuições deste trabalho. São demonstrados os resultados que originam esta reformulação. Apresenta-se como ocorre a integração entre o controlador do MPC, a dinâmica da riqueza e os algoritmos de otimização, e também como se relacionam os conceitos relacionados à estratégia do MPC, otimização multiobjetivo, algoritmos genéticos e seleção de portfólios. São definidas as restrições. É definida a equação da

Tabela 1 – Comparação dos trabalhos que usam o MPC aplicado à otimização de portfólios

Trabalho	CVaR	Variância	Custos de Transação	Cardinalidade	Multiobjetivo
(HERZOG, 2005; HERZOG et al., 2006) e (HERZOG; DONDI; GEERING, 2007)	x	x	x		
(BEMPORAD; PUGLIA; GABBRIELLINI, 2011)	x	x	x		
(CALAFIORE, 2009)		x	x		
(PRIMBS, 2007a)		x			
(YAMADA; PRIMBS, 2012; YAMADA; PRIMBS, 2018) e (PRIMBS; YAMADA, 2018)		x	x		
(DOMBROVSKII; DOMBROVSKII; LYASHENKO, 2005; DOMBROVSKII; OBYEDKO, 2015; DOMBROVSKII; OBEDKO, 2017; DOMBROVSKII; OBYEDKO; SAMORODOVA, 2018) e (DOMBROVSKII; PASHINSKAYA, 2020b)			x		
(DOMBROVSKII; PASHINSKAYA, 2020a)		x	x		
(NOORIAN, 2015)	x	x	x		
(NYSTRUP et al., 2018) e (NYSTRUP; MADSEN; LINDSTRÖM, 2018)		x	x		
(VENKATASUBRAMANIAN, 2018)	x				
(PLESSEN et al., 2019)	x	x	x		
(MOLINA, 2012; OPRISOR; KWON, 2021; UYSAL; LI; MULVEY, 2021)		x	x		
Proposta da tese	x	x	x	x	x

riqueza descontados os custos de transação. É definido o cálculo da riqueza esperada utilizando-se cenários. É definido o CVaR na versão multiperíodo, cuja descrição metodológica é uma contribuição deste trabalho. É descrita a metodologia utilizada para a resolução dos problemas propostos, para a implementação computacional deste arcabouço proposto e do modelo autorregressivo vetorial. Os problemas são propostos em duas categorias:

- Na Seção 3.4 são propostos problemas de otimização mono-objetivo da riqueza esperada e das medidas de risco.
- Na Seção 3.5 são propostos problemas de otimização multiobjetivo que visam maximizar a riqueza e minimizar o risco esperado.

São propostos algoritmos genéticos mono e multiobjetivo que inovam a abordagem do MPC no problema de seleção de portfólio. Para tanto, é definida a manipulação dos operadores dentro da perspectiva do horizonte de predição. Estes operadores haviam sido propostos no contexto de otimização de um único período (DEB et al., 2011), por isso, a proposta para lidar com otimização multiperíodo é uma contribuição deste trabalho. É proposto o MPC multiobjetivo com restrição de cardinalidade para o problema de seleção de portfólios. Pelo melhor do nosso conhecimento, o MPC multiobjetivo para lidar com o problema de seleção de portfólio ainda não havia sido proposto, por isso, constitui uma contribuição deste trabalho.

Capítulo 4: São definidos os parâmetros, os dados de entrada e o ambiente computacional utilizado nas simulações. Também ocorre um estudo detalhado para definição da quantidade de cenários. São apresentados os resultados obtidos para os testes propostos. Esses resultados são apresentados utilizando-se análises *in-sample* e *out-of-sample*. Por meio destas análises são estudados aspectos da otimização mono e multiobjetivo, o efeito do horizonte de predição, da cardinalidade e da interação entre esses conceitos. A investigação minuciosa a respeito da relação entre essas variáveis e parâmetros é uma contribuição deste trabalho, uma vez que, pelo melhor do nosso conhecimento, esta análise pormenorizada ainda não havia sido proposta.

Capítulo 5: Por fim, nesse capítulo apresentam-se:

- uma síntese dos resultados obtidos, com a análise de suas implicações e contribuições acadêmicas e tecnológicas;
- as publicações científicas produzidas durante essa pesquisa;
- a indicação dos trabalhos futuros que podem ser desdobrados em continuidade aos estudos dessa pesquisa.

2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo é apresentada a fundamentação teórica dos conceitos envolvidos no escopo deste trabalho. São dadas as definições e as principais características acerca do MPC convencional e multiobjetivo, do risco de um investimento, da transição de risco de único período para risco multiperíodo, dos custos de transação, cardinalidade, otimização e algoritmos genéticos. A revisão de literatura e construção da fundamentação teórica de forma concisa e sistematizada é uma contribuição desta tese.

2.1 Controle Preditivo Baseado em Modelo

O Controle Preditivo baseado em Modelo, em inglês *Model Predictive Control* - MPC, tem suas origens na Teoria de Controle Ótimo e nasceu com a ideia de [Propoi \(1963\)](#) quando foi proposto o princípio do horizonte retrocedente. Conforme definido por [Rawlings, Mayne e Diehl \(2017\)](#), o conceito básico do MPC é usar um modelo dinâmico para prever o comportamento futuro do sistema e otimizar o critério de desempenho para obter a melhor decisão: a ação de controle que deve ser enviada ao sistema no instante atual. Desta forma, [Rossiter \(2017\)](#) chama a atenção para o fato de que o MPC pode definir a escolha das trajetórias atuais de entrada propostas de forma que estas trajetórias restrinjam as dificuldades no futuro. O problema de estimação do estado é examinar os dados passados e harmonizar estas medidas com o modelo para determinar o valor do estado no instante atual.

De acordo com a definição de [Rossiter \(2017\)](#), todo Controle Preditivo baseado em Modelo apresenta os seguintes componentes:

1. Uma lei de controle que depende do comportamento predito;
2. As predições de saída que são calculadas usando um modelo do processo;
3. A entrada atual que é determinada a partir da otimização de alguma medida de desempenho;
4. O horizonte retrocedente: a entrada de controle é atualizada em todo instante de tempo.

De forma geral, [Camacho e Bordons \(1999\)](#) definem que os controladores pertencentes à família do MPC apresentam o seguinte algoritmo de controle:

1. As saídas futuras para um determinado horizonte m , chamado horizonte de predição, são preditas em cada instante de tempo k a partir do modelo do processo. Essas saídas preditas, que provisoriamente denotamos por $y(k+t|k)$ para $t = 0, \dots, m-1$, dependem de valores das variáveis de estado conhecidos no instante k e dos sinais

de controle nos instantes de tempo presente e futuros, $u(k+t|k)$, $t = 0, \dots, m-1$, que definem o perfil de controle calculado.

Lê-se $y(k+t|k)$ como: “a saída predita $y(k+t)$ dado que k é o instante atual e t é um instante de tempo do horizonte de predição que assume os valores $t = 0, \dots, m-1$.”

2. Os valores futuros do sinal de controle são calculados por meio da otimização de um determinado critério considerando-se a presença de restrições.
3. O valor do sinal de controle $u(k) = u(k|k)$ é aplicado ao sistema enquanto os outros valores calculados são descartados, pois o próximo instante $y(k+1)$ já é conhecido e o passo 1 é repetido com este novo valor e todas as sequências são atualizadas. Assim, $u(k+1|k+1)$ é calculado utilizando-se o conceito do horizonte retrocedente.

A Figura 1 retrata o procedimento descrito acima.

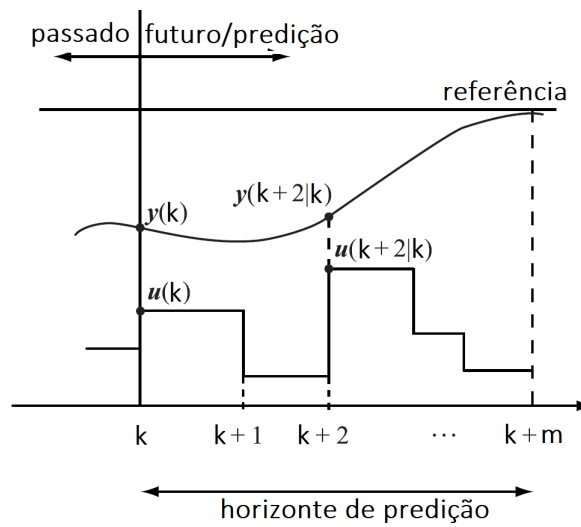


Figura 1 – Determinação da ação de controle via MPC.

Fonte: Adaptado de (ZAK, 2011)

Neste trabalho o MPC é uma estratégia de controle que se baseia num modelo dinâmico de dimensão finita, linear, discreto e variante no tempo definido conforme (1) e (2), sendo que (1) trata-se do MPC clássico e (2) trata-se do MPC estocástico com ruídos multiplicativos.

$$\min_U E[J(k+m|k)] \quad (1)$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} x(k+1) = x(k) + B(k)U(k) \\ y(k) = x(k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^+, U \in \mathcal{U} \end{cases}$$

$$\min_U E[J(k+m|k)] \quad (2)$$

$$\text{s.a: } \begin{cases} x(k+1) = x(k) + B(k)U(k)e(k) \\ y(k) = x(k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^+, U \in \mathcal{U} \\ E[e(k+1)] = 0, E[e(k+1)e^T(k+1)] = \sigma^2, \\ E[e(k+i)e^T(k+j)] = 0, i \neq j \end{cases}$$

Em (1) e (2): x é a variável de estado, y é a variável de saída, U é a variável de controle, m é o horizonte de predição, $e(k+1)$ é um ruído branco com distribuição gaussiana, σ^2 é uma matriz de covariância assumida ser não singular, $E[J(k+m|k)]$ é o valor esperado para o funcional de custo que será definido em detalhes no Capítulo 3 e $B(k)$ é a matriz que define como os sinais de controle afetam a evolução temporal da variável de estado x .

Como o MPC não é uma técnica única, mas um conjunto de diferentes técnicas, há muitos tipos de modelos usados em várias formulações. Contudo, bons modelos para o MPC devem ser:

- Descritivos o suficiente para capturar a dinâmica dominante do sistema;
- Simples o suficiente para a resolução do problema de controle ótimo.

Um outro elemento fundamental, também apontado por [Camacho e Bordons \(1999\)](#), é o algoritmo de otimização, uma vez que ele é o responsável por fornecer as ações de controle. Na presença de restrições de desigualdade, a solução precisa ser obtida por algoritmos numéricos computacionais. O tamanho deste problema de otimização depende do número de variáveis de estado e variáveis de controle, do tamanho do horizonte de predição e de outras propriedades específicas de cada modelo.

[Mayne et al. \(2000\)](#) ressaltam que a principal diferença entre o MPC e o controle ótimo convencional é que no controle convencional usa-se uma sequência de controle pré-computada. Já no MPC, resolve-se um problema de controle ótimo *on-line* para o estado atual da planta, ao invés de se determinar *off-line* um perfil de controle para todos os instantes da evolução temporal do sistema. Assim, como relatado por [Noorian \(2015\)](#), o MPC constantemente atualiza o estado do sistema e otimiza as entradas de controle com base em novas observações. A combinação das atualizações do modelo dinâmico com um olhar futuro, isto é, otimização multiperíodo, possibilita ao MPC planejar o melhor resultado, enquanto se adapta às incertezas decorrentes da falta de precisão do modelo. Como resultado, esta metodologia cria um interessante algoritmo de controle para lidar com o risco inerente às aplicações financeiras.

Desde sua concepção, o MPC vem ganhando espaço nas diversas áreas em que tem sido aplicado. [Boyd et al. \(2014\)](#) destacam como uma das maiores vantagens do MPC o fato de que ele não requer qualquer pré-computação. Por exemplo, ele pode incorporar diretamente em tempo real sinais com mudanças nas estatísticas dos retornos futuros. [Camacho e Bordons \(1999\)](#) reiteram que há muitas aplicações do controle preditivo que

são bem sucedidas, não somente no processo industrial, mas também nas mais diversas áreas de aplicação de controle, que vão dos manipuladores robóticos à anestesia clínica. O bom desempenho dessas aplicações mostra a capacidade do MPC em lidar exitosamente com sistemas de controle e sua aptidão para operar durante longos períodos de tempo com quase nenhuma intervenção. Para evidenciar as características que tornam o MPC uma ferramenta tão promissora, [Camacho e Bordons \(1999\)](#) elencam algumas vantagens deste em relação a outros métodos:

- Os conceitos são muito intuitivos e, ao mesmo tempo, seu ajuste é relativamente fácil;
- Pode ser usado para controlar uma grande variedade de processos, que vão desde aqueles com dinâmica mais simples até os que apresentam dinâmica mais complexa, incluindo sistemas com longos atrasos de tempo;
- Lida facilmente com o caso multivariável;
- Introduz um controle com realimentação de maneira natural para compensar distúrbios de medição;
- Sua extensão para o tratamento de restrições é conceitualmente simples e estas podem ser sistematicamente incluídas durante o processo;
- É muito útil quando referências futuras são conhecidas;
- É uma metodologia sustentada em princípios básicos que permite extensões futuras.

Apesar dos inúmeros benefícios, evidentemente há algumas desvantagens. [Mayne \(2016\)](#) chama a atenção para o fato de que existem tópicos sobre o MPC que precisam ser mais pesquisados, principalmente no tocante ao MPC Robusto e ao MPC Estocástico, uma vez que essas abordagens frequentemente requerem a solução *on-line* de problemas de controle ótimo complexos. Por outro lado, [Noorian \(2015\)](#) considera que a desvantagem do MPC é o poder computacional requerido para otimizar a função custo a cada instante de tempo. No entanto, estes últimos pontos tendem a mudar de perspectiva. Conforme indicado por [Levine \(2019\)](#), avanços tecnológicos recentes têm diminuído substancialmente os custos e aumentado o poder de processamento dos computadores, dos sensores e da comunicação, o que favorece o custo-benefício do processamento de sistemas de controle. Simultaneamente, avanços nos algoritmos matemáticos e computacionais para otimização têm melhorado consideravelmente a velocidade e a confiabilidade dos cálculos requeridos pelo MPC, embora este ainda seja um dos principais problemas do ponto de vista de implementação da estratégia de controle.

2.1.1 Stochastic Model Predictive Control

Stochastic Model Predictive Control (SMPC), Controle Preditivo Estocástico Baseado em Modelo (em português), segundo [Heirung et al. \(2018\)](#), é uma estratégia que fornece uma estrutura probabilística para o sistema do MPC com incertezas estocásticas. As incertezas são incorporadas na descrição do sistema como novas variáveis que denotam os

distúrbios e os ruídos do sistema. [Mayne \(2016\)](#) afirma que no SMPC o funcional de custo pode ser expresso como um custo nominal, que é independente da sequência de distúrbio, ou como uma esperança. Por sua vez, as restrições são definidas como esperança ou probabilidade. Quando o sistema é linear, a variável de decisão é uma sequência de controle e o distúrbio é gaussiano, as expectativas podem ser calculadas. [Bemporad, Bellucci e Gabbriellini \(2014\)](#) e [Plessen et al. \(2019\)](#) afirmam que o SMPC pode ser visto como uma maneira subótima de resolver um problema de programação dinâmica estocástico e multiestágio.

De acordo com [Primbs \(2007b\)](#), o sucesso do MPC restrito determinístico não é transferido diretamente para o caso estocástico. A principal razão é que em sistemas determinísticos, a estratégia de controle ótimo em malha aberta¹ e malha fechada² produz trajetórias idênticas. Então, a otimização *on-line* para sistemas determinísticos pode ser resolvida em malha aberta sem perda de desempenho. Este não é o caso para sistemas estocásticos, porque as estratégias em malha aberta e malha fechada podem originar comportamentos diferentes e estratégias em malha aberta podem estar longe do ótimo. No que tange a tratabilidade computacional, no caso determinístico, como a solução obtida em malha aberta é idêntica àquela que seria obtida em malha fechada, resolve-se o problema da forma mais simples computacionalmente que é a malha aberta, já no caso estocástico não é possível fazer isso, porque a solução ótima que seria obtida em malha fechada não é obtida em malha aberta. Neste sentido, [Tian \(2020\)](#) considera que o MPC determinístico, tanto para processos lineares quanto para processo não lineares, usualmente assume que o modelo do processo é preciso e que os distúrbios futuros são constantes. No entanto, tais hipóteses frequentemente levam a um baixo desempenho em malha fechada quando o sistema é impactado por distúrbios aleatórios ou possui grandes incertezas de modelo. Em contrapartida, o SMPC é responsável por tais propriedades estocásticas e tornou-se uma linha de pesquisa paralela. Devido à presença de variáveis aleatórias, tanto o funcional de custo quanto as restrições podem ser estocásticas.

Sobre o aspecto da implementação do SMPC, [Penad, Bemporad e Alamo \(2005\)](#) consideram que em geral as incertezas são melhor modeladas como uma variável randômica contínua. No entanto, na prática, distribuições de probabilidade contínuas são muito difíceis de manipular de um ponto de vista computacional. Portanto, medidas de probabilidade discretas apresentam um destaque proeminente nas abordagens baseadas em programação estocástica e, como apontado por [Mesbah, Kolmanovsky e Cairano \(2019\)](#), o SMPC considera incertezas do modelo e perturbações com base em sua descrição

¹ Os chamados sistemas de controle de malha aberta são aqueles em que o sinal de saída não exerce nenhuma ação de controle no sistema. Isso quer dizer que, em um sistema de controle de malha aberta, o sinal de saída não é medido nem realimentado para comparação com a entrada ([OGATA, 2010](#)).

² Em um sistema de controle de malha fechada, o sinal de erro atuante, que é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de realimentação, realimenta o controlador, de modo a minimizar o erro e ajustar a saída do sistema ao valor desejado ([OGATA, 2010](#)).

estatística. A partir de um prisma estatístico e computacional, [Paulson et al. \(2020\)](#) apontam que muitos trabalhos têm utilizado o método SMPC associado à abordagem baseada em cenários. Estes algoritmos representam o sistema estocástico usando um conjunto finito de realizações das incertezas amostradas de uma distribuição contínua.

[Venkatasubramanian \(2018\)](#) considera que a principal vantagem da abordagem por cenários é que nenhuma restrição é imposta sobre a distribuição dos distúrbios. A ideia básica nesta abordagem é caracterizar a dinâmica do sistema estocástico por um conjunto finito de realizações das incertezas. Esta ideia também é defendida por [Tian \(2020\)](#), que indica que a técnica por amostragem baseada em cenários utiliza cenários amostrados de distribuições de incertezas aleatórias e distúrbios para aproximar suas verdadeiras distribuições de probabilidade.

A maior questão associada a técnica de amostragem por cenário é devida à tratabilidade computacional. [Tian \(2020\)](#) aponta que questões de tratabilidade surgem porque a formulação de controle incorpora medidas estatísticas para o objetivo e restrições resultando em problemas de otimização computacionalmente caros, pois podem requerer muitos cenários para aproximar as medidas estatísticas. Reforçando esta questão, [Penad, Bemporad e Alamo \(2005\)](#) afirmam que enquanto o tamanho do programa estocástico é linear com o número de cenários, a quantidade de previsões é exponencial com o número de cenários e o tamanho do horizonte de predição. Neste sentido, [Bemporad, Puglia e Gabbriellini \(2011\)](#) consideram que, restringindo o tamanho do horizonte de predição a um, o número de cenários pode ser consideravelmente grande sem incorrer num esforço computacional proibitivo, o que já não é totalmente aplicável a horizontes de predição de tamanhos dois ou três.

Quanto à aplicação do SMPC ao problema de otimização de portfólios há vários trabalhos que utilizam a abordagem por enumeração de cenários. [Heirung et al. \(2018\)](#) discorrem que na prática, o SMPC depende de duas entradas: primeiro, o conjunto mais novo dos parâmetros do modelo e, segundo, os cenários gerados por um modelo multivariado. Para [Plessen et al. \(2019\)](#), formular o problema de otimização estocástica requer enumerar um certo número de cenários dos preços futuros dos ativos. [Nystrup et al. \(2018\)](#) afirmam que problemas de investimentos multiperíodo que levam em conta a natureza estocástica do mercado financeiro usualmente são resolvidos na prática por aproximações de cenários dos modelos de programação estocástica.

Embora já tenha sido empreendido algum esforço acerca dos estudos do SMPC, há uma demanda contingenciada por mais pesquisas sobre este tópico. Para [Heirung et al. \(2018\)](#), um dos principais desafios do SMPC é obter modelos suficientemente precisos para as incertezas probabilísticas que agem no sistema. Os autores definem como desafio futuro o desenvolvimento de resultados teóricos e práticos para o SMPC, uma vez que, segundo eles esta área ainda apresenta pouco desenvolvimento. [Primbs e Yamada \(2018\)](#)

reforçam a importância de pesquisas nessa área ao indicarem que uma questão em aberto, e que deve ser foco de pesquisas futuras, é definir como incorporar sistematicamente as incertezas do modelo à estrutura do MPC. [Mesbah \(2016\)](#) considera que o SMPC não linear tem recebido pouca atenção e, além disso, a estimação do horizonte deslizante permanece um problema em aberto para sistemas estocásticos. Para [Mesbah \(2016\)](#), a avaliação dos resultados estocásticos futuros de um sistema por meio de uma expectativa neutra ao risco pode não estar protegida de grandes desvios, por isso ele sugere como pesquisas futuras a inclusão da aversão ao risco no SMPC, tópico cujas propriedades teóricas são mal compreendidas. Em consonância com Mesbah, [Sopasakis et al. \(2019\)](#) afirmam que o MPC avesso ao risco oferece uma estrutura de controle que permite levar em conta a ambiguidade no conhecimento da distribuição de probabilidade. Os autores também indicam a necessidade de estudos nessa área, uma vez que a solução de problemas de controle ótimo avessos ao risco considerados atualmente tratam de resultados que são limitados a pequenos horizontes de predição e funcionais de custo lineares.

2.2 O MPC no contexto de otimização de portfólios

Como destacado por [Primbs e Yamada \(2018\)](#), o MPC é um método recente no contexto de aplicações em finanças e tem obtido sucesso ao lidar com problemas de controle estocástico que surgem em finanças. A ideia básica é que o problema de controle de horizonte finito, que é repetidamente resolvido em cada instante de tempo, deveria prever com antecipação suficiente o futuro para capturar comportamentos dinâmicos relevantes (movimento do preço dos ativos), enquanto ao mesmo tempo incorporar detalhes importantes do modelo (tais como custos de transação). Desta forma, é possível obter com o MPC uma estratégia multiperíodo, em que é proposta para cada instante de tempo a melhor opção de rebalanceamento da carteira. Assim, ao fim de cada período, o investidor terá definido os melhores movimentos de compra e venda de ativos para o instante de tempo seguinte.

Um problema de finanças num contexto de controle pode suscitar os seguintes questionamentos: Qual é a conexão entre a Engenharia de Controle e a administração de portfólios? O que a Engenharia de Controle pode oferecer para resolver um problema que é firmemente enraizado em negócios e finanças? Para responder a essas perguntas, [Herzog \(2005\)](#) salienta que a Engenharia de Controle é a ciência que busca fazer com que sistemas dinâmicos se comportem de uma maneira desejada. Logo, esta definição se adéqua ao problema de administração de portfólio multiperíodo, em que pretende-se tomar decisões de alocação de ativos de forma que o portfólio de investimento que está sendo administrado comporte-se de maneira desejada com respeito a retorno e risco.

De acordo com [Nystrup, Madsen e Lindström \(2018\)](#), as mudanças abruptas de

que os investidores não são aptos a rebalancear o portfólio frequentemente;

- Em situações nas quais os investidores encaram metas em datas futuras específicas, as decisões de investimento devem ser consideradas de acordo com a dinâmica e a estrutura de tempo envolvidas.

Para [Herzog \(2005\)](#), a administração estática de portfólio resolve um problema de decisões de investimentos para um horizonte de investimento fixo, sem qualquer possibilidade de mudar a composição do portfólio neste período de investimento. Por outro lado, problemas de otimização dinâmica e os métodos de otimização correspondentes atentam-se em abordar o rebalanceamento frequente do portfólio e a atualização da base de dados com as informações mais recentes dos retornos, pois o portfólio é um sistema dinâmico e, por isso, a natureza dos preços dos ativos é melhor capturada por modelos dinâmicos. Consequentemente, o problema de administração de portfólio é um problema de otimização dinâmica similar a um problema de controle. Em conformidade com essa visão sistêmica, [Nystrup et al. \(2018\)](#) defendem que o MPC é uma estrutura flexível para incorporar novas informações ao portfólio assim que essas se tornam disponíveis. A estrutura dinâmica para o problema de seleção de portfólio também é defendida em outros trabalhos ([MOLINA, 2012](#); [OPRISOR](#); [KWON, 2021](#); [KUMAR et al., 2021](#); [UYSAL](#); [LI](#); [MULVEY, 2021](#)).

2.2.1 Horizonte de predição

Um dos parâmetros que efetivamente influencia os resultados obtidos pelo MPC é o horizonte de predição. A princípio, pode-se imaginar que horizontes maiores sejam os mais adequados. Mas a decisão do tamanho desse horizonte não é trivial e nem uma via de mão única. Um dos primeiros empecilhos que surgem ao se definir o tamanho do horizonte de predição é que a complexidade computacional do MPC aumenta exponencialmente com o comprimento do horizonte, como se pode verificar em [Mayne et al. \(2000\)](#). Por isso, horizontes extremamente grandes inviabilizam a aplicabilidade do problema. Desta forma, [Primbs e Yamada \(2018\)](#) sugerem que o tamanho do horizonte de predição seja escolhido grande o suficiente para capturar a natureza dinâmica do problema que está sendo resolvido, enquanto ainda é computacionalmente factível. Em uma linha semelhante, [Yamashita, Zanin e Odloak \(2016\)](#) dizem que a literatura recomenda que o horizonte de predição deve ser grande o suficiente para abranger a dinâmica dominante do processo.

Por sua vez, pequenos horizontes também são aplicáveis em muitas situações, pois como apontado por [Nystrup, Madsen e Lindström \(2018\)](#), o MPC trabalha muito bem na prática, mesmo que para pequenos horizontes. Conforme consta em [Sopasakis et al. \(2019\)](#), as soluções de problemas de controle ótimo avessos ao risco considerados atualmente tratam de resultados que são limitados a pequenos horizontes de predição. [Uysal, Li e Mulvey \(2021\)](#) afirmam que horizontes menores fornecem melhores índices de Sharpe³. E

³ Índice de Sharpe é o excesso de retorno esperado por unidade de risco. Quanto maior é o Índice de

chamam a atenção para o fato de que, como no MPC todos os valores futuros da ação de controle e dos estados são substituídos por suas previsões, a acurácia de estimação diminui à medida que o horizonte de predição aumenta. Por isso há uma relação de compromisso entre o horizonte de predição grande e a boa estimação das ações de controle e dos estados. De toda sorte, [Uysal, Li e Mulvey \(2021\)](#) sugerem que o horizonte de predição 5 rende bom desempenho no problema de otimização de portfólio abordado por eles.

Alguns trabalhos relacionados à otimização de portfólio simplesmente usam o horizonte de predição de um dia, como fizeram [Bemporad, Puglia e Gabbriellini \(2011\)](#) e [Dombrovskii e Obedko \(2017\)](#). Outros apresentam um estudo investigativo sobre o melhor horizonte, como é o caso de [Yamada e Primbs \(2012\)](#), que compararam a evolução da riqueza do portfólio de acordo com os tamanhos de horizonte de predição de 1, 5 e 20 dias e constataram que a riqueza mais alta é dada no horizonte de 20 dias. Já o índice de Sharpe foi avaliado para horizontes de predição que variaram entre 1 e 160 dias, e eles constataram que o maior valor de índice foi obtido com o horizonte de 60 dias e o menor com o horizonte de 1 dia. Num desdobramento deste trabalho, [Primbs e Yamada \(2018\)](#) exploraram os efeitos do tamanho do horizonte de predição variando-o em 1, 2, 3, 4, 5 e 10 dias. Constataram que, com o aumento do tamanho do horizonte, o desempenho do MPC melhorou, embora a melhora no índice de Sharpe não tenha sido muito significativa a partir de 5 dias. Os autores propõem, como pesquisa futura, entender por que o aumento do tamanho do horizonte de predição não contribui para melhora no índice de Sharpe. [Yamada e Primbs \(2018\)](#) analisaram o efeito do horizonte de predição para o índice de Sharpe considerando um conjunto de 27 pares de opções. Fizeram a análise com custo de transação e sem custo de transação. Constataram que o índice de Sharpe diminui à medida que a fração do custo de transação aumenta, sendo negativo para a fração de proporcionalidade dos custos igual a 0,5%. Para os comprimentos do horizonte de predição de 1 a 70 dias, o índice de Sharpe aumenta até o horizonte de 40 dias, com oscilação insignificante a partir do tamanho 40 dias. Justificativas desses comportamentos não foram apresentadas nos artigos. As conclusões obtidas referem-se aos estudos de caso abordados.

2.2.2 Perspectiva temporal da estratégia de investimento

Sobre a perspectiva se o MPC, no contexto de otimização de portfólios, é uma estratégia para curto, médio ou longo prazo, pode-se dizer que, na formulação dada ao problema, esse aspecto leva em conta o horizonte de predição escolhido, o período de amostragem e outras informações particulares de cada problema. São definidos um horizonte de predição e o princípio da janela deslizante, os quais podem ser representados por microssegundos, segundos, horas, dias, meses, anos, etc. Com qualquer uma dessas granularidades pode ser aplicada a estratégia MPC, a diferença está nas implicações

Sharpe, melhor é o resultado analisado.

do uso de cada uma. Granularidades menores acarretam custos de transação com um protagonismo maior. Já as maiores granularidades, como a anual, por exemplo, não permitem um acompanhamento eficiente do comportamento do mercado. Contudo, cabe ao projetista de controle a definição do período de amostragem.

2.3 Risco

Herzog (2005) define que a medida de risco estipula quanto se poderia perder ou quão incerto é o lucro ou perda num dado período de tempo, num subconjunto de todos os resultados possíveis. Markowitz (1952) trouxe uma nova concepção sobre o gerenciamento da composição de carteiras de investimentos ao mostrar que é possível gerenciar o risco de um investimento. Desde então, a busca por uma função que descreve o risco de forma mais fiel possível à realidade que se deseja representar foi o tema que mais demandou dedicação dos pesquisadores da área. Apesar disso, Roman e Mitra (2009) afirmam que a questão sobre a medida de risco mais apropriada é ainda aberta, o que motiva a continuação de indagações, conflitos de ideias e testes.

Noorian (2015) considera que as práticas de administração de risco podem ser divididas em três grupos:

- (i) Prevenção do risco;
- (ii) Redução do risco;
- (iii) Transferência do risco.

A prática de administração de risco abordada nesta tese restringe-se à “Redução do risco”. No entanto, é importante deixar claro que não é possível desonerar todo o risco do investimento. Conforme foi verificado por Jesus, Rocha e Viana (2001), todo investimento apresenta dois tipos de risco: o sistemático e o não sistemático. O risco sistemático é um risco de mercado o qual não pode ser evitado. Já o risco não sistemático é aquele que pode ser potencialmente reduzido por meio da diversificação da carteira de investimentos. É neste último risco que são concentrados os esforços para definir e minimizar as medidas de risco.

Roman e Mitra (2009) classificam as medidas de risco em duas categorias. As medidas de risco que consideram os desvios de um determinado alvo constituem a primeira categoria. Estas medidas admitem somente valores positivos e podem ser simétricas e assimétricas. As medidas simétricas quantificam o risco da dispersão da probabilidade ponderada dos resultados acerca de um objetivo pré-especificado e penalizam ganhos e perdas da mesma maneira, como é o caso da variância. As medidas assimétricas quantificam o risco de acordo com a probabilidade de resultados abaixo de um valor esperado, como é o caso da semivariância. As medidas que compõem a segunda categoria levam em conta a gravidade global de eventuais perdas e são baseadas em quantis. Tais medidas consideram apenas a cauda esquerda da distribuição, que corresponde às maiores

perdas, e podem apresentar valores positivos e negativos. O *Conditional Value at Risk* (CVaR) é um exemplo de medida da segunda categoria (será estudada detalhadamente na Seção 2.3.3). As medidas de risco que levam em consideração somente as perdas são chamadas de medidas *downside risk*.

A seguir são definidas as medidas de risco utilizadas neste trabalho, como suas adaptações para o caso multiperíodo.

2.3.1 Variância

A variância foi a medida de risco utilizada por Markowitz (1952) no artigo que inaugurou a Teoria Moderna de Portfólio. Conforme apontado por Ghahtarani, Saif e Ghasemi (2021), desde então a variância tem sido a medida de risco mais utilizada tanto na teoria quanto na prática. Embora a variância tenha disseminado o interesse sobre a otimização de portfólios, ela é criticada por ser uma medida de risco simétrica, em que ganhos e perdas são tratados da mesma maneira. Com esta configuração, a variância apresenta falhas ao discriminar a aversão ao risco, que é exatamente evitar perdas monetárias no portfólio.

Para entender a formulação matemática da variância dada por Markowitz (1952), considere n ativos de risco disponíveis para investir, em que suas proporções de investimento na carteira são dadas respectivamente por $u_i, i = 1, \dots, n$, de forma que $\sum_{i=1}^n u_i = 1$. Considere ainda que não é permitido venda a descoberto.

Markowitz (1952) considera que cada ativo i possui retorno R_i determinado por uma variável aleatória cuja média é dada por $\mu_i = E(R_i)$, em que $E(R)$ é o valor esperado da variável aleatória R . Este valor esperado pode ser definido a partir de cenários que podem ser cotações do ativo num tempo determinado.

Considere um tempo determinado T e que os cenários de um ativo i são conhecidos para cada instante $t = 1, \dots, T$, sendo que cada cenário apresenta probabilidade p_t de ocorrer, de forma que $\sum_{t=1}^T p_t = 1$. Em cada instante de tempo t , o valor da variável aleatória R_i assume um valor r_{it} , então a média do ativo i no intervalo $[1, T]$ é $\mu_i = \sum_{t=1}^T p_t r_{it}$.

Na prática, os cenários são caracterizados pela série histórica do retorno do ativo i e é assumido que cada cenário apresenta a mesma probabilidade de acontecer. Logo, a média do retorno do ativo i pode ser reescrita como

$$\mu_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it},$$

em que r_{it} é o retorno do ativo i no intervalo de tempo $[t-1, t]$, considerando-se uma série histórica do ativo i de tamanho T .

A definição da covariância dos ativos i e j é $\sigma_{ij} = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)]$. [Markowitz \(1952\)](#) define a variância da carteira em termos das covariâncias dos ativos individuais. Ele mostra que a variância da carteira pode ser definida como

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} u_i u_j.$$

Como a covariância σ_{ij} pode ser expressa em termos do coeficiente de correlação familiar ρ_{ij} ($\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$), [Markowitz \(1952\)](#) mostra que a diversificação pode diminuir a variância do portfólio, embora não seja possível eliminá-la.

2.3.2 Value at Risk

Apontada por [Tsay \(2014\)](#) como candidata a ser a medida de risco mais bem conhecida pelos investidores, o *Value at Risk* (VaR) enquadra-se como um *downside risk* por levar em consideração apenas as perdas do portfólio. Em um inventário sobre a história do VaR, [Holton \(2002\)](#) constatou que a primeira menção ao VaR ocorreu de forma intuitiva em 1923 num estudo de [Hardy \(1923\)](#) sobre méritos de diversificação. A definição formal veio em num documento técnico do Banco J.P. Morgan que descreveu uma metodologia denominada *RiskMetricsTM* para se quantificar o risco de mercado de portfólios compostos de ações, moeda estrangeira, títulos de renda fixa, *commodities* ou derivativos ([LONGERSTAEY; SPENCER, 1996](#)).

O VaR é definido usando-se uma variável de perda aleatória de um portfólio de investimentos num período definido: dado um tempo t , mede-se o risco do portfólio para os próximos T períodos. Para tanto, considere

$$f(U, R) : \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função de perda⁴ associada com o vetor de decisão $U \in \mathbb{R}^n$ e com o vetor aleatório $R \in \mathbb{R}^n$. Considere também $p(R)$ a função densidade de probabilidade de R . Com respeito a uma dada probabilidade β , $0 \leq \beta \leq 1$, o β -VaR é definido como o menor valor ξ tal que, com probabilidade β , a perda do portfólio não excederá ξ . O número β é um valor fixo, usualmente dado por $\beta = 90\%$, 95% ou 99% , conforme indicado por [Bemporad, Puglia e Gabbriellini \(2011\)](#). [Herzog \(2005\)](#) utiliza $\beta = 95\%$, 90% , 85% e 75% . [Rockafellar, Uryasev et al. \(2000\)](#) utilizam $\beta = 99\%$, 95% e 90% . [Bemporad, Puglia e Gabbriellini \(2011\)](#) utilizam $\beta = 99\%$. [Hanaoka, Cardoso e Paiva \(2016\)](#) utilizam $\beta = 90\%$.

Por exemplo, um portfólio que possui $95\% - VaR$ de 5 dias igual a -4% significa que há 95% de chance de que, após 5 dias, o valor do portfólio não caia mais que 4% .

Denote a função cumulativa de f por

⁴ Esta função é definida considerando-se um índice de tempo t , isto é, $f(U, R) = f_t(U, R)$ mas, por simplicidade de notação, esse índice será omitido.

$$\Psi(U, \xi) = P(R | f(U, R) \leq \xi) = \int_{f(U, R) \leq \xi} p(R) dR.$$

Matematicamente, o β -VaR é definido como

$$\xi_\beta(U) = \min_U \{ \xi \in \mathbb{R} | \Psi(U, \xi) \geq \beta \}.$$

Da definição $\Psi(U, \xi) \geq \beta$, que diz que

$$P(f(U, R) \geq \xi_\beta(U)) \geq \beta,$$

segue que, com probabilidade β , a perda potencial do portfólio, do tempo t ao tempo $t + T$ é menor ou igual a $\xi_\beta(U)$.

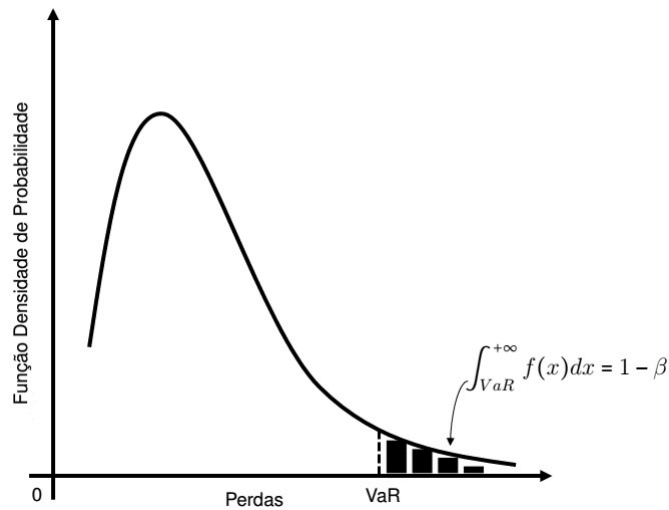


Figura 3 – VaR baseado numa função densidade de probabilidade

Para uma distribuição acumulada univariada $\Psi(x)$ e uma dada probabilidade q satisfazendo $0 < q < 1$, a quantidade

$$x_q = \min_x \{ \Psi(x) \geq q \}$$

é chamada q -ésimo quantil de $\Psi(x)$. Se a função de perda $f(U, R)$ é contínua, então $q = P(f(U, R) \leq x_q)$. Assim, vemos que o β -VaR é o β -ésimo quantil da distribuição de perdas, em que $1 - \beta$ é uma cauda de probabilidade pequena. A Figura 3 mostra o VaR baseado numa função densidade de probabilidade de uma variável de perda aleatória. A área da cauda superior sob a densidade é $1 - \beta$.

2.3.3 Conditional Value at Risk

Bemporad, Puglia e Gabbriellini (2011) consideram que a maior desvantagem do VaR é que o montante da perda que ocorre com probabilidade $1 - \beta$ não é levado em

consideração diretamente, uma vez que esta medida não é capaz de estimar o tamanho da perda. Com o intuito de evitar este problema, [Rockafellar, Uryasev et al. \(2000\)](#) definiram o β -CVaR, que é a esperança condicional de perdas do portfólio superiores ao VaR. Em termos práticos, o β -CVaR define a perda média incorrida pelo portfólio nos $(1 - \beta)\%$ piores cenários. Desta forma, caso ocorra um evento catastrófico, o β -CVaR consegue mensurar o tamanho da perda esperada.

Para [Herzog \(2005\)](#), o CVaR é apropriado para lidar com otimizações de portfólio de classes de ativos que exibem distribuição de retornos com cauda pesada, uma vez que ele mede os valores de cauda esperados. [Rockafellar, Uryasev et al. \(2000\)](#) consideram que o CVaR é uma medida de risco que apresenta propriedades bastante desejáveis e, dentre elas, convém destacar a convexidade e a monotonicidade com respeito à dominância estocástica de primeira e segunda ordem ([PFLUG, 2000](#)). Estes autores também enfatizam que, embora o CVaR tenha sido definido para o caso de finanças, ele pode ser aplicado a otimizações de percentis em outros contextos. Esta afirmação é reiterada por [Venkatasubramanian \(2018\)](#) ao dizer que buscou o CVaR das aplicações financeiras a fim de adaptá-lo para aplicações com uma função de perda genérica.

Na Figura 4, pode-se contrastar os aspectos conceituais do β -VaR e do β -CVaR. Percebe-se que o VaR é um valor na reta que representa a função de perda localizado exatamente no ponto que define o $(1 - \beta)$ -ésimo quantil da distribuição das perdas, ao passo que o β -CVaR é o valor médio das perdas que encontram-se à direita do VaR.

Matematicamente, o β -CVaR é definido como

$$\phi_\beta(U) = E[f(U, R) | f(U, R) \geq \xi_\beta(U)] = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(U, R) \geq \xi_\beta(U)} f(U, R) p(R) dR. \quad (3)$$

A Equação (3), embora conceitualmente seja clara, matematicamente não é simples de ser calculada. Em atenção a essa dificuldade, [Rockafellar, Uryasev et al. \(2000\)](#) definiram uma forma mais prática para calcular o β -CVaR. Os autores mostraram que o β -CVaR⁵ das perdas associado a qualquer U pode ser determinado pela fórmula:

$$\phi_\beta(U) = \min_{\xi \in \mathbb{R}} F_\beta(U, \xi),$$

em que

$$F_\beta(U, \xi) = \xi + (1 + \beta)^{-1} \int_{R \in \mathbb{R}^m} [f(U, R) - \xi]^+ p(R) dR. \quad (4)$$

⁵ Para simplicidade de notação, o valor β será informado separadamente em todas as simulações e β -CVaR será referenciado apenas por CVaR. Idem para o β -VaR

⁶ $[f]^+ = \max\{f, 0\}$

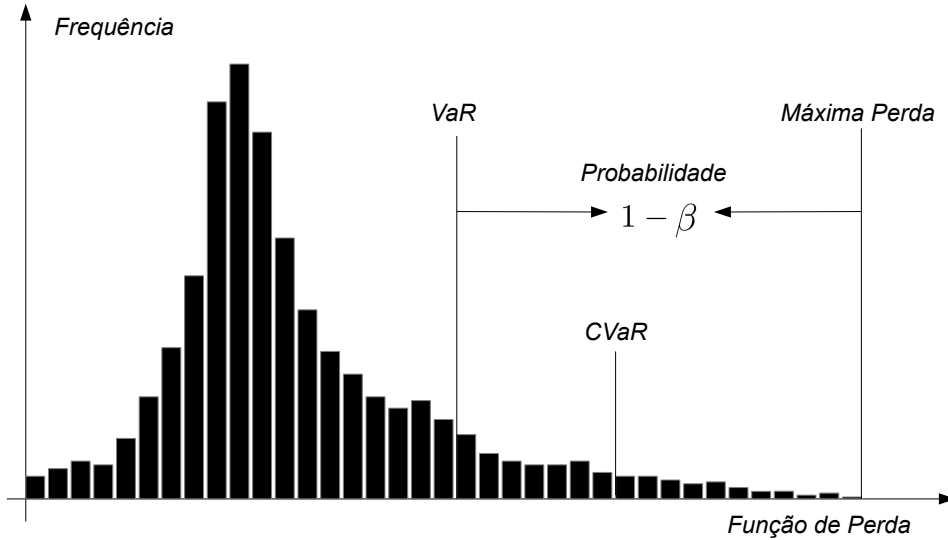


Figura 4 – Ilustração conceitual do VaR e CVaR

Fonte: [Hanaoka \(2014\)](#)

[Rockafellar, Uryasev et al. \(2000\)](#) também mostraram que a Equação (4) pode ser aproximada por uma distribuição amostral de R , de acordo com a função densidade de probabilidade $p(R)$. Se a função gera uma coleção de T vetores $R^1, \dots, R^T$ e cada um deles tem probabilidade π_t de ocorrer, $t = 1, \dots, T$, então a aproximação $\tilde{F}_\beta(U, \xi)$ é

$$\tilde{F}_\beta(U, \xi) = \xi + \frac{1}{1 - \beta} \sum_{t=1}^T \pi_t [f(U, R^t) - \xi]^+. \quad (5)$$

2.4 Risco Multiperíodo

As medidas de risco consideradas nas seções anteriores foram apresentadas na sua forma padrão. Como este trabalho é desenvolvido no contexto do MPC, cada medida de risco precisa ser definida levando-se em conta o horizonte de predição, isto é, essas medidas devem incorporar uma versão multiperíodo. Conforme apontado por [Herzog \(2005\)](#), a forma de extensão do caso monoperíodo para o caso multiperíodo não é feita diretamente. Para esta formulação existem duas abordagens na literatura: uma que mede o risco apenas no período final do horizonte de predição e outra que mede o risco considerando-se todos os instantes de tempos futuros do horizonte de predição. Devido à primeira abordagem ser mais viável para as simulações dos experimentos e por ser a mais utilizada na literatura, neste

trabalho optou-se por esta abordagem. Desta forma, o funcional de custo é o custo terminal correlacionado a riqueza e/ou ao risco. Segundo [Chagas \(2016\)](#), uma diferença chave na abordagem multiperíodo para a monoperíodo é que a solução ótima não compreende uma única decisão de alocação, mas uma sequência inteira de decisões sucessivas de alocação, conhecida como estratégia de alocação.

2.4.1 Variância Multiperíodo

A variância multiperíodo já foi foco de estudos em vários trabalhos. [Herzog \(2005\)](#) e [Herzog et al. \(2006\)](#) usam um modelo de fator Gaussiano para obter a dinâmica da riqueza, da média e da variância condicionais. Eles realizam uma otimização de portfólio em que o investidor maximiza o objetivo média-variância enquanto mantém o VaR do portfólio limitado a um valor específico. [Nystrup, Madsen e Lindström \(2018\)](#) usam o MPC para otimizar dinamicamente um portfólio baseado em previsões de média e variância de retornos financeiros de um modelo oculto de Markov com parâmetros variantes no tempo. [Goldshtein e Tsiotras \(2017\)](#) consideraram o problema de controle ótimo de horizonte finito de um sistema linear variante no tempo sujeito a distúrbios estocásticos e estado totalmente observável, em que uma das metas é atingir uma covariância alvo no tempo final. [Okamoto e Tsiotras \(2019\)](#) realizaram o primeiro trabalho com covariância restrita por probabilidade de chance.

A motivação para se obter a média e a variância dos retornos dos ativos de risco e da carteira no instante $k + m$ foi dada por [Yamada e Primbs \(2012\)](#) e [Primbs e Yamada \(2018\)](#). Nestes trabalhos, os autores usam a estratégia do MPC para resolver o problema de portfólio ótimo dado pela média e variância condicionais. Usa-se um modelo autorregressivo vetorial para prever o comportamento futuro dos *spreads* dos ativos de risco. Há resultados que mostram, para a formulação adotada pelos autores, como são obtidas a média e a variância dos retornos dos ativos de risco no horizonte de predição. Em seguida, esse resultado deduzido é utilizado para obter a riqueza e a variância esperadas do portfólio no horizonte de predição.

2.4.2 Conditional Value at Risk Multiperíodo

Conforme apresentado por [Herzog \(2005\)](#), ao definir o CVaR, em vez de calcular uma política de controle ótima exata, soluciona-se o problema aproximado substituindo a esperança por uma média amostral e a dinâmica verdadeira por um número finito de cenários representativos. A aproximação por cenários não depende da dimensão das variáveis de estado, mas do número de cenários que se deseja analisar. Como definido anteriormente, nesta tese é considerado o CVaR que otimiza o risco no último instante do horizonte de predição. Por isso, a função perda é definida considerando-se apenas o instante $k + m$ do horizonte de predição.

Para a construção dos cenários foi considerado o modelo autorregressivo vetorial dado na Equação (9), o qual foi simulado por meio de um método de Monte Carlo. O termo que envolve o erro do modelo impõe a condição de estocasticidade e, assim, a cada simulação é possível obter um cenário distinto. Considera-se que um cenário denota uma trajetória dos retornos dos ativos calculados no futuro. Como os ruídos e distúrbios são descritos como variáveis aleatórias, segundo [Heirung et al. \(2018\)](#), o problema passa a se enquadrar no âmbito do SMPC.

Trabalhos em que se usa o CVaR definido como uma medida de risco multiperíodo estão presentes na literatura. [Herzog \(2005\)](#) aborda a aplicação do CVaR em otimização de portfólio considerando duas classificações: o CVaR paramétrico, em que se usa uma estratégia de controle subótima com a ideia do MPC determinístico, e o CVaR numérico, em que se usa uma aproximação por programação estocástica para aproximação da dinâmica do portfólio por um número finito de cenários, resolvendo-se, assim, o problema de realimentação para a dinâmica aproximada. Em ambos os casos, a função perda associada foi definida como o valor da riqueza com sinal negativo. No caso numérico, os cenários foram gerados por um método de Monte Carlo e os resíduos observados foram calculados empiricamente a partir da estimação do modelo. Esses resíduos foram usados num método de autoinicialização para gerar os cenários. A otimização foi a maximização do retorno subordinada à perda limite esperada do CVaR como restrição, e o intervalo de confiança da definição do CVaR foi definido com $\beta = 99\%$.

[Bemporad, Puglia e Gabbriellini \(2011\)](#) utilizaram o SMPC para tratar do problema de cobertura dinâmica de opções com custos de transação. Eles também utilizaram a geração de cenários dada por um método de Monte Carlo com a probabilidade de cada cenário constante. A função perda foi o valor absoluto da diferença entre a riqueza do portfólio em cada instante e a riqueza de um portfólio de investimentos almejado. Eles também implementaram o CVaR com os cenários gerados por uma discretização da distribuição gaussiana dos preços dos resíduos, no entanto, constataram que a formulação com 100 cenários gerados pelo método de Monte Carlo e 5 cenários da distribuição gaussiana levam ao mesmo resultado. Por outro lado, com as simulações realizadas, puderam averiguar que, com o aumento do número de cenários, diminui o valor do erro do rastreamento.

[Chagas \(2016\)](#) desenvolveu uma estratégia de otimização multiperíodo de média-variância-CVaR considerando custos de transação e restrições regulamentares. A abordagem multiperíodo que ele faz não é a mesma utilizada pelo MPC com o horizonte de predição. Ele considera uma estratégia de alocação de ativos no longo prazo em que ocorre rebalanceamento da carteira em alguns instantes de tempo intermediários no horizonte de investimento. Ele constrói os cenários com base em árvores de cenários e, a partir delas, realiza a otimização multiobjetivo para maximizar a riqueza esperada e minimizar a variância e o CVaR. Esta otimização é realizada com o método ϵ -restrito. A variância e o CVaR são

as funções das restrições do método.

Venkatasubramanian (2018) apresenta um método de penalidade para o SMPC usando o CVaR como função de penalidade. Ela considera que o CVaR é conhecido como a aproximação convexa mais firme das restrições de probabilidade, e por isso ele está sendo adaptado do campo das finanças para outras áreas. Por outro lado, como uma avaliação exata do valor esperado da função aleatória que define a função perda do CVaR é impossível, ou proibitivamente cara, é necessário usar uma aproximação amostral. Por fim, ela usa as funções riqueza, variância e CVaR esperados de Herzog (2005) aplicadas ao método de penalidade desenvolvido, sendo a função penalidade dada pela soma do CVaR de cada instante do horizonte de predição, e a média e a variância são levadas em conta apenas no instante final.

2.5 Custos de transação

Custos de transação são comissões e outras taxas que devem ser pagas às instituições financeiras que intermediam as negociações de compra e venda dos ativos. Primbs (2019) define que os custos surgem principalmente por duas razões: comissão paga à corretora que geralmente é um valor fixo que incide a cada operação, e um custo de transação relacionado ao *spread* de compra e venda que geralmente é definido como uma proporção do valor transacionado. O custo de transação proporcional é o tipo de custo mais comum na literatura.

Como realçado por Nystrup, Madsen e Lindström (2018), custos de transação são importantes quando compara-se o desempenho das estratégias estáticas e dinâmicas, pois o rebalanceamento frequente pode contrabalancear o excesso de retorno potencial da estratégia dinâmica. Com raciocínio semelhante, Calafiore (2009) justifica que quando as características realísticas de custos de transação e outras restrições são adicionadas ao modelo, a abordagem de um período não é equivalente à abordagem multiperíodo. Por isso, a utilização de um modelo que explora totalmente a estrutura intertemporal do problema pode apresentar vantagens. Essa virtude é exaltada por Primbs (2019), ao considerar que uma das aplicações mais bem sucedidas do MPC é sua habilidade em incorporar os custos de transação. Além disso, Calafiore (2009) afirma que problemas multiperíodo na presença de custos de transação e restrições são em geral não tratáveis analiticamente pelas técnicas convencionais empregadas no controle ótimo. Tal fato corrobora a motivação de se usarem os métodos de otimização aplicados neste texto.

Nesta tese são usados os custos de transação proporcionais, isto é, a cada rebalanceamento é descontada uma fração do montante transacionado para cada ativo e o custo total é o somatório do custo implicado para cada ativo. Este valor pode ser descontado diretamente na função riqueza esperada. Optou-se por utilizar apenas os custos

proporcionais, não incluir os custos fixos, porque os custos fixos estão deixando de ser aplicados. Conforme enfatizado por [Macedo, Godinho e Alves \(2017\)](#), hoje em dia, com o advento dos aplicativos de negociação baseados na *Internet* e da competição feroz das corretoras, os custos de negociação podem assumir porcentagens infinitesimais. No Brasil a tendência em zerar as taxas fixas de corretagem e cobrar a taxa proporcional destinada à custodiante já vem sendo adotada, como é o caso das corretoras Clear, Nuinvest, Rico e Toro ([CLEAR, 2021](#); [NUINVEST, 2021](#); [RICO, 2021](#); [TORO, 2021](#)) e da corretora Warren ([WARREN, 2021](#)), que cobra taxas proporcionais de 0,5 a 0,7% a.a para o cliente investir em carteiras selecionadas com base em objetivos e perfil do investidor.

2.6 Restrição de Cardinalidade

[Markowitz \(1952\)](#) mostrou que a diversidade de ativos no portfólio de investimento contribui para reduzir o risco do portfólio. No entanto, agregar ativos numa quantidade sem critérios não é uma prática recomendada, uma vez que a quantidade de ativos que compõem uma carteira envolve custos, e monitorar uma carteira com muitos ativos torna-se uma tarefa extremamente difícil. Por isso, ao tratar o problema de otimização de portfólios, um aspecto importante para tornar o problema mais realista é a inclusão da restrição de cardinalidade. A ideia é constituir uma carteira diversificada o suficiente para diluir o risco, mas cuja quantidade de ativos seja razoável para seu gerenciamento prático. Matematicamente, um limite mínimo de ativos garante a diversidade das carteiras selecionadas e um limite máximo de ativos reduz os custos de monitoramento e rebalanceamento após o processo de otimização. Desta forma, a restrição de cardinalidade consiste em limitar a quantidade de ativos presentes no portfólio.

[Cesarone et al. \(2016\)](#) salientam que apesar da redução do risco de um portfólio estar relacionada com a diversificação, este princípio não necessariamente se estende à necessidade de investir em todos os ativos para obter o menor risco. E fornecem evidências de que pequenos portfólios são suficientes para atingir a redução do risco *in-sample* com respeito à variância e a algumas outras medidas de risco populares, além de serem muito bons para desempenho *out-of-sample*. Nesta lógica, [Mahapatra et al. \(2019\)](#) constataram que a variação do risco torna-se irrelevante em portfólios com tamanho superior a 20 ativos. E mostram que o risco reduz gradualmente com o aumento da cardinalidade até que se estabiliza. Comportamento também relatado por [Hanaoka, Cardoso e Paiva \(2016\)](#) e [Brito, Sebastião e Godinho \(2019\)](#), que constataram que quando a cardinalidade aumenta, o risco total do portfólio diminui gradualmente até certo nível. Após atingir este nível, aumentar a cardinalidade produz reduções irrelevantes no risco. O próprio Markowitz já possuía evidências dessas constatações, quando em ([MARKOVITZ, 1959](#)) considerou que apenas uma redução limitada da variabilidade pode ser alcançada aumentando o número de ativos em uma carteira.

No que se refere à quantidade de ativos no portfólio, [Cesarone et al. \(2016\)](#) constataram que os menores riscos para os portfólios não requerem mais do que 15 ativos. [Brito, Sebastião e Godinho \(2019\)](#) concluíram, a partir da análise do índice de Sharpe, que o melhor desempenho *out-of-sample* foi atingido com cardinalidades 14 e 15. [Mendonça et al. \(2020\)](#) utilizaram cardinalidades num intervalo entre três e 30, e constataram que somente portfólios que possuíam até oito ativos apareceram na fronteira não dominada. Portfólios com cardinalidades sete e oito ficaram numa região de menor risco e menor retorno enquanto portfólios de cardinalidades três e quatro ficaram numa região de maior retorno e maior risco. [Chang, Yang e Chang \(2009\)](#) analisaram um portfólio com cardinalidades que variaram de 10 a 90 ativos em problemas de otimização de portfólio considerando média-variância, semivariância e variância, e constataram que os portfólios com cardinalidades menores ofereceram desempenho melhor. Num estudo investigativo que considerou cardinalidade de 3 a 30 ativos, [Hanaoka, Cardoso e Paiva \(2016\)](#) constataram que as cardinalidades 5 e 10 apresentaram bons resultados, os quais foram declinando a partir de quinze ativos, culminando na carteira de 30 ativos com apenas retornos negativos. [Barroso et al. \(2017\)](#) consideraram cardinalidade três, nove e 15 num universo de 53 ativos. A cardinalidade nove conseguiu atingir os menores valores para o risco, acarretando os menores retornos e, de forma oposta, a cardinalidade três atingiu os maiores retornos, acompanhados dos maiores riscos. Para dados *out-of-sample*, constataram que as cardinalidades 3, 9 e 15 apresentaram retorno cumulativo mais alto que o do Ibovespa, e a cardinalidade 9 se destacou com relação ao portfólio ingênuo. O risco do portfólio para cardinalidades 9 e 15 foi menor que o risco do Ibovespa e do portfólio ingênuo, enquanto para cardinalidade 3 não foi obtido risco menor estatisticamente significativa.

Considerando que o risco é afetado apenas marginalmente a partir de certa cardinalidade, e que a maior cardinalidade aumenta os custos de transação e de administração, além da complexidade de gerenciamento, [Meng e Zhou \(2019\)](#) enfatizam que não é aconselhável ter uma quantidade excessiva de ativos num portfólio. Concomitante a isso, [Cesarone et al. \(2016\)](#) elencam muitas razões para preferir portfólios pequenos em detrimento dos maiores, dentre as quais destacam-se:

- É infactível para pequenos investidores manter grandes portfólios.
- Para grandes investidores é necessário identificar o limite em que os custos excedem o benefícios da redução do risco.
- Além do custo monetário em manter um portfólio grande, há o custo de desempenho em monitorar as informações de tantas empresas.
- Portfólios pequenos parecem apresentar menores erros de estimativa para variância e covariância.

Além disso, [Graham e Craven \(2020\)](#) reiteram que para pequenas cardinalidades e grandes números de ativos os problemas de otimização de portfólio que representam

condições realísticas são NP-difíceis. Problemas com este nível de dificuldade podem ser eficientemente aproximados usando metaheurísticas tais como algoritmos evolucionários. Pequenas cardinalidades tipicamente resultam em alto custo computacional para algoritmos evolucionários devido à dificuldade de encontrar “boas” soluções, indicando que um método alternativo pode ser mais adequado para estes casos. [Moral-Escudero, Ruiz-Torrubiano e Suárez \(2006\)](#) provaram que o problema de otimização inteira mista média-variância de Markowitz é NP-difícil.

Adicionar restrições realísticas tais como cardinalidade torna o problema de otimização de portfólio NP-difícil ([LI et al., 2020](#)). [Kaucic \(2019\)](#) ressalta que obter a fronteira eficiente completa torna-se computacionalmente desafiador quando trata-se do problema média-variância de Markowitz com a restrição de cardinalidade. Ele classifica os métodos para resolver este problema em duas classes: a primeira classe constituída de métodos exatos que fornecem a solução ótima, mas que quando o tamanho do problema cresce exige um tempo computacional proibitivo. A segunda classe é constituída por abordagens heurísticas, que garantem a identificação de boas soluções, algumas vezes ótimas, mesmo para instâncias de tamanho grande num tempo razoável. Contudo, [Zhou et al. \(2019\)](#) afirmam que o problema de otimização restrito a vários tamanhos de cardinalidade tem recebido pouca atenção e salientam que resolver este tipo de problema ainda é muito recente e há motivação para mais estudos.

No âmbito da definição numérica, [Mansini et al. \(2015\)](#) definem a restrição de cardinalidade por meio de uma restrição de desigualdade, em que o número de ativos selecionados não pode ser inferior nem superior a limites pré-definidos K_{inf} e K_{sup} , respectivamente. Suponha que a carteira seja definida por $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$, em que $u_i, i = 1, \dots, n+1$ é o montante de dinheiro investido em cada ativo. A cardinalidade do portfólio é definida por $\sum_{j=1}^{n+1} z_j$, em que z_j é uma variável auxiliar usada para contar o número de ativos no portfólio:

$$\begin{cases} z_j = 1, & \text{se } u_j > 0, j = 1, \dots, n+1 \\ z_j = 0, & \text{se } u_j = 0, j = 1, \dots, n+1 \end{cases}.$$

Desta forma, a restrição de desigualdade é dada por,

$$K_{inf} \leq \sum_{j=1}^{n+1} z_j \leq K_{sup}, \quad (6)$$

Para o caso particular em que $K_{inf} = K_{sup} = K$, a Equação (6) reduz-se a uma restrição de igualdade:

$$\sum_{j=1}^{n+1} z_j = K.$$

Neste trabalho a restrição de cardinalidade será tratada diretamente nos operadores geração da população inicial, cruzamento e mutação do algoritmo genético (tanto no algoritmo mono-objetivo quanto no algoritmo multiobjetivo), conforme definido em (DEB et al., 2011).

2.7 Otimização Multiobjetivo

Um problema de otimização multiobjetivo é definido por um conjunto de funções objetivo que devem ser otimizadas (maximizadas ou minimizadas) simultaneamente (DEB, 2001). As soluções obtidas devem satisfazer as restrições do problema. Como o interesse é a busca das soluções ótimas, e $\arg \max_x f(x) = \arg \min_x [-f(x)]$, o problema pode ser restrito apenas ao processo de minimização.

De forma geral, um problema de otimização multiobjetivo com p objetivos pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} x^* &= \arg \min_x \mathbf{f}(x) \\ \text{s.a. : } g_1(x) &\leq 0, \dots, g_R(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

sendo cada $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de restrição. A função multiobjetivo $\mathbf{f}$ é definida pela função vetorial:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\mapsto \mathbf{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

em que cada $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$ é um objetivo. O conjunto factível do problema é definido como $X = \{x | g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, R\}$. Note que se $p = 1$, o problema (7) torna-se mono-objetivo, e pode ser resolvido pelos métodos apropriados. Neste trabalho, é assumido $p \geq 2$.

Na otimização multiobjetivo, geralmente os objetivos são conflitantes⁷, isto é, para diminuir o valor de um objetivo necessariamente aumenta-se o valor de outro. Por isso, a solução ótima de uma função objetivo não coincide com as soluções ótimas das outras funções objetivo. Tendo em vista solucionar esse impasse é necessário definir o conceito de dominância que irá lançar luz sobre como definem-se as melhores soluções de um problema multiobjetivo. A dominância entre duas soluções é definida por Talbi (2009):

Definição 2.7.1. Diz-se que uma solução s_1 , com vetor de funções objetivo $u = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$, é melhor que outra solução s_2 , com vetor de funções objetivo $v = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, se u domina v ($u < v$), ou seja, nenhuma função objetivo de v possui valor menor que seu respectivo

⁷ A otimização multiobjetivo é o processo de otimizar simultaneamente múltiplos objetivos que podem ser complementares, conflitantes ou independentes (MOFFAERT; DRUGAN; NOWÉ, 2013).

valor em u e, além disso, pelo menos para um objetivo, o valor da função objetivo de u é menor que o de v . Formalmente, $\forall i \in \{1, \dots, p\} : u_i \leq v_i \wedge \exists i \in \{1, \dots, p\} : u_i < v_i$.

Uma solução Pareto ótima é uma solução $x^* \in X$ tal que nenhuma outra solução de X a domine, X representa o conjunto de soluções factíveis associadas com as restrições de igualdade e desigualdade e os limites explícitos. O conjunto de todas as soluções Pareto ótimas constitui o conjunto Pareto ótimo, que pode ser definido como $P^* = \{x^* \in X : \forall x \in X, f(x) \not\prec f(x^*)\}$. Em suma, de acordo com Talbi (2009), o objetivo fundamental da otimização multiobjetivo consiste em determinar o conjunto Pareto ótimo, bem como a imagem desse conjunto pela função objetivo, que é a Fronteira de Pareto, definida como $FP^* = \{f(x^*) : x^* \in P^*\}$.

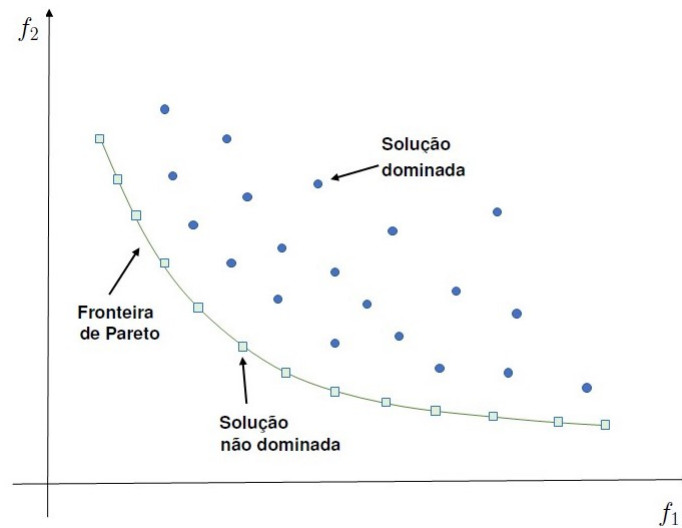


Figura 5 – Fronteira de Pareto e soluções não dominadas.

Fonte: Adaptado de (SOMMA, 2016)

A Figura 5 mostra soluções de um problema com dois objetivos. É possível observar a fronteira de Pareto, os pontos Pareto ótimos (sobre a fronteira) e os pontos dominados. Note que para cada solução dominada existe pelo menos um quadrado sobre a fronteira que possui valores de f_1 e f_2 menores que os seus. Observe que os pontos sobre a fronteira são não dominados, isto é, não é possível definir entre eles qual é o melhor, ou seja, os pontos pertencentes à fronteira de Pareto são incomparáveis entre si.

2.8 Algoritmos genéticos

Os algoritmos genéticos são algoritmos baseados no princípio de Darwin para a evolução das espécies que leva em consideração “o mais apto a sobreviver” na natureza. Foi inicialmente proposto por Holland et al. (1975), mas rapidamente as técnicas da computação evolucionária tomaram corpo e se alastraram, ganhando força nos dias atuais. Segundo

Hanaoka (2014), estes algoritmos são implementados com operadores genéticos que tratam indivíduos como possíveis soluções do problema e, por meio de técnicas de diversificação (mutação e cruzamento), técnicas de seleção que se baseiam no valor da função objetivo para classificar os indivíduos quanto a sua aptidão e, com esta classificação (aptidão), decidem quais indivíduos têm mais chances de compor a próxima geração (iteração). Há uma grande variedade de algoritmos genéticos que se baseiam em mecanismos diferentes para definir como ocorrem os processos de seleção, aptidão, mutação e cruzamento. Conforme elucidado por Li et al. (2020), apesar dos algoritmos genéticos não garantirem soluções globais, eles mantêm uma superioridade posto que podem obter soluções de alta qualidade perto de ótimas usando menos tempo computacional.

No que tange à otimização de portfólio, os algoritmos genéticos são reconhecidamente uma técnica poderosa que vêm desempenhando um papel significativo (TOLLO; ROLI, 2008; GASPERO et al., 2011; MITTAL; SRIVASTAVA, 2021). Parte desse reconhecimento deve-se ao fato de que algoritmos genéticos não requerem nenhuma informação *a priori* sobre a função objetivo e também não requerem uma função objetivo contínua ou diferenciável (KONSTANTINOU; TZANETOS; DOUNIAS, 2020). Devido à sua fácil aplicabilidade, diferentes algoritmos genéticos já foram projetados para atender aos mais variados modelos de otimização de portfólio (DAI; QIN, 2021). Em particular, mostraram-se efetivos e vastamente utilizados para resolver problemas de seleção de portfólio envolvendo custos de transação e restrição de cardinalidade utilizando-se a medida de risco CVaR (DAI; QIN, 2021). Diferentes utilizações dos algoritmos genéticos na otimização de portfólios podem ser conferidas em (CHANG; YANG; CHANG, 2009; BEVILACQUA; PACELLI; SALADINO, 2011; GUENNOUN; HAMZA et al., 2012; LIN, 2012; CHEN; LU; LIN, 2020).

As justificativas acima corroboram o fato que a inclusão da restrição de cardinalidade torna o problema de otimização de portfólio NP-difícil, o que pode levar a um tempo proibitivo quando resolvido por métodos exatos. Como os algoritmos genéticos são aptos para lidar com esse tipo de problema e apresentam soluções de boa qualidade com tempo computacional hábil, eles foram selecionados para realizar as otimizações deste trabalho.

2.8.1 NSGA-II

Como visto anteriormente, ao resolver um problema de otimização multiobjetivo, o interesse é obter soluções factíveis e não dominadas. Neste contexto, Deb et al. (2011) ressaltam que não pode existir o princípio de encontrar uma solução que seja ótima para apenas um objetivo, uma vez que esta solução tem um compromisso com os demais objetivos. Por isso, há duas metas ao lidar com a otimização multiobjetivo:

Meta 1: Encontrar um conjunto de soluções que pertençam à fronteira de Pareto.

Meta 2: Encontrar um conjunto de soluções que são diversas o suficiente para representar

o traço completo da fronteira de Pareto.

O algoritmo NSGA-II, proposto por [Deb et al. \(2002\)](#), é um algoritmo genético que tem apresentado ótimo desempenho no tratamento de problemas de otimização de carteiras de investimento. A principal característica do algoritmo NSGA-II é a estratégia utilizada para fazer a classificação (ordenamento) das soluções, que leva em consideração exatamente as metas 1 e 2 para realizar este ordenamento. Mais precisamente, é gerada uma população inicial (de forma aleatória). Os indivíduos desta população são classificados da seguinte maneira:

- Os indivíduos são divididos em fronteira de dominância:
 - são construídos conjuntos de indivíduos dominados por nenhum indivíduo, por um, por dois e assim por diante.
- A seleção é realizada a partir de um torneio em que são selecionados dois indivíduos:
 - se os indivíduos pertencerem a fronteiras diferentes, o indivíduo que é dominado por menos indivíduos, ou seja, que pertence a uma fronteira de menos dominância, vence o torneio;
 - se os indivíduos selecionados pertecerem à mesma fronteira de dominância, o vencedor é aquele que apresenta a maior distância de aglomeração (meio pelo qual o algoritmo avalia a densidade de soluções), visando proporcionar maior diversidade na fronteira obtida.

Em seguida, aqueles indivíduos selecionados sofrem o processo de cruzamento e mutação (a serem definidos pelo usuário). Os indivíduos oriundos deste processo são chamados filhos e os indivíduos da antiga população são chamados pais. O próximo passo é juntar a população de pais e filhos e fazer novamente a classificação com relação à fronteira de dominância e distância de aglomeração, a fim de que sejam selecionados os indivíduos da próxima geração. O processo se repete até que seja atingido o critério de parada. Os indivíduos que compõem a população da última geração constituirão as soluções da fronteira com melhor resultado ao término do algoritmo. A Figura 6 apresenta o fluxograma detalhado desse algoritmo.

2.8.2 Medidas de Desempenho

Por se tratar de otimização multiobjetivo, não é possível comparar as soluções obtidas com base nos valores de suas funções objetivo diretamente, uma vez que o resultado da otimização é uma fronteira de soluções ótimas. O que pode ser avaliado é a qualidade da fronteira obtida: pretende-se que ela seja próxima da fronteira Pareto ótima e que as soluções estejam bem espalhadas de forma a oferecer uma boa cobertura da fronteira, conforme a expectativa ilustrada na Figura 7.

Para esta avaliação, são usadas medidas de desempenho que conseguem mensurar

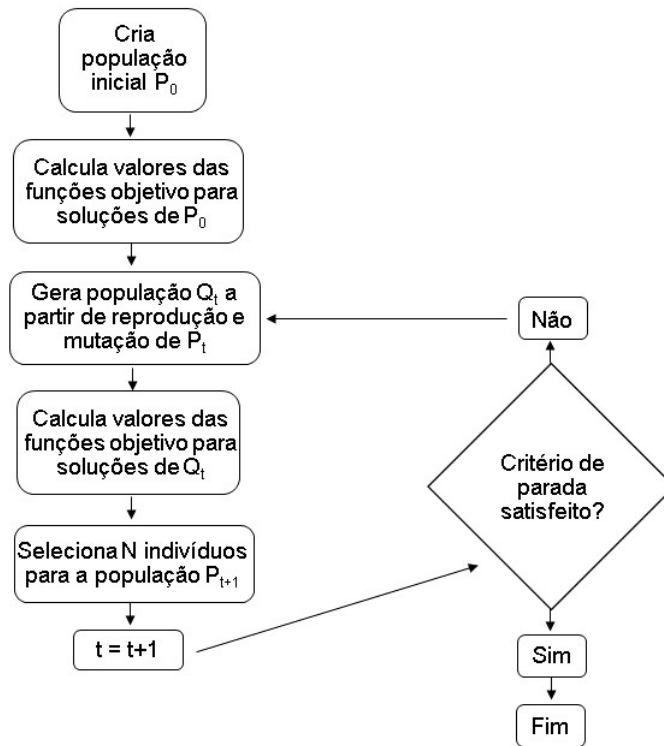


Figura 6 – Passo a passo do algoritmo NSGA-II.

Fonte: Adaptado de (FERREIRA, 2018)

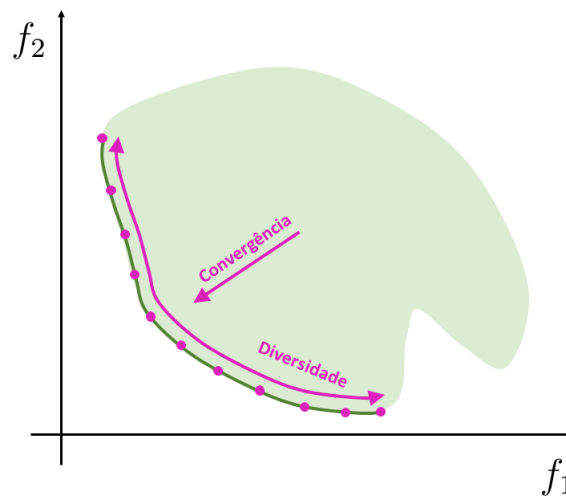


Figura 7 – Expectativa de convergência e diversidade que pretende-se alcançar.

Fonte: Adaptado de (DEB, 2001)

essas características. Neste trabalho serão utilizadas métrica do hipervolume e a métrica delta. A métrica do hipervolume mede tanto a cobertura quanto o espalhamento das soluções na fronteira. O métrica do hipervolume foi definida por Zitzler e Thiele (1999), e leva em conta o tamanho do espaço de objetivos que é coberto pelas soluções não dominadas. A vantagem desta medida é que cada algoritmo ou modelo que seja o foco do estudo pode ser avaliado individualmente, sendo possível comparar os resultados usando a

relação de cobertura.

Para se obter o valor do hipervolume, sejam S o conjunto de soluções não dominadas gerado por um algoritmo multiobjetivo, R um ponto de referência, dominado por todas as soluções de S , e v_i o hipervolume formado pelo espaço dominado pela solução $S_i \in S$, tendo os valores de R como limite. Conforme consta em (ÁLVAREZ; RISCO-MARTÍN; COLMENAR, 2016), o hipervolume é o volume da união dos hipercubos v_i para todas as soluções S_i , como descrito abaixo:

$$\text{Hypervolume}(S, R) = \bigcup_{i=1}^{|S|} v_i$$

A Figura 8 apresenta um exemplo de fronteira Pareto ótima (curva contínua), o conjunto de soluções obtidas por um algoritmo de otimização multiobjetivo (círculos sombreados e não sombreados), o conjunto de soluções não dominadas (círculos sombreados) que formam a fronteira de Pareto e o conjunto de soluções dominadas (círculos não sombreados) para um problema de dois objetivos f_1 e f_2 a serem minimizados. R é um ponto dominado por todas as soluções que define os limites dos hipercubos. Por haver apenas duas funções objetivo, o hipercubo formado por cada solução i é um retângulo, e o valor do hipervolume é a área do espaço formado pela união desses retângulos (área cinza). Quanto mais próximas da fronteira Pareto ótima e mais uniformemente distribuídas estiverem as soluções da fronteira, maior será o hipervolume.

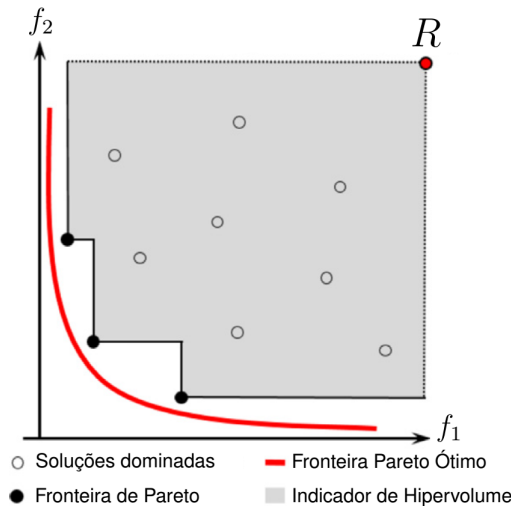


Figura 8 – Ilustração num espaço de dois objetivos do conceito de dominância, fronteira Pareto Ótima e hipervolume.

Fonte: Adaptado de (ÁLVAREZ; RISCO-MARTÍN; COLMENAR, 2016)

A métrica Δ (Delta) foi proposta por (DEB et al., 2002) e mede a diversidade das soluções não dominadas da fronteira obtida por um algoritmo multiobjetivo. A diversidade é medida a partir do espalhamento e da dispersão dessas soluções ao longo da fronteira.

Fronteiras com boa diversidade apresentam soluções extremas mais distantes e distribuição das soluções intermediárias uniforme, de forma que ao se calcular a diferença de cada solução em relação à média (para cada objetivo) obtém-se valores próximos a zero. Assim, quanto mais próximo a zero for o valor da métrica Δ , mais dispersas estão as soluções e mais representativa é a fronteira em análise.

Para determinar o valor dessa métrica para um conjunto de soluções, deve-se ordenar essas soluções considerando alguma função objetivo. Assim, define-se d_i como a distância Euclidiana entre as soluções consecutivas de $\mathbf{S}$, e $\bar{d}$ como a média dos valores de d_i , $\forall i \in \{1, \dots, |\mathbf{S}| - 1\}$. Desta forma, a métrica é definida por (DEB et al., 2002)

$$\Delta(S) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|-1} \frac{d_i - \bar{d}}{|\mathbf{S}| - 1}.$$

2.9 MPC Multiobjetivo

O MPC como uma estratégia de controle dinâmica, que altera a ação de controle aplicada ao sistema em cada instante, precisa de uma atenção especial na transição para a versão multiobjetivo. Núñez et al. (2014) destaca que os métodos para o MPC multiobjetivo podem ser classificados em dois grupos:

- Os métodos mais comuns são aqueles baseados (*a priori*) numa escalarização. Estes métodos são excessivamente rígidos, no sentido de que mudanças nas preferências do controlador não podem ser facilmente consideradas. Dentre esses métodos, algumas formulações são baseadas em priorizações e algumas em atingir metas. O mais frequentemente usado na literatura do MPC é a estratégia da soma ponderada.
- A segunda família de soluções é baseada na geração e seleção de pontos Pareto ótimos, que permitem ao controlador obter soluções que nunca são exploradas sobre um esquema de controle preditivo mono-objetivo, em que somente uma solução é obtida. A informação adicional (do conjunto Pareto ótimo) é um suporte para o controlador buscar decisões mais adequadas ao perfil do investidor, visando a elaboração da carteira.

Embora a estratégia da soma ponderada (escalarização) seja o método mais usado na literatura de MPC, há fortes críticas a ela. Por exemplo, Flores-Tlacuahuac, Morales e Rivera-Toledo (2012) argumentam que a soma ponderada não é a melhor maneira de se resolver problemas multiobjetivo devido à atribuição de valores numéricos aos pesos seguir critérios não padronizados. Para Núñez et al. (2014), a característica multiobjetivo dá mais flexibilidade ao controlador quando tomadas de decisão para o problema a ser resolvido se tornam mais difíceis. Por sua vez, Peitz e Dellnitz (2018), afirmam que os algoritmos evolucionários são as escolhas mais utilizadas hoje em dia para resolver problemas multiobjetivo.

A estratégia do MPC multiobjetivo (MPC-MO) utilizada neste trabalho foi inspirada em (NÚÑEZ et al., 2014) e considera o contexto de minimização. A solução do problema MPC-MO é o conjunto de sequência de sinais de ações de controle não dominada, o conjunto Pareto ótimo. Um exemplo de sequência pertencente a este conjunto é dado por $U^*(k) = (u(k), \dots, u(k+m-1))$, em que m é o comprimento do horizonte de predição, e $u(k+j)$, $j = 0, \dots, m-1$ é a ação de controle do horizonte de predição $j = 0, \dots, m-1$. Matematicamente, se $J(U(k)) = [J_1(U(k)), \dots, J_p(U(k))]^T$ é uma função vetorial com p objetivos a serem otimizados, uma sequência $U^q(k) = (u^q(k), \dots, u^q(k+m-1))$ é dita ser Pareto ótimo se, e somente se, não existe outra sequência de sinais de ações de controle $U(k)$ tal que:

- (i) $J_i(U(k)) \leq J_i(U^q(k))$, $i = 1, \dots, p$;
- (ii) $J_i(U(k)) < J_i(U^q(k))$, para pelo menos um $i \in \{1, \dots, p\}$.

A fronteira de Pareto é construída como a imagem das soluções não dominadas deste problema. As soluções de Pareto são dadas por $\mathcal{P} = \{U^1(k), \dots, U^v(k)\}$. Das soluções de Pareto, somente um ponto é selecionado como sinal da ação de controle, digamos $U^i(k) = (u^i(k), \dots, u^i(k+m-1))$, e deste ponto, somente a primeira ação de controle, $u^i(k)$, é aplicada ao sistema. O processo se repete sucessivamente até que o critério de parada seja atingido.

3 Arcabouço matemático e computacional proposto

Neste capítulo são firmadas as contribuições teóricas acerca da formulação da variância multiperíodo para o modelo de negociação de ativos de risco definido em montante de dinheiro. Esta formulação havia sido proposta por [Primbs e Yamada \(2018\)](#) para o contexto de derivativos. Uma reformulação foi realizada para caracterizar a variância multiperíodo no contexto de ativos financeiros e é uma das contribuições deste trabalho. É dada uma síntese de como ocorre a “junção” do conhecimento teórico apresentado no Capítulo 2 com as abordagens propostas para a estratégia do MPC aplicado ao problema de otimização de portfólios. São dadas as formulações dos problemas de otimização e as restrições. Os problemas são propostos em duas categorias:

- Na Seção 3.4 são propostos problemas de otimização mono-objetivo da riqueza esperada e das medidas de risco.
- Na Seção 3.5 são propostos problemas de otimização multiobjetivo que visam maximizar a riqueza e minimizar o risco esperado.

Neste capítulo também encontram-se as contribuições práticas dadas pelas propostas dos algoritmos genéticos mono e multiobjetivo e do MPC multiobjetivo para o problema de seleção de portfólios de investimentos. Foram propostos operadores genéticos para lidarem especificamente com a questão do horizonte de predição, respeitando-se as carteiras de investimentos que são dadas para cada instante do horizonte de predição. Estes operadores haviam sido propostos no contexto de otimização de um único período ([DEB et al., 2011](#)), por isso, a proposta para lidar com otimização multiperíodo é uma contribuição deste trabalho. Pelo melhor do nosso conhecimento, o MPC multiobjetivo para lidar com o problema de seleção de portfólio ainda não havia sido proposto, por isso, constitui uma contribuição deste trabalho.

3.1 Formulação matemática da variância multiperíodo

A seguir é dado o detalhamento para a formulação da média e da variância dos retornos e da carteira no horizonte de predição. Esta formulação da média e da variância dos retornos foi inspirada em ([PRIMBS; YAMADA, 2018](#)). Ressalta-se que [Primbs e Yamada \(2018\)](#) consideraram um problema de *pairs trading* para negociação de derivativos. As demonstrações desta seção referem-se à negociação individual de ativos e constitui uma contribuição deste trabalho.

3.1.1 Definição da equação dinâmica da riqueza

Seja um portfólio com n ativos de risco e um ativo livre de risco. Para a formulação matemática da equação dinâmica da riqueza que rege este portfólio considere:

- a quantidade de dinheiro investido no i -ésimo ativo de risco no instante k : $u_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- o montante de dinheiro investido no ativo livre de risco que rende juros compostos a uma taxa r_0 : $u_{n+1}(k)$;
- o retorno do ativo i no instante k : $\eta_i(k)$, $i = 1, \dots, n$.

O modelo de riqueza é dado por

$$w(k) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i(k).$$

A riqueza no instante de tempo $k + 1$ é

$$\begin{aligned} w(k+1) &= \sum_{i=1}^{n+1} [1 + R_i(k+1)] u_i(k), \quad R(k+1) = [\eta_1(k+1), \dots, \eta_n(k+1), r_0]_{(n+1) \times 1}^T \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} u_i(k) + \sum_{i=1}^{n+1} R_i(k+1) u_i(k) \\ &= w(k) + \sum_{i=1}^{n+1} R_i(k+1) u_i(k) \end{aligned}$$

Sendo assim, a riqueza no instante de tempo $k + 1$ pode ser dada em termos da riqueza no instante de tempo k e dos retornos previstos para o instante de tempo $k + 1$.

$$w(k+1) = w(k) + R^T(k+1)u(k), \quad u(k) = [u_1(k), \dots, u_n(k), u_{n+1}(k)]_{(n+1) \times 1}^T. \quad (8)$$

Modelo Autorregressivo Vetorial dos Retornos

Assume-se que o processo dos retornos dos ativos de risco segue o modelo multivariado VAR(1) (modelo autorregressivo vetorial de ordem 1)¹

$$\eta(k+1) = \nu + A_1 \eta(k) + e(k+1), \quad (9)$$

em que, A_1 é a matriz de coeficientes ($n \times n$), $\nu = (I_n - A_1)\mu$ é um vetor $n \times 1$ de termos interceptos, $\mu = E[\eta(k)]$, e $e(k+1)$ é um ruído branco n -dimensional, isto é, $E[e(k+1)] = 0$, $E[e(k+1)e^T(k+1)] = \sigma^2$ e $E[e(k+i)e^T(k+j)] = 0$ para $i \neq j$. A matriz de covariância σ^2 é assumida ser não singular.

Conforme sugerido por [Dombrovskii e Obedko \(2017\)](#), estima-se μ a partir da média dos N últimos dias da série histórica.

¹ Chama-se atenção para a nomenclatura Value at Risk (VaR) e Modelo autorregressivo vetorial (VAR).

Média e Variância dos Retornos

Os resultados a seguir constituem uma reformulação dos resultados apresentados em [Primbs e Yamada \(2018\)](#). Esta nova versão é adaptada para as variáveis e o problema abordado, constituindo uma das contribuições teóricas deste trabalho.

Lema 3.1.1. *Considere o modelo autorregressivo vetorial de ordem 1 dado pela Equação (9). Definem-se a média condicional e a matriz de covariância como*

$$\bar{\eta}(k+m) = E[\eta(k+m)] \quad e \quad \Sigma_{k,(i,j)}^{\eta} = E[(\eta(k+i) - \bar{\eta}(k+i))(\eta(k+j) - \bar{\eta}(k+j))^T].$$

A média condicional e a matriz de covariância satisfazem

$$\bar{\eta}(k+m) = A_1^m \eta(k) + \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j \nu$$

e

$$\Sigma_{k,(i,j)}^{\eta} = \sum_{l=0}^{i-1} A_1^{2i-2(l+1)} \Sigma^e,$$

em que, $\Sigma^e = E[e(k+l+1)e^T(k+l+1)]$ é a matriz de covariância de $e(k+l)$ para qualquer $l > 0$.

Demonstração:

- **Média:** Para demonstrar o valor esperado do retorno no instante de tempo $k+i$, aplicamos o operador esperança à Equação (9) e obtemos:

$$\bar{\eta}(k+1) = \nu + A_1 \bar{\eta}(k), \quad \bar{\eta}(k) = \eta(k). \quad (10)$$

A média é obtida por iteração recursiva da Equação (10):

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(k+2) &= \nu + A_1 \bar{\eta}(k+1) = \nu + A_1(\nu + A_1 \eta(k)) = \nu + A_1 \nu + A_1^2 \eta(k) \\ \bar{\eta}(k+3) &= \nu + A_1 \bar{\eta}(k+2) = \nu + A_1(\nu + A_1 \nu + A_1^2 \eta(k)) = \nu + A_1 \nu + A_1^2 \nu + A_1^3 \eta(k) \\ &\vdots \\ \bar{\eta}(k+m) &= A_1^m \eta(k) + \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j \nu \end{aligned}$$

Portanto, a média dos retornos é dada por

$$\bar{\eta}(k+m) = A_1^m \eta(k) + \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j \nu \quad (11)$$

Antes de iniciarmos a próxima etapa, note que, se iterarmos diretamente a Equação (9), obtemos:

$$\eta(k+m) = A_1^m \eta(k) + \sum_{j=0}^{m-1} [A_1^j \nu + A_1^{m-j-1} e(k+j+1)]. \quad (12)$$

• **Covariância:** Seja

$$\tilde{\eta}(k+m) = \eta(k+m) - \bar{\eta}(k+m).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(k+m) &= \eta(k+m) - \bar{\eta}(k+m) \\ &\stackrel{(11)e(12)}{=} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j \nu + \sum_{j=0}^{m-1} A_1^{m-j-1} e(k+j+1) + A_1^m \eta(k) - \left[A_1^m \eta(k) + \sum_{j=0}^{m-1} \nu A_1^j \right] \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} A_1^{m-j-1} e(k+j+1). \end{aligned}$$

Pela definição de covariância, temos:

$$\begin{aligned} \Sigma_{k,(i,j)}^\eta &= E[\tilde{\eta}(k+i)\tilde{\eta}^T(k+j)] \\ &= E\left[\sum_{l_1=0}^{i-1} A_1^{i-l_1-1} e(k+l_1+1) \left(\sum_{l_2=0}^{j-1} A_1^{j-l_2-1} e(k+l_2+1)\right)^T\right] \\ &= \sum_{l_1=0}^{i-1} \sum_{l_2=0}^{j-1} A_1^{i-l_1-1} E[e(k+l_1+1)e^T(k+l_2+1)(A_1^{j-l_2-1})^T]. \end{aligned}$$

Como $e(k+l_1+1)$ e $e(k+l_2+1)$ são não correlacionados para $l_1 \neq l_2$, a covariância se reduz a

$$\Sigma_{k,(i,j)}^\eta = E[\tilde{\eta}(k+i)\tilde{\eta}^T(k+j)] = \sum_{l=0}^{i-1} A_1^{i-l-1} E[e(k+l+1)e^T(k+l+1)] (A_1^{j-l-1})^T.$$

■

Lema 3.1.2. A matriz de covariância condicional, quando consideram-se os ativos de risco

e o ativo livre de risco, é dada por $\bar{\Sigma}_{k,(i,j)}^\eta = \begin{bmatrix} \Sigma_{k,(i,j)}^\eta & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração:

- $R(k+j) = [\eta_1(k+j), \dots, \eta_n(k+j), r_0]_{(n+1) \times 1}^T$
- $\bar{R}(k+j) = [\bar{\eta}_1(k+j), \dots, \bar{\eta}_n(k+j), r_0]_{(n+1) \times 1}^T$

$$\begin{aligned} \tilde{R}(k+j) &= R(k+j) - \bar{R}(k+j) \\ &= [\eta_1(k+j) - \bar{\eta}_1(k+j), \dots, \eta_n(k+j) - \bar{\eta}_n(k+j), r_0 - r_0] \\ &= [\tilde{\eta}_1(k+j), \dots, \tilde{\eta}_n(k+j), 0] \\ &= [\tilde{\eta}(k+j), 0], \tilde{\eta}(k+j) = [\tilde{\eta}_1(k+j), \dots, \tilde{\eta}_n(k+j)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_{k,(i,j)}^\eta &= E[\tilde{R}(k+i)\tilde{R}^T(k+j)] = E\{[\tilde{\eta}(k+i),0][\tilde{\eta}(k+j),0]^T\} \\ &= \begin{bmatrix} E[\tilde{\eta}(k+i)\tilde{\eta}^T(k+j)] & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{k,(i,j)}^\eta & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

sendo $\Sigma_{k,(i,j)}^\eta$ definida no Lema 3.1.1. ■

Média e Variância da Riqueza Esperada

A seguir são dadas as fórmulas explícitas para a média e a variância da riqueza predita no instante de tempo $k+m$, que aparecem na função objetivo do problema de otimização de média-variância condicional tratado no MPC. Os resultados a seguir também são uma adaptação do trabalho de Primbs e Yamada (2018) conforme as variáveis e definições do problema abordado neste trabalho.

Proposição 3.1.1. *As fórmulas para a média e a variância condicional da riqueza no instante de tempo $k+m$ são dadas por*

$$E[w(k+m)] = w(k) + \sum_{j=0}^{m-1} (E[R^T(k+j+1)]U(k+j)) \quad (13)$$

e

$$Var[w(k+m)] = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} (U^T(k+i)\bar{\Sigma}_{k,(i,j)}^\eta U(k+j)), \quad (14)$$

em que $\bar{\Sigma}_{k,(i,j)}^\eta$ é definida no Lema 3.1.2

Demonstração:

- **Média:** Aplicando o operador esperança à Equação (8), temos

$$E[w(k+1)] = E[w(k)] + E[R^T(k+1)]u(k).$$

Como $E[w(k)] = w(k)$, pois trata-se do instante de tempo presente, segue-se que

$$E[w(k+1)] = w(k) + E[R^T(k+1)]u(k). \quad (15)$$

A riqueza esperada no instante de tempo $k+m$ é obtida da iteração recursiva da Equação (15):

$$E[w(k+m)] = w(k) + \sum_{j=0}^{m-1} (E[R^T(k+j+1)]U(k+j)),$$

em que, $U(k+j) = [u(k), \dots, u(k+j)]$, $j = 0, \dots, m-1$, sendo $u(k+j)$, $j = 0, \dots, m-1$ a ação de controle do horizonte de predição $j = 0, \dots, m-1$.

- **Variância:** Para determinar a equação da variância condicional, definimos

$$\tilde{w}(i) = w(i) - E[w(i)], \quad \tilde{\eta}(i) = \eta(i) - E[\eta(i)],$$

em que i é um instante de tempo.

Com esta notação, obtemos da Equação (8) que

$$\tilde{w}(k+1) = \tilde{w}(k) + \tilde{R}^T(k+1)U(k). \quad (16)$$

Iterando diretamente a Equação (16), temos

$$\begin{aligned} \tilde{w}(k+2) &= \tilde{w}(k+1) + \tilde{R}^T(k+2)U(k+1) \\ &= \tilde{w}(k) + \tilde{R}^T(k+1)U(k) + \tilde{R}^T(k+2)U(k+1) \\ \tilde{w}(k+3) &= \tilde{w}(k+2) + \tilde{R}^T(k+3)U(k+2) \\ &\vdots \\ \tilde{w}(k+m) &= \tilde{w}(k) + \sum_{j=0}^{m-1} (\tilde{R}^T(k+j+1)U(k+j)) \end{aligned}$$

Note que

$$\tilde{w}(k) = w(k) - E[w(k)] = w(k) - w(k) = 0,$$

pois o valor esperado de $w(k)$ é o próprio $w(k)$, devido ao instante k ser o instante atual.

Portanto,

$$\tilde{w}(k+m) = \sum_{j=0}^{m-1} (\tilde{R}^T(k+j+1)U(k+j)). \quad (17)$$

A Equação (17) nos permite calcular a variância de $w(k+m)$:

$$\begin{aligned} Var[w(k+m)] &= E[\tilde{w}^T(k+m)\tilde{w}(k+m)] \\ &= E\left[\left(\sum_{j=0}^{m-1} (\tilde{R}^T(k+j+1)U(k+j))\right)^T \left(\sum_{j=0}^{m-1} (\tilde{R}^T(k+j+1)U(k+j))\right)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} U^T(k+j)E[\tilde{R}(k+j+1)] \sum_{j=0}^{m-1} E[\tilde{R}^T(k+j+1)]U(k+j) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} U^T(k+i)E[\tilde{R}(k+i+1)\tilde{R}^T(k+j+1)]U(k+j) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} U^T(k+i)\bar{\Sigma}_{k,(i,j)}^{\eta}U(k+j) \end{aligned}$$

em que $\bar{\Sigma}_{k,(i,j)}^{\eta}$ é definida no Lema 3.1.2. Note que a variância da carteira depende da multiplicação de $U(k+i)$ e $U(k+j)$. Portanto, essa multiplicação codifica um entrelaçamento entre as variáveis de decisão em instantes de tempo distintos, o que configura um problema verdadeiramente multiperíodo.

■

3.2 O mecanismo do MPC na otimização de portfólios de investimentos

Pode-se dizer que o presente trabalho de pesquisa se insere na área de Finanças Quantitativas utilizando-se as ferramentas de otimização e o MPC.

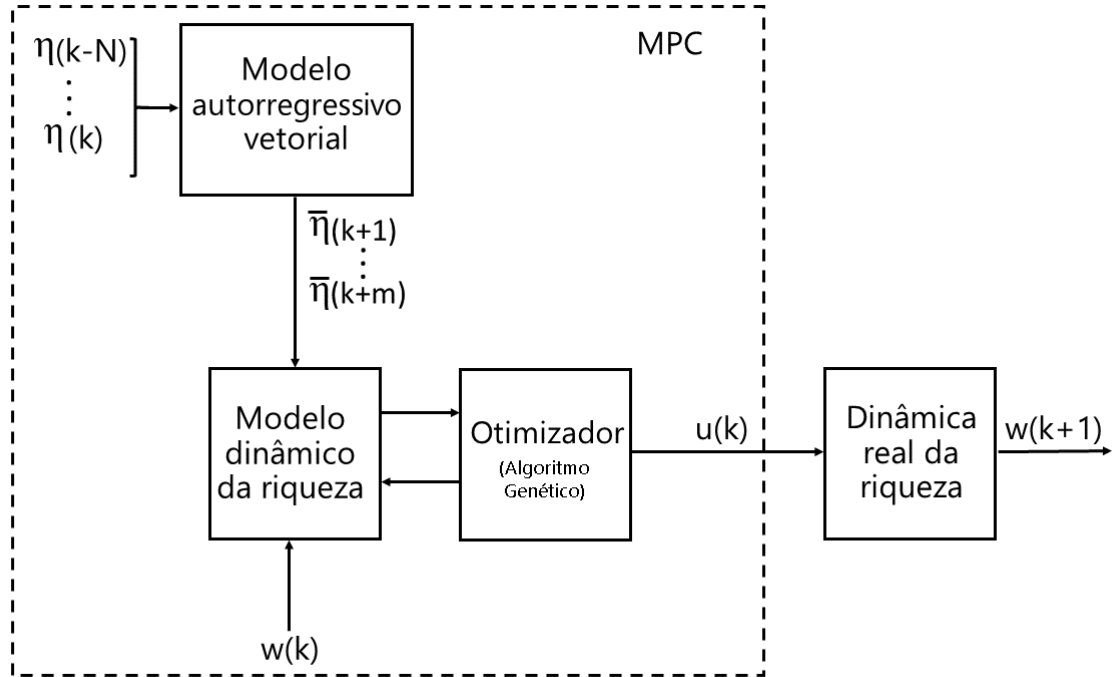


Figura 9 – Diagrama de blocos do MPC.

De forma sintetizada, a Figura 9 descreve a integração de todos os componentes envolvidos neste modelo por meio de um diagrama de blocos da metodologia do MPC num instante de tempo k . Inicialmente é efetuado um aporte inicial no portfólio que configura a riqueza atual no primeiro instante de tempo e, em seguida ocorre um processo iterativo definido por cada bloco:

Bloco “Modelo autorregressivo vetorial”: é responsável pela previsão do retorno dos ativos de risco ao longo do horizonte de predição, dado o instante atual k . A média dos retornos presente no modelo autorregressivo é calculada utilizando a base de dados dos retornos dos ativos no intervalo de tempo $[k - N, k]$: $\eta(k - N), \dots, \eta(k)$. Esta média é atualizada pela janela deslizante dos retornos em cada instante de tempo k . Em cada instante de tempo o modelo autorregressivo vetorial é submetido a um treinamento para que sejam estimados os seus parâmetros. Com os parâmetros definidos, utiliza-se a Equação (11) para obter os valores estimados no intervalo de tempo $[k + 1, k + m]$: $\bar{\eta}(k + 1), \dots, \bar{\eta}(k + m)$.

Bloco “MPC”: utilizando como entrada os valores estimados para os retornos dos ativos de risco, $\bar{\eta}(k+1), \dots, \bar{\eta}(k+m)$, o retorno do ativo livre de risco e a riqueza atual $w(k)$, o bloco MPC entra num processo iterativo e recorrente em que as funções objetivo e as restrições, tendo como base as variáveis do modelo dinâmico da riqueza (Equação 8), são otimizadas. É neste momento que são utilizados os algoritmos genéticos propostos na Seção 3.6. Ao fim desse processo, é obtida a sequência de ações de controle ótima $U(k|k) = [u(k|k), u(k+1|k), \dots, u(k+m-1|k)]$, da qual somente a primeira ação de controle, $u(k)$, é aplicada ao sistema.

Bloco “Medição da Riqueza”: Após aplicar a ação de controle $u(k)$, pelo mecanismo da janela deslizante, o retorno dos ativos no instante de tempo k é revelado. Utilizando a equação dinâmica do modelo e este valor de retorno, mede-se o valor real da riqueza $w(k+1)$. Esse valor $w(k+1)$ realimenta o sistema, pois será utilizado como estado atual da riqueza no instante de tempo $k+1$. Convém frisar que é justamente essa realimentação decorrente do uso da janela deslizante que faz com que se tenha um sistema de controle em malha fechada. Desta forma, é concluído o processo do MPC para o instante de tempo k .

Para iniciar o processo do próximo instante de tempo, há uma atualização da base de dados com o valor mais recente dos retornos dos ativos, a janela da base de dados é deslizada de forma a excluir os retornos do instante de tempo mais antigo e a incluir os retornos do instante de tempo mais recente. A riqueza atual é atualizada com o valor da riqueza obtida no instante anterior. Com as variáveis de entrada atualizadas, inicia-se uma nova iteração do diagrama.

3.3 Formulação Matemática das Restrições

As restrições referem-se ao limite de dinheiro que pode ser investido em cada ativo, ao autofinanciamento do portfólio e à cardinalidade.

É importante ter o domínio sobre as quantidades máximas e mínimas investidas em cada ativo, caso seja necessário fazer alguma intervenção em limitar ou incentivar a participação de algum ativo. Este controle é feito estabelecendo-se os limites inferiores e superiores que podem ser investidos em cada ativo como uma proporção da riqueza. Os limites inferiores e superiores são definidos pelos parâmetros α_i e γ_i , respectivamente, da seguinte forma:

$$w_i^{\min}(k) = \alpha_i w(k) \quad e \quad w_i^{\max}(k) = \gamma_i w(k).$$

A restrição de autofinanciamento do portfólio funciona da seguinte maneira: é feito um aporte de capital apenas no instante inicial. Nos outros instantes, não há entrada nem saída de capital, sendo que todo o lucro obtido é reinvestido no portfólio.

Para representar essa restrição, é feita uma reformulação das restrições utilizadas por [Dombrovskii e Obedko \(2017\)](#):

$$u_{min}(k) = \begin{bmatrix} u_1^{min}(k) \\ u_2^{min}(k) \\ \vdots \\ u_{n+1}^{min}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}_{(n+2) \times 1}, \quad u_{max}(k) = \begin{bmatrix} u_1^{max}(k) \\ u_2^{max}(k) \\ \vdots \\ u_{n+1}^{max}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}_{(n+2) \times 1}$$

$$S = \begin{bmatrix} I_{n+1} \\ E \end{bmatrix}_{(n+2) \times (n+1)}, \quad E = [1 \cdots 1]_{1 \times (n+1)}.$$

Cada ação de controle deve ser restringida por

$$u_{min}(k) \leq Su(k) \leq u_{max}(k).$$

Como se trata de m ações de controle, a restrição acima precisa ser reformulada da seguinte maneira:

$$U_{min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq U_{max},$$

em que

- $U(k) = [u^T(k|k), \dots, u^T(k+m-1|k)]_{m(n+1) \times 1}^T$,
- $U_{min}(k) = [u_{min}^T(k|k), u_{min}^T(k+1|k), \dots, u_{min}^T(k+m-1|k)]_{m(n+2) \times 1}^T$,
- $U_{max}(k) = [u_{max}^T(k|k), u_{max}^T(k+1|k), \dots, u_{max}^T(k+m-1|k)]_{m(n+2) \times 1}^T$,
- $\bar{S} = \text{diag}\{S, \dots, S\}_{m(n+2) \times m(n+1)}$.

3.4 Estratégia MPC aplicada a finanças - caso mono-objetivo

3.4.1 Problema de otimização da riqueza

A riqueza esperada para o próximo instante, descontando-se os custos de transação obtidos por meio de uma proporção c dos valores transacionados, é dada por:

$$E[w(k+1)] = w(k) + E[R^T(k+1)]U(k) - c\mathbf{1}|U(k) - (I_{n+1} + \text{diag}(E[R(k)]))U(k-1)|, \quad (18)$$

em que $\mathbf{1} = [1 \cdots 1]_{1 \times (n+1)}$, I_{n+1} é a matriz identidade de ordem $n+1$, e a função módulo está sendo aplicada elemento a elemento.

Iterando-se a Equação (18) m -vezes obtém-se:

$$\begin{aligned}
E[w(k+m)] &= w(k) + \sum_{j=0}^{m-1} E[R^T(k+j+1)]U(k+j) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{m-1} c \mathbf{1} |U(k+j) - (I_{n+1} + \text{diag}(E[R(k+j)]))U(k+j-1)|.
\end{aligned} \tag{19}$$

A Equação (19) representa a riqueza esperada no instante de tempo $k+m$, descontados os custos de transação, e é utilizada como a função riqueza esperada dos modelos de otimização contemplados nesta tese.

A Equação (19) representa um valor determinístico e é usada em associação com a medida de risco variância. Por outro lado, como foi discutido na Seção 2.4.2, o CVaR multiperíodo é uma medida de risco estocástica. Por isso, os valores do CVaR são obtidos por intermédio de cenários que representam trajetórias futuras dos ativos de risco. A função de perda assumida para o CVaR é definida conforme proposto por Herzog (2005), como o negativo da riqueza esperada no último instante do horizonte de predição: $-E[w(k+m)]$. Devido à configuração de cenários, é necessária uma reformulação para o cálculo da riqueza esperada.

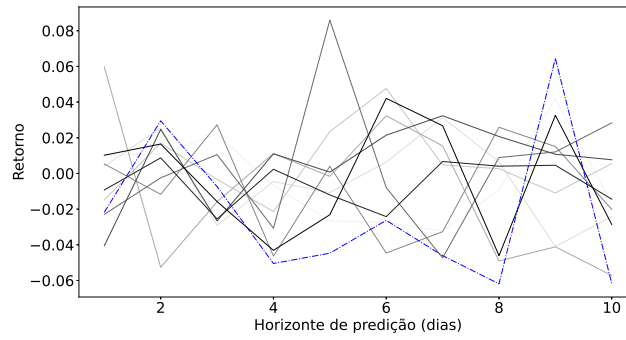
Em primeiro lugar, é importante constatar que cada cenário é obtido por meio de uma realização do retorno dado pela Equação (12), a saber,

$$\eta(k+m) = A_1^m \eta(k) + \sum_{j=0}^{m-1} [A_1^j \nu + A_1^{m-j-1} e(k+j+1)].$$

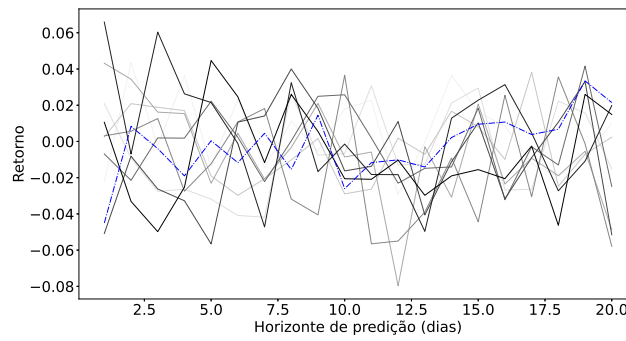
Os valores $e(k+j+1)$ introduzem a componente estocástica para a previsão dos retornos. Por isso, em cada realização, obtém-se um novo valor para o retorno previsto, que representa um novo cenário. Na Figura 10 é possível observar a variabilidade em amostras contendo dez cenários para cada ativo. O traço em azul é o valor real do retorno de cada ativo para o dia correspondente. A Figura 10(a) apresenta cenários para o horizonte de predição de dez dias do ativo BBDC4. A Figura 10(b) apresenta cenários para o horizonte de predição de vinte dias do ativo ITUB4. A Figura 10(c) apresenta cenários para o horizonte de predição de trinta dias do ativo PETR4.

Com esta nova formulação para os retornos, a riqueza nos instantes futuros torna-se também estocástica. Incluindo os custos de transação incorridos para cada valor de riqueza, segue-se que:

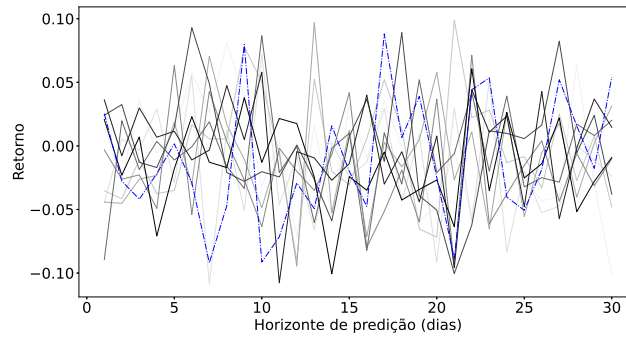
$$\begin{aligned}
w^{\text{cenário}}(k+m) &= w(k) + \sum_{j=0}^{m-1} (R^{\text{cenário}}(k+j+1))^T U(k+j) \\
&\quad - c \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{1} |U(k+j) - (I_{n+1} + \text{diag}(R^{\text{cenário}}(k+j)))U(k+j-1)|,
\end{aligned}$$



(a) BBDC4



(b) ITUB4



(c) PETR4

Figura 10 – Cenários com diferentes tamanhos do horizonte de predição.

em que $w^{\text{cenário}}(k + m)$ é a riqueza esperada no instante $k + m$ dada por um cenário obtido pela Equação (12). Assim, se são considerados T cenários, a média esperada para a riqueza no instante $k + m$ é dada por

$$E[w(k + m)] = \frac{1}{T} \sum_{\text{cenário}=1}^T w^{\text{cenário}}(k + m). \quad (20)$$

Apesar de haver duas definições de riqueza esperada, o problema de otimização é único, pois, na média, essas funções devem representar os mesmos ótimos. O problema de otimização da riqueza esperada mono-objetivo é dado por:

$$\max_U E[w(k+m)]$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} w(k+1) = w(k) + R^T(k+1)U(k) - c\mathbf{1} |U(k) - (I_{n+1} + \text{diag}(R(k)))U(k-1)| \\ w(0) = w_0 \in \mathbb{R}^+ \\ U_{\min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq U_{\max}(k) \\ K_{\inf} \leq \sum_{j=1}^{n+1} z_j \leq K_{\sup} \end{cases}$$

com $\begin{cases} z_j = 1, & \text{se } u_j(k) > 0, j = 1, \dots, n+1 \\ z_j = 0, & \text{se } u_j(k) = 0, j = 1, \dots, n+1 \end{cases}$ e $E[e(k+1)] = 0, E[e(k+1)e^T(k+1)] = \sigma^2, E[e(k+i)e^T(k+j)] = 0, i \neq j$ para o caso em que a riqueza esperada é definida utilizando-se cenários.

É importante ressaltar que, embora os casos que envolvem cenários sejam problemas estocásticos, a resolução desses problemas não ocorre de forma estocástica.

3.4.2 Problema de otimização da variância

A variância da riqueza esperada foi definida na Equação (14), repetida abaixo:

$$\text{Var}[w(k+m)] = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} (U^T(k+i) \bar{\Sigma}_{k,(i,j)}^\eta U(k+j)),$$

O problema de otimização mono-objetivo da variância da riqueza esperada é dado por:

$$\min_U \text{Var}[w(k+m)]$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} w(k+1) = w(k) + R^T(k+1)U(k) - c\mathbf{1} |U(k) - (I_{n+1} + \text{diag}(R(k)))U(k-1)| \\ w(0) = w_0 \in \mathbb{R}^+ \\ U_{\min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq U_{\max}(k) \\ K_{\inf} \leq \sum_{j=1}^{n+1} z_j \leq K_{\sup}, \end{cases}$$

3.4.3 Problema de otimização do CVaR

Para a definição da medida de risco CVaR, consideram-se os mesmos cenários obtidos para a média esperada da riqueza com probabilidade constante $\pi_t = \frac{1}{T}$ para a incidência de cada cenário. A função perda é definida como $-E[w(k+t)]$. Sendo assim, a função $\tilde{F}_\beta(U, \xi)$ que define o CVaR numérico, dado pela Equação (5), é expressa como

$$\tilde{F}_\beta(U, \xi, k, m) = \xi + \frac{1}{(1 - \beta)T} \sum_{\text{cenário}=1}^T [-w^{\text{cenário}}(k + m) - \xi]^+. \quad (21)$$

O problema de otimização mono-objetivo do CVaR esperado é dado por:

$$\min_U \tilde{F}_\beta(U, \xi, k, m)$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} w(k+1) = w(k) + R^T(k+1)U(k) - c\mathbf{1} |U(k) - (I_{n+1} + \text{diag}(R(k)))U(k-1)| \\ w(0) = w_0 \in \mathbb{R}^+ \\ U_{\min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq U_{\max}(k) \\ K_{\inf} \leq \sum_{j=1}^{n+1} z_j \leq K_{\sup} \\ E[e(k+1)] = 0, E[e(k+1)e^T(k+1)] = \sigma^2, E[e(k+i)e^T(k+j)] = 0, i \neq j \end{cases}$$

A Figura 11 é utilizada para exemplificar a relação do VaR e do CVaR com a função de perda dada pelo negativo da riqueza. Nesta figura está o histograma da função perda em termos da frequência relativa. Este histograma foi construído com 300 cenários num contexto em que a riqueza esperada para a carteira analisada é de R\$110.471,82. O valor do VaR é -R\$99.149,98 e do CVaR -R\$96.544,68. Desta forma, os 5% piores cenários são definidos por riquezas inferiores a R\$99.149,98 e a perda financeira média (obtida por meio do CVaR) em relação à riqueza esperada é de R\$13.927,14.

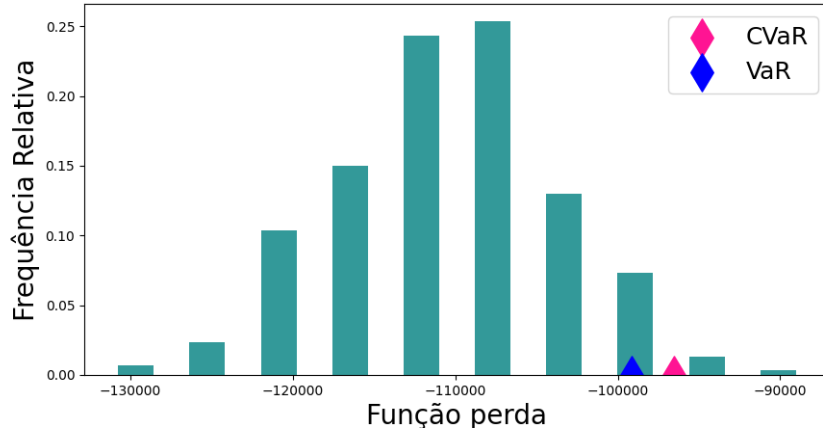


Figura 11 – Histograma da função de perda com a localização dos valores do VaR e do CVaR.

3.5 Estratégia MPC aplicada a finanças - caso multiobjetivo

3.5.1 Problema de otimização da Riqueza-Variância

O problema de otimização da Riqueza-Variância é um problema de otimização multiobjetivo em que pretende-se maximizar a riqueza esperada e minimizar a variância esperada.

O problema de otimização multiobjetivo, em que $E[w(k+m)]$ é dada pela Equação (19) e $\text{Var}[w(k+m)]$ pela Equação (14), é definido como:

$$\begin{aligned} & \max_U E[w(k+m)] \quad \text{e} \quad \min_U \text{Var}[w(k+m)] \\ \text{s.a.:} & \begin{cases} w(k+1) = w(k) + R^T(k+1)U(k) - c\mathbf{1}|U(k) - (\mathbf{I}_{n+1} + \text{diag}(R(k)))U(k-1)| \\ w(0) = w_0 \in \mathbb{R}^+ \\ U_{\min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq U_{\max}(k) \\ K_{\inf} \leq \sum_{j=1}^{n+1} z_j \leq K_{\sup} \end{cases} \end{aligned}$$

3.5.2 Problema de otimização da Riqueza-CVaR

O problema de otimização multiobjetivo de Riqueza-CVaR, em que $E[w(k+m)]$ é dada por (20) e $\tilde{F}_\beta(U, \xi, k, m)$ por (21), é definido como:

$$\begin{aligned} & \max_U E[w(k+m)] \quad \text{e} \quad \min_U \tilde{F}_\beta(U, \xi, k, m) \\ \text{s.a.:} & \begin{cases} w(k+1) = w(k) + R^T(k+1)U(k) - c\mathbf{1}|U(k) - (\mathbf{I}_{n+1} + \text{diag}(R(k)))U(k-1)| \\ w(0) = w_0 \in \mathbb{R}^+ \\ U_{\min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq U_{\max}(k) \\ K_{\inf} \leq \sum_{j=1}^{n+1} z_j \leq K_{\sup} \\ E[e(k+1)] = 0, \quad E[e(k+1)e^T(k+1)] = \sigma^2, \quad E[e(k+i)e^T(k+j)] = 0, \quad i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

3.6 Algoritmos genéticos utilizados

Como foi visto na Seção 2.8, os algoritmos genéticos constituem uma ferramenta eficiente e consolidada pela literatura para tratar o problema de otimização de portfólio. Neste trabalho são propostos algoritmos genéticos mono-objetivo e multiobjetivo. Ressalta-se que várias adaptações foram necessárias para utilizar os algoritmos genéticos dentre da perspectiva do horizonte de predição e para lidar com a variável montante financeiro. Além disso, a restrição de cardinalidade e o algoritmo genético multiobjetivo para tratar o problema

de otimização de portfólio utilizando a estratégia do MPC são inovações propostas neste trabalho. Desta forma, os procedimentos detalhados a seguir são contribuições práticas deste trabalho.

3.6.1 Alteração entre quantidade de dinheiro e peso

A variável do problema de otimização tratada neste trabalho é a quantidade de dinheiro investido em cada ativo, em cada instante de tempo. A fim de tornar o processo dos operadores do algoritmo genético mais prático, este trabalho propõe uma adaptação na variável do algoritmo genético. Para aplicar os operadores geração de população inicial, cruzamento e mutação, a variável de otimização é considerada como peso do investimento em cada ativo. No momento de calcular o *fitness* (no caso mono-objetivo) ou fazer a ordenação das fronteiras de dominância e distância de aglomeração (no caso multiobjetivo), as variáveis que representam os pesos são transformadas em dinheiro utilizando o valor da riqueza corrente para aquele instante de tempo. Da mesma maneira, ao fim da otimização a variável de pesos obtida é transformada em variável com valores em dinheiro.

3.6.2 Adaptação para o horizonte de predição

Para o caso especial do MPC, em que a variável de otimização é uma sequência de ações de controle, uma atenção especial é necessária ao lidar com os operadores. Como as restrições do problema são tratadas diretamente nos operadores, e essas restrições referem-se às carteiras de investimentos individualmente, não faz sentido aplicar os operadores no vetor U como um todo, uma vez que desta forma cada ação de controle $u(k+j)$, $j = 0, \dots, m-1$ não estaria sendo considerada propriamente como uma carteira de investimentos. Para solucionar este impasse, propomos que os operadores sejam aplicados de acordo com o horizonte de predição, de forma independente.

Geração de um indivíduo: para gerar o indivíduo $\bar{U}(k) = [\bar{u}(k), \bar{u}(k+1), \dots, \bar{u}(k+m-1)]$ aplica-se o operador que cria uma solução repetidamente m vezes. A cada execução do operador que cria uma solução é obtida uma ação de controle $\bar{u}(k+j)$, $j = 0, \dots, m-1$ que representa uma carteira de investimento no seu respectivo instante do horizonte de predição.

Cruzamento: se $\bar{U}(k) = [\bar{u}(k), \bar{u}(k+1), \dots, \bar{u}(k+m-1)]$ e $\underline{U}(k) = [\underline{u}(k), \underline{u}(k+1), \dots, \underline{u}(k+m-1)]$ são dois indivíduos, o cruzamento acontece entre portfólios do mesmo horizonte de predição:

- $\bar{u}(k)$ cruza com $\underline{u}(k)$
- $\bar{u}(k+1)$ cruza com $\underline{u}(k+1)$
- ⋮
- $\bar{u}(k+m-1)$ cruza com $\underline{u}(k+m-1)$

Mutação: considerando o indivíduo $\bar{U}(k) = [\bar{u}(k), \bar{u}(k+1), \dots, \bar{u}(k+m-1)]$ o operador mutação é aplicado separadamente em cada ação de controle (portfólio):

- $\bar{u}(k)$ sofre mutação
- $\bar{u}(k+1)$ sofre mutação
- ⋮
- $\bar{u}(k+m-1)$ sofre mutação

3.6.3 Operadores

Os operadores definidos a seguir são utilizados tanto no algoritmo mono-objetivo quanto no algoritmo multiobjetivo. Os algoritmos propostos manipulam as restrições diretamente nos operadores. Os operadores consideram a variável de otimização definida como peso, conforme alertado na Subseção 3.6.1. Os operadores são definidos considerando-se um único horizonte de predição e aplicados sucessivamente em cada instante do horizonte de predição conforme definido na Subseção 3.6.2.

3.6.3.1 Criação da população inicial

Nesta subseção é descrita a criação da população inicial. A primeira parte da inicialização é realizada conforme descrito em (DEB et al., 2011). No que diz respeito ao tratamento de violação da restrição, a parte de normalização é uma modificação proposta neste trabalho.

Geração de um indivíduo Para criar uma solução factível, seleciona-se aleatoriamente um valor d no intervalo $[K_{min}, K_{max}]$, em que K_{min} e K_{max} são as cardinalidades mínima e máxima permitidas no portfólio, respectivamente. Então, cria-se um portfólio que tem exatamente d ativos não nulos, isto é, selecionam-se aleatoriamente d das n variáveis e atribui-se zero às outras $(n - d)$ variáveis. Como os valores não nulos devem pertencer ao intervalo $[p_{min}, p_{max}]$, em que p_{min} e p_{max} são as porcentagens mínima e máxima da riqueza que podem ser investidos em cada ativo, gera-se aleatoriamente um número neste intervalo para cada variável não nula. Ao fim deste processo, a soma dos pesos dos ativos não nulos pode não ser igual a um, violando a restrição de investimento total no portfólio. Realiza-se o processo de normalização do portfólio: divide-se o peso de cada ativo pela soma dos pesos de todos os ativos. Com este processo, passa-se a satisfazer a restrição de investimento total, preserva-se a cardinalidade e a proporção de investimento definida inicialmente, mas os pesos de alguns ativos podem ter sido “jogados” para fora do intervalo $[p_{min}, p_{max}]$. A fim de tornar o portfólio factível, para cada peso que esteja fora desse intervalo é usada a reparação definida abaixo.

Para exemplificar esse procedimento, considere $n = 10$, $K_{min} = 3$ e $K_{max} = 6$ e que a escolha aleatória de d resultou em $d = 5$. Considere também que $p_{min} = 0.1$ e

$p_{max} = 0.9$. Um indivíduo típico desta população na primeira fase de inicialização pode ser representado por:

$$(0, 0.3, 0.4, 0, 0.1, 0, 0.7, 0.1, 0, 0).$$

Note que a soma dos pesos é 1.6. É necessário normalizar o indivíduo:

$$(0, 0.1875, 0.25, 0, 0.0625, 0, 0.4375, 0.0625, 0, 0).$$

Agora a soma vale um. As restrições de cardinalidade e auto-financiamento estão satisfeitas. No entanto, a restrição de limite de investimento foi violada. Então aplica-se a reparação definida abaixo.

Criação da população inicial: A população inicial é obtida repetindo-se o operador Geração de um indivíduo a quantidade de vezes definida pelo parâmetro tamanho da população.

3.6.3.2 Reparação do indivíduo

O procedimento de reparação é realizado conforme descrito em (BARROSO; CARDOSO; MELO, 2021): Caso o peso do ativo não pertença ao intervalo $[p_{min}, p_{max}]$, calcula-se a diferença entre o peso do ativo e o limite violado. O ativo recebe o peso limite que foi violado, enquanto a diferença é distribuída igualmente entre os outros ativos não nulos, de forma que a restrição de investimento total seja preservada. Com esta reparação a restrição de cardinalidade também é preservada. Ao passar por este processo o portfólio torna-se factível.

Continuando o exemplo acima, o valor 0.0625 viola o limite inferior 0.1. Assim, as coordenadas com valores 0.0625 recebem o valor de p_{min} e a diferença $2 \times (0.1 - 0.0625) = 0.075$ é distribuída, por meio de uma subtração, entre os outros ativos:

$$(0, 0.1625, 0.225, 0, 0.1, 0, 0.4125, 0.1, 0, 0).$$

3.6.3.3 Cruzamento

O cruzamento é realizado conforme descrito em (DEB et al., 2011). Uma vez que uma população inicial é criada, ela é avaliada e os operadores de cruzamento e mutação são aplicados. Duas soluções da população são selecionadas como pais. O número de ativos não nulos dos pais é k_1 e k_2 , respectivamente. A Figura 12 apresenta dois pais para o caso de 10 ativos:

Como pode ser observado, o pai 1 tem cardinalidade $k_1 = 5$ e o pai 2 tem cardinalidade $k_2 = 6$.

Os seguintes passos são necessários para a criação do filho:

$$\begin{aligned}\text{Pai 1 : } & a_1 \ 0 \ a_3 \ 0 \ a_5 \ 0 \ 0 \ a_8 \ 0 \ a_{10} \\ \text{Pai 2 : } & b_1 \ 0 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ 0 \ b_7 \ 0 \ 0 \ b_{10}\end{aligned}$$

Figura 12 – Exemplo de dois pais para o caso de 10 ativos.

Fonte: Adaptado de (DEB et al., 2011)

1. Um inteiro q é aleatoriamente selecionado do intervalo $[k_1, k_2]$. No caso acima, digamos que seja $q = 5$.
2. A solução filho herda um investimento nulo para cada ativo em que ambos os pais possuem investimento nulo. No caso dos pais acima, isto acontece para três ativos ($n_0 = 3$): $i = 2, 6$ e 9 . Assim, o filho desses pais possui a seguinte configuração inicial:

$$\text{Filho 1 : } \dots 0 \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots 0 \dots$$

3. Os ativos que têm investimento não nulo em ambos os pais herdam um valor de investimento não nulo cujo valor exato será determinado pela aplicação do operador SBX (*Simulated Binary Crossover* (DEB; AGRAWAL et al., 1995)) limitado pelos valores dos pais. O operador SBX assegura que valores não sejam criados fora do intervalo $[p_{min}, p_{max}]$. Para os pais acima, as posições que o operador SBX deve ser aplicado são $i = 1, 3, 5$ e 10 . Considerando que c_1, c_3, c_5 e c_{10} são os valores originados pelo operador SBX, uma solução filho oriunda dos pais acima toma a forma:

$$\text{Filho 1 : } c_1 \ 0 \ c_3 \ \dots \ c_5 \ 0 \ \dots \dots \dots 0 \ c_{10}.$$

É importante notar que o número de investimentos não nulos comuns (n_c) entre as duas soluções do tipo pai é tal que $n_c \in [0, \min(k_1, k_2)]$. Neste caso, $n_c = 4$.

4. O número de posições restantes para serem completadas com valores não nulos é $w = q - n_c$. Como $q \in [k_1, k_2]$, w é sempre maior ou igual a zero. Dos $n - n_0 - n_c$ ativos restantes, escolhem-se q ativos aleatórios aos quais são atribuídos o valor não nulo do pai. Para os pais acima, $w = 5 - 4 = 1$ e há $10 - 3 - 4 = 3$ posições a serem escolhidas e preenchidas com o ativo $w = 1$. Aos ativos restantes é atribuído valor zero. Digamos que escolhemos o sétimo ativo para ter valor não nulo. Então o valor não nulo ocorre no pai 2 e o filho herda b_7 . Assim, a solução filho assume a seguinte forma:

$$\text{Filho 1 : } c_1 \ 0 \ c_3 \ 0 \ c_5 \ 0 \ b_7 \ 0 \ 0 \ c_{10}.$$

A solução filho acima satisfaz a restrição de cardinalidade e de investimento total, mas é necessário garantir os pesos pertençam ao intervalo $[p_{min}, p_{max}]$. Caso algum peso esteja fora deste intervalo, utiliza-se o procedimento dado acima para reparar a solução e torná-la factível.

Também cria-se uma segunda solução filha dos mesmos pais por meio do mesmo procedimento. Devido à criação do inteiro aleatório d_c e outras operações envolvendo atribuições não determinísticas, espera-se que a segunda solução seja diferente da primeira.

3.6.3.4 Mutação

A mutação é realizada por meio de dois operadores conforme descrito em (DEB et al., 2011):

Alteração de peso: O primeiro altera os valores investidos nos ativos presentes no portfólio por meio de uma pequena perturbação. Esta perturbação ocorre com probabilidade p_m em cada ativo presente no portfólio de acordo com o operador mutação polinomial limitado pelos valores p_{min} e p_{max} . O peso mutado a'_i referente ao ativo i é dado por:

$$a'_i = a_i + \bar{\mu} \min\{a_i - p_{min}, p_{max} - a_i\}$$

em que, dado u obtido randomicamente do intervalo $[0,1]$, obtém-se

$$\bar{\mu} = \begin{cases} (2u)^{\frac{1}{51}} - 1, & \text{se } u \leq 0.5 \\ 1 - [2(1-u)]^{\frac{1}{51+1}}, & \text{caso se } u > 0.5. \end{cases}$$

Pode ser necessário fazer a reparação para tornar a solução factível.

Troca de pesos: O procedimento de mutação acima não altera ativos cujos pesos sejam nulos, de forma que apenas faz alteração nos ativos que efetivamente possuem investimento. O segundo operador seleciona z ativos não nulos do portfólio e atribui esses valores a outros z ativos que não estavam presentes no portfólio. Em contrapartida, os z ativos selecionados inicialmente recebem investimento nulo. Com este procedimento, há uma troca de investimento entre ativos que pertenciam e não pertenciam ao portfólio, de forma que não é alterada nem a soma total do valor do portfólio nem a sua cardinalidade, mas há uma alteração na composição do portfólio em termos dos ativos que o constituem. Após passar por este procedimento não é necessário fazer reparação.

3.6.4 Algoritmo mono-objetivo

O algoritmo mono-objetivo utilizado segue o fluxo padrão de um algoritmo genético (GOLDBERG, 1989), no sentido de gerar a população inicial, avaliar os indivíduos, fazer o cruzamento e a mutação e repetir essas três últimas partes até que o critério de parada seja atingido. A diferença para os algoritmos genéticos padrões é a adaptação dos operadores no que se refere ao horizonte de predição e a alternância da variável entre dinheiro e peso.

Os operadores geração da população inicial, cruzamento e mutação ocorrem conforme definido na Subseção 3.6.3, o *fitness* segue um critério de *ranking* linear e

a seleção segue o procedimento de seleção por roleta. O passo a passo do algoritmo é representado num fluxograma pela Figura 13.

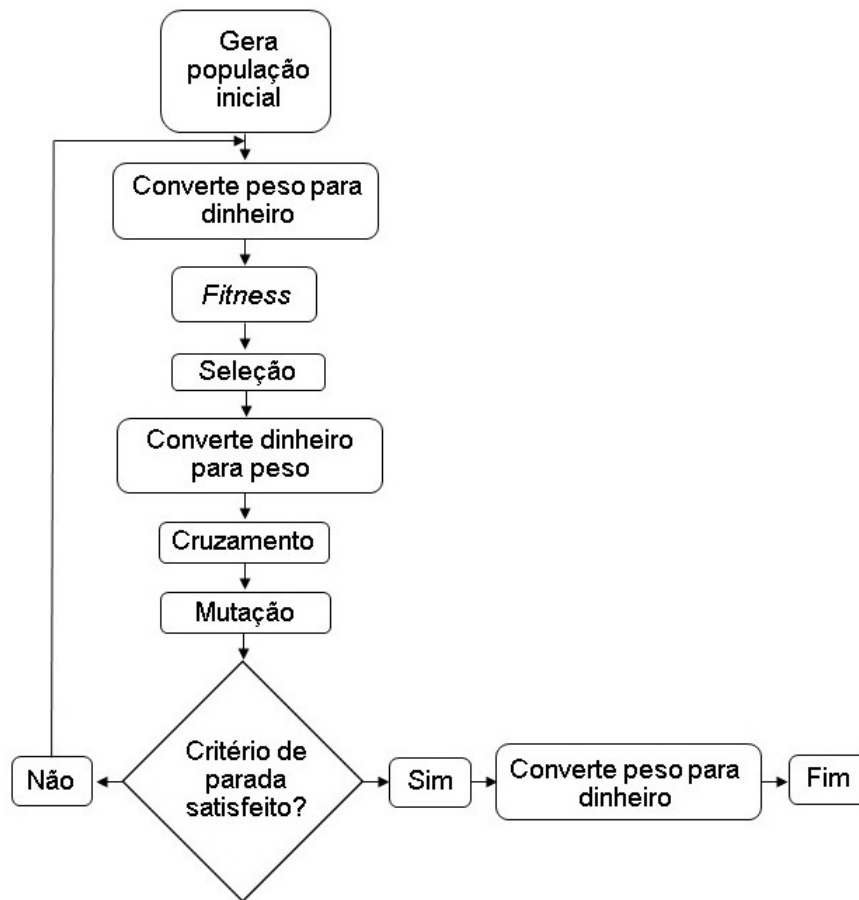


Figura 13 – Fluxograma do algoritmo mono-objetivo.

3.6.5 Algoritmo multiobjetivo

O algoritmo gen tico multiobjetivo utilizado   o NSGA-II. Os operadores gera o da popula o inicial, cruzamento e muta o ocorrem conforme definido na Subse o 3.6.3. A altera o entre peso e dinheiro ocorre conforme definido na Se o 3.6.1 e   utilizada antes de iniciar o operador sele o, que est  definido abaixo. A adapta o do horizonte de predi o definida na Se o 3.6.2 ocorre nos operadores gera o da popula o inicial, cruzamento e muta o.

3.6.5.1 Sele o

A sele o ocorre em duas etapas do algoritmo e   realizada conforme descrito em (DEB et al., 2002). Na primeira etapa s o selecionados aleatoriamente dois pares de indiv duos da popula o. Para cada par   realizado um torneio a fim de identificar o melhor indiv duo do par. O torneio utiliza os crit rios de n o domin ncia e dist ncia de aglomera o,

isto é, o indivíduo que estiver na menor² fronteira de dominância é selecionado. Caso os indivíduos pertençam à mesma fronteira, aquele que apresentar maior distância de aglomeração é selecionado.

A segunda etapa ocorre após a atuação dos operadores cruzamento e mutação, pois neste momento a população de pais e filhos é unida formando uma população de tamanho $2N$. Essa população é ordenada em fronteiras de dominância para que se selecionem N indivíduos, sendo que os indivíduos das menores fronteiras de dominâncias são selecionados. Caso a última fronteira selecionada contenha mais indivíduos que a quantidade disponível, os indivíduos que apresentam maior distância de aglomeração são selecionados, até que o total $2N$ seja preenchido.

3.7 MPC multiobjetivo

Como foi informado na Seção 2.9, o MPC multiobjetivo utilizado nesta tese é inspirado em (NÚÑEZ et al., 2014). De forma geral, em cada instante de tempo, o MPC multiobjetivo utiliza o modelo autorregressivo vetorial, a equação dinâmica da riqueza e o algoritmo genético para gerar uma fronteira no espaço de objetivos com as melhores soluções do algoritmo genético. Um ponto desta fronteira é selecionado e a primeira ação de controle é aplicada ao sistema. A escolha do ponto da fronteira utiliza um critério relacionado com o funcional de custo. Os funcionais de custo utilizados neste trabalho são a riqueza e o risco esperado no instante terminal. Com este critério é possível escolher a solução da fronteira que mais se aproxima do perfil do investidor. A ideia é fornecer ao investidor uma ferramenta mais transparente no processo de tomada de decisão. Outros critérios de decisão podem ser utilizados. Kilianova e Sevcovic (2018) consideram o maior valor do índice de Sharpe e Mendonça et al. (2020) propõem um modelo de tomada de decisão com base nas preferências do investidor usando redes neurais artificiais. A Figura 14 ilustra como ocorre esse processo de construção da fronteira e seleção da ação de controle.

Uma descrição sucinta dos perfis de investidor e o critério de escolha relacionado a cada perfil utilizado neste trabalho é apresentado abaixo:

Investidor agressivo: O investidor agressivo prioriza lucratividade acima de todos os fatores e possui maior tolerância ao risco. Geralmente, é um investidor experiente com mais dinheiro e, portanto, está disposto a desistir da liquidez imediata, tendendo a ser mais flexível, com maior tolerância a perdas, porque entende que lucros mais altos surgirão a longo prazo. O critério de escolha definido neste caso é maior riqueza esperada.

² A primeira fronteira de dominância é aquela que não possui indivíduos dominados. A segunda fronteira de dominância é aquela que possui indivíduos dominados apenas pelos indivíduos da primeira fronteira. A hierarquia das fronteiras de dominância segue esse processo sucessivamente. Desta forma, dizemos que a segunda fronteira de dominância é menor que a terceira fronteira de dominância, por exemplo.

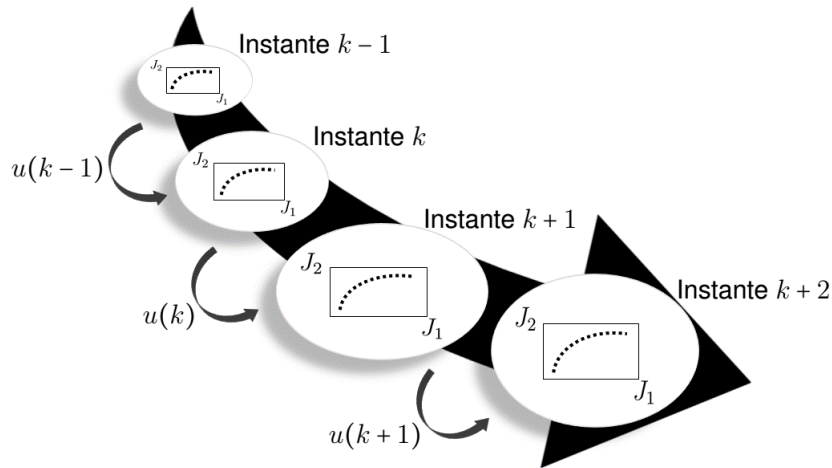


Figura 14 – Estratégia do MPC multiobjetivo.

Fonte: Adaptado de (NÚÑEZ et al., 2014)

Investidor conservador: O investidor conservador prioriza segurança e liquidez muito mais do que lucratividade. Assim, o conservador tem pouca tolerância a perdas e riscos, o que naturalmente o leva a desistir de um retorno maior que vem com investimentos de maior risco. O critério definido neste caso é o menor risco esperado.

Investidor moderado: O investidor moderado tem um perfil mais equilibrado. Esse perfil tem maior tolerância a riscos do que o conservador, mas não tanto quanto o agressivo. O critério definido neste caso é o ponto médio da melhor fronteira ao término do algoritmo.

O algoritmo genético é integrado com o controlador do MPC e implementado como um bloco de função de controle em execução no controlador. O experimento é executado ao longo de um intervalo de tempo de T amostras. Para cada instante de tempo $k = 1, \dots, T$, os passos abaixo sumarizam o algoritmo proposto para o MPC multiobjetivo:

Passo 1: Gere as previsões dos retornos dos ativos de risco para os próximos $k+1$ a $k+m$ instantes de tempo.

- Use a Equação (11) para fazer as previsões sem cenários.
- Use a Equação (12) para fazer as previsões com cenários.

Passo 2: Construa a fronteira não dominada do modelo multiobjetivo

$$\max_U E[Riqueza(k+m)] \quad \text{e} \quad \min_U E[Risco(k+m)] \quad (22)$$

$$\text{sujeito a: } g(U) \leq 0$$

- As variáveis de controle ótimas obtidas são factíveis.

Passo 3: Use um critério de seleção relacionado ao perfil do investidor (definido pela riqueza e/ou risco esperados) para escolher algum ponto da fronteira obtida no Passo

2.

Passo 4: Aplique a primeira ação de controle da solução selecionada ao sistema e atualize a riqueza do portfólio no tempo $k + 1$ utilizando a Equação (8).

Atualize $k = k + 1$. Se $k = T$, pare. Caso contrário, volte ao Passo 1.

Neste capítulo ocorre a “junção” do conhecimento teórico apresentado no Capítulo 2 e das abordagens propostas no Capítulo 3 referente ao uso de todas as ferramentas dirimidas nesses capítulos atuando na engrenagem da estratégia do MPC aplicado ao problema de otimização de portfólios. Além da síntese de como ocorre o encontro destas as ferramentas, este capítulo trata da formulação dos problemas de otimização utilizando as funções definidas no Capítulo 2, das especificações dos dados utilizados nas simulações e das restrições do problema. Os problemas são propostos em duas categorias:

- Na Seção 3.4 são propostos problemas de otimização mono-objetivo da riqueza esperada e das medidas de risco.
- Na Seção 3.5 são propostos problemas de otimização multiobjetivo que visam maximizar a riqueza e minimizar o risco esperado.

4 Estudo de caso com ativos da B3

Este capítulo apresenta e discute os resultados dos experimentos planejados. É retratado o passo a passo para escolha da quantidade de cenários. São realizadas as análises *in-sample* para aferir o desempenho do MPC mono e multiobjetivo e a análise *out-of-sample* para analisar o desempenho do MPC multiobjetivo.

4.1 Definição de parâmetros

A escolha dos parâmetros foi realizada de forma empírica (detalhada a seguir) ou com base em trabalhos relacionados. Os parâmetros escolhidos foram:

- nível de significância β de 5% para cálculo do CVaR;
- porcentagem mínima permitida por ativo: $\alpha = 1\%$;
- porcentagem máxima permitida por ativo: $\gamma = 90\%$;
- capital inicial: $w(0) = R\$100.000,00$;
- custo de transação proporcional: $c = 0,03\%$.

O nível de significância β para o cálculo do CVaR foi selecionado de acordo com (FERREIRA et al., 2018; MENDONÇA et al., 2020). As porcentagens mínima e máxima são similares às praticadas na literatura, conforme se verifica na Tabela 2. O capital inicial é um valor compatível com a disponibilidade de um médio investidor. A taxa percentual dos custos de transação proporcionais derivam dos custos de emolumentos, corretagem e custódia definidos pela B3 (B3, 2021b).

Para uniformizar a escala e facilitar a análise, os valores de variância esperada são representados pelo seu desvio padrão.

Tabela 2 – Limites de porcentagens inferiores e superiores praticados na literatura.

Trabalho	Porcentagem inferior	Porcentagem superior
(MANSOURIA; MOGHADAM, 2021)	0,01	1
(GUPTA; MEHLAWAT; KHAN, 2021)	0,05	1
(KAUCIC, 2019)	0,001	1
(MENDONÇA et al., 2020)	0,01	0,98
(MOLINA, 2012)	-	0,9

4.2 Dados de entrada

Os dados de entrada são compostos pelo preço de fechamento de ações negociadas na B3, a bolsa de valores brasileira. A coleta dos dados foi realizada com a plataforma Economática®. Os valores são coletados já com ajustes para desdobramentos e agrupamentos, além de ajustes de dividendos e juros. Desta forma, empresas resultantes do desdobramento de uma empresa em duas passam a ter os seus valores de ativos, em períodos anteriores ao desdobramento, igual à metade dos valores dos ativos da empresa original. Já as empresas resultantes de agrupamento de duas outras empresas, possuem valores de ativo igual à soma das duas empresas originais, para períodos anteriores ao agrupamento.

Os experimentos realizados para os modelos são divididos em experimentos *in-sample* e *out-of-sample*. Os experimentos *in-sample* se preocupam com o quão bem o modelo se ajusta aos dados nos quais foi treinado: sua “qualidade de ajuste”. Neste caso, avaliam os aspectos do horizonte de predição, a composição das carteiras por horizonte de predição e a cardinalidade, as fronteiras de soluções não dominadas proporcionadas por cada problema, considerando as métricas Δ e hipervolume. Os experimentos *out-of-sample* referem-se ao uso de “novos” dados que não são encontrados no conjunto de dados usado para construir o modelo. Este é frequentemente considerado o melhor método para testar a qualidade do modelo. Os experimentos *out-of-sample* utilizados aqui comparam o desempenho dos modelos em simulações de negociações no mercado financeiro, considerando os retornos acumulados, índice de Sharpe, máximo *Draw Down*, além da análise da riqueza acumulada dos 5 ativos com maior participação média em cada estratégia. De forma simplória, a análise *in-sample* está para o conjunto de treinamento assim como a análise *out-of-sample* está para o conjunto de teste no contexto de *Machine Learning*.

- Para a análise *in-sample* foram considerados os 20 ativos de risco com maior participação no Ibovespa em novembro/2020 e que também possuíam participação em janeiro/2019 (Quadro 1) e o ativo livre de risco. A análise *in-sample* teve como base o primeiro dia útil do ano 2019.
 - A única exceção é a análise *in-sample* da Seção 4.6.3, que utiliza o primeiro dia útil de 2020, os ativos do Quadro 2 e o ativo livre de risco.
- Para a análise *out-of-sample* foram considerados os 30 ativos de risco com maior participação no Ibovespa em fevereiro/2021 e que tiveram participação nos anos 2019 e 2020 (Quadro 2) e o ativo livre de risco. Foram realizados experimentos numéricos para os anos 2019 e 2020 separadamente.

Quadro 1 – Ativos utilizados na análise *in-sample*.

Empresa	Código	Part. Ibov. (%)	Empresa	Código	Part. Ibov. (%)
Vale	VALE3	10,71	Brasil	BBAS3	2,21
ItauUnibanco	ITUB4	6,92	Grupo Natura	NTCO3	2,17
Petrobras	PETR4	5,19	Localiza	RENT3	2,07
Bradesco	BBDC4	5,15	Lojas Renner	LREN3	1,98
B3	B3SA3	4,82	JBS	JBSS3	1,67
Petrobras	PETR3	4,04	Viavarejo	VVAR3	1,55
Magaz Luiza	MGLU3	3,72	RaiaDrogasil	RADL3	1,42
Ambev S/A	ABEV3	3,26	Bradesco	BBDC3	1,368
Weg	WEGE3	2,91	Equatorial	EQTL3	1,168
Itausa	ITSA4	2,48	Gerdau	GGBR4	1,155

Quadro 2 – Ativos utilizados na análise *out-of-sample*.

Empresa	Código	Part. Ibov. (%)	Empresa	Código	Part. Ibov. (%)
Vale	VALE3	12,018	Localiza	RENT3	1,804
ItauUnibanco	ITUB4	5,993	Lojas Renner	LREN3	1,407
Petrobras	PETR4	5,834	Btgp Banco	BPAC11	1,340
B3	B3SA3	5,299	RaiaDrogasil	RADL3	1,268
Bradesco	BBDC4	4,886	Petrobras BR	BRDT3	1,200
Petrobras	PETR3	4,260	Bradesco	BBDC3	1,166
Magaz Luiza	MGLU3	3,115	Ultrapar	UGPA3	1,158
Ambev S/A	ABEV3	2,962	Rumo S.A.	RAIL3	1,098
Weg	WEGE3	2,934	Gerdau	GGBR4	1,092
Intermedica	GNDI3	2,582	Equatorial	EQTL3	1,075
Suzano S.A.	SUZB3	2,331	Viavarejo	VVAR3	1,060
Itausa	ITSA4	2,186	Klabin S/A	KLBN11	1,014
Grupo Natura	NTCO3	2,058	Telef Brasil	VIVT3	0,989
Brasil	BBAS3	1,981	Sid Nacional	CSNA3	0,965
JBS	JBSS3	1,808	Eneva	ENEV3	0,952

4.3 Ambiente computacional

Todos os testes são realizados em um computador cujo processador é um Intel Core (TM) i5-8400 CPU @ 2.80GHz. A memória RAM é de 8GB e o sistema operacional é Windows 10.

A implementação do algoritmo utilizou a linguagem Python, com interpretador de versão 3.6. São utilizadas as bibliotecas: NumPy, que fornece funções para operações matemáticas e de manipulação de conjuntos n -dimensionais de dados; Pandas, que fornece estruturas de dados de alto desempenho e ferramentas para análise de dados; Statsmodels para ajuste de parâmetros do modelo autorregressivo vetorial. A análise de dados e construção das figuras foram realizadas com o auxílio da plataforma Jupyter Notebook.

4.3.1 Implementação do modelo autorregressivo vetorial

A análise *out-of-sample* foi conduzida com uma janela deslizante dia a dia, utilizando-se os 60 dias anteriores dos dados para ajuste de parâmetros (treinamento). Por exemplo, para o primeiro dia de execução do ano 2019 (02/01/2019), foram utilizados os 60 dias anteriores, 28/09/2018 a 28/12/2018, para estimar a matriz de coeficientes A_1 e a matriz de covariância Σ^w . Depois que esses parâmetros são ajustados, é possível utilizar a Equação (12) para fazer as previsões.

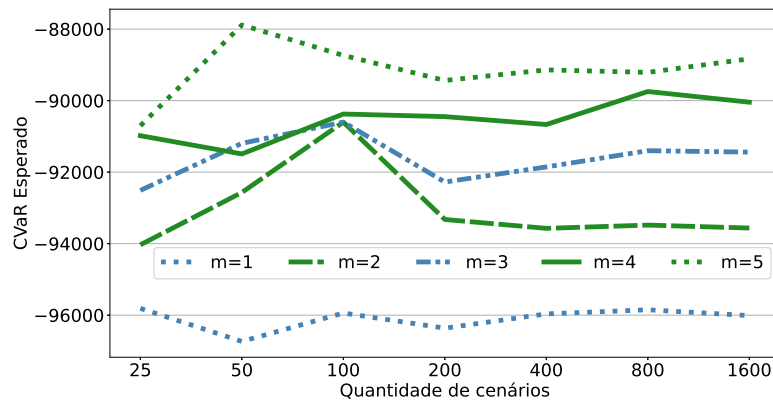
4.4 Definição da quantidade de cenários

Um dos parâmetros fundamentais para a realização dos experimentos é a quantidade de cenários utilizados no cálculo do CVaR. A quantidade de cenários é importante tanto no que diz respeito à acurácia atingida pelo modelo de predição quanto pelo tempo de execução demandado pelo algoritmo de otimização. Conforme apontado por Bemporad et al. (2010), a geração de cenários futuros de preços de ativos requer um modelo de sua evolução estocástica e dinâmica. Obter tal modelo é muitas vezes uma tarefa complexa e inevitavelmente afetada pela imprecisão. Por mais complexo que o modelo possa ser, ele nunca será capaz de representar a dinâmica exata dos ativos e, em todo caso, um modelo muito complexo ocasionará um sobreajuste dos dados. Portanto, em geral, o modelo de preço do ativo sempre será diferente da maneira como o mundo real se comporta, e deve-se encontrar um compromisso entre o uso de um modelo simples o suficiente e a complexidade computacional.

A seguir é apresentado um estudo para a definição da quantidade de cenários utilizada neste trabalho. Foi considerada uma riqueza inicial de R\$100.000,00, cenários dos retornos futuros gerados pelo modelo autorregressivo vetorial de ordem um, conforme definido na Equação (12), e com probabilidade constante de ocorrer, e valor β de probabilidade utilizada pelo CVaR igual a 95%.

Inicialmente foi realizada uma simulação com uma variedade de valores de cenários para constatar de forma ampla como o valor do CVaR é afetado dentro do horizonte de predição em função da quantidade de cenários. Pela Figura 15 é possível constatar que à medida que o horizonte de predição aumenta, o valor do CVaR também aumenta. Investigando a imagem em busca de alguma estabilidade em torno do valor do CVaR esperado foi constatado que o intervalo entre 100 e 400 cenários apresenta uma variabilidade suficiente para captar a flutuação em torno do CVaR esperado. Desta forma, buscou-se analisar de forma mais refinada as quantidades de cenários dentro do intervalo [100,400].

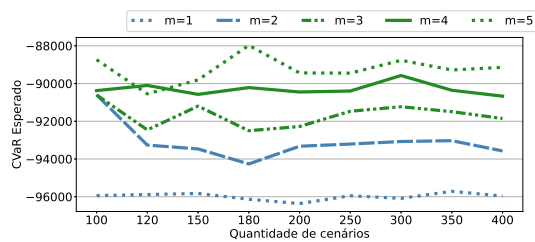
A Figura 16 (a) confirma que a amplitude de variação em torno do CVaR esperado é relativamente baixa dentro do intervalo [100,400] cenários. Para mensurar de forma mais específica a magnitude dessa amplitude foi calculado o módulo de uma diferença finita de



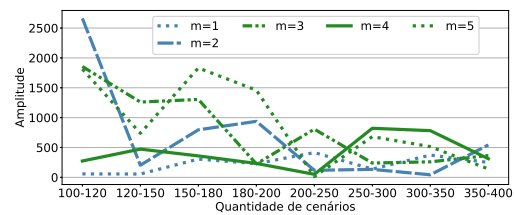
(a)

Figura 15 – Análise do efeito da quantidade de cenários

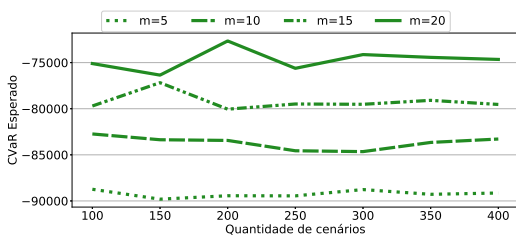
ordem 1 entre a perda do CVaR subsequente e a perda do CVaR antecedente¹. Na Figura 16 (b) é possível constatar que essa amplitude pertence a uma faixa inferior a R\$620,00 quando são considerados mais que 200 cenários.



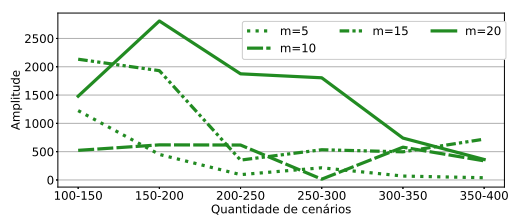
(a) CVaR - horizontes menores



(b) Amplitude - horizontes menores



(c) CVaR - horizontes maiores



(d) Amplitude - horizontes maiores

Figura 16 – Análise do efeito da quantidade de cenários

A mesma análise foi realizada para horizontes de predição maiores que cinco para verificar se o comportamento se repete mesmo para horizontes maiores. Também foi obtida uma oscilação relativamente baixa, como pode ser observado na Figura 16 (c). No gráfico da amplitude entre uma quantidade de cenário e outra, é observado um comportamento similar ao apresentado para o caso com horizontes menores, no entanto, a faixa de R\$620,00 é

¹ A perda é definida pelo valor do CVaR esperado em relação à quantia R\$100.000,00.

alcançada para os casos com mais de 300 cenários quando é incluído o horizonte de 20 dias, e mais de 200 cenários quando não é considerado o horizonte de 20 dias.

A análise apresentada acima considera o CVaR de uma carteira inicial ingênua, cujo valor da riqueza é dividido igualmente entre os ativos. Para analisar o impacto da otimização sobre esse aspecto da variabilidade do CVaR de acordo com o horizonte de predição e a quantidade de cenários, um estudo semelhante foi conduzido para o CVaR esperado obtido com as carteiras fornecidas pela minimização do CVaR esperado. Devido à estocasticidade do algoritmo genético que fez a otimização, foram consideradas 30 simulações a fim de se obter um estudo estatístico. Na Figura 17(a) encontra-se a média do CVaR esperado para cada horizonte de predição e quantidade de cenários. É possível observar que o valor do CVaR obtido após a otimização é menor comparativamente ao CVaR com a carteira ingênua, o que é condizente com o fato de terem sido utilizadas carteiras que visam minimizar o CVaR. Além disso, a variabilidade do valor do CVaR entre uma quantidade de cenários e outra, dentro do respectivo horizonte de predição, é muito pequena. A mesma análise foi conduzida para horizontes de predição maiores e pode ser observada na Figura 17 (b). O comportamento é semelhante quando aumenta o horizonte de predição.

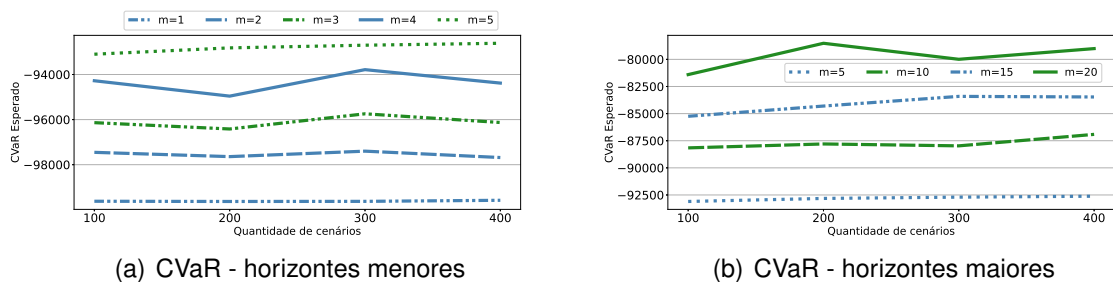


Figura 17 – Valor esperado do CVaR após a otimização considerando várias quantidades de cenários e tamanhos de horizonte de predição.

Outra maneira de se investigar o impacto da quantidade de cenários é por meio do erro relativo (em módulo) entre a riqueza esperada sem cenários e com cenários. Como ambos os valores de riqueza devem convergir na média, espera-se que o erro relativo seja menor quanto maior for a quantidade de cenários. Os boxplots da Figura 18 indicam, no entanto, que o erro relativo não foi definido a partir de uma relação diretamente proporcional à quantidade de cenários. Ainda assim, os menores valores do erro relativo são entregues por 300 ou 400 cenários, dependendo do horizonte de predição, sendo que 300 cenários levam ao menor erro relativo para $m = 1, 2, 4, 5, 15$, e 400 cenários implicam o menor erro relativo para $m = 4, 15$ e 20.

Pelas constatações acima, a escolha entre 300 e 400 cenários são as mais adequadas, no entanto, ela é um tanto quanto ambígua, uma vez que não há uma quantidade que seja melhor para todos os horizontes de predição. Como um fator importante para as simulações é o tempo de execução por iteração, e como as quantidades de 300 e 400

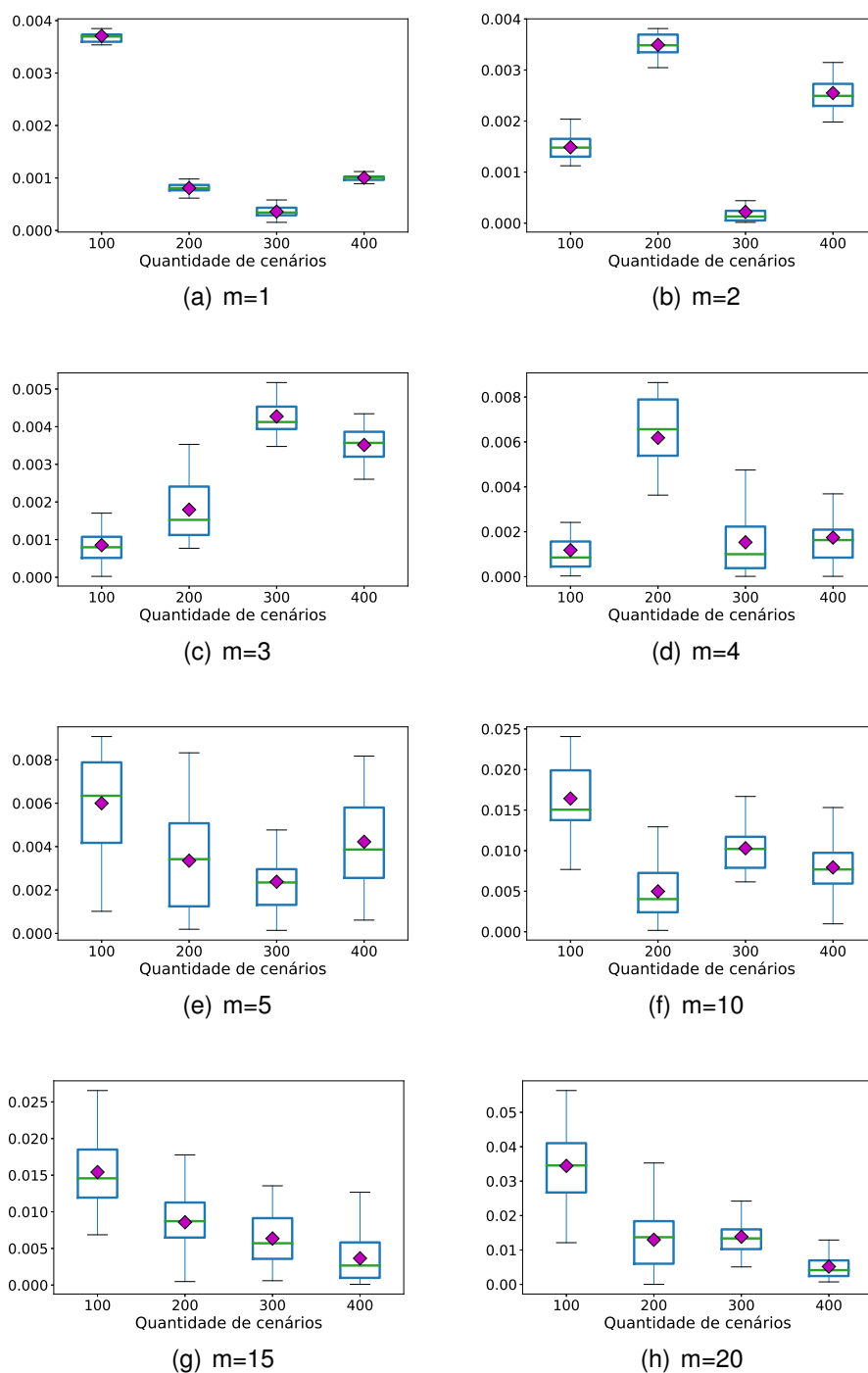


Figura 18 – Erro relativo entre as riquezas com e sem cenários

cenários são conflitantes sobre qual delas é mais adequada, o tempo de execução por iteração foi considerado para a escolha da quantidade de cenários. Optou-se por utilizar 300 cenários uma vez que esta quantidade demanda cerca de 25% menos de tempo de execução por iteração, como pode ser observado na Figura 19.

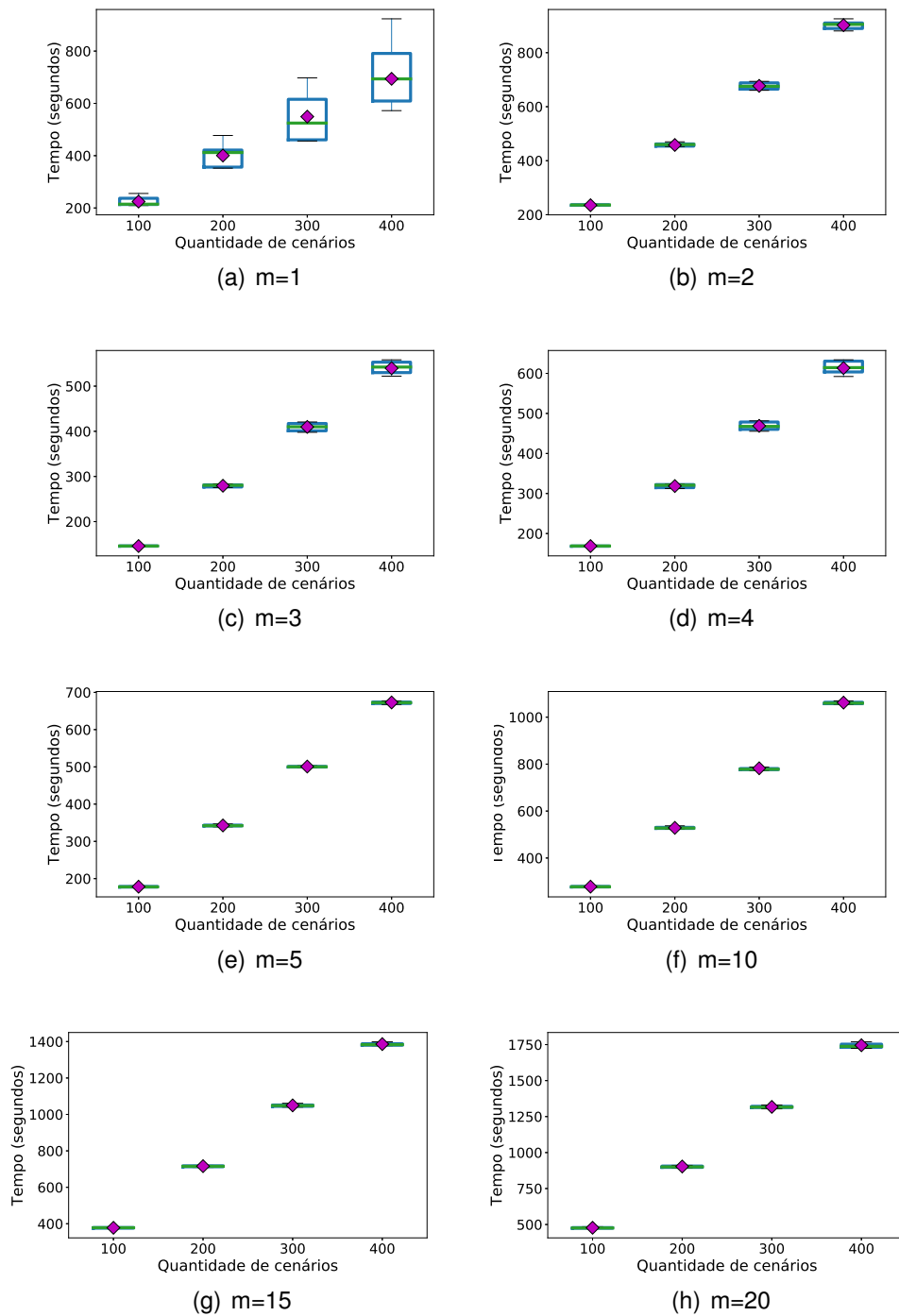


Figura 19 – Tempo por execução do MPC com a maximização da riqueza com cenários

4.5 Análise Mono-objetivo (*In-Sample*)

A seguir são apresentados os gráficos que validam a convergência dos modelos de otimização mono-objetivo para cada função. Para esta análise, foi considerada a primeira execução do MPC com cardinalidade dez e base de dados com vinte ativos de risco e um ativo livre de risco. A fim de tornar prática a apresentação dos resultados, considere a seguinte notação para referência dos algoritmos utilizados:

CVM: algoritmo mono-objetivo que visa minimizar o CVaR esperado.

MMV: algoritmo mono-objetivo que visa maximizar a riqueza esperada sem cenários.

MMC: algoritmo mono-objetivo que visa maximizar a riqueza esperada com cenários.

VM: algoritmo mono-objetivo que visa minimizar a variância esperada.

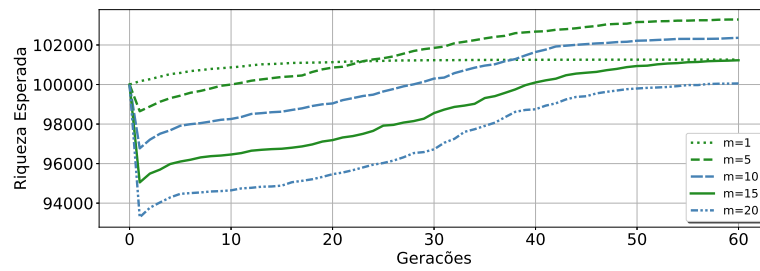
Esta análise de convergência é importante para verificar se há diferença no comportamento do algoritmo genético para diferentes valores do horizonte de predição. A princípio, pode-se imaginar que horizontes de predição maiores demandem maiores valores para os parâmetros do algoritmo genético, uma vez que o aumento do horizonte de predição aumenta a complexidade do problema por ter mais parcelas no somatório da função objetivo. Mas, após uma busca exaustiva para os valores dos parâmetros, chegou-se aos valores 500 indivíduos e 60 gerações para obter a convergência do algoritmo. As gerações do algoritmo genético sucedem-se dentro do bloco do otimizador na estratégia do MPC.

As Figuras 20 (a) e 21 (a) apresentam as curvas de convergência dos algoritmos genéticos que visaram maximizar a riqueza esperada sem cenários e com cenários, respectivamente. Estas curvas são a média da função objetivo considerando 30 simulações. É possível observar que 60 gerações foram suficientes para estabilizar a função objetivo dado o tempo computacional requerido. As Figuras 20 (b) e 21 (b) apresentam boxplots que foram obtidos a partir do valor da função objetivo ao fim da última geração.

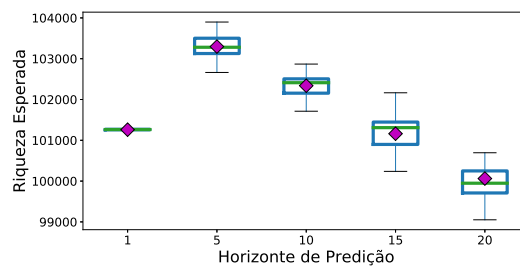
As Figuras 22 (a) e 23 (a) apresentam a curva de convergência dos algoritmos genéticos que visaram minimizar o risco esperado. Cada curva é a média dos valores obtidos em 30 simulações.

É possível perceber que os algoritmos que visam minimizar o risco convergiram com menos de 60 gerações para todos os horizontes. As Figuras 22 (b) e 23 (b) apresentam boxplots que foram obtidos a partir do valor da função objetivo ao fim da última geração.

A Figura 24 permite verificar o resultado da otimização no que diz respeito ao cumprimento do objetivo de cada problema. Isto é, os modelos que visaram maximizar a riqueza esperada obtiveram maiores valores de riqueza esperada, os quais são acompanhados por maiores valores de risco, ao passo que os modelos que visaram minimizar o risco obtiveram menores valores de risco associados com menores valores de riqueza. Estes resultados são condizentes com as expectativas teóricas relacionadas à relação de compromisso risco $\times$ retorno, e indicam que o algoritmo genético mono-objetivo

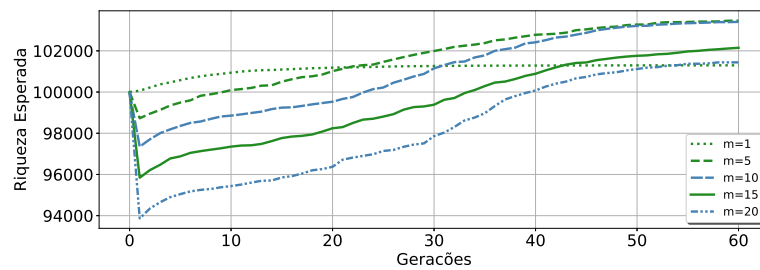


(a) Riqueza esperada no decorrer das gerações

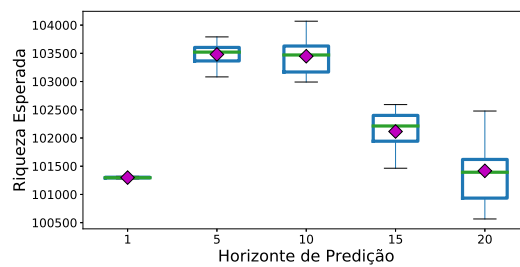


(b) Valor da riqueza esperada ao fim da última geração

Figura 20 – Convergência do algoritmo genético por horizonte de predição - MMV

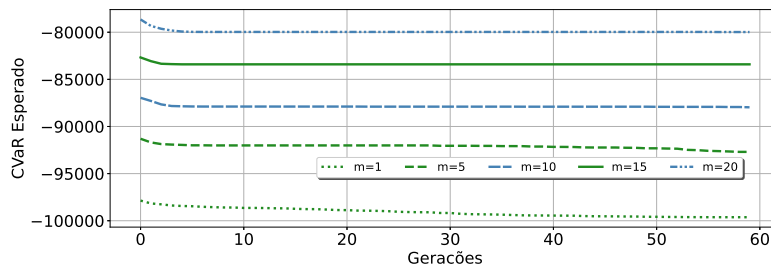


(a) Riqueza esperada no decorrer das gerações

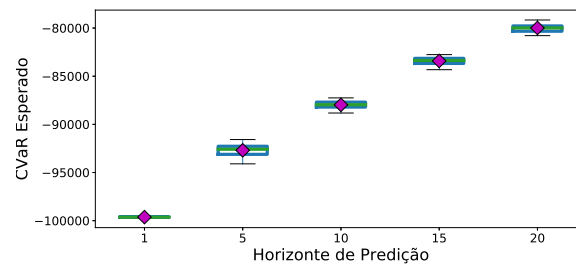


(b) Valor da riqueza esperada ao fim da última geração

Figura 21 – Convergência do algoritmo genético por horizonte de predição - MMC

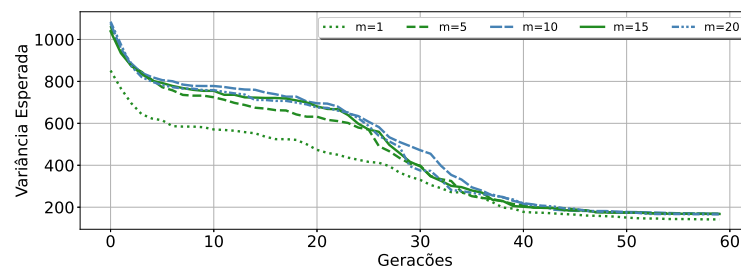


(a) CVaR esperado no decorrer das gerações

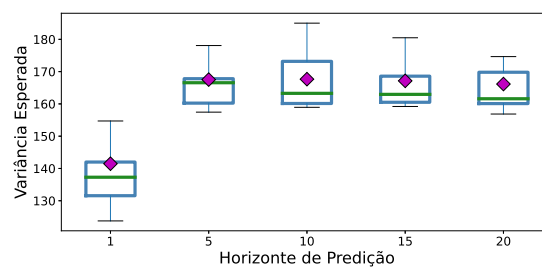


(b) Valor da função objetivo ao fim da última geração

Figura 22 – Convergência do algoritmo genético por horizonte de predição - CVM



(a) Variância esperada no decorrer das gerações



(b) Valor da função objetivo ao fim da última geração

Figura 23 – Convergência do algoritmo genético por horizonte de predição - VM

proposto foi bem sucedido em realizar o processo de otimização considerando toda a complexidade introduzida pelo MPC, tanto no que diz respeito à introdução do horizonte de predição, quanto no que concerne a definição das funções objetivo com a perspectiva do horizonte de predição e à dimensão das variáveis de controle, que aumenta em função da quantidade de ativos e do tamanho do horizonte de predição. Para esta análise, foram consideradas simulações com cardinalidade dez e horizonte de predição de cinco dias.

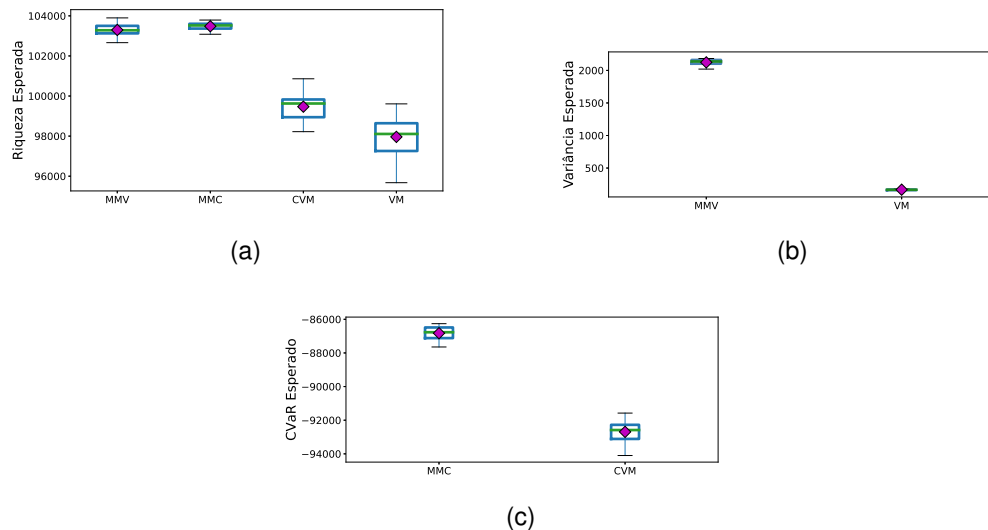


Figura 24 – Comparação dos valores das funções objetivo de acordo com o problema de otimização.

4.5.1 Análise do efeito do horizonte de predição

Nesta seção é apresentada uma análise detalhada do efeito do horizonte de predição em que pretende-se identificar os benefícios e limitações do MPC para os problemas mono-objetivo propostos.

A Figura 25 apresenta os boxplots com o resultado de 30 simulações do primeiro passo do MPC para as funções objetivo riqueza esperada. É possível perceber que há um aumento gradativo da riqueza esperada até o horizonte quatro e que a partir do horizonte cinco há um decaimento gradativo da mesma. Contrastando a riqueza esperada obtida pelo horizonte um com os demais horizontes, percebe-se que o horizonte de predição fornece um benefício até o horizonte 15, e a partir daí a riqueza esperada torna-se inferior à riqueza esperada pelo horizonte um. Desta forma, para o estudo de caso realizado, o MPC se apresenta uma boa estratégia quando utilizado para horizontes de curto prazo, quando a conciliação entre as previsões e a otimização se mostram robustas. Para horizontes maiores que quinze a estratégia se torna ineficiente, possivelmente decorrente da baixa assertividade das previsões para horizontes maiores. Devido à instabilidade inerentes aos períodos de tempo maiores, o modelo de previsão tem dificuldade ao realizar as previsões. Este fato

também foi constatado por [Uysal, Li e Mulvey \(2021\)](#), que caracterizaram uma relação de compromisso entre o tamanho do horizonte de predição e a acurácia na estimação dos parâmetros. Eles sugerem o horizonte de cinco dias como tamanho ideal para um bom desempenho.

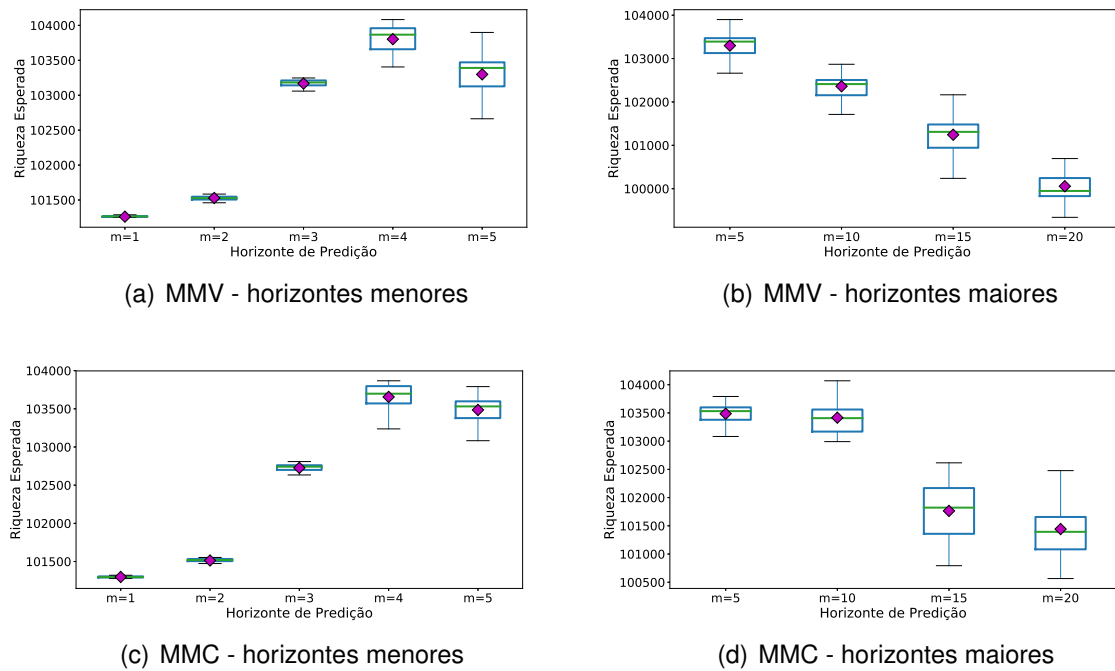


Figura 25 – Análise do efeito do horizonte de predição - MMV e MMC

As Figuras 26 e 27 apresentam os boxplots com o resultado de 30 simulações do primeiro passo do MPC para as funções objetivo CVaR e Variância, respectivamente. No caso do CVaR, ocorre um aumento gradativo das perdas esperadas à medida que aumenta o horizonte de predição. Já a variância esperada é significativamente inferior para o horizonte um e equivalente para horizontes maiores que um. A inferioridade obtida para o horizonte um e a equivalência para os demais horizontes foi comprovada pelo Teste Tukey² para comparação múltipla ao nível de significância de 5%. Este comportamento do risco para os diferentes horizontes de predição é discutido detalhadamente na Seção 4.5.2.

De forma geral, para este estudo de caso, é possível destacar que o horizonte de predição influencia consideravelmente o resultado, sendo que,

Os algoritmos de maximização da riqueza foram positivamente afetados pelos horizontes até o valor 15 dias. Acima desse valor, torna-se ineficiente em comparação com a estratégia míopica (que possui horizonte igual a 1).

A variância esperada alcança o menor valor quando $m = 1$ e valores equivalentes para os demais horizontes. Essa diferença de valor entre $m = 1$ e os demais horizontes ocorre

² Em adição às premissas padrões da análise de variância (ANOVA), o método de Tukey foi derivado sob a restrição de que as variâncias da amostra devem ser iguais ([KESELMAN; ROGAN, 1978](#)).

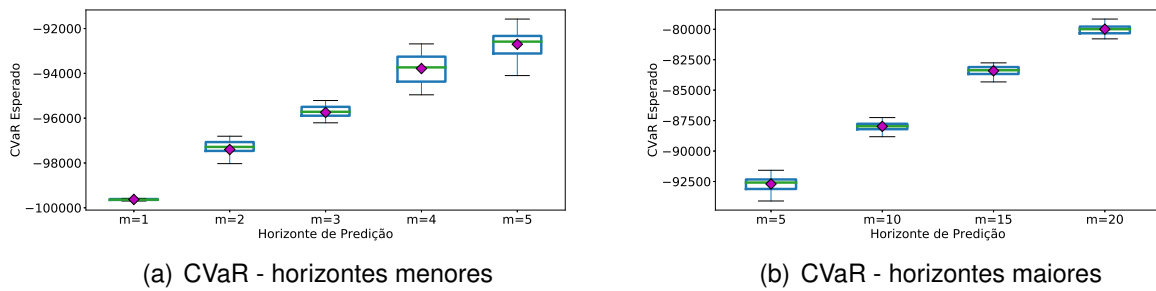


Figura 26 – Análise do efeito do horizonte de predição - CVM

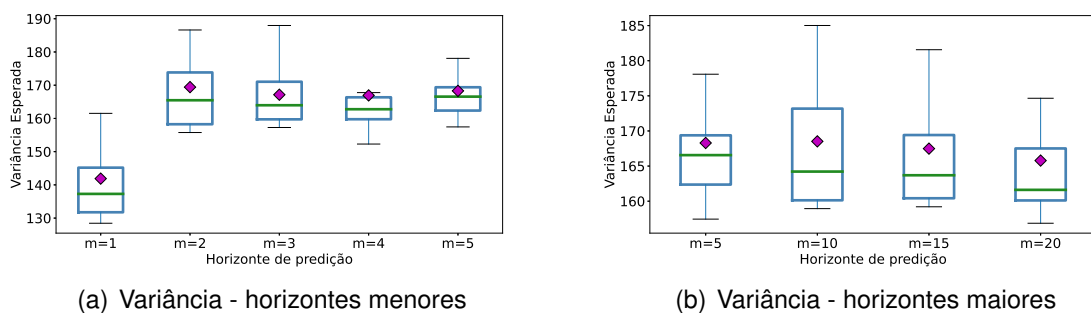


Figura 27 – Análise do efeito do horizonte de predição - VM

porque o algoritmo aloca mais dinheiro em ativos menos voláteis quando $m = 1$.

O CVaR é maior quanto maior for o horizonte de predição. Este comportamento está condizente com a expectativa teórica, pois o CVaR é o somatório das perdas do portfólio, logo quanto mais parcelas neste somatório, maior será o valor do CVaR.

4.5.2 Análise da cardinalidade

Nesta seção a restrição de cardinalidade é detalhadamente investigada no que diz respeito ao risco e ao horizonte de predição. Na Figura 26, vimos que o CVaR esperado aumenta gradativamente junto com o horizonte de predição. Já na Figura 27, vimos que há um destoamento do valor da variância do horizonte um em comparação com os demais horizontes. Por outro lado, para um horizonte de predição fixo o risco aumenta com o aumento da cardinalidade, ao passo que a riqueza diminui com o aumento da cardinalidade, conforme pode ser observado na Figura 28. O entendimento desses comportamentos pode ser obtido a partir de uma análise das carteiras obtidas em cada caso.

Para entender os comportamentos levantados acima, segue um estudo detalhado da estratégia de alocação dos algoritmos VM, CVM e MMV. Para isto, foram consideradas 30 execuções e foi calculada a média de alocação de dinheiro por ativo considerando cardinalidades 5, 10 e 15, e horizontes de predição 1, 5 e 10. Os resultados são apresentados nos mapas de calor das Figuras 29 e 30.

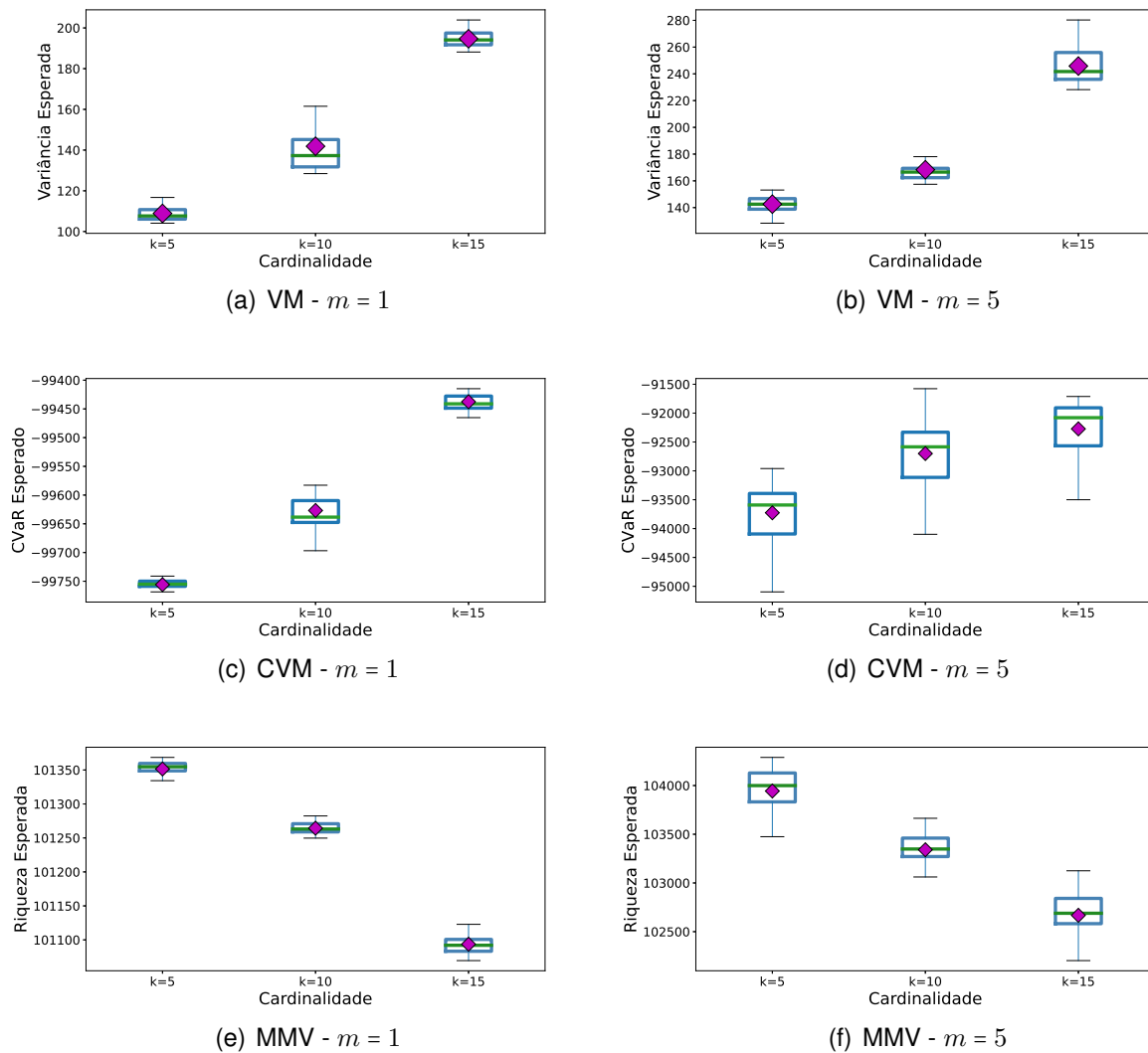


Figura 28 – Boxplot da riqueza e do risco esperado *versus* cardinalidade para os horizontes de predição $m = 1$ e $m = 5$.

A Figura 29 exibe o mapa de calor obtido para o problema MMV. Pode ser destacado que:

- Há predominância na alocação nos ativos PETR3 e PETR4 em todos os cenários simulados. De fato, os ativos mais lucrativos são PETR3 e PETR4, com base na previsão para o dia referente a esta otimização. Portanto, pode-se afirmar que o algoritmo efetivamente busca maximizar a riqueza esperada.
- Existe um padrão de concentração do máximo permitido no PETR3 para o horizonte de predição $m = 1$. O algoritmo então distribui a cota mínima entre os demais ativos para cumprimento da restrição de cardinalidade.
- O comportamento das carteiras com cardinalidades $k = 10$ e $k = 15$ para os horizontes de predição $m = 5$ e $m = 10$ é semelhante, uma vez que concentram-se entre PETR3 e PETR4. A mudança de comportamento de $m = 1$ em relação a $m = 5$ e $m = 10$ é

variar de uma concentração em PETR3 para uma combinação de PETR3 e PETR4, devido à sensibilidade do MPC em construir carteiras de forma multiperíodo.

- A escolha de carteiras para cada instante do horizonte de predição é correlacionada. Isso significa que a seleção da carteira no horizonte $k + 1$ interfere na escolha da carteira no horizonte $k + 2$, o que interfere na escolha da carteira no horizonte $k + 3$ e assim por diante. Esta perspectiva não acontece no caso $m = 1$, uma vez que existe a previsão de apenas um portfólio.

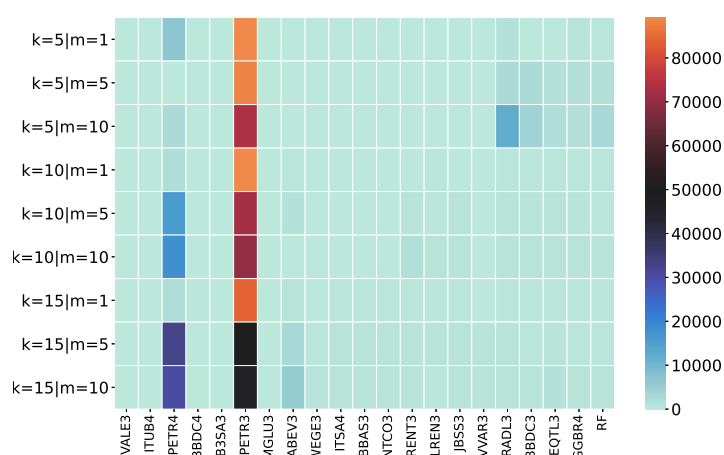


Figura 29 – Mapa de calor da alocação de carteiras após o primeiro passo do MPC - MMV.

A Figura 30 exibe os mapas de calor obtidos para o problema VM e CVM, a partir dos quais é possível observar que as carteiras obtidas pelo algoritmo VM apresentam alocação forte na renda fixa, sendo que as carteiras com cardinalidade 15 apresentam a cor laranja mais forte, o que pela régua de tonalidade significa que são valores menores comparativamente aos valores alocados nas cardinalidades menores. Por sua vez, o algoritmo CVM possui concentração forte na renda fixa apenas para o horizonte de predição igual a um, apresentando alocação predominante nos ativos PETR3 e PETR4 nos demais horizontes.

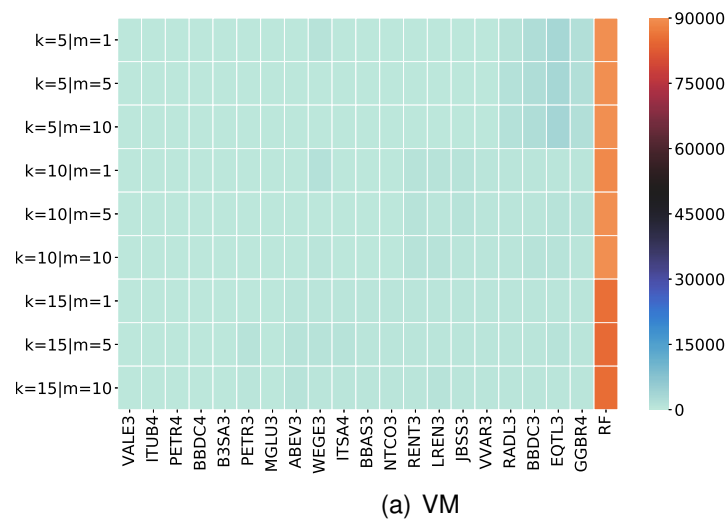
Para uma análise mais criteriosa, levando em consideração os valores específicos das alocações, foi selecionada aleatoriamente uma carteira dentre as 30 que foram consideradas para o mapa de calor de cada algoritmo. As carteiras selecionadas são apresentadas nas Tabelas 3 e 4.

Tabela 3 – Carteiras selecionadas para análise da alocação entre os ativos - VM

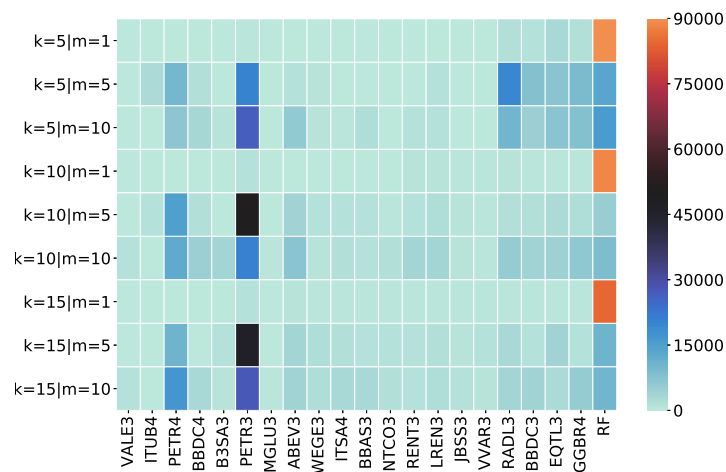
	k=5 m=1	k=5 m=5	k=5 m=10	k=10 m=1	k=10 m=5	k=10 m=10	k=15 m=1	k=15 m=5	k=15 m=10
VALE3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
ITUB4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1056.177744	0.000000	0.000000
PETR4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
BBDC4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
B3SA3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
PETR3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1055.001947	1234.860090
MGLU3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1318.158862	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
ABEV3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1185.340052	1008.644417	1114.206532
WEGE3	0.000000	0.000000	0.000000	2333.225932	0.000000	0.000000	1005.036866	1003.523327	1027.459616
ITSA4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	2054.723375	1045.451280	1000.138779	1062.644506
BBAS3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1007.386169	1019.437259	1005.220253
NTCO3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1000.130981	1013.107583	1025.704140
RENT3	0.000000	0.000000	0.000000	1369.446459	2238.553998	1096.675211	1001.736554	1000.123724	1008.135786
LREN3	0.000000	0.000000	0.000000	1013.590112	1006.894724	1068.050487	1000.081700	1000.234340	1001.727725
JBSS3	0.000000	0.000000	0.000000	1157.317429	1002.477944	1037.007678	1020.346451	1031.162995	1015.448112
VVAR3	0.000000	0.000000	0.000000	1137.909202	1022.166638	1009.058650	1001.546684	1000.082215	1067.861181
RADL3	1934.435208	2538.970521	1467.796274	1047.529530	1001.508608	1005.089892	1002.025182	1004.101030	1000.423031
BBDC3	1180.056498	2183.260156	2512.460052	1016.766205	1001.899693	1007.761800	1001.465506	1000.023597	1016.542973
EQTL3	5071.061710	3294.623380	4511.406447	1000.106467	1008.778317	1000.040942	1002.457060	1000.929903	1448.040744
GGBR4	1814.446584	1983.145943	1508.337227	1018.264566	1017.529777	1007.226417	1000.778331	1002.372131	1011.431024
RENTA FIXA	90000.000000	90000.000000	90000.000000	88905.844098	89382.031440	89714.365548	85670.039442	85861.116753	84960.294287

Tabela 4 – Carteiras selecionadas para análise da alocação entre os ativos - CVM

	k=5 m=1	k=5 m=5	k=5 m=10	k=10 m=1	k=10 m=5	k=10 m=10	k=15 m=1	k=15 m=5	k=15 m=10
VALE3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
ITUB4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
PETR4	0.000000	0.000000	0.000000	1503.912200	0.000000	17490.142581	0.000000	0.000000	85855.926732
BBDC4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	2500.786697	0.000000	0.000000
B3SA3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1093.200318	0.000000	0.000000	0.000000
PETR3	3111.455449	47021.241148	49425.712409	0.000000	88336.692253	5050.414598	1806.942789	80138.199693	0.000000
MGLU3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6209.398757	0.000000	0.000000	0.000000
ABEV3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1624.070081	1000.115630	1186.811374	1003.743456
WEGE3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1516.986150	1679.890171	1018.648453
ITSA4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6953.470908	1029.128548	5800.316880	1058.137186
BBAS3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1044.526573	1005.534613	1000.202607
NTCO3	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	2183.416654	1058.475965	1061.131127	1000.228146
RENT3	0.000000	0.000000	0.000000	1248.766188	1196.908822	0.000000	1001.483286	1021.446044	1009.839117
LREN3	0.000000	0.000000	16668.215756	1002.120377	1037.948871	0.000000	1000.110851	1013.889193	1045.316323
JBSS3	0.000000	0.000000	0.000000	1010.658237	1049.945425	0.000000	0.000000	1061.168508	1000.221755
VVAR3	0.000000	0.000000	0.000000	1166.760019	1239.098811	0.000000	1000.535052	1000.352912	1001.453836
RADL3	3731.188909	30975.527177	6833.363695	1638.750084	1044.535960	8642.881035	1005.749881	1010.264530	1002.392887
BBDC3	0.000000	16677.295412	10471.687809	1000.113739	1154.617170	0.000000	1000.095162	1017.945530	1002.991339
EQTL3	2539.391743	0.000000	0.000000	1037.589863	1130.631108	0.000000	1000.099598	1000.261477	1000.123924
GGBR4	1259.698949	1897.342826	0.000000	1000.017848	2742.477580	43615.548677	1000.111489	1000.295453	1000.744846
RENTA FIXA	89358.264949	3428.593437	16601.020331	89391.311445	1067.143999	7137.456392	83034.852328	1002.492495	1000.029391



(a) VM



(b) CVM

Figura 30 – Mapas de calor da alocação de carteiras após o primeiro passo do MPC.

Pelas Tabelas 3 e 4, percebemos que há uma tendência de repetição dos ativos das cardinalidades menores nas carteiras das cardinalidades maiores em todos os casos para ambos os algoritmos. Além disso, com relação à Tabela 3 é possível destacar que:

- Para a cardinalidade $k = 5$, o algoritmo VM alocou a cota máxima permitida na renda fixa, o ativo com risco nulo. No caso $k = 10$, o algoritmo teve que “abdicar” da segurança do investimento na renda fixa para cumprir a restrição de cardinalidade. Desta forma, ao tirar dinheiro de um ativo com risco nulo e investi-lo num ativo de risco, automaticamente aumenta a variância da carteira. Ao criar a carteira de cardinalidade $k = 15$, o modelo tirou mais dinheiro do ativo livre de risco, aumentando mais uma vez a variância da carteira, o que justifica o comportamento na Figura 28.
- Sobre o fato de a variância para $m = 1$ ser inferior às demais (Figura 27), isso se deve à escolha dos ativos e à quantidade alocada. Embora a alocação máxima permitida

fique restrita à renda fixa, a alteração de alocação dos R\$10.000,00 restantes entre os ativos pode alterar o valor da variância, mesmo que entre os mesmos ativos. Por exemplo, para $k = 5$, em $m = 1$ houve uma alocação de mais de R\$5.000,00 no ativo EQTL3, que é o menos volátil entre os ativos (veja Figura 31), o que corrobora o valor mais baixo da variância comparativamente às carteiras com $m = 5$ e $m = 10$ e cardinalidade 5. O mesmo ocorre para $k = 10$, pois o ativo com maior alocação desconsiderando-se a renda fixa, é WEGE3, o menos volátil dentre os ativos RENT3 e ITSA4, que são os ativos com maior alocação desconsiderando-se a renda fixa para os casos $m = 5$ e $m = 10$, respectivamente.

- A inclusão da renda fixa como opção de investimento alterou completamente a perspectiva da relação risco e cardinalidade comparativamente à relação obtida nos problemas de otimização de portfólio tradicionais. No problema de otimização de portfólio tradicional (onde não há ativo com risco nulo), é comum as carteiras com maiores cardinalidades apresentarem risco menor, o que é um dos principais motivos para preferência por carteiras diversificadas. Este comportamento não foi observado no caso dos modelos apresentados neste trabalho, visto que a melhor estratégia para diminuir o risco é ficar alocado no ativo livre de risco. Desta forma, a diversificação deixa de fazer sentido quando busca-se diluir o risco.

VALE3	ITUB4	PETR4	BBDC4	B3SA3	PETR3	MGLU3	ABEV3	WEGE3	ITSA4
0,697	0,281	0,296	0,305	0,334	0,315	0,428	0,322	0,249	0,294
BBAS3	NTCO3	RENT3	LREN3	JBSS3	VVAR3	RADL3	BBDC3	EQTL3	GGBR4
0,368	0,422	0,316	0,321	0,418	0,578	0,361	0,311	0,201	0,300

Figura 31 – Volatilidade anualizada dos ativos

Com relação à Tabela 4, pode-se destacar que:

- Somente para o horizonte $m = 1$ há uma concentração forte na renda fixa. Além disso, a alocação na renda fixa é maior para as cardinalidades menores. Neste caso, isso ocorre por motivo semelhante ao visto no caso da Variância. Para cumprir a restrição de cardinalidade é necessário tirar o dinheiro alocado na renda fixa para investi-lo em algum ativo de risco. Por isso, o aumento do risco com o aumento da cardinalidade na Figura 28.
- A estratégia do algoritmo VM em manter sempre a alocação na renda fixa é intuitiva. Para entender a estratégia do algoritmo CVM, é preciso entender qual novidade o CVaR traz em relação à variância. A novidade é que o CVaR é uma medida assimétrica, que leva em consideração apenas as oscilações negativas do retorno. Desta forma, o CVaR é mais flexível que a variância e pode ter mais mobilidade na alocação dos ativos, no sentido de ter a possibilidade de sair um pouco da renda fixa em busca de uma oportunidade mais rentável. Mas, como o aumento do horizonte de predição está relacionado com o aumento do número de carteiras que o algoritmo tem que construir (uma para cada dia do horizonte de predição), uma pequena alteração que

inclua mais exposição ao risco pode desencadear sucessivas alterações nas carteiras subsequentes, o que aumenta a exposição ao risco e, conseqüentemente, o valor esperado de perdas. Como quanto maior o horizonte maior o número de carteiras para serem gerenciadas, esse “efeito em cascata” faz o CVaR elevar-se com o aumento do horizonte de predição. Este raciocínio é exclusivo do MPC. Note que para $m=1$, o comportamento dos algoritmos CVM e VM foi semelhante. Por outro lado, este “efeito cascata” não acontece com a variância porque há um padrão em se manter sempre a maior alocação possível na renda fixa. Dessa forma, não há um momento que se possibilite a inclusão de risco maior em alguma das carteiras.

Para reforçar a compreensão da relação entre o horizonte de predição e os valores de variância e CVaR esperados, um estudo análogo ao que foi apresentado, mas sem considerar a renda fixa, foi realizado e é apresentado a seguir. Os boxplots apresentados na Figura 32 indicam que os algoritmos apresentam a mesma tendência: a variância esperada é menor para o horizonte um e semelhante dentre os demais horizontes, e o CVaR aumenta com o aumento do horizonte de predição. Chama-se atenção para o aumento explosivo dos valores da variância esperada, ocasionado por não haver o ativo livre de risco.

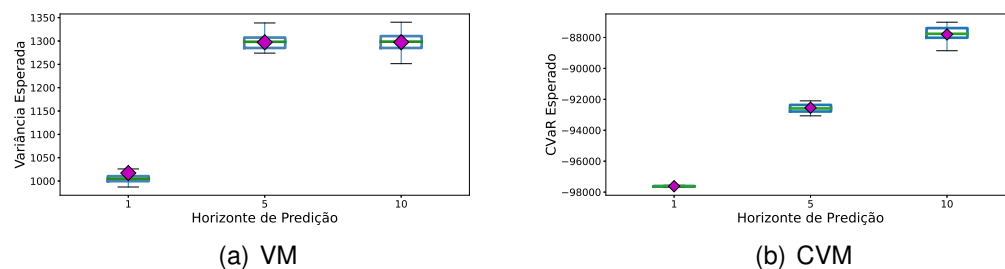
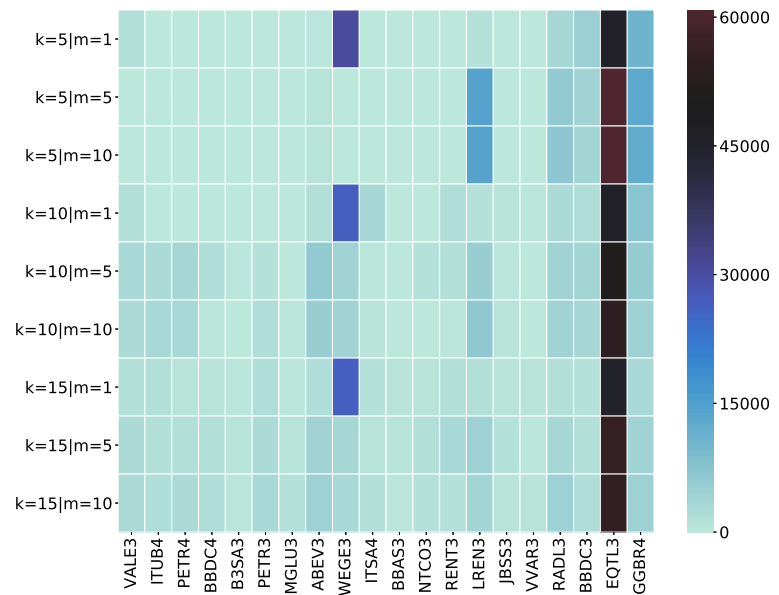
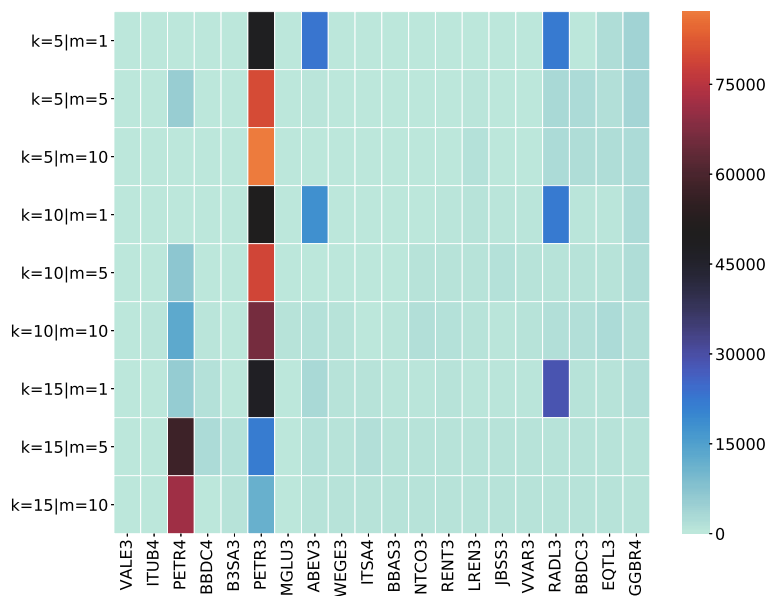


Figura 32 – Boxplot do risco esperado - sem renda fixa

A Figura 33 apresenta os mapas de calor da média da alocação de recursos por ativo. Na ausência do ativo livre de risco, o algoritmo se manteve concentrado no ativo EQTL3 e, no caso $m = 1$, também em WEGE3. Note que esses foram respectivamente os ativos que apresentaram menor volatilidade (Figura 31), o que está condizente com o esperado para o algoritmo VM. No caso $m = 1$, a alocação nos dois ativos menos voláteis culminou no menor valor de variância esperada.



(a) VM



(b) CVM

Figura 33 – Mapas de calor da alocação de carteiras - sem renda fixa

4.6 Análise Multiobjetivo (*In-Sample*)

Nesta seção é apresentada a análise *in-sample* dos algoritmos multiobjetivo. Foram considerados os mesmos dados utilizados na análise *in-sample* dos algoritmos mono-objetivo. Por meio desta análise, pretende-se validar a implementação dos algoritmos multiobjetivo, a escolha dos parâmetros e a avaliação da relação de dominância entre as diversas cardinalidades e os horizontes de predição escolhidos. Conforme visto na Seção 4.5.1, o horizonte de predição cinco foi o mais eficaz neste estudo de caso. Por sua vez, o horizonte de predição um representa a estratégia miópica do MPC, que é uma estratégia padrão e presente em todos os artigos que lidam com o MPC. Diante destes apontamentos, a análise *in-sample* multiobjetivo leva em consideração os horizontes de predição um e cinco.

4.6.1 Avaliação das melhores fronteiras ao término do algoritmo

Após algumas simulações considerando diferentes valores para os parâmetros do algoritmo genético, foi constatado que cada problema de otimização demanda valores específicos para esses parâmetros, em especial a quantidade de gerações. Dessa forma, os parâmetros mais adequados foram 1000 indivíduos em todos os casos, 250 gerações para os problemas de otimização que envolvem a medida de risco variância, 350 e 450 gerações para os problemas de otimização com a medida de risco CVaR e horizontes um dia e cinco dias, respectivamente.

Na Figura 34 encontram-se as melhores fronteiras ao término do algoritmo para o MO-MPC Riqueza-Variância após a primeira execução. Os valores de riqueza e variância esperadas são calculados para cada ponto da fronteira obtida pela otimização no último instante do horizonte de predição. A figura apresenta fronteiras bem representativas do espaço de objetivos, com a relação de dominância bem definida:

- As cardinalidades menores dominam as cardinalidades maiores, relativamente aos respectivos horizontes de predição.
 - Cardinalidades menores são mais adequadas neste estudo de caso.
 - As carteiras com cardinalidades menores têm a possibilidade de investir mais dinheiro nos ativos com maior expectativa de retorno, por isso, tendem a alcançar valores de riqueza esperada maiores.
- As fronteiras com horizonte de predição cinco dominam as fronteiras com horizonte de predição um.
 - O horizonte de predição cinco é potencialmente superior ao horizonte de predição um neste estudo de caso.
 - O horizonte de predição cinco obteve riquezas maiores para o mesmo nível de risco. Isto ocorre porque as fronteiras da Figura 34 (b) estão considerando

a riqueza esperada após cinco dias de negociação enquanto as fronteiras da Figura 34 (a) possuem riqueza esperada para apenas um dia. Logo, cinco dias de negociação podem gerar um capital maior caso a expectativa dos retornos dos ativos selecionados seja positiva.

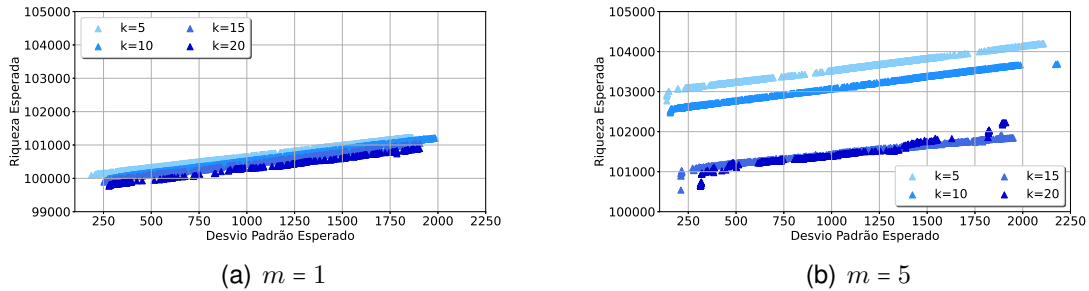


Figura 34 – Melhores fronteiras obtidas após a primeira execução - MO-MPC Riqueza-Variância

As métricas de avaliação são apresentadas para os problemas de otimização MO-MPC Riqueza-Variância e MO-MPC Riqueza-CVaR. Os valores apresentados nos gráficos são a média das métricas obtidas em 30 simulações do MO-MPC considerando a evolução das gerações do primeiro passo do MO-MPC. Na Figura 35 estão as métricas referentes ao problema MO-MPC Riqueza-Variância. Para $m = 1$, observa-se que a convergência se estabelece por volta da geração 100 para as cardinalidades cinco e dez, e por volta da geração 200 para as cardinalidades 15 e 20, sendo que o algoritmo encerra com todas as cardinalidades convergindo com valor de hipervolume semelhante. Já para a métrica delta, a convergência ocorre de forma contundente antes de 100 gerações para todas as cardinalidades. Já para o horizonte $m = 5$, há uma disparidade entre as duas cardinalidades menores e as cardinalidades maiores. Esta disparidade já era previsível devido à disposição das fronteiras, como as fronteiras das cardinalidades cinco e dez dominam as fronteiras das cardinalidades 15 e 20, a área de abrangência das duas primeiras é muito maior, o que é bem representado pelo valor obtido para o hipervolume. Por outro lado, a representatividade (alcance dos pontos da fronteira) das fronteiras com cardinalidade 15 e 20 é inferior àquela apresentada para as cardinalidades cinco e dez, este fato é evidenciado pela métrica delta, que possui uma dificuldade maior de se estabilizar no caso das cardinalidades maiores, todavia ocorre a estabilização antes das 250 gerações e para um valor próximo àquele obtido para as cardinalidades menores. Apesar da diferença apresentada pelo hipervolume, a métrica delta convergiu. A métrica delta foi apta a equalizar os valores garantindo a convergência e a boa qualidade das fronteiras. Sendo assim, conclui-se que o melhor resultado ao término do algoritmo é constituído por fronteiras representativas e soluções não dominadas, que era o que se buscava com o algoritmo multiobjetivo.

Na Figura 36 encontram-se as fronteiras de Pareto para o MO-MPC Riqueza-CVaR após a primeira execução. Os valores de riqueza e CVaR esperados são calculados para

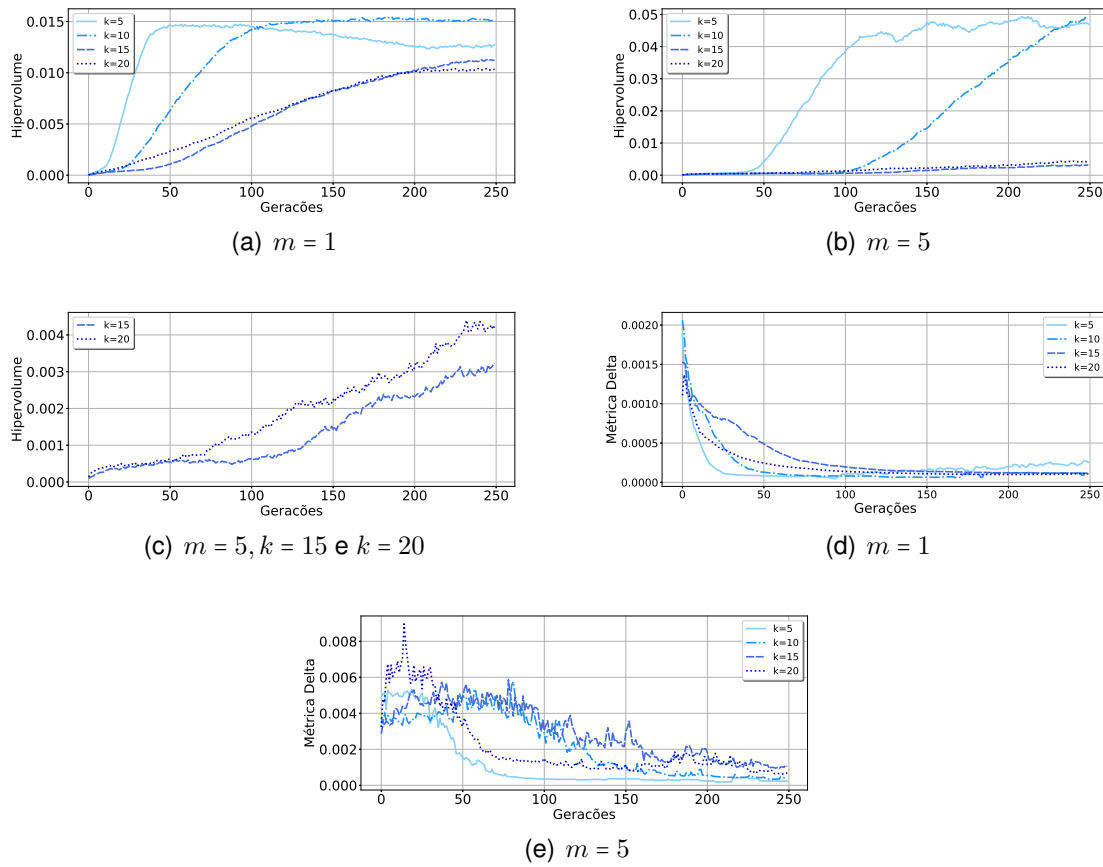


Figura 35 – Média das métricas de avaliação no decorrer das gerações - MO-MPC Riqueza-Variância

cada ponto da fronteira de Pareto obtida pela otimização no último instante do horizonte de predição. A figura apresenta fronteiras bem representativas do espaço de objetivos, com a relação de dominância bem definida no que diz respeito à cardinalidade de um mesmo horizonte de predição. Quando comparam-se as fronteiras de horizontes de predição diferentes, a relação de dominância não é hierárquica, no sentido de uma dominar a outra. O horizonte de predição cinco ofereceu riquezas maiores para as cardinalidades cinco e dez. No entanto, conforme já havia sido constatado na análise *in-sample* mono-objetivo, horizontes de predição maiores culminam em valores de CVaR maiores. Desta forma, embora as cardinalidades cinco e dez alcancem valores de riqueza maiores, estas vêm associadas com riscos maiores. Por isso, não é possível afirmar categoricamente que o horizonte de predição cinco é mais vantajoso no caso do MO-MPC Riqueza-CVaR como foi possível no caso do MO-MPC Riqueza-Variância. Esta afirmação pode ser proferida caso o investidor possua propensão ao risco e esteja focado exclusivamente em aumentar o retorno do investimento. De toda forma, no que diz respeito à riqueza esperada, o horizonte de predição cinco foi sim capaz de obter valores não atingíveis pela estratégia miópica.

A Figura 37 apresenta as métricas de avaliação para o problema MO-MPC Riqueza-CVaR. Os valores apresentados são a média das métricas obtidas em 30 simulações.

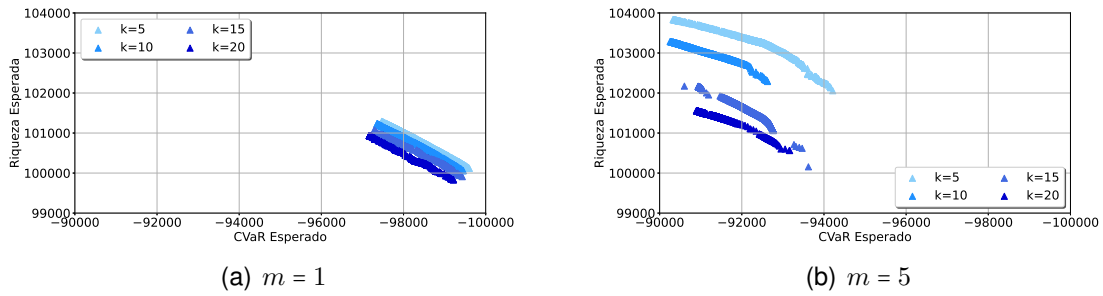


Figura 36 – Melhores fronteiras obtidas após a primeira execução - MO-MPC Riqueza-CVaR

Conforme pode ser visto, o problema com horizonte de predição $m = 5$ demandou uma quantidade de gerações maior para a estabilização do algoritmo em relação ao problema com horizonte de predição $m = 1$. O ajuste realizado para a quantidade de gerações foi suficiente para a convergência do algoritmo em todos os casos, evidenciando que o algoritmo de otimização proposto foi bem sucedido em obter uma fronteira representativa e a escolha dos parâmetros foi suficiente para garantir a estabilização do algoritmo.

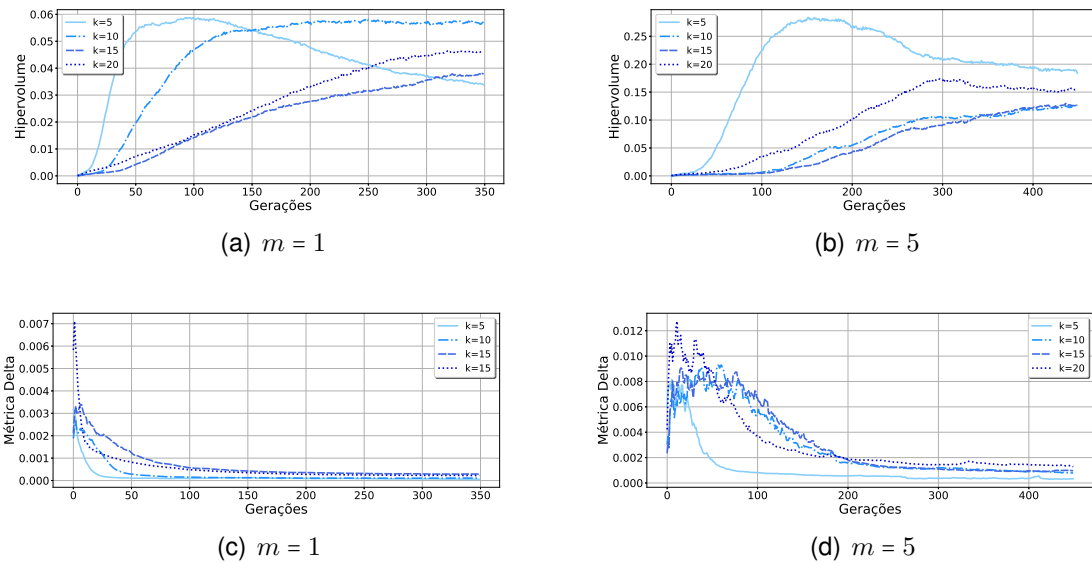


Figura 37 – Métricas de avaliação no decorrer das gerações - MO-MPC Riqueza-CVaR

4.6.2 Alocação em Renda Fixa

Para averiguar a alocação em renda fixa de acordo com o perfil de investidor, foram consideradas as carteiras com cardinalidade cinco, obtidas nas 30 simulações realizadas na Seção 4.6.1. Os boxplots com a alocação em renda fixa são dados pela Figura 38. Como pode ser observado, em cada caso a alocação em renda fixa cumpriu a expectativa dada pelo perfil do investidor. O perfil conservador obteve a maior alocação, o perfil moderado obteve uma alocação intermediária e o perfil agressivo obteve alocação mínima. Chama-se a

atenção para a alta concentração em renda fixa nos problemas envolvendo a variância e no problema MO-MPC Riqueza-CVaR com $m = 1$. O problema MO-MPC Riqueza-CVaR $m = 5$, embora tenha respeitado a hierarquia de investimento entre os perfis, alocou valores muito menores comparados ao demais, até mesmo para o perfil conservador. Este comportamento já tinha sido observado no caso mono-objetivo e reflete a característica *downside-risk* dentro da perspectiva do horizonte de predição.

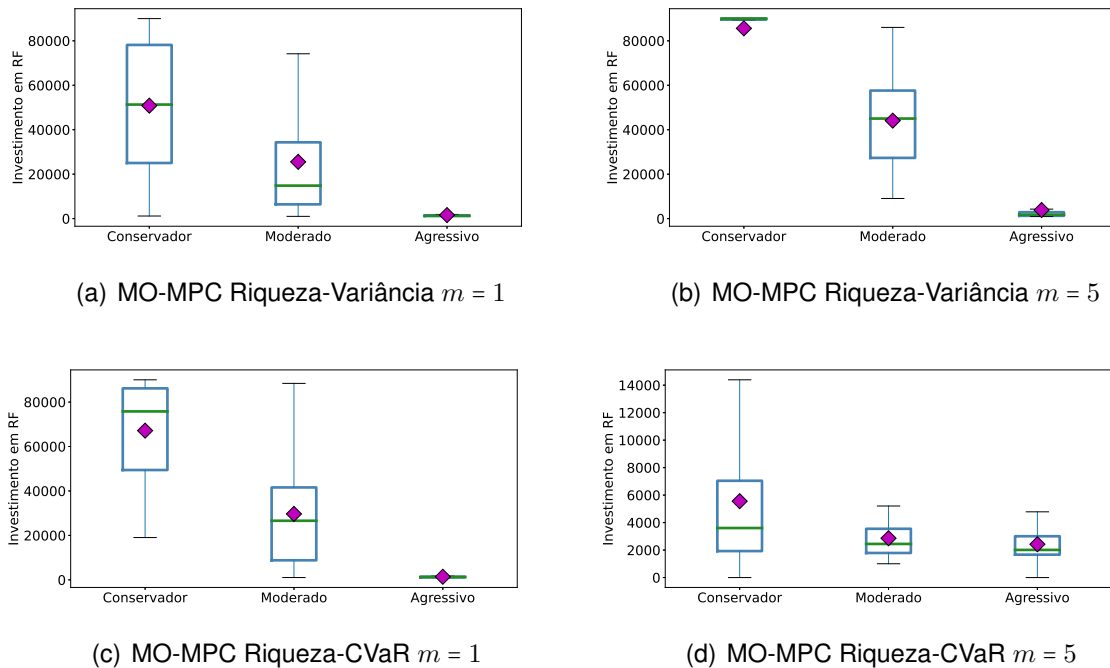


Figura 38 – Alocação em renda fixa após a primeira execução do MPC considerando as carteiras com cardinalidade cinco obtidas na Seção 4.6.1.

4.6.3 Avaliação do risco e do retorno de acordo com o perfil de investidor

Para a avaliação do risco e do retorno de acordo com o perfil do investidor foram realizadas 30 simulações de cada problema para o primeiro passo do MPC considerando o primeiro dia útil de 2020 e a cardinalidade de cinco ativos definidos de acordo com o Quadro 2. O retorno esperado é dado pela riqueza esperada no último dia do horizonte de predição em relação à riqueza atual. O retorno esperado para horizonte $m = 5$ é maior porque trata-se de um período de cinco dias entre a riqueza atual e a riqueza esperada, ao passo que o retorno esperado para o caso $m = 1$ refere-se ao período de um dia. Em todos os casos há a confirmação da expectativa teórica no sentido do retorno esperado ser maior para o perfil agressivo, intermediário para o perfil moderado e menor para o perfil conservador.

A análise *in-sample* dada pelo retorno acumulado à medida que se desloca a janela deslizando não é possível ser realizada. Como, por definição, a estratégia dada pelo MPC

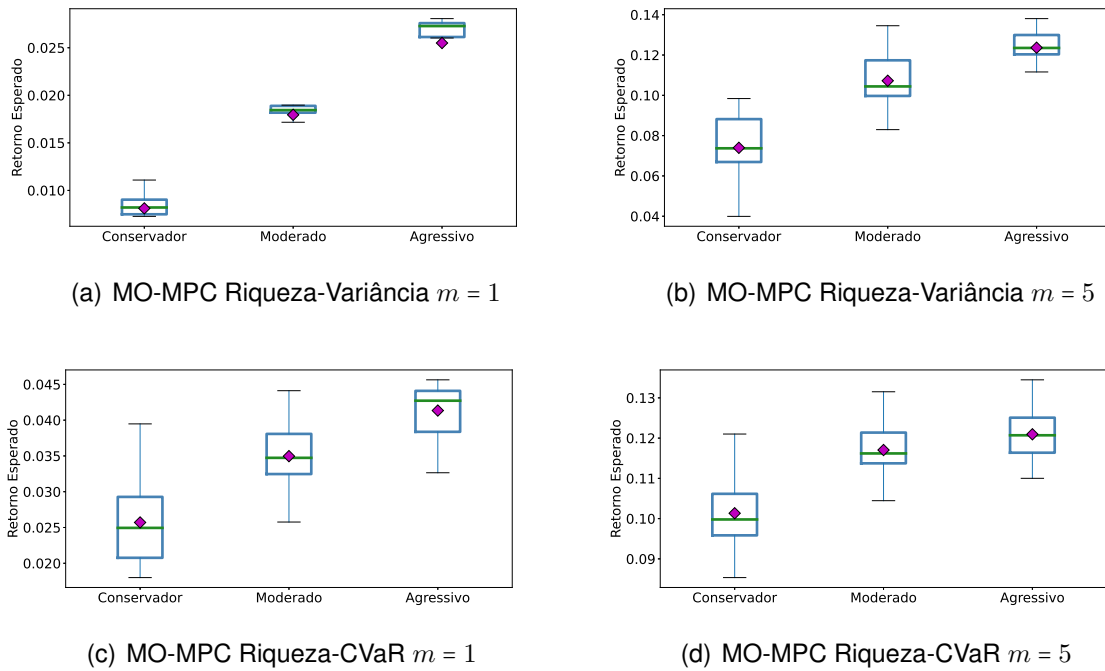


Figura 39 – Boxplot dos retornos esperados de acordo com o perfil do investidor ($k = 5$).

atualiza o sistema com a riqueza real obtida pela carteira ótima em cada instante de tempo, a riqueza real é susceptível às condições de mercado. Assim, embora a resposta do algoritmo multiobjetivo proporcione a expectativa

Riqueza Esperada (Agressivo) > Riqueza Esperada (Moderado) > Riqueza Esperada (Conservador),

ao apurar a rentabilidade real, essas desigualdades podem não se manter. Desta forma, as riquezas reais obtidas pelas carteiras de cada perfil são diferentes das riquezas esperadas previstas pelo algoritmo e não necessariamente respeitam a hierarquia definida. Sendo assim, ao iniciar um novo passo, não existe uma hierarquia entre as riquezas de cada perfil de investidor, de onde não é possível dar continuidade à comparação iniciada no passo anterior. Logo, perde-se o sentido em comparar essas estratégias quando considera-se mais que um passo do MPC.

A Figura 40 traz os boxplots com o risco esperado em cada caso. O risco esperado também satisfaz a expectativa teórica de que o investimento mais agressivo está associado ao maior risco, o investimento moderado está associado a um risco intermediário e o investimento conservador está associado a um risco menor. São observados os mesmos comportamentos já constatados na análise mono-objetivo. A variância para o horizonte $m = 5$ é maior que a variância para o horizonte $m = 1$. A perda financeira para o horizonte $m = 5$ é maior que a perda financeira para o horizonte $m = 1$. Ressalta-se que a perda financeira foi calculada pela diferença entre a riqueza esperada e o CVaR esperado, ambos no último dia do horizonte de predição.

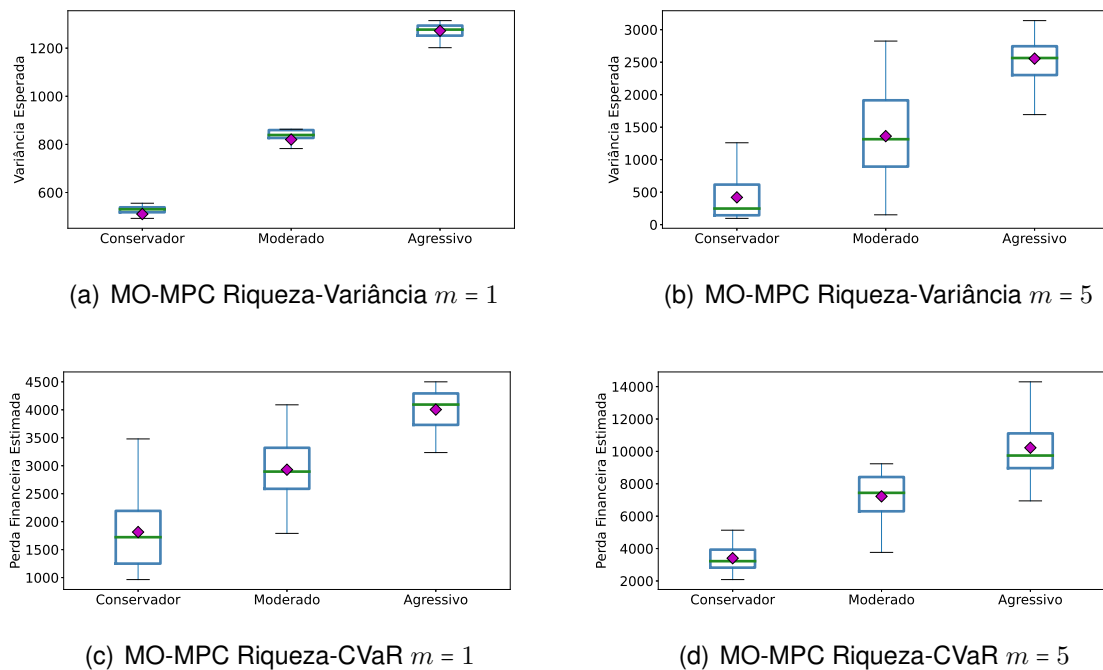


Figura 40 – Boxplot dos riscos esperados de acordo com o perfil do investidor ($k = 5$).

As análises *in-sample* realizadas nesta seção mostram que, para este estudo de caso, os algoritmos apresentaram resultados compatíveis com as expectativas teóricas. Logo, o modelo e os algoritmos estão aptos a realizar simulações fora da amostra para avaliação do desempenho das estratégias frente às condições de mercado. Estas simulações são apresentadas na Seção 4.7.

4.6.4 Tempo de execução algoritmos multiobjetivo

Por fim, a Figura 41 contém os boxplots com os tempos de execução por iteração (em segundos) dos algoritmos multiobjetivo. Considere MV o problema multiobjetivo com a medida de risco variância e MC o problema multiobjetivo com medida de risco CVaR. Como pode-se perceber, há um destoamento entre os tempos de execução de MV e MC. Isto se deve à inclusão dos cenários no caso da medida de risco CVaR. O aumento de tempo também ocorre quando utiliza-se o horizonte de previsão de cinco dias. Convém ressaltar que, como o período de amostragem é diário e cada execução empenha menos que uma hora de execução, este tempo é compatível com a viabilidade do uso dos algoritmos na prática cotidiana do investidor.

4.7 Análise Multiobjetivo (*Out-of-Sample*)

Nesta seção é realizada a análise *out-of-sample* dos algoritmos multiobjetivo utilizando os parâmetros definidos anteriormente. A análise é realizada ao longo dos

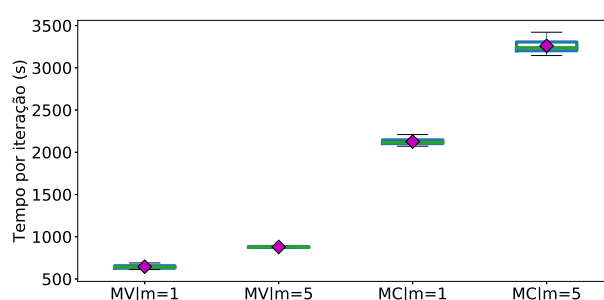


Figura 41 – Tempo de execução por iteração (em segundos).

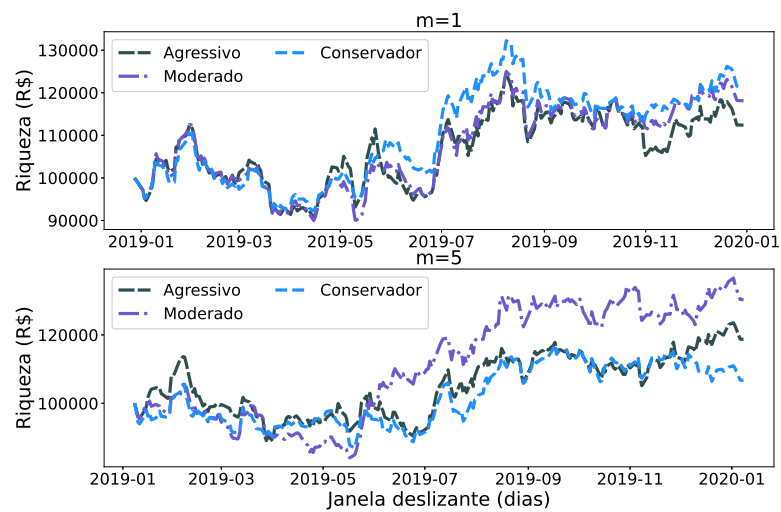
anos 2019 e 2020. Foram escolhidos esses dois períodos por estes corresponderem a situações chave para a representatividade da diversidade de cenários ocorridos no mercado financeiro brasileiro recentemente. O ano 2019 representa genuinamente o que se espera do *Bull Market*, com baixa instabilidade e tendência de alta. Já o ano 2020 traz consigo uma mudança de personalidade brusca, refletindo o quão intensa pode ser a instabilidade do mercado. A pandemia de COVID-19 e a insegurança causadas pelo coronavírus SARS-CoV-2 culminaram em grande situação de alerta sobre os rumos que a economia global poderia tomar diante de um cenário caracterizado por grandes incertezas. A situação atingiu seu ápice quando, pela primeira vez no mercado financeiro brasileiro, o *circuit breaker*³ foi acionado seis vezes num único mês (março/2020). No entanto, com a compreensão mais clara em torno dos desdobramentos decorrentes da nova situação, o mercado financeiro brasileiro conseguiu recuperar parte do prejuízo e encerrou o ano com retorno acumulado positivo. É razoável considerar que submeter os modelos propostos a dois períodos de tempo tão distintos irá proporcionar a validação necessária das habilidades dos modelos frente a diferentes animosidades do mercado.

Conforme visto na Seção 4.6, a cardinalidade cinco apresentou as melhores fronteiras, por isso, na análise *out-of-sample* são consideradas apenas carteiras com cardinalidade cinco. O problema MO-MPC Riqueza-CVaR é considerado nesta análise *out-of-sample*.

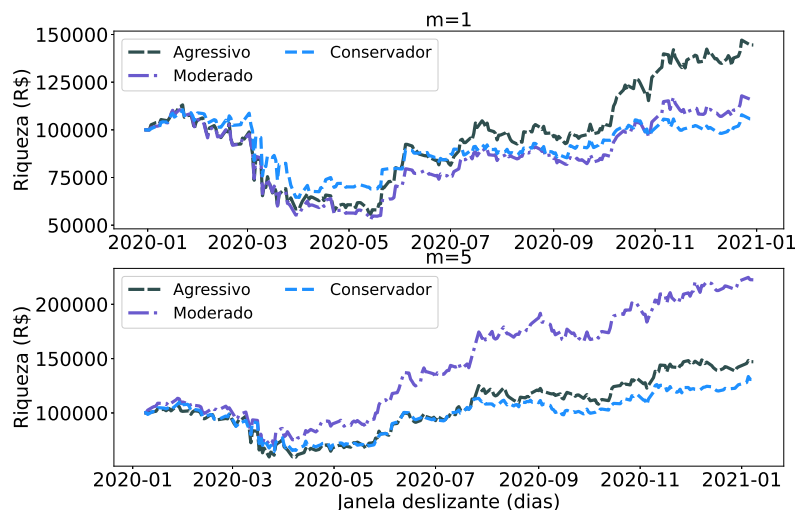
A Figura 42 apresenta as riquezas acumuladas nos anos 2019 e 2020 para $m = 1$, $m = 5$ e os três perfis de investimento. Observa-se um comportamento mais próximo entre as riquezas quando $m = 1$. O destacamento da riqueza do perfil moderado em relação à demais quando $m = 5$ deve-se porque o horizonte de predição igual a cinco é acompanhado por ruídos maiores no modelo de previsão. Além disso, porque o perfil agressivo está alocando muito capital em ativos muito instáveis, o que faz o retorno acumulado sofrer maiores perdas. Já o perfil conservador investe em ativos menos voláteis. Esses dois comportamentos favorecem o investir moderado, que possui um investimento que concilia a alocação entre ativos mais

³ *Circuit breaker* na bolsa de valores é um mecanismo utilizado para interromper as negociações quando o mercado passa por uma queda acentuada (SUBRAHMANYAM, 1994).

voláteis e ativos menos voláteis, de forma que, quando o investimento moderado cai, não cai tanto e por outro lado, considera ativos com um potencial de retorno razoável. As estratégias de 2020 ($m = 1$) representam bem o que se espera teoricamente das escolhas baseadas no perfil de investidor. O perfil conservador foi o que mais conteve a queda. Tão logo o mercado retomou o crescimento, o perfil agressivo recuperou-se da queda e angariou rentabilidade acima das demais estratégias, ao passo que o perfil moderado se manteve numa posição intermediária durante todo o período.



(a) 2019



(b) 2020

Figura 42 – Riqueza efetiva acumulada para a estratégia MO-MPC Riqueza-CVaR em 2019 e 2020 considerando os três perfis de investimento para $k = 5$.

A Tabela 5 contém o Máximo Drawdown⁴ e o Índice de Sharpe das estratégias

⁴ Máximo Drawdown é um indicador de risco que evidencia a maior perda ocorrida desde um ponto de alta

Tabela 5 – Medidas Índice de Sharpe e Máximo Drawdown para as riquezas apresentadas na Figura 42 considerando $m = 5$.

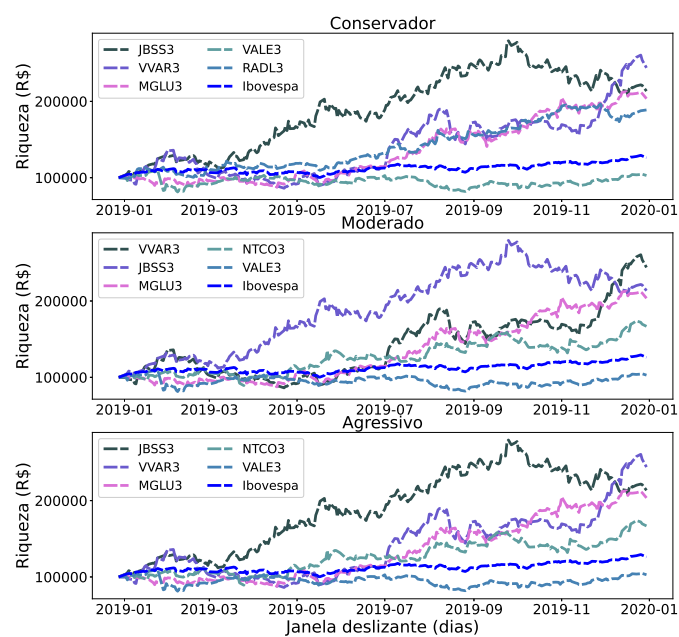
Year	Índice de Sharpe				Máximo Drawdown			
	Conservador	Moderado	Agressivo	Ibovespa	Conservador	Moderado	Agressivo	Ibovespa
2019	0,11	1,52	1,49	3,98	17%	20%	21%	11%
2020	1,62	2,57	1,79	-0,22	41%	38%	44%	47%

apresentadas na Figura 42 considerando $m = 5$. O Índice de Sharpe das estratégias é maior que um em todos os casos, exceto o Conservador-2019. Quando o Índice de Sharpe é maior que um, isso significa que obteve-se mais de uma unidade de retorno para cada unidade de risco, o que é bem visto pelos investidores em geral. Com relação ao Máximo Drawdown, os valores são discrepantes entre 2019 e 2020. Yu, Xie e Xu (2014) consideraram o Máximo Drawdown como uma restrição do problema de seleção de portfólio utilizando limites máximos $\frac{1}{3}$, 0,25, 0,2 e 0,1 para o Máximo Drawdown de 5. Considerando que estes são limites padrões aceitáveis, os valores obtidos do Máximo Drawdown para o ano 2019, dados na Tabela 5, são otimistas, dentro da expectativa do mercado. Por outro lado, os valores do Máximo Drawdown para 2020 apresentados na Tabela 5 são demasiadamente altos. Esse aumento repentino é explicado por Ellwood Associates (2021), ao elucidar que a profundidade e o comprimento do Drawdown diferem quando auferidos em tempo de recessão ou durante tempos não-recessionários. Para o período da pandemia do Coronavírus, o Máximo Drawdown do índice S&P 500 foi 40%, e do Ibovespa foi 47%, de onde conclui-se que os valores de máximo Drawdown das estratégias propostas para o ano 2020 estão dentro da média do mercado.

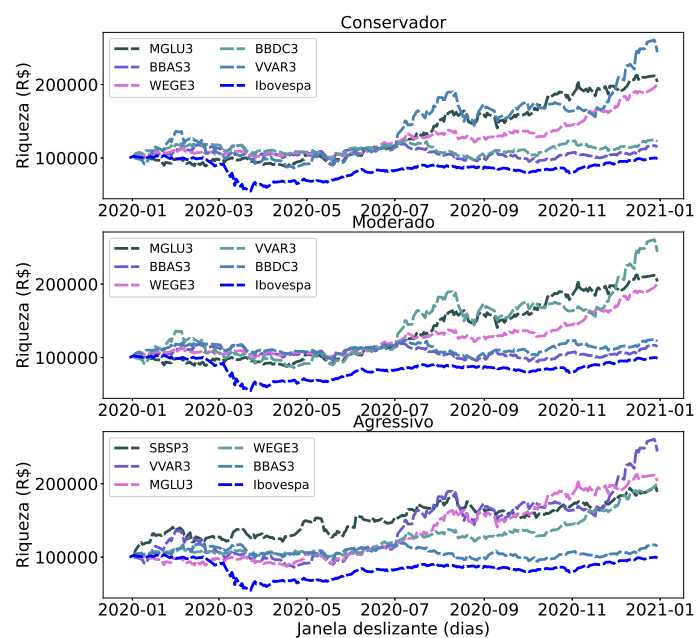
Para melhor entendimento sobre o comportamento das estratégias da Figura 42, são apresentadas as riquezas acumuladas dos cinco ativos com maior participação média ao longo de cada período. Essas riquezas acumuladas dos ativos com maior participação nas carteiras encontram-se na Figura 43, as quais também podem ser comparadas com a riqueza acumulada do Ibovespa para os respectivos períodos. Observa-se que as estratégias foram aptas a identificar ativos com alto potencial de rentabilidade, indicando que o modelo acertou na escolha da composição das carteiras. Chama-se a atenção para a habilidade em identificar os ativos com maior potencial de rentabilidade em meio ao cenário caótico enfrentado em 2020. Isto se deve à combinação de várias qualidades do modelo, dentre elas a antecipação de eventos futuros com uma visão ótima de posicionamento e a realocação dinâmica das carteiras, que permite correções e ajustes contínuos amortecendo os efeitos da instabilidade do mercado.

Para finalizar, a Figura 44 apresenta a comparação da riqueza acumulada mensal da estratégia MO-MPC Riqueza-CVaR com $m = 5$ e perfil moderado comparada com a riqueza acumulada mensal de alguns fundos de investimentos brasileiros e do Ibovespa.

(pico) até um ponto de mínima em uma série histórica.



(a) 2019



(b) 2020

Figura 43 – Retorno acumulado das cinco ações com maior participação média em cada portfólio no decorrer de 2019 e 2020 - $k = 5$, $m = 5$.

Ressalta-se que a riqueza acumulada da estratégia proposta supera a riqueza acumulada do Ibovespa em ambos os casos. O retorno acumulado da estratégia proposta é maior tanto em 2019 quanto em 2020, confirmando que a estratégia foi apta a identificar as melhores oportunidades em cada período. Retornos anuais de 40% representam estratégias de investimentos muito bem sucedidas, uma vez que os maiores investidores do mercado de ações apresentam média de retorno anual na casa dos 20%. Os fundos Atmos, Brasil Capital e Dynamo estão reconhecidamente entre os melhores fundos brasileiros há mais de dez anos, com destaque para Dynamo há 25 anos. Embora a estratégia proposta não tenha superado esses fundos em 2019, ela o fez em 2020, devido à alocação em ativos que tiveram uma alta valorização durante a retomada de crescimento após o declive de março-abril/2020, conforme foi apresentado na Figura 43.

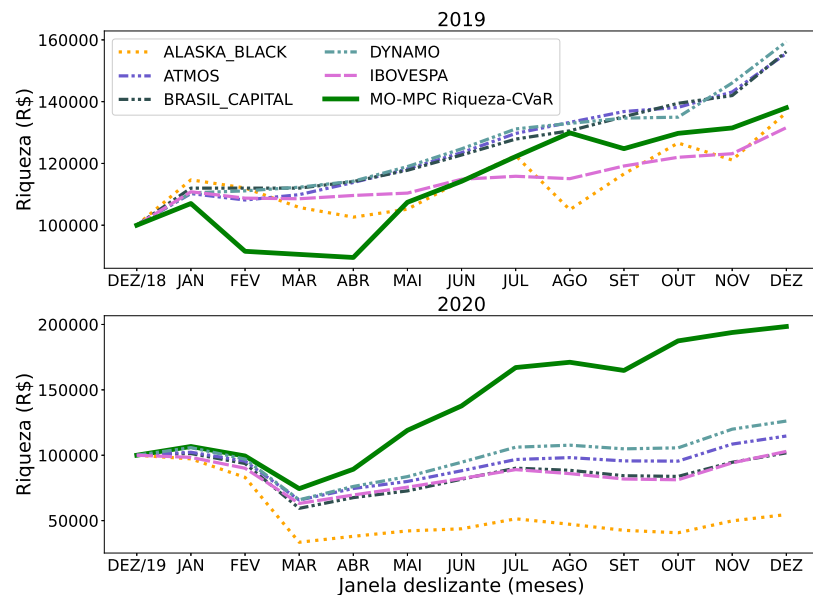


Figura 44 – Comparação dos retornos mensais entre a estratégia MO-MPC Riqueza-CVaR com fundos de investimento e o Ibovespa em 2019 e 2020 - $k = 5, m = 5$.

5 Conclusões

Neste trabalho é proposto um arcabouço matemático e computacional constituído de aplicações do método MPC à otimização de portfólios de investimentos. Como inovação proposta neste trabalho de doutorado, é definida uma abordagem do MPC multiobjetivo para a otimização de portfólio de investimentos com custos de transação e restrição de cardinalidade. As funções riqueza, variância e CVaR esperados são modeladas incorporando o horizonte de predição. A otimização ocorre sempre no último instante de tempo do horizonte de predição (custo terminal). A restrição de cardinalidade para o problema de seleção de portfólio utilizando-se a estratégia MPC é uma contribuição deste trabalho, bem como, a proposta do MPC multiobjetivo para lidar com este problema.

Como contribuições primordiais deste trabalho destacam-se: a formulação multiperíodo para as medidas de risco, especialmente para o CVaR, que contou com a descrição detalhada sobre a incorporação dos cenários dentro da perspectiva do horizonte de predição; a adaptação do algoritmo genético NSGA-II para tratar as restrições de forma intrínseca nos seus operadores, ressaltando-se que esta adaptação transcende sua aplicabilidade no âmbito do NSGA-II, visto que pode ser utilizada por outros algoritmos genéticos; a inovação em utilizar o algoritmo genético dentro da perspectiva do horizonte de predição, respeitando as previsões e restrições respectivas a cada dia do horizonte; a proposta da otimização multiobjetivo para o MPC no contexto de seleção de portfólio, incluindo a restrição de cardinalidade; a análise criteriosa do efeito do horizonte de predição nas funções objetivo, bem como da composição das carteiras, do impacto da renda fixa no risco da carteira, dos custos de transação e da cardinalidade de forma geral. Também importante foi a contribuição do estudo das melhores fronteiras ao término do algoritmo frente ao horizonte de predição e à cardinalidade juntamente com as métricas de avaliação, bem como a análise numérica do desempenho das estratégias propostas diante de cenários representativos de diversas condições de mercado.

Além das contribuições teóricas, a metodologia dos experimentos é uma contribuição do trabalho. As simulações realizadas com dados da B3, embora caracterizem-se como estudo de caso, podem ser consideradas contribuições práticas, uma vez que, com elas, é possível analisar os desdobramentos teóricos que podem auxiliar investidores na realização das negociações de sua carteira de investimentos.

Na análise *in-sample* foram realizadas várias comparações em relação ao horizonte de predição e cardinalidade. Dentre elas, pode ser destacado que o horizonte de predição igual a cinco proporciona maior riqueza no caso mono-objetivo. A relação risco e cardinalidade da maneira tradicional como é conhecida não é válida quando inclui-se a

possibilidade de investimento no ativo livre de risco. Neste caso, o risco aumenta quando aumenta a cardinalidade, uma vez que é necessário realocar dinheiro antes aplicado no ativo livre de risco para investir em ativos de risco. No caso multiobjetivo, as fronteiras com cardinalidades menores dominam as fronteiras com cardinalidades maiores. As fronteiras com horizonte de predição cinco dominam as carteiras com horizonte de predição no caso do problema com medida de risco variância, mas o mesmo não ocorre no caso do problema com medida de risco CVaR, pois não há uma relação de dominância bem definida neste caso.

Na análise *out-of-sample* a estratégia MO-MPC Riqueza-CVaR com cardinalidade 5 indicou que o perfil de investimento moderado tende a obter valores de riqueza acumulada maiores que os demais perfis. Isto acontece devido à construção das carteiras, que concilia ativos muito voláteis e ativos pouco voláteis, o que proporciona um potencial considerável de ganho com uma exposição moderada à perda. O horizonte de predição igual a cinco foi capaz de obter riquezas maiores que a estratégia miópica. Uma análise dos ativos com maior participação média nos portfólios no decorrer dos dois anos de experimento mostrou que a estratégia foi bem sucedida na escolha dos ativos, selecionando aqueles com alto potencial de retorno. O Índice de Sharpe da estratégia MO-MPC Riqueza-CVaR apresenta desempenho satisfatório, uma vez que é maior que um mesmo diante da crise financeira de 2020. O Máximo Drawdown encontra-se dentro da expectativa do mercado tanto para o ano recessivo quanto para o ano não recessivo. A riqueza acumulada de MO-MPC CVaR supera a riqueza acumulada do Ibovespa em 2019 e 2020. A riqueza acumulada de MO-MPC Riqueza-CVaR atinge cerca de 40% tanto em 2019 quanto em 2020, superando em 2020 fundos de investimento de prestígio do mercado financeiro. De forma geral, a partir deste estudo de caso, conclui-se que o MPC com horizonte $m = 5$ foi capaz de obter valores de riqueza acumulada não atingidos pela estratégia miópica, o que ressalta a relevância que o uso do MPC apresenta para o problema de otimização de portfólio.

Diante dos resultados obtidos, é possível afirmar que os modelos de otimização propostos nesta tese constituem uma contribuição teórica e prática capaz de representar/lidar de forma realística com as peculiaridades do mercado financeiro. O arcabouço matemático proposto consiste em uma ferramenta eficaz para a elaboração de carteiras de investimentos que combina renda fixa e renda variável. Além disso, ele mostra-se capaz de minimizar o risco diversificável do mercado, ao mesmo tempo em que busca explorar as oportunidades mais rentáveis, incluindo os custos de transação envolvidos nos rebalanceamentos da carteira. O MPC é uma estratégia indicada para este tipo de otimização de portfólio devido a sua habilidade em efetivamente lidar com sistemas dinâmicos complexos, fazer reajustes dinâmicos da carteira considerando as expectativas do mercado e otimizar o risco e a riqueza utilizando o horizonte de predição. É uma estratégia vantajosa relativamente às abordagens tradicionais por sua capacidade de combinar as características inteligentes do MPC, lidando com cenários desafiadores do

mercado financeiro e explorando as potencialidades da otimização multiobjetivo do risco e do retorno com restrições realísticas.

5.1 Publicações científicas

1. MELO, M. K.; CARDOSO, R. T. N. ; JESUS, T. A. Multiobjective Model Predictive Control for Portfolio Optimization with Cardinality Constraint. **Expert Systems With Applications** 2021 (SUBMETIDO)
2. MELO, M. K.; CARDOSO, R. T. N. ; JESUS, T. A.; RAFFO, G. V. Investment Portfolio Tracking Using Model Predictive Control. **Optimal Control Applications and Methods** 2021 (EM REVISÃO)
3. MELO, M. K.; CARDOSO, R. T. N. ; JESUS, T. A. Multi-objective Dynamic Optimization of Investment Portfolio Based on Model Predictive Control. **Journal on Control and Optimization**, v. 60, n.1, p. 104–123, 2022.
4. BARROSO, B.; CARDOSO, R. T. N., MELO, M. K. Performance analysis of the integration between Portfolio Optimization and Technical Analysis strategies in the Brazilian stock market. **Expert Systems With Applications**, v. 186, 2021.
5. MELO, M. K.; CARDOSO, R. T. N. ; JESUS, T. A. A Genetic Algorithm For Investment Tracking With Stochastic Model Predictive Control. In: IEEE. 2021 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC).
6. MELO, M. K.; CARDOSO, R. T. N. ; JESUS, T. A. Model Predictive Control in Dynamic Optimization Portfolio Selection. In: International Congress of Mathematicians, 2018, Rio de Janeiro, 2018.
7. MELO, M. K.; CARDOSO, R. T. N. Um Algoritmo Genético com Busca Local pela Descida Randômica na Otimização de Carteiras de Ações. In: L Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2018, Rio de Janeiro. Anais do SBPO - ISSN 1518-1731, 2018.
8. MELO, M. K.; CARDOSO, R. T. N. Algoritmos para carteiras de investimentos nas versões mono e multiobjetivo. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão** (ISSN: 2525-4782), v. 3, p. 92-1-92-20, 2018.
9. MELO, M. K.; CARDOSO, R. T. N.. Algoritmos para elaboração de uma carteira de ações com mínima exposição ao risco. In: XX Encontro Nacional de Modelagem Computacional e VIII Encontro de Ciências e Tecnologias de Materiais, 2017, Nova Friburgo. Otimização e Pesquisa Operacional, 2017.

5.2 Trabalhos Futuros

Chega-se à conclusão deste trabalho com o cumprimento de todos os objetivos que foram propostos inicialmente. No entanto, durante o seu desenvolvimento algumas

limitações foram enfrentadas. Embora essas limitações não tenham impedido a modelagem e a implementação dos problemas propostos, sua superação pode melhorar o desempenho dos algoritmos e aperfeiçoar a qualidade dos resultados. Para tanto, os trabalhos futuros que constituem desdobramento naturais são:

- Melhorar o tempo de processamento para o problema multiobjetivo com cenários;
- Modificar o modelo para compras em lotes.
- Incluir a possibilidade de fluxo financeiro contínuo (aportes e retiradas ao longo do tempo).
- Implementar o MPC multiobjetivo na plataforma MetaTrader5®.
- Considerar simulações com dados de outros mercados financeiros diferentes da B3.

Numa frente mais avançada, com desdobramentos mais sofisticados, são propostos:

1. Aperfeiçoar o modelo de predição dos retornos dos ativos de risco;
2. Aperfeiçoar o critério de escolha baseado no perfil do investidor.

Pretende-se que essas propostas mais avançadas de trabalhos futuros estejam enraizadas em métodos que utilizam *machine learning* (aprendizado de máquina). Conforme salientado por [Uziel e El-Yaniv \(2020\)](#), problemas de seleção de portfólio *online* permanecem um desafio aberto para os problemas de previsão de vetores *online*.

No que concerne à previsão dos retornos, a proposta é utilizar aprendizado de máquina para fazer as previsões. [Chen et al. \(2021\)](#) e [Ma, Han e Wang \(2021\)](#) salientam que os estudos existentes concentram-se principalmente em métodos estatísticos e métodos de aprendizado de máquina, sendo que estudos comparativos destacam que métodos de aprendizado de máquina apresentam uma melhor habilidade para lidar com problemas não lineares e não estacionários que os métodos estatísticos. [Ma, Han e Wang \(2021\)](#) salientam o quanto é necessário utilizar a combinação de aprendizado de máquina e aprendizado profundo na previsão de retornos na otimização de modelos de portfólios clássicos e enfatizam que até o momento não há pesquisa nessa direção. Também reforçam que a combinação da predição de retornos com aprendizado de máquina e aprendizado profundo é uma direção promissora que aplica totalmente as vantagens da previsão dos retornos na construção dos modelos de otimização.

O uso de aprendizado de máquina para definir o portfólio de investimento com base no perfil do usuário é uma prática que vem recebendo bastante atenção. A proposta é utilizar um *robo-advisor* para fazer a escolha do ponto da fronteira que será aplicado ao sistema. [Lozano-Medina, Hervert-Escobar e Hernandez-Gress \(2020\)](#) destacam que a vantagem das árvores de decisão são a simplicidade de serem entendidas e interpretadas, a não complexidade da preparação dos dados e a habilidade em lidar com dados numéricos e categóricos. Com a interação de perguntas e respostas dadas por um *chatbox*, é possível treinar o robô com as preferências do investidor. Essas preferências são divididas em

categorias que envolvem os tipos de setores mais propícios ou avessos a investimentos, preocupações com o meio ambiente, sustentabilidade, governança e prioridades sociais, investimento doméstico ou investimento estrangeiro. [Grealish e Kolm \(2021\)](#) relatam que os *robo-advisors* também podem considerar as metas financeiras do investidor. De acordo com o tipo de meta (aposentadoria, compra de bens, viagens, etc...), é possível recomendar o nível apropriado de risco.

Referências

ÁLVAREZ, J. D.; RISCO-MARTÍN, J. L.; COLMENAR, J. M. Multi-objective optimization of energy consumption and execution time in a single level cache memory for embedded systems. **Journal of Systems and Software**, Elsevier, v. 111, p. 200–212, 2016. Citado na página 44.

B3. **Histórico pessoas físicas.** 2021. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/consultas/mercado-a-vista/perfil-pessoas-fisicas/genero/>. Acesso em: 23 jun. 2021. Citado na página 1.

B3. **Tarifas de Ações e Fundos de Investimento.** 2021. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/tarifas/listados-a-vista-e-derivativos/renda-variavel/tarifas-de-acoes-e-fundos-de-investimento/a-vista/>. Acesso em: 21 maio 2021. Citado na página 70.

BARROSO, B.; CARDOSO, R.; MELO, M. Performance analysis of the integration between portfolio optimization and technical analysis strategies in the brazilian stock market. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 186, p. 115687, 2021. Citado na página 63.

BARROSO, B. C. et al. Composition of investment portfolios through a combinatorial multiobjective optimization model using cvar. In: IEEE. **2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)**. [S.l.], 2017. p. 1795–1802. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 37.

BEMPORAD, A.; BELLUCCI, L.; GABBRIELLINI, T. Dynamic option hedging via stochastic model predictive control based on scenario simulation. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 14, n. 10, p. 1739–1751, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 21.

BEMPORAD, A. et al. Scenario-based stochastic model predictive control for dynamic option hedging. In: IEEE. **49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.], 2010. p. 6089–6094. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 73.

BEMPORAD, A.; PEÑA, D. M. de la. Multiobjective model predictive control. **Automatica**, Elsevier, v. 45, n. 12, p. 2823–2830, 2009. Citado na página 9.

BEMPORAD, A.; PUGLIA, L.; GABBRIELLINI, T. A stochastic model predictive control approach to dynamic option hedging with transaction costs. In: IEEE. **Proceedings of the 2011 American Control Conference**. [S.l.], 2011. p. 3862–3867. Citado 8 vezes nas páginas 7, 11, 15, 22, 26, 29, 30 e 34.

BEVILACQUA, V.; PACELLI, V.; SALADINO, S. A novel multi objective genetic algorithm for the portfolio optimization. In: SPRINGER. **International Conference on Intelligent Computing**. [S.l.], 2011. p. 186–193. Citado na página 41.

BOYD, S. et al. Performance bounds and suboptimal policies for multi-period investment. **Foundations and Trends® in Optimization**, Now Publishers, Inc., v. 1, n. 1, p. 1–72, 2014. Citado na página 19.

- BRITO, R. P.; SEBASTIÃO, H.; GODINHO, P. Portfolio management with higher moments: the cardinality impact. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 26, n. 6, p. 2531–2560, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- CALAFIORE, G. C. An affine control method for optimal dynamic asset allocation with transaction costs. **SIAM Journal on Control and Optimization**, SIAM, v. 48, n. 4, p. 2254–2274, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 7, 11, 15 e 35.
- CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. A. **Model predictive control**. [S.l.]: Springer, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 2, 17, 19 e 20.
- CESARONE, F. et al. Optimally chosen small portfolios are better than large ones. **Economics Bulletin**, AccessEcon, v. 36, n. 4, p. 1876–1891, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- CHAGAS, G. M. B. **Long-term asset allocation based on stochastic multistage multi-objective portfolio optimization**. Tese (Doutorado) — Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 6, 33 e 34.
- CHANG, T.-J.; YANG, S.-C.; CHANG, K.-J. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 36, n. 7, p. 10529–10537, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 7, 37 e 41.
- CHEN, C.-H.; LU, C.-Y.; LIN, C.-B. An intelligence approach for group stock portfolio optimization with a trading mechanism. **Knowledge and information systems**, Springer, v. 62, n. 1, p. 287–316, 2020. Citado na página 41.
- CHEN, W. et al. Mean–variance portfolio optimization using machine learning-based stock price prediction. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 100, p. 106943, 2021. Citado na página 106.
- CHEUNG, W. The black–litterman model explained. **Journal of Asset Management**, Springer, v. 11, n. 4, p. 229–243, 2010. Citado na página 13.
- CLEAR. **Investir na Bolsa pode ser para você**. 2021. Disponível em: <<https://corretora.clear.com.br/>>. Acesso em: 22 jun. 2021. Citado na página 36.
- DAI, Y.; QIN, Z. Multi-period uncertain portfolio optimization model with minimum transaction lots and dynamic risk preference. **Applied Soft Computing**, Elsevier, p. 107519, 2021. Citado na página 41.
- DEB, K. **Multi-objective optimization using evolutionary algorithms**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001. v. 16. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 43.
- DEB, K.; AGRAWAL, R. B. et al. Simulated binary crossover for continuous search space. **Complex systems**, Citeseer, v. 9, n. 2, p. 115–148, 1995. Citado na página 64.
- DEB, K. et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. **IEEE transactions on evolutionary computation**, IEEE, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 42, 44, 45 e 66.
- DEB, K. et al. Bi-objective portfolio optimization using a customized hybrid nsga-ii procedure. In: SPRINGER. **International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization**. [S.l.], 2011. p. 358–373. Citado 9 vezes nas páginas 8, 16, 39, 41, 47, 62, 63, 64 e 65.

DOMBROVSKII, V.; OBEDKO, T. Feedback predictive control strategies for investment in the financial market with serially correlated returns subject to constraints and trading costs. **Optimal Control Applications and Methods**, Wiley Online Library, v. 38, n. 6, p. 908–921, 2017. Citado 6 vezes nas páginas 7, 12, 15, 26, 48 e 55.

DOMBROVSKII, V.; OBYEDKO, T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization. **Automatica**, Elsevier, v. 54, p. 325–331, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.

DOMBROVSKII, V.; OBYEDKO, T.; SAMORODOVA, M. Model predictive control of constrained markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions. **Automatica**, Elsevier, v. 87, p. 61–68, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.

DOMBROVSKII, V.; PASHINSKAYA, T. Design of model predictive control for constrained markov jump linear systems with multiplicative noises and online portfolio selection. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley Online Library, v. 30, n. 3, p. 1050–1070, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.

DOMBROVSKII, V.; PASHINSKAYA, T. Model predictive control design for constrained markov jump bilinear stochastic systems with an application in finance. **International Journal of Systems Science**, Taylor & Francis, p. 1–16, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 4, 12 e 15.

DOMBROVSKII, V. V.; DOMBROVSKII, D. V.; LYASHENKO, E. A. Predictive control of random-parameter systems with multiplicative noise. application to investment portfolio optimization. **Automation and remote control**, Springer, v. 66, n. 4, p. 583–595, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.

DOMBROVSKIY, V.; DOMBROVSKIY, D.; LYASHENKO, E. Investment portfolio optimisation with transaction costs and constraints using model predictive control. In: IEEE. **Proceedings. The 8th Russian-Korean International Symposium on Science and Technology, 2004. KORUS 2004**. [S.l.], 2004. v. 3, p. 202–205. Citado na página 7.

ELLWOOD ASSOCIATES. **Capital Markets Update Q1 2020**. 2021. Disponível em: <https://www.ellwoodassociates.com/hubfs/2020%20Q1%20Update%20Files/Ellwood_CapMarkets_Q1-2020.pdf>. Acesso em: 16 jun. 2021. Citado na página 100.

ELTON, E.; GRUBER, M.; BROWN, S. **Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos**. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2012. Citado na página 1.

FERREIRA, F. G. et al. Parallel moeas for combinatorial multiobjective optimization model of financial portfolio selection. In: IEEE. **2018 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)**. [S.l.], 2018. p. 1–8. Citado na página 70.

FERREIRA, F. G. D. C. **Estudo Comparativo de Modelos e Técnicas Para Otimização de Portfólios Com Restrição de Cardinalidade**. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 43.

FLORES-TLACUAHUAC, A.; MORALES, P.; RIVERA-TOLEDO, M. Multiobjective nonlinear model predictive control of a class of chemical reactors. **Industrial & Engineering**

Chemistry Research, ACS Publications, v. 51, n. 17, p. 5891–5899, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 45.

GASPERO, L. D. et al. Hybrid metaheuristics for constrained portfolio selection problems. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 11, n. 10, p. 1473–1487, 2011. Citado na página 41.

GHAHTARANI, A.; SAIF, A.; GHASEMI, A. Robust portfolio selection problems: A comprehensive review. **arXiv preprint arXiv:2103.13806**, 2021. Citado na página 28.

GOLDBERG, D. E. **Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1989. Citado na página 65.

GOLDSHTEIN, M.; TSIOTRAS, P. Finite-horizon covariance control of linear time-varying systems. In: IEEE. **2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.], 2017. p. 3606–3611. Citado na página 33.

GRAHAM, D. I.; CRAVEN, M. J. An exact algorithm for small-cardinality constrained portfolio optimisation. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, p. 1–17, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 8, 9 e 37.

GREALISH, A.; KOLM, P. N. Robo-advisory: From investing principles and algorithms to future developments. Grealish, Adam and Petter N. Kolm, "Robo-Advisory: From Investing Principles . . . , 2021. Citado na página 107.

GRÜNE, L.; STIELER, M. Performance guarantees for multiobjective model predictive control. In: IEEE. **2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.], 2017. p. 5545–5550. Citado na página 10.

GUENNOUN, Z.; HAMZA, F. et al. Stocks portfolio optimization using classification and genetic algorithms. **Applied Mathematical Sciences**, Citeseer, v. 6, n. 94, p. 4673–4684, 2012. Citado na página 41.

GUPTA, P.; MEHLAWAT, M. K.; KHAN, A. Z. Multi-period portfolio optimization using coherent fuzzy numbers in a credibilistic environment. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 167, p. 114135, 2021. Citado na página 70.

HANAOKA, G. P. **Seleção de Carteiras de Investimentos Através da Otimização de modelos restritos Multiobjetivo utilizando Algoritmos Evolutivos**. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 7, 32 e 41.

HANAOKA, G. P.; CARDOSO, R. T.; PAIVA, F. D. Modelo multiobjetivo para seleção de portfólios com restrição de cardinalidade, custo de transação e valor em risco condicional. **TEMA (São Carlos)**, SciELO Brasil, v. 17, n. 3, p. 353–365, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 7, 29, 36 e 37.

HARDY, C. O. **Risk and risk-bearing**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1923. Citado na página 29.

HEIRUNG, T. A. N. et al. Stochastic model predictive control—how does it work? **Computers & Chemical Engineering**, Elsevier, v. 114, p. 158–170, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 20, 22 e 34.

- HERZOG, F. **Strategic portfolio management for long-term investments: An optimal control approach**. Tese (Doutorado) — Swiss Federal Institute of Technology of Zurich, Zurich, 2005. Citado 13 vezes nas páginas [13](#), [15](#), [23](#), [24](#), [25](#), [27](#), [29](#), [31](#), [32](#), [33](#), [34](#), [35](#) e [56](#).
- HERZOG, F.; DONDI, G.; GEERING, H. P. Stochastic model predictive control and portfolio optimization. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, World Scientific, v. 10, n. 02, p. 203–233, 2007. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [15](#).
- HERZOG, F. et al. Model predictive control for portfolio selection. In: IEEE. **2006 American Control Conference**. [S.l.], 2006. p. 8–pp. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [15](#) e [33](#).
- HOLLAND, J. H. et al. Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. University of Michigan press Ann Arbor, 1975. Citado na página [40](#).
- HOLTON, G. A. **History of Value-at-Risk**. [S.l.]: Citeseer, 2002. Citado na página [29](#).
- JESUS, J. R.; ROCHA, L. M.; VIANA, R. C. **Avaliação de PMEs e gestão de risco**. [S.l.]: Faculdade de Economia, Universidade do Porto, 2001. Citado na página [27](#).
- KALAYCI, C. B.; POLAT, O.; AKBAY, M. A. An efficient hybrid metaheuristic algorithm for cardinality constrained portfolio optimization. **Swarm and Evolutionary Computation**, Elsevier, v. 54, p. 100662, 2020. Citado na página [8](#).
- KAUCIC, M. Equity portfolio management with cardinality constraints and risk parity control using multi-objective particle swarm optimization. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 109, p. 300–316, 2019. Citado 3 vezes nas páginas [8](#), [38](#) e [70](#).
- KESELMAN, H. J.; ROGAN, J. C. A comparison of the modified-tukey and scheffe methods of multiple comparisons for pairwise contrasts. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 73, n. 361, p. 47–52, 1978. Citado na página [82](#).
- KILIANOVA, S.; SEVCOVIC, D. Expected utility maximization and conditional value-at-risk deviation-based sharpe ratio in dynamic stochastic portfolio optimization. **arXiv preprint arXiv:1810.11619**, 2018. Citado na página [67](#).
- KONSTANTINOU, C.; TZANETOS, A.; DOUNIAS, G. Cardinality constrained portfolio optimization with a hybrid scheme combining a genetic algorithm and sonar inspired optimization. **Operational Research**, Springer, p. 1–23, 2020. Citado 2 vezes nas páginas [2](#) e [41](#).
- KUMAR, A. et al. A credibilistic multiobjective multiperiod efficient portfolio selection approach using data envelopment analysis. **IEEE Transactions on Engineering Management**, IEEE, 2021. Citado 2 vezes nas páginas [8](#) e [25](#).
- LEVINE, W. S. The essentials of model predictive control. In: **Handbook of Model Predictive Control**. [S.l.]: Springer, 2019. p. 3–27. Citado na página [20](#).
- LI, C. et al. A multiperiod multiobjective portfolio selection model with fuzzy random returns for large scale securities data. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 29, n. 1, p. 59–74, 2020. Citado 3 vezes nas páginas [7](#), [38](#) e [41](#).

- LIN, P.-C. Portfolio optimization and risk measurement based on non-dominated sorting genetic algorithm. **Journal of Industrial & Management Optimization**, American Institute of Mathematical Sciences, v. 8, n. 3, p. 549, 2012. Citado na página 41.
- LONGERSTAEY, J.; SPENCER, M. Riskmetricstm—technical document. **Morgan Guaranty Trust Company of New York: New York**, v. 51, p. 54, 1996. Citado na página 29.
- LOZANO-MEDINA, J. I.; HERVERT-ESCOBAR, L.; HERNANDEZ-GRESS, N. Risk profiles of financial service portfolio for women segment using machine learning algorithms. In: SPRINGER. **International Conference on Computational Science**. [S.l.], 2020. p. 561–574. Citado na página 106.
- MA, Y.; HAN, R.; WANG, W. Portfolio optimization with return prediction using deep learning and machine learning. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 165, p. 113973, 2021. Citado na página 106.
- MACEDO, L. L.; GODINHO, P.; ALVES, M. J. Mean-semivariance portfolio optimization with multiobjective evolutionary algorithms and technical analysis rules. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 79, p. 33–43, 2017. Citado na página 36.
- MAHAPATRA, B. et al. An investigation of portfolio optimization using modified nsga-ii algorithm. **South Asian Journal of Management**, AMDISA Secretariat, v. 26, n. 4, p. 133–150, 2019. Citado na página 36.
- MANSINI, R. et al. **Linear and mixed integer programming for portfolio optimization**. [S.l.]: Springer, 2015. Citado na página 38.
- MANSOURIA, T.; MOGHADAM, M. R. S. Markowitz-based cardinality constrained portfolio selection using asexual reproduction optimization (aro). **arXiv preprint arXiv:2101.03312**, 2021. Citado na página 70.
- MARKOVITZ, H. Portfolio selection: Efficient diversification of investments. **NY: John Wiley**, 1959. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 36.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. Citado 6 vezes nas páginas 1, 6, 27, 28, 29 e 36.
- MAYNE, D. Robust and stochastic model predictive control: Are we going in the right direction? **Annual Reviews in Control**, Elsevier, v. 41, p. 184–192, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- MAYNE, D. Q. Model predictive control: Recent developments and future promise. **Automatica**, Elsevier, v. 50, n. 12, p. 2967–2986, 2014. Citado na página 9.
- MAYNE, D. Q. et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality. **Automatica**, Elsevier, v. 36, n. 6, p. 789–814, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 9, 19 e 25.
- MENDONÇA, G. H. et al. Multi-attribute decision making applied to financial portfolio optimization problem. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, p. 113527, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 7, 37, 67 e 70.
- MENG, X.; ZHOU, X. Multi-period fuzzy portfolio selection model with cardinality constraints. In: IEEE. **2019 16th International Conference on Service Systems and Service Management (ICSSSM)**. [S.l.], 2019. p. 1–6. Citado 3 vezes nas páginas 7, 8 e 37.

- MERTON, R. C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. **The review of Economics and Statistics**, JSTOR, p. 247–257, 1969. Citado na página 6.
- MESBAH, A. Stochastic model predictive control: An overview and perspectives for future research. **IEEE Control Systems Magazine**, IEEE, v. 36, n. 6, p. 30–44, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 4, 9 e 23.
- MESBAH, A.; KOLMANOVSKY, I. V.; CAIRANO, S. D. Stochastic model predictive control. In: **Handbook of Model Predictive Control**. [S.l.]: Springer, 2019. p. 75–97. Citado na página 21.
- MITTAL, S. K.; SRIVASTAVA, N. Mean-variance-skewness portfolio optimization under uncertain environment using improved genetic algorithm. **Artificial Intelligence Review**, Springer, p. 1–22, 2021. Citado na página 41.
- MOFFAERT, K. V.; DRUGAN, M. M.; NOWÉ, A. Hypervolume-based multi-objective reinforcement learning. In: SPRINGER. **International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization**. [S.l.], 2013. p. 352–366. Citado na página 39.
- MOLINA, P. Investment portfolio optimization with predictive control. **Universidad Nacional de Colombia, Bogotá**, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 12, 15, 25 e 70.
- MORAL-ESCUADERO, R.; RUIZ-TORRUBIANO, R.; SUÁREZ, A. Selection of optimal investment portfolios with cardinality constraints. In: IEEE. **2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation**. [S.l.], 2006. p. 2382–2388. Citado na página 38.
- NETO, A. A. **Mercado financeiro**. [S.l.]: Atlas, 2009. Citado na página 1.
- NIGATU, B. **A Multi-Objective, Multiperiod Portfolio Optimization Using Particle Swarm Optimization and Asynchronous Advantage Actor-Critic: Investors' Behavioral Characterization**. Tese (Doutorado) — Colorado Technical University, 2020. Citado na página 8.
- NOORIAN, F. **Risk management using model predictive control**. Tese (Doutorado) — University of Sydney, Sidney, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 13, 15, 19, 20 e 27.
- NUINVEST. **A Easy zerou**. 2021. Disponível em: <<https://easynvest.com.br/>>. Acesso em: 22 jun. 2021. Citado na página 36.
- NÚÑEZ, A. et al. Multiobjective model predictive control for dynamic pickup and delivery problems. **Control Engineering Practice**, Elsevier, v. 32, p. 73–86, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 9, 10, 45, 46, 67 e 68.
- NYSTRUP, P. et al. Multi-period portfolio selection with drawdown control. **Annals of Operations Research**, Springer, p. 1–27, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 4, 5, 12, 15, 22 e 25.
- NYSTRUP, P.; MADSEN, H.; LINDSTRÖM, E. Dynamic portfolio optimization across hidden market regimes. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 18, n. 1, p. 83–95, 2018. Citado 7 vezes nas páginas 4, 12, 15, 23, 25, 33 e 35.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Citado na página 21.

OKAMOTO, K.; TSIOTRAS, P. Optimal stochastic vehicle path planning using covariance steering. **IEEE Robotics and Automation Letters**, IEEE, v. 4, n. 3, p. 2276–2281, 2019. Citado na página 33.

OPRISOR, R.; KWON, R. Multi-period portfolio optimization with investor views under regime switching. **Journal of Risk and Financial Management**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 14, n. 1, p. 3, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 13, 15 e 25.

PARDALOS, P. M. Optimization techniques for portfolio selection. In: **New operational approaches for financial modelling**. [S.l.]: Springer, 1997. p. 19–33. Citado na página 2.

PAULSON, J. A. et al. Stochastic model predictive control with joint chance constraints. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 93, n. 1, p. 126–139, 2020. Citado na página 22.

PEITZ, S.; DELLNITZ, M. A survey of recent trends in multiobjective optimal control—surrogate models, feedback control and objective reduction. **Mathematical and Computational Applications**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 23, n. 2, p. 30, 2018. Citado na página 45.

PENAD, D. de la; BEMPORAD, A.; ALAMO, T. Stochastic programming applied to model predictive control. In: IEEE. **Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.], 2005. p. 1361–1366. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

PFLUG, G. C. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In: **Probabilistic constrained optimization**. [S.l.]: Springer, 2000. p. 272–281. Citado na página 31.

PLESSEN, M. G. et al. Dynamic option hedging with transaction costs: A stochastic model predictive control approach. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley Online Library, v. 29, n. 15, p. 5058–5077, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 11, 15, 21 e 22.

PRIMBS, J. A. Portfolio optimization applications of stochastic receding horizon control. In: IEEE. **2007 American Control Conference**. [S.l.], 2007. p. 1811–1816. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 15.

PRIMBS, J. A. Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise. In: IEEE. **2007 American Control Conference**. [S.l.], 2007. p. 4470–4475. Citado na página 21.

PRIMBS, J. A. Applications of mpc to finance. In: **Handbook of Model Predictive Control**. [S.l.]: Springer, 2019. p. 665–685. Citado 3 vezes nas páginas 6, 12 e 35.

PRIMBS, J. A.; YAMADA, Y. Pairs trading under transaction costs using model predictive control. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 18, n. 6, p. 885–895, 2018. Citado 11 vezes nas páginas 7, 14, 15, 22, 23, 25, 26, 33, 47, 49 e 51.

PROPOI, A. Use of lp methods for synthesizing sampled-data automatic systems. **Autumn Remote Control**, v. 24, 1963. Citado na página 17.

RAWLINGS, J. B.; MAYNE, D. Q.; DIEHL, M. **Model predictive control: theory, computation, and design**. 2. ed. [S.l.]: Nob Hill Publishing Madison, WI, 2017. Citado na página 17.

- RICO. **Descomplicada e simples pra você investir do melhor jeito: o seu**. 2021. Disponível em: <<https://www.rico.com.vc/home/>>. Acesso em: 22 jun. 2021. Citado na página 36.
- ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. et al. Optimization of conditional value-at-risk. **Journal of risk**, v. 2, p. 21–42, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 32.
- ROMAN, D.; MITRA, G. Portfolio selection models: A review and new directions. **Wilmott Journal: The International Journal of Innovative Quantitative Finance Research**, Wiley Online Library, v. 1, n. 2, p. 69–85, 2009. Citado na página 27.
- ROSSITER, J. A. **Model-based predictive control: a practical approach**. [S.l.]: CRC press, 2017. Citado na página 17.
- SAMUELSON, P. A. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. In: **Stochastic Optimization Models in Finance**. [S.l.]: Elsevier, 1969. p. 517–524. Citado na página 6.
- SOMMA, M. D. **Optimal operation planning of distributed energy systems through multi-objective approach: a new sustainability-oriented pathway**. Tese (Doutorado) — Università di Napoli Federico II, Napoli, 2016. Citado na página 40.
- SOPASAKIS, P. et al. Risk-averse model predictive control. **Automatica**, Elsevier, v. 100, p. 281–288, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.
- SUBRAHMANYAM, A. Circuit breakers and market volatility: A theoretical perspective. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 49, n. 1, p. 237–254, 1994. Citado na página 98.
- TAKAHASHI, R. Otimização escalar e vetorial, volume 3: Otimização vetorial. **Notas de aula. Departamento de Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais**, p. 262–301, 2007. Citado na página 7.
- TALBI, E.-G. **Metaheuristics: from design to implementation**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 74. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- TESOURO NACIONAL. **Balanço e estatísticas**. 2021. Disponível em: <https://sisweb.tesouro.gov.br/apex/f?p=2501:9:::9:P9_ID_PUBLICACAO:37489>. Acesso em: 24 jun. 2021. Citado na página 1.
- TIAN, H. **Stochastic multi-objective economic model predictive control of two-stage high consistency mechanical pulping processes**. Tese (Doutorado) — University of British Columbia, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- TOLLO, G. D.; ROLI, A. Metaheuristics for the portfolio selection problem. **International Journal of Operations Research**, Citeseer, v. 5, n. 1, p. 13–35, 2008. Citado na página 41.
- TORO. **O jeito mais fácil de investir na Bolsa, agora com Corretagem Zero**. 2021. Disponível em: <<https://www.toroinvestimentos.com.br/corretagem-zero/>>. Acesso em: 22 jun. 2021. Citado na página 36.
- TSAY, R. S. **An introduction to analysis of financial data with R**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014. Citado na página 29.

- UYVAL, S.; LI, X.; MULVEY, J. M. Multi-period portfolio optimization using model predictive control with mean-variance and risk parity frameworks. **Available at SSRN 3791414**, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 12, 15, 25, 26 e 82.
- UZIEL, G.; EL-YANIV, R. Long-and short-term forecasting for portfolio selection with transaction costs. In: PMLR. **International Conference on Artificial Intelligence and Statistics**. [S.l.], 2020. p. 100–110. Citado na página 106.
- VENKATASUBRAMANIAN, J. **Tractable Stochastic Model Predictive Control using Conditional Value at Risk Optimization**. Dissertação (Mestrado) — Delft University of Technology, Delft, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 13, 15, 22, 31 e 35.
- WARREN. **Investir com inteligência passa pelo Modelo Warren**. 2021. Disponível em: <<https://warren.com.br/>>. Acesso em: 22 jun. 2021. Citado na página 36.
- YAMADA, Y.; PRIMBS, J. A. Model predictive control for optimal portfolios with cointegrated pairs of stocks. In: IEEE. **2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.], 2012. p. 5705–5710. Citado 5 vezes nas páginas 7, 12, 15, 26 e 33.
- YAMADA, Y.; PRIMBS, J. A. Model predictive control for optimal pairs trading portfolio with gross exposure and transaction cost constraints. **Asia-Pacific Financial Markets**, Springer, v. 25, n. 1, p. 1–21, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 12, 15 e 26.
- YAMASHITA, A.; ZANIN, A.; ODLOAK, D. Tuning of model predictive control with multi-objective optimization. **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, SciELO Brasil, v. 33, n. 2, p. 333–346, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 25.
- YU, X.; XIE, S.; XU, W. Optimal portfolio strategy under rolling economic maximum drawdown constraints. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2014, 2014. Citado na página 100.
- YU, Y. et al. Research on fuzzy multi-objective multi-period portfolio by hybrid genetic algorithm with wavelet neural network. **Engineering Letters**, v. 28, n. 2, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 8.
- ZAK, S. H. Model-based predictive control (mpc). **Class Notes. School of Electrical and Computer Engineering, Purdue University**, 2011. Citado na página 18.
- ZAVALA, V. M.; FLORES-TLACUAHUAC, A. Stability of multiobjective predictive control: A utopia-tracking approach. **Automatica**, Elsevier, v. 48, n. 10, p. 2627–2632, 2012. Citado na página 9.
- ZHAO, Z. et al. Cvar-cardinality enhanced indexation optimization with tunable short-selling constraints. **Applied Economics Letters**, Taylor & Francis, p. 1–7, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 7.
- ZHOU, X. et al. Solving multi-scenario cardinality constrained optimization problems via multi-objective evolutionary algorithms. **Science China Information Sciences**, Springer, v. 62, n. 9, p. 192104, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 38.
- ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach. **IEEE transactions on Evolutionary Computation**, IEEE, v. 3, n. 4, p. 257–271, 1999. Citado na página 43.