CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

SOLUÇÕES ANALÍTICAS E ALGORITMOS PARA MAXIMIZAÇÃO DO PERFIL DE GERAÇÃO HIDRELÉTRICA

TÂMARA SAMANTHA FERREIRA COELHO

Orientador: Prof. Dr. Douglas Alexandre Gomes Veira

Coorientador: Prof. Dr. Gustavo Rodrigues Lacerda Silva

BELO HORIZONTE
JUNHO DE 2021

TÂMARA SAMANTHA FERREIRA COELHO

SOLUÇÕES ANALÍTICAS E ALGORITMOS PARA MAXIMIZAÇÃO DO PERFIL DE GERAÇÃO HIDRELÉTRICA

Projeto de Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Sistemas Inteligentes

Orientador: Prof. Dr. Douglas Alexandre Gomes Veira

Coorientador: Prof. Dr. Gustavo Rodrigues Lacerda Silva

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
JUNHO DE 2021

Coelho, Tâmara Samantha Ferreira
C672s Soluções analíticas e algoritmos para maximização do perfil de geração hidrelétrica / Tâmara Samantha Ferreira Coelho. – 2021.
69 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.
Orientador: Douglas Alexandre Gomes Meira.
Coorientador: Gustavo Rodrigues Lacerda Silva.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Usinas hidrelétricas – Modelos matemáticos – Teses. 2. Otimização matemática – Teses. 3. Usinas hidrelétricas – Planejamento – Teses. 4. Energia hidrelétrica – Administração – Teses. 5. Turbinas hidráulicas – Dinâmica dos fluidos – Teses. 6. Algoritmos – Teses. I. Meira, Douglas Alexandre Gomes. II. Silva, Gustavo Rodrigues Lacerda. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 006.3

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MESTRADO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

"SOLUÇÕES ANALÍTICAS E ALGORITMOS PARA MAXIMIZAÇÃO DO PERFIL DE GERAÇÃO HIDRELÉTRICA"

Dissertação de Mestrado apresentada por **Tâmara Samantha Ferreira Coelho**, em 29 de junho de 2021, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Douglas Alexandre Gomes Vieira (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Gustavo Rodrigues Lacerda Silva (Coorientador)
Enacom

Prof. Dr. Rodney Rezende Saldanha
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Lucas Sirimarco Moreira Guedes
LVI

Prof. Dr. Adriano Chaves Lisboa
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Profª. Drª. Elisângela Martins de Sá
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Profª. Drª. Elizabeth Fialho Wanner
Presidenta do Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

Agradecimentos

Quando entrei neste sonho de ser mestre, não sabia que iria ter tantos obstáculos. Agradeço a Deus por ter me presenteado com tantas vitórias.

Agradeço à minha mãe por me mostrar o caminho dos estudos e por me incentivar a buscar meus sonhos. Ao meu pai, o ser humano mais bondoso que eu conheço, por tanto amor.

À Bárbara e Marjorie, minhas companheiras de vida, irmãs que estarão sempre ao meu lado.

Ao Cássio, pelos 12 anos de chocolates e água salgada, por entender minhas loucuras, talvez "por que sua loucura parece a minha". E, principalmente, por realizar meu maior sonho: ser mãe, com o melhor pai que um filho poderia ter.

À Isabela, minha mocinha mais bela, agradeço tanto por trazer alegrias em nossas vidas. Ao Bernardo, meu "grudinho", cujo o olhar transborda amor, ou melhor, ele é fonte de amor. Ao Lucas, menino iluminado, que tanto me acalma: é inexplicável a paz que você me traz. Ao Henrique, rezei tanto por sua chegada, não imaginava que ganharia o maior companheirinho da minha vida. Amo vocês incondicionalmente!

À minha avó Mara, mulher à frente do seu tempo. É tão bom ter você em nossas vidas. À minha avó Ana, saudades eternas.

Às amigas da Química: Ludmila, Andresa, Renata, Michele e Luíza. Seguimos caminhos profissionais diferentes, mas continuamos com a nossa família Química. À Lorena, irmã que a vida me deu, gratidão por tanta ajuda.

Aos meus amigos da Polícia Civil, Adriana e Thales, minha eterna equipe.

Ao Fabrício, que tive o privilégio de conhecer no CEFET, com seu dom de professor, sempre solícito em ajudar.

Ao Dr. Gustavo, por ser tão gentil e prestativo.

E por fim, ao meu orientador Dr. Douglas por ter me ensinado tanto, até programar, e, principalmente, por ter me ajudado a concluir esse ciclo. Muitas vezes se empenhou além da sua função para que esse projeto fosse possível. Sempre se mostrou disponível para ajudar no que fosse necessário. Que sua filha encontre "chefes"tão admiráveis como você.

“O correr da vida embrulha tudo. A vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem.” (João Guimarães Rosa, Grande sertão: veredas.)

Resumo

Este trabalho apresenta soluções analíticas e algoritmos para maximização do perfil de geração hidrelétrica. E também soluções para resolver o problema de otimização de atendimento de demanda de potência no médio prazo para uma usina hidrelétrica. Ao invés de utilizar algoritmos não lineares genéricos, o proposto explora as particularidades do problema para gerar soluções de forma eficiente. Na primeira fase é demonstrada uma fórmula analítica para maximizar a vazão turbinada dado um perfil inicial definido como meta. Essa formulação é comparada com uma modelagem linear equivalente, apresentando um ganho de desempenho de aproximadamente 296 vezes. Esta formulação é então utilizada na segunda fase do algoritmo, que considera a transformação não linear de vazão turbinada em potência utilizando o polinômio de produtividade, dado um perfil meta de potência a ser maximizado. O método funcionou satisfatoriamente em um problema com dados reais de uma usina hidrelétrica, pois o tempo de execução do algoritmo foi menor quando comparado a solver CPLEX.

Palavras-chave: OTIMIZAÇÃO; USINA HIDRELÉTRICA; PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO; ALGORITMO; DEMANDA DE VAZÃO;

Abstract

This study presents an algorithm to solve the problem of optimizing the supply of the power demand in the medium term operation of a hydroelectric plant. Instead of using generic nonlinear algorithms, this work explores the particularities of the mentioned problem in order to produce efficient solutions. In the first phase, an analytical formula that maximizes the turbined for a given target profile, is demonstrated. Then, this formulation in applied to the following phase of the algorithm, which considers the nonlinear model hat converts the discharged flow into power using the efficiency, deriving a nonlinear problem to maximize the power following a given profile. The method second was successfully applied with real data of existing hydropower plants.

Keywords: OPTIMIZATION; HYDROELECTRIC PLANT; OPERATION PLANNING; ALGORITHM; FLOW DEMAND;.

Lista de Figuras

Figura 1 – Matriz elétrica Brasileira no ano de 2019. 1
Figura 2 – Esquema da usina hidrelétrica. 3
Figura 3 – Variação da taxa de vazão de maneira a maximizar o δu, respeitando as restrições. 16
Figura 4 – Potência desejada 35
Figura 5 – Caso 01 (Turbinada Flat) 39
Figura 6 – Caso 03 (Turbinada Flat) 40
Figura 7 – Caso 05 (Turbinada Flat) 41
Figura 8 – Caso 01 (Meta de vazão turbinada) 43
Figura 9 – Caso 02 (Meta de vazão turbinada) 44
Figura 10 – Caso 03 (Meta de vazão turbinada) 45
Figura 11 – Evolução da demanda de vazão e da potência em cada iteração. 48
Figura 12 – Caso 01 (Meta de potência constante) 50
Figura 13 – Caso 02 (Meta de potência constante) 51
Figura 14 – Caso 03 (Meta de potência constante) 52
Figura 15 – Caso 01 (Meta de potência variada) 54
Figura 16 – Caso 02 (Meta de potência variada) 55
Figura 17 – Caso 03 (Meta de potência variada) 56
Figura 18 – Usina de Três Marias, resultado com o algoritmo 2 59
Figura 19 – Usina de Três Marias, resultado com o algoritmo 3 60
Figura 20 – Usina de Sobradinho, resultado com o algoritmo 2 61
Figura 21 – Usina de Sobradinho, resultado com o algoritmo 3 62
Figura 22 – Usina de Itaparica, resultado com o algoritmo 2 63
Figura 23 – Usina de Itaparica, resultado com o algoritmo 3 64

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação entre CPLEX e o Algoritmo 01 42
Tabela 2 – Comparação entre CPLEX e o Algoritmo 02 46
Tabela 3 – Evolução do erro absoluto 52
Tabela 4 – Tempo de execução para a meta de potência constante 53
Tabela 5 – Evolução do erro absoluto 57
Tabela 6 – Tempo de execução para a meta de potência variada 57
Tabela 7 – Coeficientes dos polinômios 58
Tabela 8 – Constante de perda hidráulica. 58

Lista de Algoritmos

Algoritmo 1 – Cálculo da Demanda de Vazão Máxima u - Problema P_1 21

Algoritmo 2 – Cálculo da Demanda de Vazão Máxima u - Problema P_2 28

Algoritmo 3 – Cálculo da Potência p 36

Lista de Abreviaturas e Siglas

ABRAPCH	Associação Brasileira de PCHs e CGHs
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CRCC	Cascading Reservoir Continuum Concept
CGHs	Centrais Geradoras de Hidroeletricidade
EPE	Empresa de Pesquisa Energética
OHF	Função vazão turbinada por altura (Output to Height function)
PCHs	Pequenas Centrais Hidrelétricas
UHEs	Usinas Hidrelétricas
VHF	Função volume por altura (Volume to Height function)

Lista de Símbolos

d_t	nível de demanda, em um determinado período de tempo t
$g(v, u)$	função de energia hidrelétrica
$\underline{h}$	nível mínimo de armazenamento normal (NA mínimo) do reservatório (m)
$\overline{h}$	nível máximo de armazenamento normal (NA máximo) do reservatório (m)
h	altura (m)
h_j	altura do reservatório no período t (m)
$h(v)$	função volume por altura
h_b	queda bruta (m)
h_j	nível jusante (m)
i	índice para as usinas hidrelétricas
$\bar{i}$	número total de usinas na cascata
k	produtividade específica de cada usina ($W/(m^3/s)$/m)
p	potência (MW)
p_{media}	a média dos valores da potência (MW)
q	vazão turbinada mais vazão vertida da usina (m^3/s)
$q_{i,t}$	vazão defluente da usina i, instante t (m^3/s)
s	vazão vertida da usina (m^3/s)
S	função do armazenamento
t	índice de períodos de tempo
u	vazão turbinada da usina (m^3/s)
$\breve{u}_t$	demanda de vazão recalculada (m^3/s)
v_t	volume do reservatório no período t (hm^3)
$\underline{v}_i$	volume mínimo do reservatório i (hm^3)
$\overline{v}_i$	volume máximo do reservatório i (hm^3)

v	volume do reservatório (hm^3)
$v_{i,t}$	volume do reservatório i no instante t (hm^3)
$w(u)$	função vazão turbinada por altura
$w(u,s)$	função que altera a altura do canal de fuga
$\alpha_{i,t}$	afluência total da usina i no instante t (m^3/s)
β	converte o volume em taxa de fluxo
$\gamma_{i,t}$	vazão incremental ou (natural) na usina i no tempo t (m^3/s)
δu	taxa de vazão máxima, de uma usina hidrelétrica (m^3/s)
Δ	duração do período de tempo entre os intervalos t (s)
ζ	altura constante do canal de fuga (m)
ε	constante do atrito do fluxo de água nas tubulações do sistema hidráulico (m)
θ_v	coeficiente de produtividade
$\lambda_{j,i}$	constante relacionada as perdas hidráulicas da usina i, unidade geradora j
ν	valor do erro, calculado pela potência menos a potência média.
$\tau_k \in N^+$	tempo relativo de viagem entre cada usina k e sua jusante
χ_t	análise do desvio
Φ	usinas com reservatórios
Ω_i	defluência das usinas a sua montante

Sumário

1 – Introdução **1**
1.1 Processo de geração de energia elétrica em uma usina hidrelétrica 2
1.2 Potência em uma usina hidrelétrica 4
1.3 Usinas hidrelétricas em cascatas 4
1.4 Demanda de energia 5
1.5 Motivação 6
1.6 Organização do trabalho 6
1.7 O problema de maximização da geração de energia 7

2 – Metodologia **10**
2.1 Notação, definições e modelos 10
2.2 Trabalho Relacionados 12
2.3 Formulação matemática da programação automática em uma usina hidrelétricas 14
2.4 Análise da demanda de vazão 15
2.4.1 Solução analítica para demanda de vazão constante 18
2.4.2 Exemplos 25
2.4.3 Demanda de Vazão Variável 26
2.4.4 Exemplos 32
2.5 Cálculo de um perfil de potência 34

3 – Análise e Discussão dos Resultados **37**
3.1 Cálculo da taxa de vazão máxima 37
3.1.1 Demanda de vazão constante 37
3.1.2 Demanda de vazão alternada 42
3.2 Cálculo da potência constante para demanda de vazão constante 46
3.3 Simulações 57

4 – Conclusão **65**
4.1 Trabalhos Futuros 65

Referências **66**

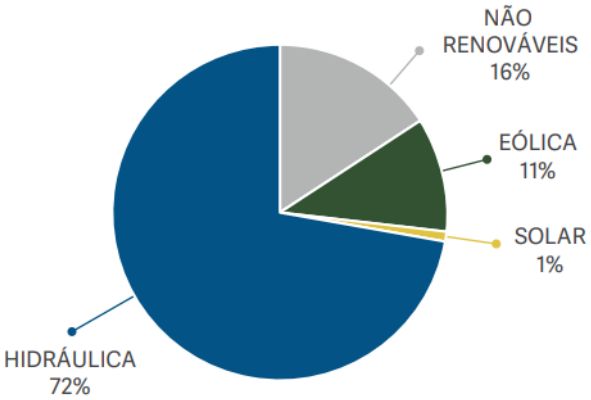
Capítulo 1

Introdução

O sistema elétrico brasileiro tem como principal fonte de geração de energia as usinas hidrelétricas. Um dos principais motivos que contribuem para que a fonte hidrelétrica esteja no topo da matriz elétrica brasileira é a grande extensão dos rios, espalhados por quase todo o território brasileiro, que correm sobre depressões e planaltos.

De acordo com a Empresa de Pesquisa Energética, EPE, (BRIANTI et al., 2021), e apresentado na Figura 1, a matriz elétrica brasileira é predominantemente hidráulica. Em 2019 essa fonte correspondeu a 72% de toda energia gerada.

Figura 1 – Matriz elétrica Brasileira no ano de 2019.



Fonte: Matriz elétrica Brasileira no ano de 2019. Fonte: EPE, 2020.

O Brasil é rico em rios com excelentes potenciais hidrelétricos, e, diferente da maioria dos países centrais e periféricos, não sustenta a base da geração de sua energia elétrica na utilização de fontes primárias não renováveis como derivados do petróleo (DOROCHE; ANSCHAU, 2015).

GOLDEMBERG e LUCON (2012) destacam como vantagens dos recursos renováveis: proteção da saúde e do meio ambiente pela ausência de emissão de gases do efeito estufa; a segurança energética, pois a ausência de suprimento e a volatilidade dos preços podem ser contornadas com as demais possibilidades disponíveis e o desenvolvimento e benefícios econômicos, uma

vez que geram postos de trabalho no local de sua implantação, diminuindo a dependência pela importação.

O Brasil, pela sua extensão territorial e pela sua diversidade climática, oferece um amplo campo de estudo e pesquisas no setor energético no que diz respeito ao planejamento da operação de usinas hidrelétricas (MOROMISATO, 2012). De acordo com MORAIS (2015), o total do potencial hidrelétrico brasileiro possui estimativa de 260 GW, da qual 40,5% localiza-se na Bacia do Rio Amazonas, 23% na Bacia do Rio Paraguai, 10,5% na Bacia do Rio Tocantins e 10% na Bacia do Rio São Francisco, entre outros.

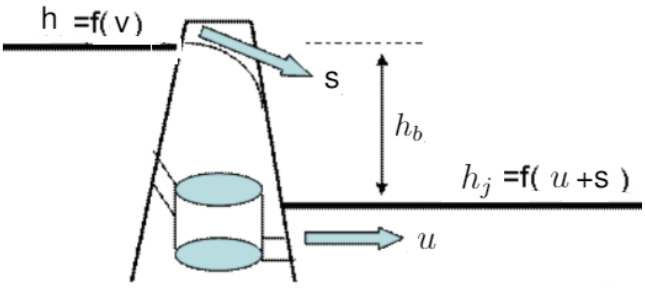
1.1 Processo de geração de energia elétrica em uma usina hidrelétrica

A produção de energia elétrica em uma usina hidrelétrica ocorre quando a energia potencial gravitacional se converte em energia cinética. As usinas hidrelétricas funcionam através da pressão da água que gira uma turbina. Como cada turbina é acoplada a um gerador, esses são acionados fazendo a transformação da energia cinética em energia elétrica. Para que isso aconteça, é necessário que exista um desnível hidráulico natural ou criado por uma barragem, para captação e condução da água à turbina.

A vazão que chega em uma usina é denominada vazão afluente, sendo determinante na avaliação para a produção de energia elétrica. Quando em uma usina se tem uma barragem, ela é construída junto de um vertedouro. Este tem a finalidade de escoar o excesso de água na barragem, sem gerar energia, sendo chamada de vazão vertida. Isso ocorre, devido a barragem ter um limite na capacidade de armazenar a água. As usinas com barragem numa cascata hidrelétrica, regulam a vazão da água que irá fluir entre elas.

Uma usina hidrelétrica, como apresentado na Figura 2, é constituída de um barramento para elevação do nível a montante (h) e consequente criação de uma queda d'água (h_b), chamada queda bruta, em relação ao nível jusante (h_j). Parte do volume de água armazenada (v), que é alimentado pela vazão afluente, será direcionada à turbina para produção de energia, gerando uma potência (p), constituindo a vazão turbinada (u). O eventual excedente de água será extravasado constituindo a vazão vertida (s). O nível montante (h) é função do armazenamento (S) e o nível jusante (h_j) é uma função da vazão defluente, constituído pela soma das vazões turbinadas e vertidas ($u + s$), (LOPES, 2001).

Figura 2 – Esquema da usina hidrelétrica.



Fonte: Adaptado de LOPES, J. E. G; 2001.

A água do reservatório é conduzida sob pressão através de condutos forçados até as unidades geradoras, em que a água aciona a rotação das lâminas das turbinas. Depois de passar pelas turbinas, a água retorna ao rio através do canal de fuga, localizado ao final do vertedouro e da turbina, onde a vazão defluente é direcionada para voltar ao curso natural do rio.

As usinas hidrelétricas podem ser classificadas também quanto à capacidade de regularização, seguindo os critérios abaixo (ELETROBRAS, 2000) :

• Usina a fio d'água: quando as vazões de estiagem do curso de água são iguais ou maiores que a descarga necessária à potência instalada para atender a máxima demanda prevista. Nesse caso, o volume do reservatório criado pelo barramento tem pouco impacto, sendo que os sistemas de captação e adução levam a água até a casa de força, deverá ser projetado para conduzir a descarga necessária para fornecer a potência máxima;

• Usina de acumulação com regularização diária do reservatório: empregado quando as vazões de estiagem do rio são inferiores às necessárias para fornecer a potência para suprir a demanda máxima do mercado consumidor e ocorrem com risco superior ao adotado no projeto;

• Usina de acumulação com regularização mensal do reservatório: quando considera dados de vazões médias mensais no seu dimensionamento energético, analisando as vazões de estiagem média mensal. Pressupõe-se uma regularização mensal das vazões médias diárias, promovidas pelo reservatório.

Desse modo, o reservatório de uma usina hidrelétrica é formado pelo represamento das águas do rio, por meio da construção de uma barragem. Dado ao porte da barragem pode ocorrer um acúmulo de grande quantidade de água e funcionam como estoques a serem utilizados em épocas de estiagem. Já a usina com reservatórios pouco relevantes quando comparados a sua vazão, pode ser chamada de fio d'água.

As principais variáveis utilizadas na caracterização de uma usina hidrelétrica são: altura da queda d'água, vazão, capacidade ou potência instalada, tipo de turbina empregada, localização, tipo de

barragem e reservatório. Todos são fatores interdependentes. Assim, a altura da queda d'água e a vazão dependem do local de construção e determinarão qual será a capacidade instalada - que, por sua vez, determina o tipo de turbina, barragem e reservatório (ANEEL, 2008).

1.2 Potência em uma usina hidrelétrica

Conforme SAMPAIO, RAMOS e SAMPAIO (2005), em uma usina hidrelétrica a potência instalada é a capacidade máxima de produção, ou seja, é a quantidade máxima de energia que pode ser produzida numa hidrelétrica, numa determinada unidade de tempo. Do ponto de vista da eficiência, deve-se ter a máxima produção de energia determinada pela potência instalada. Analisar a quantidade de energia produzida de acordo com a potência instalada é verificar como está sendo usada a capacidade produtiva de uma hidrelétrica. Se uma usina tem uma determinada capacidade instalada ociosa, ela não está sendo eficiente no uso de seu potencial.

A produção de energia hidrelétrica brasileira é realizada por três tipos principais de empreendimentos: Usinas Hidrelétricas (UHEs), Pequenas Centrais Hidrelétricas (PCHs) e Centrais Geradoras de Hidroeletricidade (CGHs). Cada um deles tem um potencial diferenciado de produção de energia e consequentemente impacta diferentes extensões de área em seu entorno. Segundo a ABRAPCH (1997), as UHE são usinas hidrelétricas de grande porte, com capacidade de produzir acima de 30 megawatts (MW) de potência; e as PCHs são usinas hidrelétricas de tamanho e potência relativamente reduzidos, tendo entre 5 e 30 MW de energia; já as CGHs são ainda menores, tanto em tamanho quanto em potência, com capacidade para gerar até 5 MW de energia.

Um índice muito importante em usinas hidráulicas é a produtividade da usina. Este índice quantifica a quantidade de potência que é gerada por unidade de vazão turbinada (u) (CICOGNA, 1999).

1.3 Usinas hidrelétricas em cascatas

As usinas hidrelétricas que compartilham uma mesma bacia hidrográfica formam uma cascata hidrelétrica. No caso das cascatas hidrelétricas, qualquer usina que precede outra usina é chamada de montante, e qualquer usina após outra usina é chamada de jusante. Uma usina, que se encontre numa cascata hidrelétrica, tem suas operações influenciadas pelas usinas à montante. A vazão afluente dessa usina depende das condições hidrológicas naturais da bacia hidrográfica e dos aproveitamentos existentes das usinas à montante.

O conceito do Contínuo em Cascatas de Represas (CRCC - para "Cascading Reservoir Continuum Concept") foi proposto por BARBOSA et al. (1999). De acordo com os autores citados, independentemente da interrupção da continuidade do rio, reservatórios ao longo de uma sequência longitudinal apresentam significativa interconectividade entre si.

Em um sistema de usinas em cascata, a operação dos reservatórios é crítica. A diferente forma do uso da água em uma usina a montante pode acarretar em falta de água ou a necessidade de vertimento nos reservatórios das demais usinas a jusante.

O planejamento da operação de sistemas hidrelétricos em cascata é um problema particular, devido à complexidade de sua modelagem e de sua característica de acoplamento espacial e temporal. Decisões de operação em um reservatório afetam diretamente os níveis dos demais reservatórios a jusante e decisões de armazenamento ou utilização das águas afetam o nível futuro dos reservatórios, podendo acarretar em risco de deficit ou vertimento (GOMES, 2018).

Segundo LIMA et al. (2010), fazer uso dos rios para a construção de uma sequência de reservatórios é uma prática comum em grandes rios brasileiros. Reservatórios em cascata são empreendimentos localizados no mesmo rio, também chamados de reservatórios em cadeia.

Os problemas de médios e longo prazo são geralmente tratados como estocásticos, pois há incertezas como demanda e fluxo natural de entrada e, por isso, faz-se necessário uso de técnicas de resolução distintas das técnicas para resolver o problema a curto-prazo (CATALÃO et al., 2009).

Nesse contexto, sistemas críticos como aqueles que compõem as grandes barragens de hidrelétricas necessitam de estudos que avaliem a garantia do seu funcionamento, a fim de evitar falhas inesperadas (NIERADKA, 2016).

Para O'KANE, SPENCELEY e TAYLOR (2000) os modelos de simulação transformaram-se em uma das técnicas mais populares utilizadas para fazer análises de sistemas complexos. Os autores afirmam que a simulação é o ato de assemelhar-se um procedimento real em menor tempo e custo, concedendo um melhor estudo do que se pode ocorrer e de como corrigir erros que causariam grandes gastos.

1.4 Demanda de energia

Uma característica peculiar a respeito da produção e do consumo de energia elétrica é que ela não pode ser armazenada de forma trivial, e isso implica normalmente na necessidade de equilíbrio constante entre oferta e demanda (BAKER, 2008).

Para cumprir o compromisso de atender a demanda de energia elétrica, precisa ter em consideração qual será o valor da tarifa desse serviço. Os custos envolvidos nessa produção vão desde a geração de energia elétrica como a sua distribuição. Sendo assim, para obter a cotação da tarifa de energia elétrica deve-se analisar o custo do gerador, custo da transmissora, serviços prestados pelas distribuidoras, encargos setoriais e tributos.

Assim, o valor da tarifa é dimensionado de forma que o preço da energia seja suficiente para arcar com os custos de operação e expansão do sistema elétrico, desde a usina geradora até o

ramal de ligação dos consumidores de baixa tensão. Basicamente, estes custos devem cobrir os investimentos realizados na rede e a sua operação diária, que por sua vez devem resultar em baixos índices de falhas e menores tempos para eventuais consertos (GOULART, 2015).

Como instituto jurídico, o serviço público é regido por normas e princípios que visam estabelecer direitos e obrigações tanto ao usuário do serviço como ao prestador, com o intuito de proteger o consumidor e manter a qualidade e eficiência na prestação do serviço à coletividade. Acrescenta-se nesse ponto que, conforme a Lei Federal Nº. 8.987, de 13 de fevereiro de 1995, serviço adequado é o que satisfaz as condições de regularidade, continuidade, eficiência, segurança, atualidade, generalidade, cortesia na sua prestação e modicidade das tarifas (BRASIL, 1995).

O país deve garantir uma produção que atenda a demanda, pois a indisponibilidade energética pode trazer profundos impactos econômicos. Para tentar garantir o atendimento da demanda deve-se planejar o uso adequado da energia produzida.

No Brasil, devido as usinas hidrelétricas estarem localizadas em cascata ocorre uma diferença na localização das disposições dos reservatórios. A geração de energia elétrica de uma usina a montante afeta as usinas a jusante. Consequentemente existe a necessidade do controle do volume de cada reservatório para possibilitar o atendimento à demanda, balanceamento dos custos da operação e garantir a segurança do sistema.

Portanto, toda a energia consumida deve ser produzida instantaneamente e, quando há desequilíbrios, mesmo que por frações de minuto, todo o sistema corre o risco de desligamentos em cascata. Por esse motivo, é rotineiro os sistemas elétricos apresentarem uma capacidade instalada superior às suas necessidades imediatas, possibilitando a existência de um limite de segurança no suprimento de energia (CHEN et al., 2009); (FAIAS; SOUSA; CASTRO, 2009).

1.5 Motivação

O atendimento da demanda de potência é o problema que deve ser resolvido no médio prazo para o atendimento aos consumidores. Trata-se de um problema não linear com um conjunto de restrições dinâmicas. O método proposto apresenta convergência com baixo custo computacional com possibilidades para trabalhos futuros abordarem incertezas e acoplamento hidráulico entre outras.

1.6 Organização do trabalho

O presente texto está organizado da seguinte maneira: Capítulo 2 traz a metodologia, bem como trabalhos relacionados a essa dissertação e a formulação matemática do trabalho. Primeiramente é estudado o problema de maximizar a vazão sem ferir as restrições de maneira a manter o perfil de vazão inicialmente definido. Este problema é resolvido analiticamente, e a solução é comparada com a formulação como programação linear usando o CPLEX. Na segunda fase

é gerado um algoritmo para controlar a potência, que é uma função não linear da vazão. Os resultados apresentados mostram a convergência do método proposto para os perfil de geração de potência constante no tempo, que gera, devido a não linearidade, um perfil não constante de vazão. O Capítulo 3 foi detalhado as análises, discussão dos resultados e simulações. Por último, o capítulo 5 realiza as conclusões e ainda apresenta algumas possibilidades de trabalho futuro.

1.7 O problema de maximização da geração de energia

Neste trabalho, há uma otimização da geração de energia em uma usina hidrelétrica com reservatório. Usinas com essas características têm o seu volume de água armazenado com a capacidade limitada, que é o máximo do volume suportado pelo reservatório. Logo, a produtividade das usinas depende do volume do reservatório e da vazão defluente, além do volume mínimo. Por esse motivo, é necessário definir uma análise do balanço hídrico, de modo a analisar a afluência de cada usina. Essa afluência se compõe da vazão natural mais os volumes defluentes (turbinado e vertido) das usinas imediatamente a montante, caso a usina esteja localizada numa cascata.

A restrição em relação ao volume do reservatório também será dada por atender a demanda futura considerando um horizonte de planejamento médio prazo. Logo, a projeção de demanda futura é um importante parâmetro de entrada.

Conforme visto anteriormente, a potência de uma usina hidrelétrica é proporcional à vazão de água disponível para movimentar as turbinas. Em uma usina hidrelétrica é comum a existência de várias usinas interconectadas hidraulicamente (usinas em cascata). Essa interconexão entre as usinas faz com que as vazões afluentes a um reservatório difiram sensivelmente de suas vazões afluentes naturais por causa da operação das usinas à montante.

Os sistemas hídricos com complementaridade térmica possuem características bem distintas dos sistemas puramente térmicos, dentre as quais se destacam (MARCATO, 2002; MORAES, 2007) :

• Estocasticidade: relacionada com a incerteza em relação às afluências futuras, que se tornam mais significativas quanto maior for o horizonte do planejamento;

• Acoplamento espacial da operação: a construção de usinas hidráulicas em cascata, ou seja, no leito de um mesmo rio, faz com que a operação de uma usina, à montante interfira na operação das usinas à jusante, diferentemente das usinas térmicas que apresentam a operação independente;

• Acoplamento temporal da operação: a decisão da utilização dos recursos hídricos em um mês pode ocasionar efeitos indesejados nos meses subsequentes, tais como o não suprimento da carga (deficit) ou mesmo o vertimento de água dos reservatórios, que representa um desperdício de energia.

Segundo Diniz, Esteves e Sagastizabal (2007), um outro ponto importante na operação do sistema é o acoplamento espacial hidráulico entre usinas situadas no mesmo rio. Deste modo, a operação

de usinas situadas à montante terá que ser feita de modo coordenado com as usinas situadas à jusante, para evitar prejuízos e mau aproveitamento hídrico, ou seja, existindo usinas dispostas em uma estrutura em cascata, uma usina deve considerar as restrições impostas pelas usinas localizadas à jusante e à montante.

A produção energética desse sistema depende das vazões afluentes que compõem todo o sistema. Durante o planejamento da operação de usinas hidrelétricas em cascata, deve-se levar em consideração que o volume de água que chega aos reservatório é desconhecido. Assim como o volume de água das afluências naturais, uma vez que, depende das condições climáticas.

No que concerne à geração de energia, retiradas significativas de água à montante dos reservatórios dos aproveitamentos hidrelétricos reduzem as vazões afluentes, diminuindo a disponibilidade hídrica para jusante e a produção da usina. Assim, o gestor de recursos hídricos deve compatibilizar os usos de modo a garantir as demandas por água e a produção de eletricidade, (HORA, 2012.).

Devido à grande predominância das usinas hidrelétricas, e do sistema ser fortemente dependente das afluências futuras, é necessário realizar o planejamento da operação a fim de minimizar o valor esperado do custo de operação no período de planejamento, atendendo à demanda dentro de um limite estabelecido de confiabilidade, com certo grau de risco, mesmo em situações hidrológicas desfavoráveis, através da redução e priorização do consumo de combustíveis (FORTUNATO et al., 1990).

Como afluências futuras são desconhecidas, e influenciam no volume de água no reservatório, torna-se necessário que a decisão de operação analise a afluência natural. Assim, se decair muito o volume de água dos reservatórios e ocorrer um baixo regime pluviométrico, haverá grande probabilidade da usina não conseguir atender demanda. De outra forma, se mantivermos o nível dos reservatórios elevado, e ocorrerem altos índices pluviométricos, será necessária a eliminação de água para não ultrapassar o volume máximo suportado pela barragem, então ocorrerá uma vazão vertida.

O armazenamento dos reservatórios e a tendência hidrológica influenciam no processo decisório. Como não é possível precisar o volume de água disponível para geração de eletricidade, o próximo horizonte faz com que o custo de operação seja influenciado pela afluência natural.

Devido à predominância de usinas hidrelétricas na geração energética brasileira e levando em conta o fato do sistema ser fortemente dependente das afluências futuras, a busca por um planejamento da produção robusto às incertezas inerentes ao problema (na etapa de programação diária) torna-se de suma importância para os agentes de geração, podendo gerar melhorias consideráveis (RAMOS, 2018; SÈGUIN et al., 2017).

Desta forma, toda usina disposta em cascata, deve possuir a informação de qual usina está imediatamente a sua montante, de forma a gerenciar sua programação para atender a demanda sem

violar restrições operativas como níveis máximo e mínimo do reservatório. As regras operativas determinam as prioridades de enchimento e esvaziamento dos reservatórios estabelecendo os níveis de armazenamento e de produtividade na cascata (RAMOS, 2018).

Uma indisponibilidade energética pode trazer consequências negativas para economia do país. Portanto, o setor de energia brasileira precisa ter uma atenção especial para o abastecimento adequado, principalmente pelo crescimento da demanda de energia elétrica, afim de evitar um racionamento de energia. Entretanto, são muitas as incertezas envolvidas no setor elétrico como a afluência de vazões e a demanda. Há também a responsabilidade ambiental, o que torna o problema de planejamento energético complexo e difícil de ser ajustado.

A busca pelo desenvolvimento sustentável, nos âmbitos social e ambiental, motiva e incentiva a elaboração de várias pesquisas e projetos, investigando mecanismos de seleção e gerenciamento para o adequado uso das formas alternativas e principalmente renováveis de geração de energia (BARIN et al., 2010).

Planejar a operação de um sistema de energia elétrica, na maior parte dos casos, tem como objetivo atender a demanda com um custo mínimo. O que significa definir a estratégia de operação das usinas em curto, médio e longo prazo. Desta forma, o planejamento da operação é essencialmente um problema de otimização. O planejamento é importante para se obter maior aproveitamento do volume de água na geração de energia potencial. O modo de uso da água é uma características que devem ser levadas em conta no planejamento da geração hidrelétrica. Assim, o volume mínimo operativo, determinado pela altura mínima onde a energia potencial é suficiente para que o processo de geração de energia valha a pena, e, por outro lado, seu volume máximo, que é o máximo de volume que o reservatório comporta. Qualquer volume acima deste nível terá obrigatoriamente que ser turbinado ou vertido.

Capítulo 2

Metodologia

2.1 Notação, definições e modelos

A demanda de energia elétrica ao sistema gerador ocorre de forma diferenciada, em que podem considerar os termos em diários, semanais e sazonais. A energia elétrica, por sua vez, deve ser produzida no instante em que é solicitada, pois não pode ser armazenada.

A quantidade de energia que uma usina hidrelétrica é capaz de gerar, em um determinado período, é limitada pela quantidade de água (vazões afluentes e estoque de reservatórios) disponível nesse intervalo.

O planejamento da operação nos seus diversos horizontes de tempo (longo, médio e curto prazo) nas usinas hidrelétricas leva-se em conta a variação do volume ao longo do horizonte de planejamento, bem como a capacidade do reservatório em análise.

A função de geração de eletricidade de uma usina hidrelétrica é uma função não linear e sofre influência dos rendimentos da turbina e do gerador, da altura da queda líquida do reservatório e da vazão turbinada por cada uma das turbinas que compõem a usina hidrelétrica.

A função de geração de energia hidrelétrica pode ser definida como:
$g(v, u) = k(h(v) - w(u) - \varepsilon)u$,

E que, $h(v)$ é a função volume por altura, $w(u)$ é a função vazão turbinada por altura, $\varepsilon[m]$ é uma constante do atrito do fluxo de água nas tubulações do sistema hidráulico e u (m^3/s) é a vazão turbinada. Para simplificar, temos a constante k $[W/(m^3/s)m]$ que é a produtividade específica de cada usina. Esse índice quantifica a quantidade de potência que é gerada por vazão turbinada e queda d'água.

A função $h(v)$, volume por altura, analisa o volume do período $(v[hm^3])$ em relação à altura do período $(h[m])$ no reservatório, enquanto a função $w(u)$, vazão turbinada por altura, analisa a vazão turbinada do período $(u[m^3/s])$ em relação à altura atual do canal de fuga ($\varepsilon[m]$). Em algumas plantas, a vazão vertida $s[m^3/s]$, também, pode afetar a altura do canal de fuga, que

seria a função $w(u, s)$.

Claramente, a função de geração é considerada não linear, sendo a sua natureza definida pelas funções auxiliares: volume por altura e vazão turbinada por altura.

Caso as funções auxiliares não forem definidas, não será possível , na maioria das situações, determinar se a função é de fato côncava ou não.

A altura do canal de fuga pode ser assumida como constante, visto que as características topográficas e / ou mecânicas da usina hidrelétrica resultam em pequenas variações na elevação da altura para que sejam ignoradas em relação à rede hidráulica.

Além disso, há os limites de restrição ambiental em que consideram o máximo da elevação da altura do canal de fuga para a prevenção de inundações. Assim, a análise irá considerá-la como constante e se concentrará na função volume por altura.

Com a altura constate do canal de fuga, a função de geração de energia hidrelétrica se torna:

$g(v, u) = k(h(v) - \zeta - \varepsilon)u,$

em que $\zeta[m]$ é a altura constante do canal de fuga.

A quantidade de eletricidade gerada em uma usina hidrelétrica é determinada pela quantidade de água turbinada e, também, pela quantidade de água na rede hidráulica. A rede hidráulica refere-se à distância entre a superfície da água no reservatório até as turbinas: a medida que aumenta a quantidade de água no reservatório, igualmente ocorre com a eletricidade gerada.

Dado que a altura da água no reservatório é $h(v) \geq \underline{h} > 0$, podemos definir o coeficiente de produtividade como sendo:
$\phi(v) = k(h(v) - \zeta - \varepsilon)$

A constante k compreende a densidade da água, aceleração da gravidade e eficiência média do sistema gerador de turbina. A altura da água pode ser expressa em função do seu armazenamento, $h(v)$. Esta função depende da geometria do reservatório, no entanto, é notório que quanto maior o volume de água, maior será a altura. Consequentemente, quanto maior o volume de água, maior o coeficiente de produtividade.

Em uma cascata, a geração total de energia é a soma da geração de energia de cada usina. Além disso, a geração total de energia no horizonte de planejamento é a soma da geração de cada período de tempo. Consequentemente, a função a ser maximizada é um somatório da geração de cada usina em relação ao um período de tempo. Como resultado, esse somatório das geração de energia deve ser considerado na análise matemática do modelo. Essa soma, deve preservar a concavidade da função da geração total, se todas as funções de geração forem côncavas: uma soma ponderada não negativa e nula de funções côncavas é côncava, (BOYD; VANDENBERGHE, 2004). Por outro lado, uma soma de funções pseudo-côncavas não

é necessariamente pseudocôncavo. Obviamente, isso afeta modelos que considere a altura do reservatório como variável.

2.2 Trabalho Relacionados

Lisboa et al. (2013), Mendonça et al. (2019), Campos et al. (2019) aprofundam-se na otimização da operação de usinas hidrelétricas em cascata, em que o grande desafio seria como considerar as incertezas que interferem na programação de cada usina.

Campos et al. (2019) analisam as incertezas presentes em cada parcela da afluência total das usinas: afluência natural incremental e defluências de usinas a montante. Desenvolveu-se uma ferramenta capaz de auxiliar na etapa de planejamento, possibilitando a obtenção de uma programação energética mais robusta. Como resultado demonstrou ter a afluência total da usina a jusante uma influência significativa na programação diária. Também foi apresentada uma métrica de robustez, a fim de verificar a sensibilidade de uma programação de geração frente a possíveis variações no programa da usina a montante.

Em relação Lisboa et al. (2013), eles modelaram o problema de planejamento de usinas hidrelétricas em cascata como multiobjetivo. As funções objetivos são a maximização da geração e o volume final dos reservatórios. Em que a primeira função objetivo pode considerar a produtibilidade constante ou produtibilidade variando em relação ao nível do reservatório. O segundo objetivo está relacionado com a garantia de geração futura, ou seja, maximizar o armazenamento final dos reservatórios.

Por último, Mendonça et al. (2019) foi proposto um algoritmo para o problema de otimização de geração hidrelétrica, para produzir uma certa demanda de energia dividindo-a da melhor maneira entre cada unidade geradora, satisfazendo diversas restrições físicas e operacionais. A análise dos resultados obtidos mostra que o algoritmo proposto alcança uma resposta satisfatória, que seria capaz de reduzir consideravelmente o uso de água em um horizonte de médio prazo, algo lucrativo para a empresa e bom para o meio ambiente.

Outros trabalhos em que abordam a relação da otimização na geração de energia hidrelétrica são os de Saldanha et al. (2019). De acordo com esse artigo, após modificar o algoritmo "NELDER-MEAD", foi aplicado no problema de otimização da programação diária da operação de usinas hidrelétricas. Esse problema seria de grande porte, formulado em termos de funções não diferenciáveis.

No ponto de vista de CAMARGO (2017), o qual evidencia que a otimização da operação das usinas hidrelétricas é extremamente importante e, também, vem sendo estudada de maneira recorrente. Ao aplicar um conhecido modelo de decomposição temporal desse problema de otimização, foi realizado uma comparação entre algoritmos de otimização multiobjetivo, para o planejamento de médio prazo de usinas hidrelétricas.

Para Junior, Alves e Campos (2020), a previsibilidade da vazão disponível para as usinas hidrelétricas é de extrema importância para o planejamento e operação do sistema elétrico. Dessa forma, é possível obter estas previsões através do uso de modelos hidrológicos que caracterizam a região de estudo.

Francato, Coiado e Lino (2020) salientam que no caso de usinas hidrelétricas, em função do insumo utilizado na geração de energia pode haver diversos cenários, como: disponibilidade de recurso de geração, intermitência, sazonalidade, capacidade de armazenamento, interligação elétrica entre sistemas, etc. O artigo propõe uma metodologia para a garantia física, com a proposta de utiliza recursos de otimização não linear.

Guedes et al. (2015) exemplificam que em uma cascata de usinas hidrelétricas, as que estão situadas a montante influenciam diretamente as próximas usinas. Essa influência pode ser modelada matematicamente pela equação do balanço hídrico:

$$v_{i,t} = v_{i,t-1} + [\alpha_{i,t} - q_{i,t}]\Delta t, \forall i \in \Phi, t \tag{1}$$

$$\alpha_{i,t} = \gamma_{i,t} + \sum_{k \in \Omega_i} q_{k,t-\tau_k}, \tag{2}$$

onde $\alpha_{i,t}$ corresponde a afluência total da usina i no instante t, $q_{i,t}$ corresponde a defluência da usina i analisada, sendo que defluência é a soma das vazões turbinada ($u_{i,t}$) e vertida ($s_{i,t}$), $v_{i,t}$ corresponde ao volume, e Δt é o valor do intervalo de tempo considerado na discretização. A afluência total α depende do valor da vazão incremental (ou natural) $\gamma_{i,t}$ e da defluência das usinas a sua montante que é representado pelo conjunto Ω_i, o parâmetro $\tau_k \in N_+$ é o tempo relativo de viagem entre cada usina k e sua jusante e Φ o conjunto de usinas com reservatórios.

Vieira et al. (2015) demonstra as condições matemáticas para garantir a pseudo concavidade da função de geração para um modelo não linear geral.

Em síntese, a geração de energia hidrelétrica é uma função pseudo-côncavo se a altura do canal de fuga e da produtividade θ_v forem constantes e, também, se a função volume por altura for pseudo-concavo.

A função de produtividade na prática é côncava, porque a função volume por altura em relação á geometria do reservatório terá a variação da altura com o volume mais pronunciado na parte inferior do reservatório. E, continuamente, reduz à medida que a altura aumenta, desde que a água na superfície aumente naturalmente com a altura (GUEDES et al., 2017).

2.3 Formulação matemática da programação automática em uma usina hidrelétricas

Em Vieira et al. (2015), para produção de energia hidrelétrica com condições de otimização, é demonstrado uma formulação matemática para usinas hidrelétricas. A seguir vamos detalhar a formulação matemática desse artigo:

Dada uma função de geração pseudo-côncava $g(v, u)$, é possível construir um problema de otimização pseudo-côncavo, cujo objetivo é otimizar a produção de energia em relação aos níveis de demanda d_t de todos os períodos de tempo $t = 1, ..., \bar{t}$ para uma determinada usina:

$$\max f = \min_{u_t} \{g_t(v_t, u_t)\} \tag{3}$$

$$\text{s.t.} \beta v_t - \beta v_{t-1} + q_t \leq \gamma_t \qquad \forall t \tag{4}$$

$$u_t, v_t \in \Omega \tag{5}$$

$$onde : \Omega = \{u_t, v_t : \underline{u} \leq u_t \leq \bar{u}, \underline{v} \leq v_t \leq \bar{v}\} \qquad \forall t \tag{6}$$

e $g_t(v_t, u_t) = \phi(v_t)u_t$ é a função de energia hidrelétrica. O volume inicial v_0 é conhecido. As restrições são derivadas do balanço hídrico da planta. A constante β converte o volume em taxa de fluxo. Em cada período de tempo, o volume do reservatório v_t é igual ao volume anterior v_{t-1} mais o fluxo natural γ_t, menos a taxa turbinada de água u_t menos a taxa de vertimento de água s_t. Se o vertimento de água for considerado uma variável de folga, a equação 4 do balanço hídrico se torna uma equação com igualdade.
$\beta v_t - \beta v_{t-1} + q_t = \gamma_t$, em que $q_t = u_t + s_t$.

Segundo Hillier e Lieberman (2013) o procedimento algébrico para incluir as variáveis de folga se baseia na transformação das inequações (restrições) em equações igualmente equivalentes. Essa conversão é realizada incluindo-se variáveis de folga.

A natureza do problema de otimização depende da função objetivo. Se a função f é pelo menos pseudocôncava, o problema compartilha condições de otimalidade com um problema de maximização pseudocôncava. Supondo que a função de geração de energia hidrelétrica tenha as seguintes propriedades estabelecidas: a função g_t, $\forall t$ e a função objetivo f são pseudo côncavas. Isso é verdade porque o mínimo em t preserva a pseudo-concavidade e o forte aumento das propriedades. As provas respectivamente são apresentadas em Vieira et al. (2015).

Dada uma função de geração de energia elétrica pseudocôncava $g(v, u)$, é possível construir um problema de otimização pseudocôncavo, cujo objetivo é otimizar a produção de energia elétrica em um determinado período de tempo, para uma determinada usina.

A função objetivo visa atender ou exceder a demanda alvo, maximizando a segurança energética. O perfil de demanda (d_t), após ser maximizado, pode representar um nível mínimo que a usina

hidrelétrica deve fornecer a cada período de tempo. Se a produção não exceder a demanda, o modelo aproximará a geração e a demanda usando o pior cenário possível.

Claramente, as restrições são lineares, portanto, cada uma define semi espaço. O conjunto de interseção este semi espaço (poliedro) é um conjunto convexo, como demonstrado em Bazaraa, Sherali e Shetty (2006), p. 65.

A natureza do problema de otimização depende da função objetivo (f). Se essa função é ao menos pseudocôncava, esse problema compartilha com condições de otimalidade e assim é um problema de maximização côncava.

2.4 Análise da demanda de vazão

Um dos fatores de grande importância presente no estudo da produção de energia hidrelétrica é o controle da vazão turbinada que pode ser modelado como uma demanda de vazão. O problema busca maximizar a demanda de vazão em todos os períodos de tempo. Para formular este problema, podemos fazer uso da formulação matemática apresentada anteriormente. Vimos que a função de geração de energia é dada por $g(v, u) = \phi(v)u$. Fazendo o coeficiente de produção de energia $\phi(v) = c$, obtemos uma expressão simplificada para $g(v, u) = g(u) = cu$, exclusivamente em função da vazão turbinada.

A função de geração de energia elétrica, $\max f = \min_{u_t}\{g_t(v_t, u_t)\}$, é uma função não linear.

Ao ser simplificada como uma função linear, se considerada o fato de que a produtividade da usina e o seu volume do reservatório são constantes.

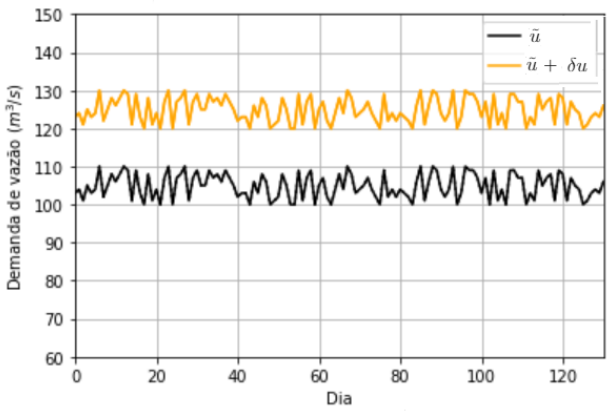
Assim, a quantidade de eletricidade gerada é determinada pelo volume de água turbinado.

Com a expressão simplificada para $g(v, u) = g(u) = cu$, exclusivamente em função da vazão turbinada, a função de geração de energia elétrica pode ser descrita como uma constante, multiplicada pelo volume de água turbinado que deverá atender a demanda de vazão.

Neste contexto, o objetivo geral deste trabalho é analisar e, também, aprimorar o modelo de produção de energia hidrelétrica. Tendo como objetivos específicos o cálculo da taxa de vazão máxima, δu, de uma usina hidrelétrica e atender a meta da demanda de vazão, $\tilde{u}$.

Com base na previsão da demanda de vazão ($\tilde{u}$) de um determinado período, calcula-se o δu, e assim alcança os valores do limite superior e do limite inferior da vazão para uma determinada usina, conforme Figura 3.

Figura 3 – Variação da taxa de vazão de maneira a maximizar o δu, respeitando as restrições.



Um dos fatores de grande importância presente no estudo da produção de energia hidrelétrica é a demanda de vazão. Para definir a capacidade máxima que uma hidrelétrica pode entregar para o sistema, dado um perfil de demanda de vazão, optamos por escrever o problema de maximização da demanda de vazão. Para formular este problema, podemos fazer uso da formulação matemática apresentada anteriormente. Vimos que a função de geração de energia pode ser uma expressão simplificada para $g(v, u) = g(u) = cu$, exclusivamente em função da demanda de vazão.

Com base nas informações apresentadas em Vieira et al. (2015) e através da análise realizada para a produção da usina seja para atender a demanda de vazão. O problema da maximização da demanda de vazão foi formulado como segue:

Formulações - Modelo de Programação Linear

Formulação 1, em que o perfil da demanda de vazão têm os valores iguais

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & \delta u && && (7)\\
\text{sujeito a} \quad & \beta v_t \leq \beta v_{t-1} + \gamma_t - u, , \ \ \forall \in \{1, \ldots, \bar{t}\} && && (8)\\
& v_t \geq \underline{v}, && \forall t \in \{1, \ldots, \bar{t}\} && (9)\\
& v_t \leq \overline{v}, && \forall i \in \{1, \ldots, \bar{t}\} && (10)\\
& \delta u \leq u_{max} && && (11)\\
& \delta u \geq 0 && && (12)\\
& s_t \geq 0 && \forall i \in \{1, \ldots, \bar{t}\} && (13)
\end{aligned}$$

onde δu, s_t e v_t, $t = 1, \ldots, \bar{t}$ são as variáveis de decisão e representam a demanda de vazão, a vazão vertida e o volume do reservatório no período t, respectivamente. Os parâmetros são

dados pelo volume inicial do reservatório v_0, limite inferior do reservatório $\underline{v}$ e limite superior do reservatório $\overline{v}$, com $\underline{v} < \overline{v}$ e γ_t, $t = 1, \ldots, \bar{t}$ que representa a afluência natural esperada para cada período t. Além disso, temos que a função objetivo (7) representa a função de geração de energia expressa em função da demanda de vazão, o conjunto de restrições (8) se referem ao balanço hídrico, as restrições (9) e (10) garantem, respectivamente, os limites inferior e superior da capacidade do reservatório, a restrição (11) que a demanda de vazão não ultrapassará o limite de vazão turbinada da usina hidrelétrica, a restrição (12) expressa a não-negatividade da demanda de vazão e por último a restrição (13) a não-negatividade da vazão vertida.

Assim como na formulação original, ao considerar variáveis de folga s_t, representando a quantidade de água vertida em cada período t, o conjunto de restrições (8) é dado por $\beta v_t = \beta v_{t-1} + \gamma_t - \delta u - s_t$, para todo $t = 1, \ldots, \bar{t}$.

Formulação 2: em que o perfil da demanda de vazão têm os valores diferentes

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & \delta u & & & (14)\\
\text{sujeito a} \quad & \beta v_t \leq \beta v_{t-1} + \gamma_t - (u_t + \delta u), & & \forall t \in \{1, \ldots, \bar{t}\} & (15)\\
& v_t \geq \underline{v}, & & \forall t \in \{1, \ldots, \bar{t}\} & (16)\\
& v_t \leq \overline{v}, & & \forall t \in \{1, \ldots, \bar{t}\} & (17)\\
& u_t + \delta u \geq 0 & & \forall i \in \{1, \ldots, \bar{t}\} & (18)\\
& u_t + \delta u \leq u_{max} & & \forall i \in \{1, \ldots, \bar{t}\} & (19)\\
& s_t \geq 0 & & \forall i \in \{1, \ldots, \bar{t}\} & (20)
\end{aligned}
$$

onde δu, u_t, s_t e v_t, $t = 1, \ldots, \bar{t}$ são as variáveis de decisão e representam a variação da demanda de vazão, a demanda de vazão, a vazão vertida e o volume do reservatório no período t, respectivamente. Os parâmetros, neste caso são dados pelo volume inicial do reservatório v_0, limite inferior do reservatório $\underline{v}$, limite superior do reservatório $\overline{v}$, com $\underline{v} < \overline{v}$ e γ_t representa a afluência natural esperada para cada período t. E u_{max} seria o limite máximo de turbinada da usina, e u_t a demanda de vazão pré-determinada para cada t A função objetivo dada em (14) representa a variação da demanda de vazão, o conjunto de restrições (15) se referem ao balanço hídrico, as restrições (16) e (17) garantem, respectivamente, os limites inferior e superior da capacidade do reservatório, a restrição (18) expressa a não-negatividada demanda de vazão mais a variação da demanda de vazão, a restrição (19) expressa que a demanda de vazão mais a variação da demanda de vazão não ultrapassará o limite de vazão turbinada da usina hidrelétrica, e a última restrição (20) a não-negatividade da vazão vertida.

O problema da geração do delta pode ser escrito como um problema de programação linear.

Segundo PLOSKAS e SAMARAS (2015), o algoritmo simplex é o método mais utilizado para a resolução de problemas de programação linear. O método simplex é um processo iterativo que permite melhorar a solução da função objetivo em cada etapa. Com base no valor da função objetivo, o procedimento consiste em, a partir de um vértice viável, procurar outro vértice viável que melhore o valor anterior. O processo finaliza quando não é possível continuar melhorando o valor da função objetivo, ou seja, obtenha-se a solução ótima e todas as restrições sejam satisfeitas.

Embora o problema de geração do delta pode ser resolvido com o método simplex, neste trabalho apresentamos a solução analítica para o mesmo. O motivo é reduzir o custo computacional e ficar mais robusto o resultado final. Será demonstrado que a solução analítica diminui o tempo de resolução quando comparado ao programa CPLEX Optimization Studio que permite a implementação de modelos de otimização de decisão usando programação matemática e com restrições.

2.4.1 Solução analítica para demanda de vazão constante

Neste caso, a formulação para produção de energia hidrelétrica apresentada anteriormente fica simplificada em termos da demanda de vazão e dá origem ao problema P_1.

Para que a usina hidrelétrica consiga atender a demanda de vazão no primeiro período, levando-se em conta que s_1 é uma variável de folga, ou seja, a usina irá verter água quando atingir o seu volume máximo na barragem. Desse modo, observa-se que não há um limite para verter a quantidade de água que ultrapasse o volume do reservatório. Considerando que a demanda de vazão seja constante em todos períodos, ou seja, $\tilde{u}_t = \tilde{u}$, $\forall_t = 1, ..., \bar{t}$, a equação do balanço hídrico apresenta:

$$\beta v_1 \leq \beta v_o + \gamma_1 \tag{21}$$

$$\beta v_2 \leq \beta v_o + \gamma_1 + \gamma_2 \tag{22}$$

$$\beta v_3 \leq \beta v_o + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \tag{23}$$

$$\vdots \tag{24}$$

$$\beta v_{\bar{t}} \leq \beta v_o + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{\bar{t}} \tag{25}$$

Logo, para que a usina consiga atender todos os períodos, o valor da variação da demanda de vazão deverá ser igual ou maior ao valor mínimo das demandas de vazão de todos os períodos:

$$\begin{aligned} \delta u \leq \min\{&\beta v_o + \gamma_1, (\beta v_o + \gamma_1 + \gamma_2)/2, (\beta v_o + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)/3, \\ &\cdots, (\beta v_o + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{\bar{t}})/\bar{t}\} \end{aligned} \tag{26}$$

Caso a demanda de vazão seja maior que o volume máximo vezes β, será necessário verter água. E se o volume final for inferior à condição de contorno será necessário diminuir o valor do mínimo δu.

Após a implementação de um simulador desenvolvido em Python foram realizados alguns testes, e verificou-se que a melhor maneira de recalcular o δu, seria no período que foi necessário verter água pela última vez até o período em que a demanda vazão for inferior ao volume mínimo do reservatório. Esse cálculo assegura se o δu for recalculado seu valor será positivo.

Como o objetivo da usina é atender as demandas de vazão, ela deverá atualizar o valor da taxa máxima de vazão, até ser possível que a usina hidrelétrica tenha capacidade de atender a sua própria demanda de vazão.

O lema a seguir nos dá uma importante consequência das restrições de balanço hídrico.

Lema: Se $\beta v_t \leq \beta v_{t-1} + \gamma_t - u$, para todo $t = 1, \ldots, \bar{t}$, então $\beta v_t \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - tu$, para todo $t = 1, \ldots, \bar{t}$.

Demonstração: De fato, por hipótese, temos que $\beta v_2 \leq \beta v_1 + \gamma_2 - u$ e também que $\beta v_1 \leq \beta v_0 + \gamma_1 - u$, logo

$$\beta v_2 \leq (\beta v_0 + \gamma_1 - u) + \gamma_2 - u \Rightarrow \beta v_2 \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - 2u.$$

De modo análogo, temos que $\beta v_3 \leq \beta v_2 + \gamma_3 - u$ e que $\beta v_2 \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - 2u$, logo

$$\beta v_3 \leq (\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - 2u) + \gamma_3 - u \Rightarrow \beta v_3 \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 3u.$$

Procedendo deste modo, obtemos que

$$\beta v_t \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - tu, \text{ para todo } t = 1, \ldots, \bar{t}.$$

Observação: Do lema anterior, temos que em cada período de tempo $t = 1, \ldots, \bar{t}$, devemos ter $\beta v_t \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - tu$. Logo, para que cada uma dessas desigualdades sejam satisfeitas, a demanda de vazão u deve ser menor ou igual à quantidade de água disponível em cada período de tempo, ou seja,

$$u \leq \min \left\{ \beta v_0 + \gamma_1, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2}{2}, \ldots, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{\bar{t}}}{\bar{t}} \right\}.$$

Suponha que a capacidade inferior do reservatório seja $\underline{v}$ e que a capacidade superior seja suficientemente grande de modo que não ocorra vertimento em nenhum período de tempo. Neste caso, a demanda de vazão deverá satisfazer a condição

$$u \leq \min \left\{ \beta v_0 + \gamma_1 - \beta \underline{v}, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - \beta \underline{v}}{2}, \ldots, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{\bar{t}} - \beta \underline{v}}{\bar{t}} \right\}. \tag{27}$$

Para resolver o Problema P_1, propomos o procedimento descrito no Algoritmo 1, que foi motivado a partir da expressão (27). Provamos adiante que uma solução gerada por este procedimento é, de fato, uma solução ótima para P_1.

Algoritmo 1: Cálculo da Demanda de Vazão Máxima u - Problema P_1

Input: Período de tempo $\bar{t}$, Quantidade de chuva em cada período $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{\bar{t}})$, Volume inicial reservatório v_0, Limite inferior do reservatório $\underline{v}$, Limite superior do reservatório $\overline{v}$, β converte o volume em taxa de fluxo e Δt é diferença entre o período atual t e o último período t' em que $s_{t'} > 0$.

Output: Valor máximo da demanda de vazão u e volume do reservatório em cada período de tempo $v = (v_1, \ldots, v_{\bar{t}})$.

```
u ← min{βv_0 + γ_1 − β v̲, (βv_0+γ_1+γ_2−β v̲)/2, ..., (βv_0+γ_1+···+γ_t̄−β v̲)/t̄}
if u < 0 then
    Não existe nenhum valor de δu para os parâmetros dados.
else
    t ← 1
    while t ≤ t̄ do
        v_t ← v_{t−1} + βγ_t − βu
        s_t ← 0
        if v_t > v̄ then
            s_t ← v_t − v̄
            v_t ← v̄
        end if
        if v_t < v̲ then
            u ← u − (β v̲ − βv_t)/Δt
            t ← 1
        else
            t ← t + 1
        end if
    end while
    return u e v = (v_1, ..., v_t̄)
end if
```

Observações:

(1) Veja que no Algoritmo 1, se não houver vertimento água em nenhum período de tempo, então não será necessário atualizar o valor de u em nenhuma iteração. De fato, por hipótese, temos que não houve vertimento de água em nenhum período de tempo, então $\beta v_t = \beta v_{t-1} + \gamma_t - u$, para todo $t = 1, \ldots, \bar{t}$. Logo, para cada t também vale que $\beta v_t = \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - tu$. Como

$$u \leq \min\left\{\beta v_0 + \gamma_1 - \beta\underline{v}, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - \beta\underline{v}}{2}, \ldots, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \bar{t} - \beta\underline{v}}{\bar{t}}\right\},$$

então, para cada t, temos que

$$
\begin{aligned}
u \leq \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - \beta \underline{v}}{t} \quad &\Rightarrow \quad tu \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - \beta \underline{v} && (28)\\
&\Rightarrow \quad \beta \underline{v} \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - tu && (29)\\
&\Rightarrow \quad \beta \underline{v} \leq \beta v_t. && (30)
\end{aligned}
$$

Observe que, neste caso, u será igual ao mínimo do conjunto

$$
\left\{ \beta v_0 + \gamma_1 - \beta \underline{v}, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - \beta \underline{v}}{2}, \ldots, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_T - \beta \underline{v}}{\bar{t}} \right\}.
$$

(2) Para que o Algoritmo 1 esteja bem definido, precisamos mostrar ainda que a atualização do valor de u, quando necessária, não infringi a restrição $u \geq 0$. Para isso, basta mostrar que $\frac{\beta \underline{v} - \beta v_t}{\Delta t} \leq u$, onde t corresponde ao período da iteração atual e $\Delta t = t - t'$, em que t' é o último período no qual houve vertimento de água (esse período existe, veja observação (1)). Para provar essa afirmação, veja que $\beta v_t \leq \beta v_{t'} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_t - (t - t')u$ e que $\beta v_{t'} = \beta \overline{v}$, uma vez que no período t' houve vertimento de água. Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta \underline{v} - \beta v_t}{t - t'} \leq u \quad &\Leftrightarrow \quad \beta \underline{v} - \beta v_t \leq (t - t')u && (31)\\
&\Leftrightarrow \quad \beta \underline{v} \leq \beta v_t + (t - t')u && (32)\\
&\Leftrightarrow \quad \beta \underline{v} \leq [\beta v_{t'} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_t - (t - t')u] + (t - t')u && (33)\\
&\Leftrightarrow \quad \beta \underline{v} \leq \beta \overline{v} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_t. && (34)
\end{aligned}
$$

Como $\beta \underline{v} < \beta \overline{v}$, segue que a última expressão é verdadeira e, portanto, vale que $\frac{\beta \underline{v} - \beta v_t}{t - t'} \leq u$, como queríamos.

(3) Seja (u, v) uma solução gerada pelo Algoritmo 1 e suponha que

$$
\begin{aligned}
\min \left\{ \beta v_0 + \gamma_1 - \beta \underline{v}, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - \beta \underline{v}}{2}, \ldots, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{\bar{t}} - \beta \underline{v}}{\bar{t}} \right\} \\
= \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - \beta \underline{v}}{k} = u_k.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Temos que:

(i) Se $u = u_k$, então o valor da demanda de vazão não foi atualizado em nenhuma iteração do Algoritmo 1. No período $t = k$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\beta v_k &\leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - ku && (36)\\
&= \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - ku_k && (37)\\
&= \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - k\left(\frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - \beta \underline{v}}{k}\right) && (38)\\
&= \beta \underline{v}, && (39)
\end{aligned}
$$

ou seja, $\beta v_k \leq \beta \underline{v}$. Por outro lado, como (u, v) é uma solução gerada pelo Algoritmo 1, então $\beta \underline{v} \leq \beta v_k$. Logo, $\beta v_k = \beta \underline{v}$.

(ii) Se $u < u_k$, então o valor da demanda de vazão foi atualizado em pelo menos uma iteração do Algoritmo 1. Denote por $(\tilde{u}, \tilde{v})$ o par que estava sendo gerado pelo Algoritmo 1 na iteração imediatamente anterior à iteração final. Seja k' o período onde ocorreu atualização do valor da demanda de vazão durante essa iteração e seja $t' < k'$ o último período onde houve vertimento de água do reservatório, também nessa iteração. Assim, o valor de u final é dado por

$$
u = \tilde{u} - \frac{\beta \underline{v} - \beta \tilde{v}_{k'}}{k' - t'}.
$$

Logo, no período $t = k'$, da última iteração, temos que:

$$
\begin{aligned}
\beta v_{k'} &\leq \beta v_{t'} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_{k'} - (k' - t')u && (40)\\
&= \beta v_{t'} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_{k'} - (k' - t')\left(\tilde{u} - \frac{\beta \underline{v} - \beta \tilde{v}_{k'}}{k' - t'}\right) && (41)\\
&= \beta v_{t'} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_{k'} - (k' - t')\tilde{u} - \beta \tilde{v}_{k'} + \beta \underline{v}. && (42)
\end{aligned}
$$

Observe que $\beta \tilde{v}_{k'} = \beta v_{t'} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_{k'} - (k' - t')\tilde{u}$ (a igualdade ocorre, pois neste período não houve vertimento de água). Logo, $\beta v_{k'} \leq \beta \underline{v}$. Por outro lado, $\beta v_{k'} \geq \beta \underline{v}$, portanto $\beta v_{k'} = \beta \underline{v}$.

Assim, a capacidade mínima do reservatório é atingida nos mesmos períodos que dão origem ao valor inicial da demanda de vazão (item (i)) ou no período de tempo onde ocorreu atualização do valor de demanda de vazão na iteração imediatamente anterior à iteração final (item (ii)).

Teorema: Seja $(u, v), \beta v = (\beta v_1, \ldots, \beta v_{\bar{t}})$ uma solução gerada pelo Algoritmo 1. Então, (u, v) é uma solução ótima para o Problema P_1.

Demonstração: Inicialmente, veja que (u, v) é, de fato, uma solução factível para P_1, pois uma solução gerada pelo Algoritmo 1 é tal que:

- Para cada $t \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$ tem-se que $\beta v_t \leq \beta v_{t-1} + \gamma_t - u$, com a igualdade ocorrendo em todos os períodos de tempo em que não houve vertimento de água;
- Os limites do reservatório são respeitados em todos os períodos de tempo, ou seja, $\beta \underline{v} \leq \beta v_t \leq \beta \overline{v}$, para todo $t = 1, \ldots, \bar{t}$;
- $u \geq 0$, caso contrário o Algoritmo 1 não retorna nenhuma solução.

Agora, vamos mostrar que (u, v) é uma solução ótima para P_1. Suponha que $(\tilde{u}, \tilde{v})$ seja uma solução para P_1 tal que $\tilde{u} > u$. Então, podemos escrever $\tilde{u} = u + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$. Suponha que

$$\begin{aligned} \min \left\{ \beta v_0 + \gamma_1 - \beta \underline{v}, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - \beta \underline{v}}{2}, \ldots, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{\bar{t}} - \beta \underline{v}}{\bar{t}} \right\} \\ = \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - \beta \underline{v}}{k} = u_k. \end{aligned} \tag{43}$$

Temos dois casos a considerar:

1º Caso: $u = u_k$

Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} \beta \tilde{v}_k &\leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - k\tilde{u} && (44) \\ &= \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - k(u + \varepsilon) && (45) \\ &= \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - ku - k\varepsilon && (46) \\ &= \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - ku_k - k\varepsilon && (47) \\ &= \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - k\left(\frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - \beta \underline{v}}{k}\right) - k\varepsilon && (48) \\ &= \beta \underline{v} - k\varepsilon, && (49) \end{aligned}$$

ou seja, $\beta \tilde{v}_k \leq k\varepsilon$. Como $k\varepsilon > 0$, segue que $\beta \tilde{v}_k < \beta \underline{v}$, o que contradiz a restrição de capacidade inferior do reservatório.

2º Caso: $u < u_k$

Neste caso, ocorreu a atualização do valor da demanda de vazão em pelo menos uma iteração do Algoritmo 1. Seja k' o período da penúltima iteração do Algoritmo 1, onde ocorreu a atualização da demanda de vazão que deu origem a u. Do item (ii) da observação anterior, segue que $\beta v_{k'} = \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k'} - k'u = \beta \underline{v}$. Logo,

$$\begin{aligned} \beta \tilde{v}_{k'} &\leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k'} - k'\beta\tilde{u} && (50) \\ &= \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k'} - k'(u + \varepsilon) && (51) \\ &= \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k'} - k'u - k'\varepsilon && (52) \\ &= \beta \underline{v} - k'\varepsilon. && (53) \end{aligned}$$

Como $k', \varepsilon > 0$, segue que $\beta\tilde{v}_k < \beta\underline{v}$, que viola a restrição de capacidade inferior do reservatório.

Assim, em qualquer um dos casos obtemos uma contradição com a restrição de capacidade inferior do reservatório. Essa contradição surgiu do fato de supor a existência de uma solução $(\tilde{u}, \beta\tilde{v})$ para P_1, com $\tilde{u} > u$. Portanto, (u, v) é uma solução ótima para o problema P_1.

2.4.2 Exemplos

Exemplo 1: Considere o Problema P_1 com os seguintes parâmetros: $\bar{t} = 10$, $\beta v_0 = 11$, $\beta\underline{v} = 3$, $\beta\overline{v} = 11$ e $\gamma = (5, 6, 4, 5, 2, 10, 2, 10, 2, 10)$. Aplicando o Algoritmo 1, temos que

$$u = \min\left\{13, \frac{19}{2}, \frac{23}{3}, \frac{28}{4}, \frac{30}{5}, \frac{40}{6}, \frac{42}{7}, \frac{52}{8}, \frac{54}{9}, \frac{64}{10}\right\} = 6,$$

e que para este valor de u, as capacidades superior e inferior do reservatório foram respeitadas em todos os períodos de tempo:

$$\begin{array}{ll} v_1 = 11 + 5 - 6 = 10 & v_6 = 3 + 10 - 6 = 7 \\ v_2 = 10 + 6 - 6 = 10 & v_7 = 7 + 2 - 6 = 3 \\ v_3 = 10 + 4 - 6 = 8 & v_8 = 3 + 10 - 6 = 7 \\ v_4 = 8 + 5 - 6 = 7 & v_9 = 7 + 2 - 6 = 3 \\ v_5 = 7 + 2 - 6 = 3 & v_{10} = 3 + 10 - 6 = 7. \end{array}$$

Portanto, a maior demanda de vazão neste caso em cada período de tempo é $u = 6$ e o volume do reservatório em cada período de tempo é dado por $v = (10, 10, 8, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7)$. Observe que o volume mínimo $\underline{v} = 3$ foi atingido nos períodos de tempo $5, 7$ e 9 e, que estes, são exatamente os períodos que definiram o valor de u.

Exemplo 2: Considere novamente o Problema P_1, definido com os parâmetros: $\bar{t} = 4$, $\beta\, v_0 = 10$, $\underline{v} = 2$, $\overline{v} = 11$ e $\gamma = (15, 0, 0, 0)$. Ao aplicar o Algoritmo 1, obtemos inicialmente

$$u = \min\left\{23, \frac{23}{2}, \frac{23}{3}, \frac{23}{4}\right\} = 5,75.$$

$\boxed{\text{Iteração } 1\text{: } u = 5,75}$

Para este valor de u, temos que:

$$\begin{aligned} &v_1 = 10 + 15 - 5,75 = 19,25 > \overline{v} = 11 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 8,25 \text{ e } v_1 = 11 \\ &v_2 = 11 + 0 - 5,75 = 5,25 \\ &v_3 = 5,25 + 0 - 5,75 = -0,5 < \underline{v} = 2, \end{aligned}$$

logo, ocorreu um vertimento de água no período 1 e o volume do período 3 não respeitou a restrição de capacidade inferior do reservatório e assim, u deverá ser atualizado para

$$u = 5,75 - \frac{2 - (-0,5)}{3 - 1} = 4,5.$$

$\boxed{\text{Iteração } 2\text{: } u = 4,5}$

Para este valor de u, temos que:

$$\begin{aligned}
&v_1 = 10 + 15 - 4,5 = 20,5 > \overline{v} = 11 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 9,5 \text{ e } v_1 = 11\\
&v_2 = 11 + 0 - 4,5 = 6,5\\
&v_3 = 6,5 + 0 - 4,5 = 2\\
&v_4 = 2 + 0 - 4,5 = -2,5 < \underline{v} = 2.
\end{aligned}$$

Novamente, como o valor de u foi reduzido, a água foi vertida no período 1. E a restrição de capacidade inferior do reservatório foi violada no período 4, logo u deverá ser reduzido para

$$u = 4,5 - \frac{2 - (-2,5)}{4 - 1} = 3.$$

$\boxed{\text{Iteração } 3\text{: } u = 3}$

Para este valor de u, temos que:

$$\begin{aligned}
&v_1 = 10 + 15 - 3 = 22 > \overline{v} = 11 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 11 \text{ e } v_1 = 11\\
&v_2 = 11 + 0 - 3 = 8\\
&v_3 = 8 + 0 - 3 = 5\\
&v_4 = 5 + 0 - 3 = 2.
\end{aligned}$$

Portanto, o valor máximo para a demanda de vazão neste caso é $u = 3$, com o volume de cada período dado por $v = (11, 8, 5, 2)$. Note que, no cenário ótimo obtido o volume do reservatório atinge sua capacidade máxima no primeiro período e sua capacidade mínima no último período.

2.4.3 Demanda de Vazão Variável

Vamos supor que a demanda de vazão seja pré-determinada pelo agente em cada período de tempo. Digamos que u_t seja demanda de vazão no período t, $t = 1, \ldots, \bar{t}$. Queremos determinar uma quantidade δu de modo que $u_t + \delta u$ seja a maior possível para todos os períodos de tempo na produção de energia elétrica. Então, neste caso, queremos investigar o problema P_2.

Caso a demanda de vazão não seja constante, com base na equação do balanço hídrico, a variação da vazão é dada pela seguinte fórmula matemática:

$$\beta v_1 = \beta v_o - u_1 - \delta u + \gamma_1 \tag{54}$$
$$\beta v_2 = \beta v_o - (u_1 + \delta u + u_2 + \delta u) + (\gamma_1 + \gamma_2) \tag{55}$$
$$\beta v_3 = \beta v_o - (u_1 + \delta u + u_2 + \delta u + u_3 + \delta u) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \tag{56}$$
$$\vdots \tag{57}$$
$$\beta v_{\bar{t}} = \beta v_o - (u_1 + \delta u + u_2 + \delta u + u_3 + \delta u \cdots + u_{\bar{t}+\delta u}) \tag{58}$$
$$+ (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{\bar{t}}) \tag{59}$$
$$\tag{60}$$

Assim, como o valor da variação da demanda de vazão deverá ser igual ou maior ao valor mínimo das demandas de vazão de todos os períodos:

$$\delta u \leq \min\{\beta v_o - \tilde{u}_1 + \gamma_1, \beta v_o - (\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)/2, \tag{61}$$
$$(\beta v_o - (\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3))/3, \cdots, \tag{62}$$
$$(\beta v_o - (\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3 + \cdots + \tilde{u}_{\bar{t}}) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{\bar{t}}))/\bar{t}\} \tag{63}$$

Lema: Se $\beta v_t \leq \beta v_{t-1} + \gamma_t - (u_t + \delta u)$, para todo $t = 1, \ldots, \bar{t}$, então $\beta v_t \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - (u_1 + \cdots + u_t + t\delta u)$, para todo $t = 1, \ldots, \bar{t}$.

Demonstração: Por hipótese, temos que $\beta v_2 \leq \beta v_1 + \gamma_2 - (u_2 + \delta u)$ e também que $\beta v_1 \leq \beta v_0 + \gamma_1 - (u_1 + \delta u)$, logo:

$$\beta v_2 \leq [\beta v_0 + \gamma_1 - (u_1 + \delta u)] + \gamma_2 - (u_2 + \delta u) \Rightarrow \beta v_2 \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (u_1 + u_2 + 2\delta u).$$

De modo análogo, temos que $\beta v_3 \leq \beta v_2 + \gamma_3 - (u_3 + \delta u)$ e que $\beta v_2 \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (u_1 + u_2 + 2\delta u)$, logo $\beta v_3 \leq [\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (u_1 + u_2 + 2\delta u)] + \gamma_3 - (u_3 + \delta u) \Rightarrow \beta v_3 \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - (u_1 + u_2 + u_3 + 3\delta u)$.

Procedendo deste modo, obtemos que

$$\beta v_t \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - (u_1 + \cdots + u_t + t\delta u), \text{ para todo } t = 1, \ldots, \bar{t}. \tag{64}$$

Para resolver o Problema P_2, propomos o procedimento descrito no Algoritmo 2, que se trata de uma adaptação do Algoritmo 1, apresentado anteriormente.

Provamos a seguir que uma solução gerada por este procedimento é, de fato, uma solução ótima para o Problema P_2.

Algoritmo 2: Cálculo da Demanda de Vazão Máxima u - Problema P_2

Input: Período de tempo $\bar{t}$, Quantidade de chuva em cada período $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{\bar{t}})$, Demanda de vazão de água em cada período $u = (u_1, \ldots, u_{\bar{t}})$, Volume inicial reservatório v_0, Limite inferior do reservatório $\underline{v}$, Limite superior do reservatório $\overline{v}$, β que converte o volume em taxa de fluxo e Δt é a diferença entre o período atual t e o último período t' tal que $s_{t'} > 0$.

Output: Variação Máxima da Demanda de Vazão δu e volume do reservatório em cada período de tempo $v = (v_1, \ldots, v_{\bar{t}})$.

$\delta u \leftarrow \min\left\{\beta v_0 + \gamma_1 - u_1 - \beta\underline{v}, \frac{\beta v_0+\gamma_1+\gamma_2-u_1-u_2-\beta\underline{v}}{2}, \ldots, \frac{\beta v_0+\gamma_1+\cdots+\gamma_t-u_1-\cdots-u_{\bar{t}}-\beta\underline{v}}{\bar{t}}\right\}$
$t \leftarrow 1$
while $t \leq \bar{t}$ **do**
    $v_t \leftarrow v_{t-1} + \beta\gamma_t - \beta(u_t + \delta u)$
    if $v_t > \overline{v}$ **then**
        $s_t \leftarrow \beta v_t - \beta\overline{v}$
        $v_t \leftarrow \overline{v}$
    end if
    if $v_t < \underline{v}$ **then**
        $\delta u \leftarrow \delta u - \frac{\beta\underline{v}-\beta v_t}{\Delta t}$
        $t \leftarrow 1$
    else
        $t \leftarrow t + 1$
    end if
end while
if $\delta u + \min(u) < 0$ **then**
    return Não há solução.
else
    return δu e $v = (v_1, \ldots, v_{\bar{t}})$
end if

Note que em uma solução gerada pelo Algoritmo 2, o valor de δu pode ser negativo. Pois, a demanda de vazão que é pré determinada poderá diminuir seu valor e com esse ajuste todas as restrições serão respeitadas.

Do lema anterior do problema P_2, temos que em cada período de tempo $t = 1, \ldots, \bar{t}$, devemos ter $\beta v_t \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - (u_1 + \cdots + u_t + t\delta u)$. Logo, para que cada uma dessas desigualdades sejam satisfeitas, a variação da demanda de vazão, δu, deve ser menor ou igual à quantidade de

água disponível em cada período de tempo, ou seja,

$$\delta u \leq \min\left\{\beta v_0 + \gamma_1 - u_1, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - u_2}{2}, \ldots, \frac{\beta v_0 + (\gamma_1 + \cdots + \gamma_{\bar{t}}) - (u_1 + \cdots + u_{\bar{t}})}{\bar{t}}\right\}. \tag{65}$$

Suponha novamente que a capacidade inferior do reservatório seja $\underline{v}$ e que a capacidade superior seja suficientemente grande de modo que não ocorra vertimento em nenhum período de tempo. Neste caso, a demanda de vazão deverá satisfazer a condição:

$$\begin{aligned}\delta u \leq \min\Bigg\{&\beta v_0 + \gamma_1 - u_1 - \beta\underline{v}, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - u_2 - \beta\underline{v}}{2}, \ldots, \\ &\frac{\beta v_0 + (\gamma_1 + \cdots + \gamma_{\bar{t}}) - (u_1 + \cdots + u_{\bar{t}}) - \beta\underline{v}}{\bar{t}}.\end{aligned} \tag{66}$$

Para resolver o Problema P_2, propomos o Algoritmo 2.

Em seguida, iremos provar ser uma solução ótima para P_2, a solução gerada por este algoritmo, usando as seguintes alterações:

(1) Veja que no Algoritmo 2, se não houver vertimento de água em nenhum período de tempo, então não será necessário atualizar o valor de δu em nenhuma iteração. Se o valor de δu não foi atualizado, logo não ocorreu vertimento de água em nenhum período de tempo, então $\beta v_t = \beta v_{t-1} + \gamma_t - (u_t + \delta u)$, para todo $t = 1, \ldots, \bar{t}$. Logo, para cada t também vale que $\beta v_t = \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - (u_1 + \cdots + u_t + t\delta u)$. Como:

$$\begin{aligned}\delta u \leq \min\Bigg\{&\beta v_0 + \gamma_1 - u_1 - \beta\underline{v}, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - u_1 - u_2 - \beta\underline{v}}{2}, \ldots, \\ &\frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_T - u_1 + \cdots + u_t - \beta\underline{v}}{\bar{t}},\end{aligned} \tag{67}$$

então, para cada t, temos que:

$$\begin{aligned}\delta u \leq \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - u_1 - \cdots - u_t - \beta\underline{v}}{t} &\Rightarrow \quad t\delta u \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - u_1 - \cdots - u_t - \beta\underline{v} \\ &\Rightarrow \quad \beta\underline{v} \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - u_1 - \cdots - u_t - t\delta u \\ &\Rightarrow \quad \beta\underline{v} \leq \beta v_t.\end{aligned} \tag{68}$$

Observe que, quando não ocorre vertimento de água, δu será igual ao mínimo do conjunto:

$$\left\{\beta v_0 + \gamma_1 - u_1 - \beta\underline{v}, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - u_1 - u_2 - \beta\underline{v}}{2}, \ldots, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{\bar{t}} - u_1 - \cdots - u_{\bar{t}} - \beta\underline{v}}{\bar{t}}\right\}. \tag{69}$$

(2) Para o Algoritmo 2 precisamos demonstrar que a atualização do valor de δu irá ocorrer quando o volume do reservatório for menor do que o volume inferior. Essa alteração no valor de δu irá garantir que volume do reservatório ultrapasse ou se torne igual ao volume inferior do reservatório. Relembrando que o valor de δu nesse procedimento poderá ser negativo.

Quando o volume do reservatório for menor do que o volume mínimo o valor de $\frac{\beta \underline{v} - \beta v_t}{\Delta t}$, será positivo e diferente de zero. O t corresponde ao período da iteração atual e $\Delta t = t - t'$, em que t' é o último período no qual houve vertimento de água.

Ao atualizar o valor de δu, $\delta u - \frac{\beta \underline{v} - \beta v_t}{\Delta t}$, o novo valor δu será menor do que seu anterior. Consequentemente, o volume do período irá aumentar, $\beta v_t \leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - (u_1 + \cdots + u_t + t\delta u)$, até que o volume do reservatório se torne igual ou superior ao volume inferior.

(3) Seja $(\delta u, v)$ uma solução gerada pelo Algoritmo 2 e suponha que

$$\begin{aligned} \delta u \leftarrow \min \Bigg\{ \beta v_0 + \gamma_1 - u_1 - \beta \underline{v}, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - u_1 - u_2 - \beta \underline{v}}{2}, \ldots, \\ \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - u_1 - \cdots - u_{\bar{t}} - \beta \underline{v}}{\bar{t}} = \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - \beta \underline{v}}{k} = \beta \delta u_k. \end{aligned} \tag{70}$$

Temos que:

(i) Se $\delta u = \delta u_k$, então o valor da variação da demanda de vazão não foi atualizado em nenhuma iteração do Algoritmo 2. No período $t = k$, temos que:

$$\begin{aligned} \beta v_k &\leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - k\delta u \\ &\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - k\delta u_k \\ \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - k &\left(\frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - \beta \underline{v}}{k} \right) \beta \underline{v}, \end{aligned} \tag{71}$$

ou seja, $v_k \leq \underline{v}$. Por outro lado, como $(\delta u, v)$ é uma solução gerada pelo Algoritmo 2, então $\underline{v} \leq v_k$. Logo, $v_k = \underline{v}$.

(ii) Se $\delta u < \delta u_k$, então o valor da variação da demanda de vazão foi atualizado em pelo menos uma iteração do Algoritmo 2. Denote por $(\tilde{\delta u}, \tilde{v})$ o par que estava sendo gerado pelo Algoritmo 2 na iteração imediatamente anterior à iteração final. Seja k' o período onde ocorreu atualização do valor da variação da demanda de vazão durante essa iteração e seja $t' < k'$ o último período onde houve vertimento de água do reservatório, também nessa iteração. Assim, o valor de δu final é dado por

$$\delta u = \tilde{\delta u} - \frac{\beta \underline{v} - \beta \tilde{v}_{k'}}{k' - t'}.$$

Logo, no período $t = k'$, da última iteração, temos que:

$$\begin{aligned}
\beta v_{k'} &\leq \beta v_{t'} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_{k'} - u_{t'+1} - \cdots - u_{k'} - (k' - t')\delta u \\
\beta v_{t'} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_{k'} - u_{t'+1} - \cdots - u_{k'} &- (k' - t')\left(\tilde{\delta u} - \frac{\beta \underline{v} - \beta \tilde{v}_{k'}}{k' - t'}\right) \\
\beta v_{t'} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_{k'} - u_{t'+1} - \cdots - u_{k'} &- (k' - t')\tilde{\delta u} - \beta \tilde{v}_{k'} + \beta \underline{v}.
\end{aligned} \tag{72}$$

Observe que $\beta \tilde{v}_{k'} = \beta v_{t'} + \gamma_{t'+1} + \cdots + \gamma_{k'} - u_{t'+1} - \cdots - u_{k'} - (k' - t')\tilde{\delta u}$ (a igualdade ocorre, pois neste período não houve vertimento de água). Logo, $v_{k'} \leq \underline{v}$. Por outro lado, $v_{k'} \geq \underline{v}$, portanto $v_{k'} = \underline{v}$.

Assim, a capacidade mínima do reservatório é atingida nos mesmos períodos que dão origem ao valor inicial da variação da demanda de vazão (item (i)) ou no período de tempo onde ocorreu atualização do valor da variação da demanda de vazão na iteração imediatamente anterior à iteração final (item (ii)).

Teorema: Seja $(\delta u, v), \beta v = (\beta v_1, \ldots, \beta v_{\bar{t}})$ uma solução gerada pelo Algoritmo 2. Então, $(\delta u, v)$ é uma solução ótima para o Problema P_2.

Demonstração: Inicialmente, veja que $(\delta u, v)$ é, de fato, uma solução factível para P_2, pois uma solução gerada pelo Algoritmo 2 é tal que:

- Para cada $t \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$ tem-se que $\beta v_t \leq \beta v_{t-1} + \gamma_t - (u_t + \delta u)$, com a igualdade ocorrendo em todos os períodos de tempo em que não houve vertimento de água;
- Os limites do reservatório são respeitados em todos os períodos de tempo, ou seja, $\beta \underline{v} \leq \beta v_t \leq \beta \overline{v}$, para todo $t = 1, \ldots, \bar{t}$;
- $\delta u + \min(u) \geq 0$, caso contrário o Algoritmo 2 não retorna nenhuma solução.

Agora, vamos mostrar que $(\delta u, v)$ é uma solução ótima para P_2. Suponha que $(\tilde{\delta u}, \tilde{v})$ é uma solução para P_2 tal que $\tilde{\delta u} > \delta u$. Então, podemos escrever $\tilde{\delta u} = \delta u + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$. Suponha que

$$\begin{aligned}
\delta u \leftarrow \min \Bigg\{ \beta v_0 + \gamma_1 - q_1 - \beta \underline{v}, \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - u_1 - u_2 - \beta \underline{v}}{2}, \ldots, \\
\frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_t - u_1 - \cdots - u_{\bar{t}} - \beta \underline{v}}{\bar{t}} = \frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - \beta \underline{v}}{k} = \delta u_k.
\end{aligned} \tag{73}$$

Temos dois casos a considerar:

1º Caso: $\delta u = \delta u_k$

Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}
\beta\tilde{v}_k &\leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - k\tilde{\delta u} \\
&\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - k(\delta u + \varepsilon) \\
&\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - k\delta u - k\varepsilon \\
&\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - k\delta u_k - k\varepsilon \\
\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - k&\left(\frac{\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k - u_1 - \cdots - u_k - \beta\underline{v}}{k}\right) - k\varepsilon \\
&\beta\underline{v} - k\varepsilon,
\end{aligned} \tag{74}$$

2º Caso: $\delta u < \delta u_k$

Neste caso, ocorreu a atualização do valor da variação da demanda de vazão em pelo menos uma iteração do Algoritmo 2. Seja k' o período da penúltima iteração do Algoritmo 2, onde ocorreu a atualização da variação da demanda de vazão que deu origem a δu. Do item (ii) da observação anterior, segue que: $\beta v_{k'} = \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k'} - u_1 - \cdots - u_{k'} - k'\delta u = \beta\underline{v}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\beta\tilde{v}_{k'} &\leq \beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k'} - u_1 - \cdots - u_{k'} - k'\tilde{\delta u} \\
&\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k'} - u_1 - \cdots - u_{k'} - k'(\delta u + \varepsilon) \\
&\beta v_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k'} - u_1 - \cdots - u_{k'} - k'\delta u - k'\varepsilon \\
&\beta\underline{v} - k'\varepsilon.
\end{aligned} \tag{75}$$

Tanto no caso 1 como no caso 2 a restrição em relação ao volume inferior do reservatório foram violadas. Pois, como $k, k', \varepsilon > 0$, não atenderam a condição de que $v_k < \underline{v}$ e $\tilde{v}_k < \underline{v}$

Logo, $(\delta u, v)$ é uma solução ótima para o problema P_2.

2.4.4 Exemplos

Exemplo 3: Considere o Problema P_2 com os seguintes parâmetros: $\bar{t} = 10$, $\beta v_0 = 20$, $\beta\underline{v} = 2$, $\beta\overline{v} = 25$, $\gamma = (13, 15, 20, 10, 9, 15, 16, 11, 15, 13])$ e u= (5, 2, 3, 6, 2, 5, 6, 1, 4, 2). Aplicando o Algoritmo 2, temos que

$$\delta u = \min\{26, 19.5, 18.6, 15.0, 13.4, 12.8, 12.4, 12.1, 12.0, 11.9\} = 11.9,$$

e que para este valor de δu, as capacidades superior e inferior do reservatório foram respeitadas em todos os períodos de tempo:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 20 + 13 - (5 + 11.9) = 16.1 & v_6 &= 9.5 + 15 - (5 + 11.9) = 7.6 \\
v_2 &= 16.1 + 15 - (2 + 11.9) = 17.2 & v_7 &= 7.6 + 16 - (6 + 11.9) = 5.7 \\
v_3 &= 17.2 + 20 - (3 + 11.9) = 22.3 & v_8 &= 5.7 + 11 - (1 + 11.9) = 3.8 \\
v_4 &= 22.3 + 10 - (6 + 11.9) = 14.4 & v_9 &= 3.8 + 15 - (4 + 11.9) = 2.9 \\
v_5 &= 14.4 + 9 - (2 + 11.9) = 9.5 & v_{10} &= 2.9 + 13 - (2 + 11.9) = 2.
\end{aligned}
$$

Portanto, a maior demanda de vazão neste caso em cada período de tempo é $\delta u = 11.9$ e o volume do reservatório em cada período de tempo é dado por $v = (16.1, 17.2, 22.3, 14.4, 9.5, 7.6, 5.7, 3.8, 2.9, 2.0)$. Observe que o volume mínimo $\underline{v} = 2$ foi atingido no período de tempo 10, exatamente o período que definiu o valor de δu.

Exemplo 2: Considere novamente o Problema P_2, definido com os parâmetros: $\bar{t} = 5$, $v_0 = 11$, $\underline{v} = 2$, $\overline{v} = 12$, $\gamma = (10, 11, 4, 2, 12)$ e u= (1,3,3,5,1). Ao aplicar o Algoritmo 2, obtemos inicialmente

$$\delta u = \min\{18, 13, 9, 6, 7\} = 6$$

Iteração 1: $\delta u = 6$

Para este valor de δu, temos que:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 11 + 10 - (1 + 6) = 14 > \overline{v} = 12 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 2 \text{ e } v_1 = 12 \\
v_2 &= 12 + 11 - (3 + 6) = 14 > \overline{v} = 12 \quad \Rightarrow \quad s_2 = 2 \text{ e } v_2 = 12 \\
v_3 &= 12 + 4 - (3 + 6) = 7 \\
v_4 &= 7 + 2 - (5 + 6) < -2 \qquad \underline{v} = 2
\end{aligned}
$$

logo, ocorreu vertimento de água nos períodos $1 e 2$ e o volume do período 4 não respeitou a restrição de capacidade inferior do reservatório e assim, δu deverá ser atualizado para

$$\delta u = 6 - \frac{2 - (-2)}{4 - 2} = 4.$$

Iteração 2: $\delta u = 4,5$

Para este valor de δu, temos que:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 11 + 10 - (1 + 4) = 16 > \overline{v} = 12 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 4 \text{ e } v_1 = 12 \\
v_2 &= 12 + 11 - (3 + 4) = 16 > \overline{v} = 12 \quad \Rightarrow \quad s_2 = 4 \text{ e } v_2 = 12 \\
v_3 &= 12 + 4 - (3 + 4) = 9 \\
v_4 &= 9 + 2 - (5 + 4) = 2 \\
v_5 &= 2 + 12 - (1 + 4) = 9
\end{aligned}
$$

Portanto, o valor de δu é igual a 4, com o volume de cada período dado por $v = (12, 12, 9, 2, 9)$.

2.5 Cálculo de um perfil de potência

A função objetivo visa atingir ou exceder a meta da demanda, maximizando a segurança energética. A demanda pode representar um nível mínimo que a usina hidrelétrica deve fornecer em cada período de tempo.

Se a produção não exceder a demanda, o modelo aproximará a geração de energia elétrica com a demanda como sendo o pior caso possível.

Neste caso, a formulação para produção de energia hidrelétrica apresentada anteriormente fica simplificada em termos da demanda de vazão.

O Algoritmo 1 desenvolvido nesse trabalho, tem a demanda de vazão como constante em relação ao tempo. Observa-se que a medida que a usina hidrelétrica produz a energia elétrica, com o intuito de obter demanda de vazão, o volume do reservatório tende a diminuir ao longo desse período.

Como a produtividade está diretamente relacionada com o volume do reservatório, ela também poderá diminuir ao longo do período.

O cálculo para alcançar o valor da potência da usina hidrelétrica é obtido pela produtividade multiplicada pela nova demanda de vazão. Nesse exemplo, como a produtividade irá diminuir ao longo do período e, considerando o fato de que a demanda de vazão será sempre constante, poderá ocasionar uma notória redução da potência ao longo do período.

Em uma usina almeja-se que o trabalho seja realizado com uma potência com seu perfil pré-determinado. Por isso, foi necessário recalcular a demanda de vazão para obter uma potência ao longo do período, cujo valores tendem-se no Algoritmo 1 a uma potência constante e no Algoritmo 2 a um perfil de potência. Esse perfil poderia ser um perfil constante em que os valores seria iguais ao da potência média ou um perfil com os valores menores, maiores e iguais ao da potência média.

Então, no Algoritmo 1 após calcular o volume do reservatório, a produtividade e a potência em cada período, o Algoritmo 2 calculou-se a potência média.

Em seguida analisamos em qual período a demanda de vazão era maior do que a potência média, o que significa que nesses períodos seria necessário turbinar menos água para que a potência do período diminuísse e tende-se ao um valor próximo da potência média. Nesse caso, o período em que a potência poderá diminuir, também provocará a diminuição da produtividade.

E para os períodos em que a potência era menor do que a potência média, seria necessário turbinar mais água e assim aumentar a produtividade. Assim, a demanda de vazão era recalculada.

Esta estratégia pode ser descrita como:

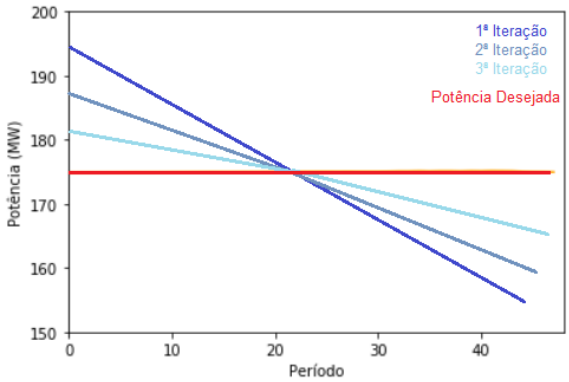
$$\tilde{u}_t^{(i+1)} = \tilde{u}_t^{(i)} / \eta_t^{(i)}; \tag{76}$$

onde η_t é a produtividade da usina no instante t, na iteração i do problema não linear, e $\tilde{u}_t^{(i)}$ é a meta de vazão calculada no instante t na iteração i.

Essa operação de reajustar o valor da demanda de vazão para que se possa obter uma potência constante ou um perfil de potência foi realizada até que o erro absoluto, potência média menos potência real, atingi-se o valor aproximado de zero.

A seguir, o gráfico ilustra como os valores da potência se alteram, a cada iteração do algoritmo:

Figura 4 – Potência desejada



Dessa forma, o algoritmo 3 calcula uma nova demanda de vazão que gera uma nova potência. Quando essa nova potência estiver próxima do valor ideal é adquirido o valor máximo de δu. Sendo assim, em cada iteração o volume do reservatório e a produtividade também são alterados, pois o volume de água turbinado na usina hidrelétrica é alterado.

A potência média se torna a potência desejada na usina hidrelétrica. Quando a demanda de vazão é constante a potência média também será constante.

E se a demanda de vazão for alternada a potência desejada se torna uma curva. Para obter essa curva incluiu o parâmetro demanda da potência. Esse parâmetro é uma proporção em relação a potência e a média de potência.

Algoritmo 3: Cálculo da Potência p

Input: Período de tempo $\bar{t}$, volume do reservatório em cada período de tempo $\beta v = (\beta v_1, \ldots, \beta v_{\bar{t}})$, demanda de vazão de água em cada período $u = (u_1, \ldots, u_{\bar{t}})$, Volume inicial reservatório βv_0, Limite inferior do reservatório $\beta \underline{v}$, Limite superior do reservatório $\beta \overline{v}$, constante do atrito do fluxo de água nas tubulações do sistema hidráulico ε, altura constante do canal de fuga $\zeta[m]$, constante da produtividade específica de cada usina k $[W/(m^3/s)m]$ e polinômio para ajustar o volume por altura referente a usina a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.

Output: Produtividade em cada período $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{\bar{t}})$, potência em cada período de tempo $p = (p_1, \ldots, p_{\bar{t}})$, volume do útil do reservatório em cada período de tempo $v_u = (v_{u1}, \ldots, v_{u\bar{t}})$, demanda de vazão ajustada em cada período $\breve{u} = (\breve{u}_1, \ldots, \breve{u}_{\bar{t}})$.

1: $p_{media} \leftarrow \sum p/\bar{t}$
2: $\nu = p - p_{media}$
3: **while** $\nu > 1$ **do**
4: **for** $t \leq \bar{t}$ **do**
5: $\chi_t = p_{media}/p_t$
6: **end for**
7: **for** $t \leq \bar{t}$ **do**
8: $\breve{u}_t = u_t * \chi_t$
9: **end for**
10: **end while**
11: **return** $\breve{u} = (\breve{u}_1, \ldots, \breve{u}_{\bar{t}})$

Capítulo 3

Análise e Discussão dos Resultados

3.1 Cálculo da taxa de vazão máxima

A função de geração de energia elétrica, $\max f = \min_t\{g_t(v_t, u_t) - d_t\}$, é uma função não linear devido à não linearidade da função $g(.)$.

Ao ser simplificada como uma função linear, quando se considerada o fato de que a geração de energia hidrelétrica de uma usina e o volume do reservatório são constantes. Assim, a quantidade de eletricidade gerada é determinada pelo volume de água turbinado.

Neste contexto, o objetivo geral deste trabalho é analisar e, também, aprimorar o modelo de produção de energia hidrelétrica. Tendo como objetivos específicos o cálculo da taxa de vazão máxima, δu, de uma usina hidrelétrica para um determinado perfil $\tilde{u}$ que determina a meta de vazão a ser realizada.

Com base na previsão da demanda de vazão de um determinado período, calcula-se o δu, e assim alcança os valores do limite superior da vazão para uma determinada usina. Na Figura 3 é mostrado um exemplo do objetivo de se maximizar o δu mantendo o perfil $\tilde{u}$ inicialmente proposto.

3.1.1 Demanda de vazão constante

Com base nas informações apresentadas no artigo Vieira et al. (2015) e através da análise realizada para a produção da usina para atender a demanda de vazão.

Neste artigo são apresentados os valores necessários para calcular a máxima demanda de vazão e a potência da usina de Souza.

Com base na formulação 1, representada pelas demandas de vazão iguais, com o intuito de simular o funcionamento da Usina Hidrelétrica Engenheiro Souza Dias.

Assim, com base nessa formulação, foram elaborados dados em que a demanda de vazão seria de 28 m^3/s e a afluência natural iria alterar entre 16 a 34 m^3/s. O volume inicial, por sua vez,

seria igual a 103 hm^3, o volume inferior do reservatório seria 23 hm^3 e o volume superior seria de 179 hm^3, e a demanda de vazão máxima seria de 40 m^3/s. Os dados analisados foram gerados num simulador desenvolvido em Python, para os seguintes períodos em dia: 48, 144, 336, 720 e 1440.

O programa retornou na primeira parte o volume do reservatório, a nova demanda de vazão, o valor de delta (δu), a produtividade e a potência. E também foram plotados os gráficos de cada período.

O período compreendendo o primeiro dia ao 48 dias foi denominado de analise 01, o período compreendendo o primeiro dia ao 336 dias de analise 02 e por último o período compreendendo o primeiro dia ao 1440 dias de analise 03.

As figuras representam os gráficos, com os resultados obtidos no Algoritmo 1, em que demonstram a variação do volume do reservatório, se houve vazão vertida e qual valor, o valor da demanda de vazão após ser recalculada, e os valores da produtividade e da potência em todos os períodos.

Figura 5 – Caso 01 (Turbinada Flat)

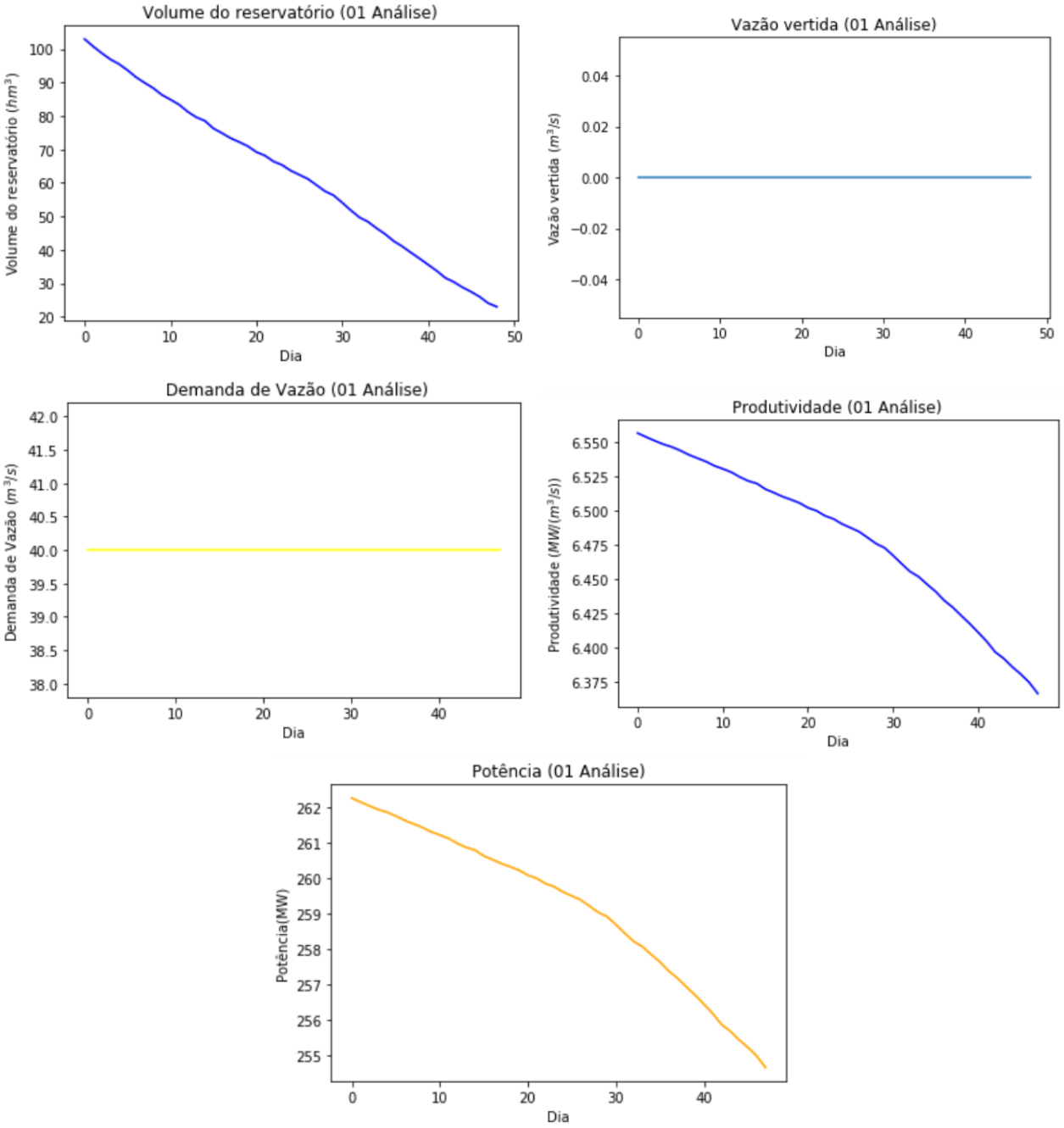


Figura 6 – Caso 03 (Turbinada Flat)

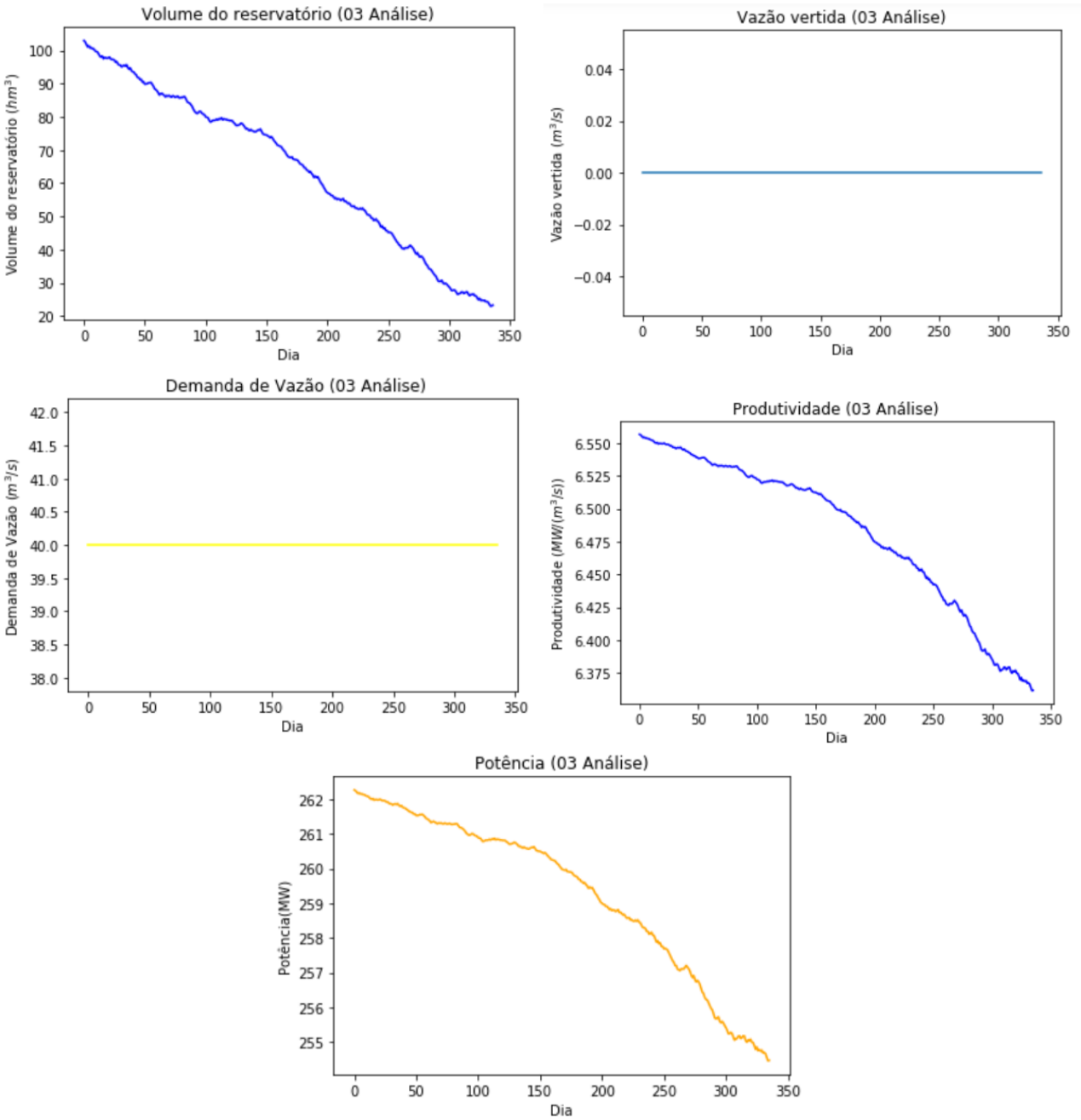
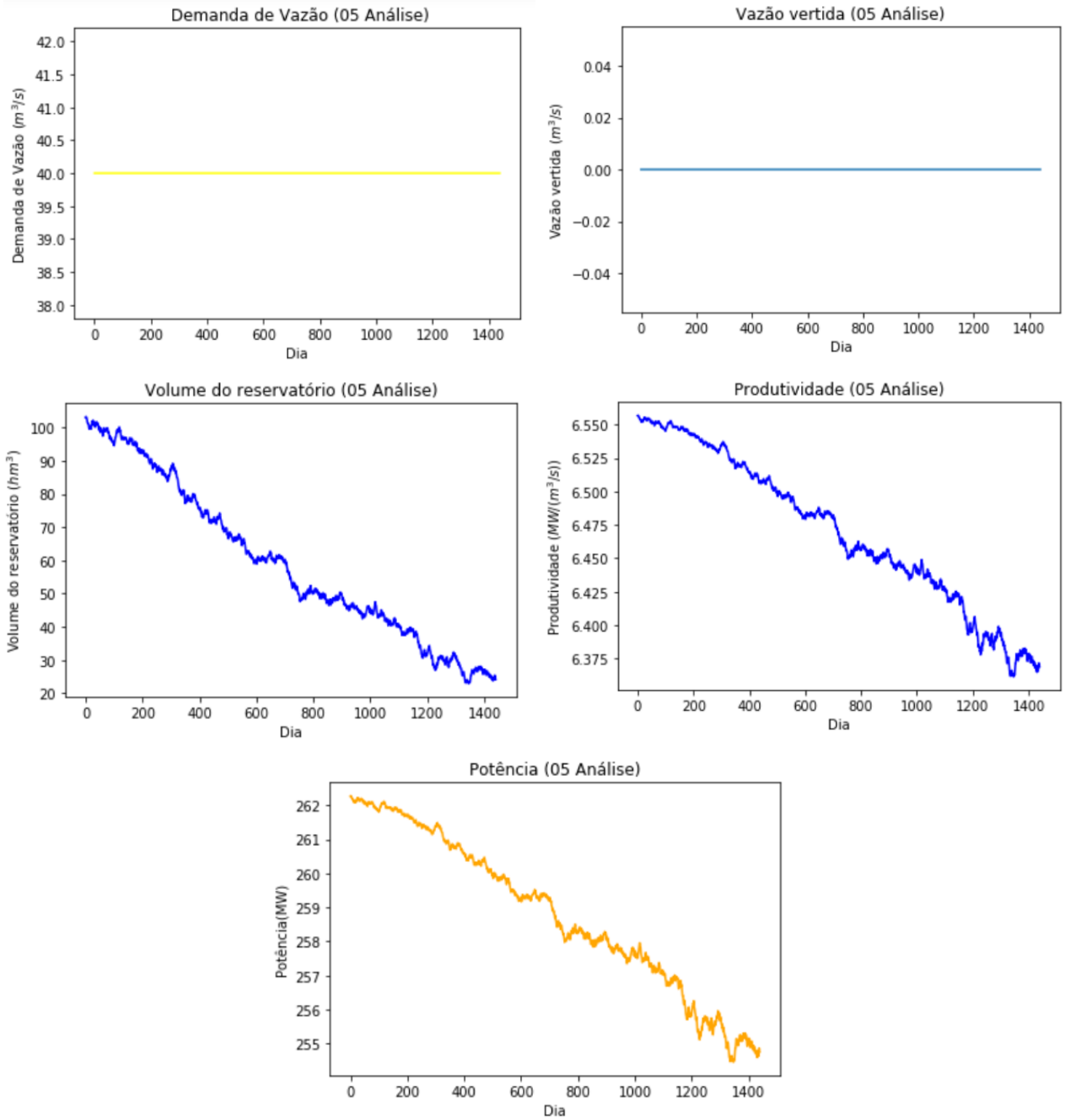


Figura 7 – Caso 05 (Turbinada Flat)



Nessa situação a demanda de vazão máxima calculado pelo Algoritmo 1, em todas as analises, obteve o seu valor máximo permito pela usina hidrelétrica. Em nenhum momento foi necessário verter água. Com a maximização da demanda de vazão, o volume do reservatório foi decaindo ao longo dos períodos e no último período o seu valor foi igual ao valor do volume mínimo do reservatório. E os valores da produtividade e da potência foram decaindo ao longo dos dias. Como a produtividade é calculada com base no valor do polinômio de quarto grau em relação ao volume do reservatório multiplicado pela demanda de vazão, e uma vez que a demanda de vazão ficou constante e o volume do reservatório foi decaindo, a produtividade também foi decaindo ao longo

do período. E em relação a potência como ela é calculada pela produtividade multiplicada pela demanda de vazão, sendo que a demanda de vazão ficou constante e a produtividade decaindo, a potência também foi diminuindo.

Em seguida, elaborou a tabela Tabela 1 em que compara o Algoritmo 1 implementado em Python e o solver CPLEX, versão 12.10, para os dados utilizados anteriormente. Nessa tabela, também foram analisados o tempo de execução e o δu calculados em cada programa.

Tabela 1 – Comparação entre CPLEX e o Algoritmo 01

Dias	Tempo Algoritmo	δu Algoritmo	Tempo CPLEX	δu CPLEX
48	290 µs ± 2.72 µs	46.3317	0.21 s	46.332
144	292 µs ± 5.25 µs	32.3050	0.23 s	32.305
336	293 µs ± 9.73 µs	29.3201	0.28 s	29.32
720	288 µs ± 1.76 µs	25.9409	0.40 s	25.941
1440	290 µs ± 2.3 µs	25.9071	0.62 s	25.907

Observou-se que o Algoritmo 1 em todos os períodos teve um tempo de execução menor quando comparado ao solver CPLEX. E o valor do δu calculado nos programas foram praticamente o mesmo nos períodos comparados.

3.1.2 Demanda de vazão alternada

Com base na formulação 02, em que os valores das demandas são alternados. A demanda de vazão alternaria entre 28 m^3/s a 32 m^3/s e a afluência natural entre 16 a 34 m^3/s. O volume inicial, o volume inferior do reservatório e o volume superior permaneceram igual ao da formulação 01.

Os dados analisados foram gerados para os seguintes períodos em dia: 48, 144, 336, 720 e 1440. Em relação aos dados da função polinomial foram os mesmos utilizados no artigo (VIEIRA et al., 2015).

O programa da formulação 02 também retornou na primeira parte o volume do reservatório, a nova demanda de vazão, o valor de delta (δu), a produtividade e a potência. Em seguida, as figuras de 8 a 10 apresentam os gráficos, em que demonstram a variação do volume do reservatório, se houve vazão vertida e qual valor, o valor da demanda de vazão após ser recalculada, e os valores da produtividade e da potência em todos os períodos.

Figura 8 – Caso 01 (Meta de vazão turbinada)

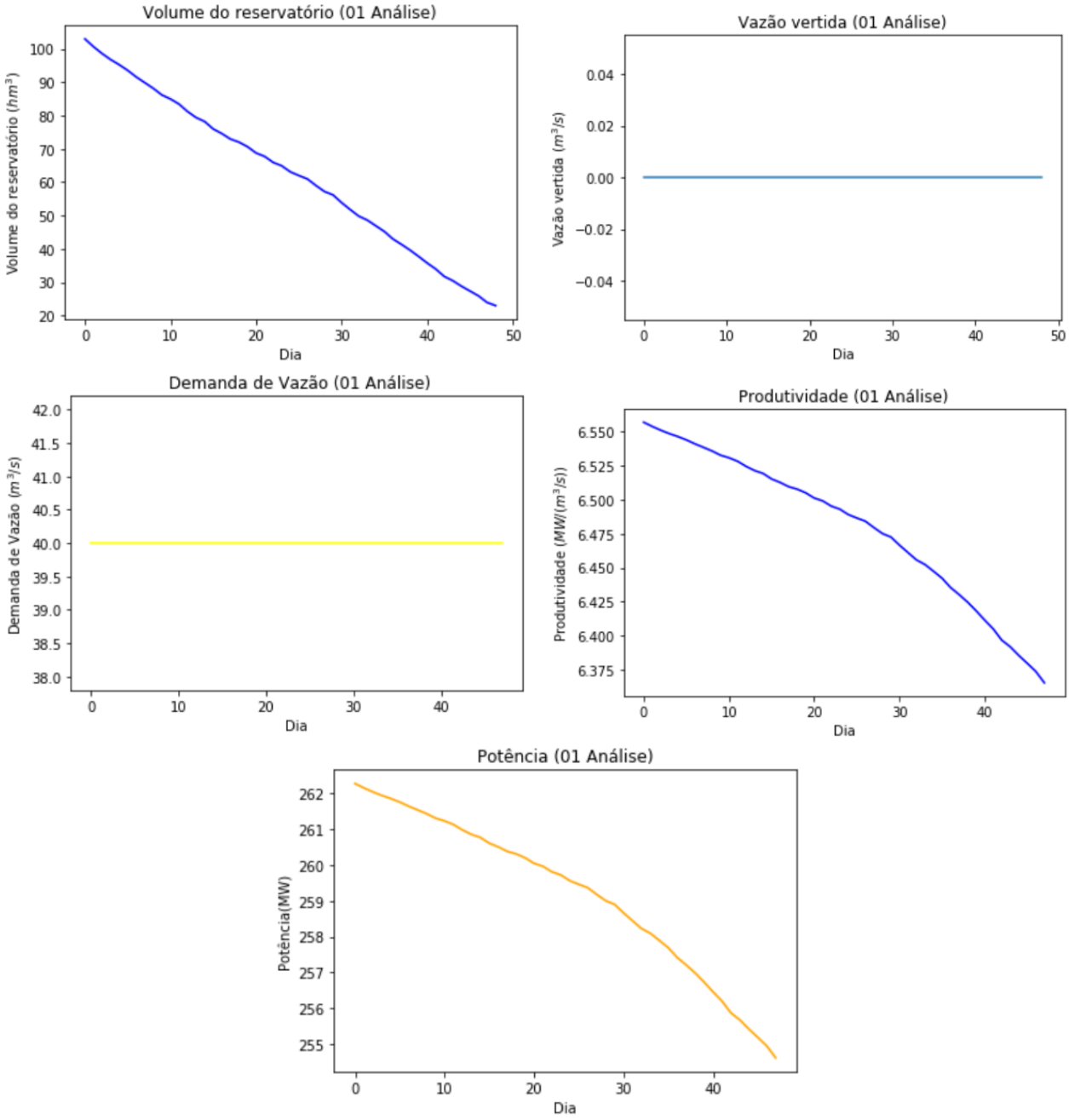


Figura 9 – Caso 02 (Meta de vazão turbinada)

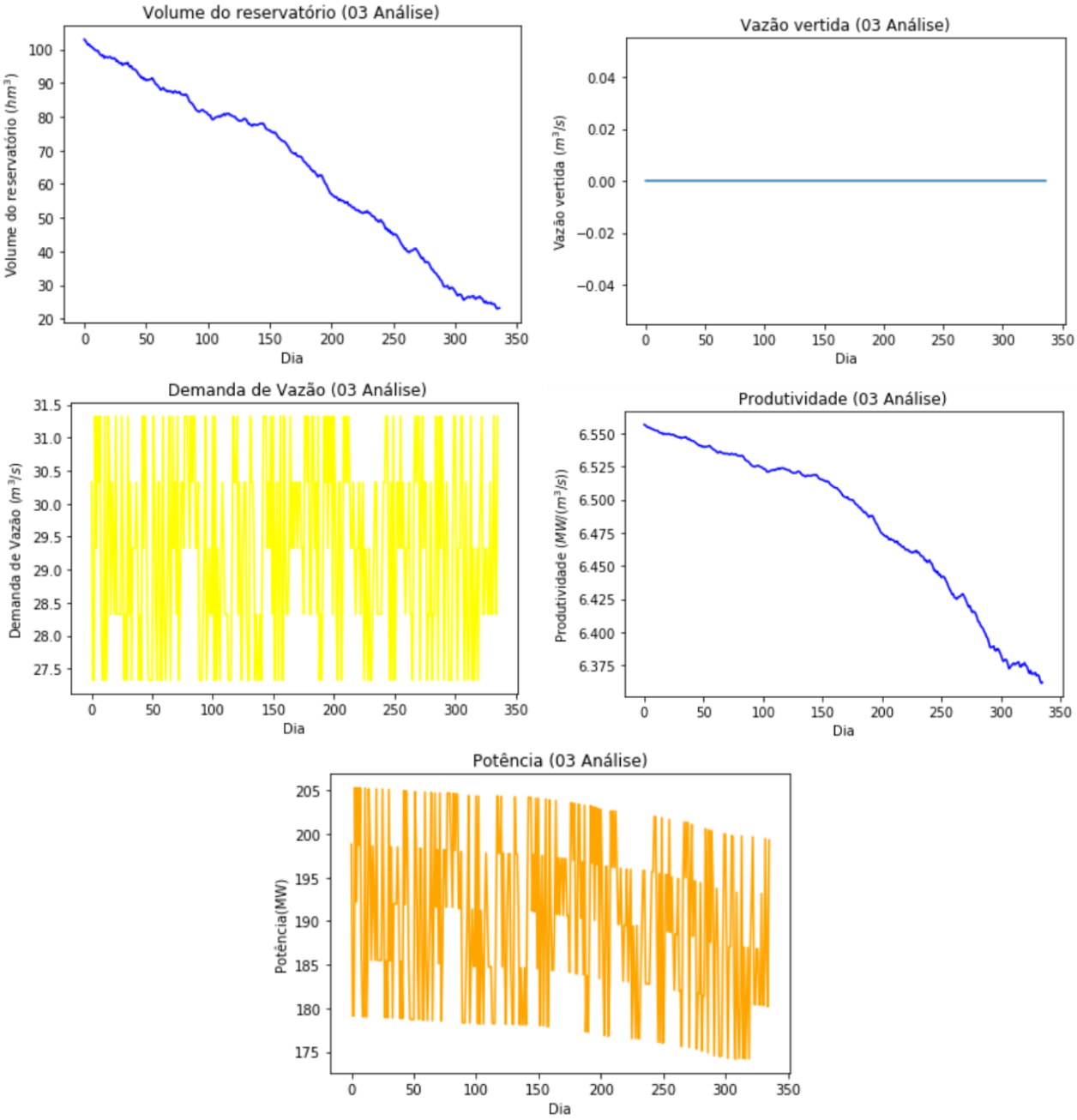
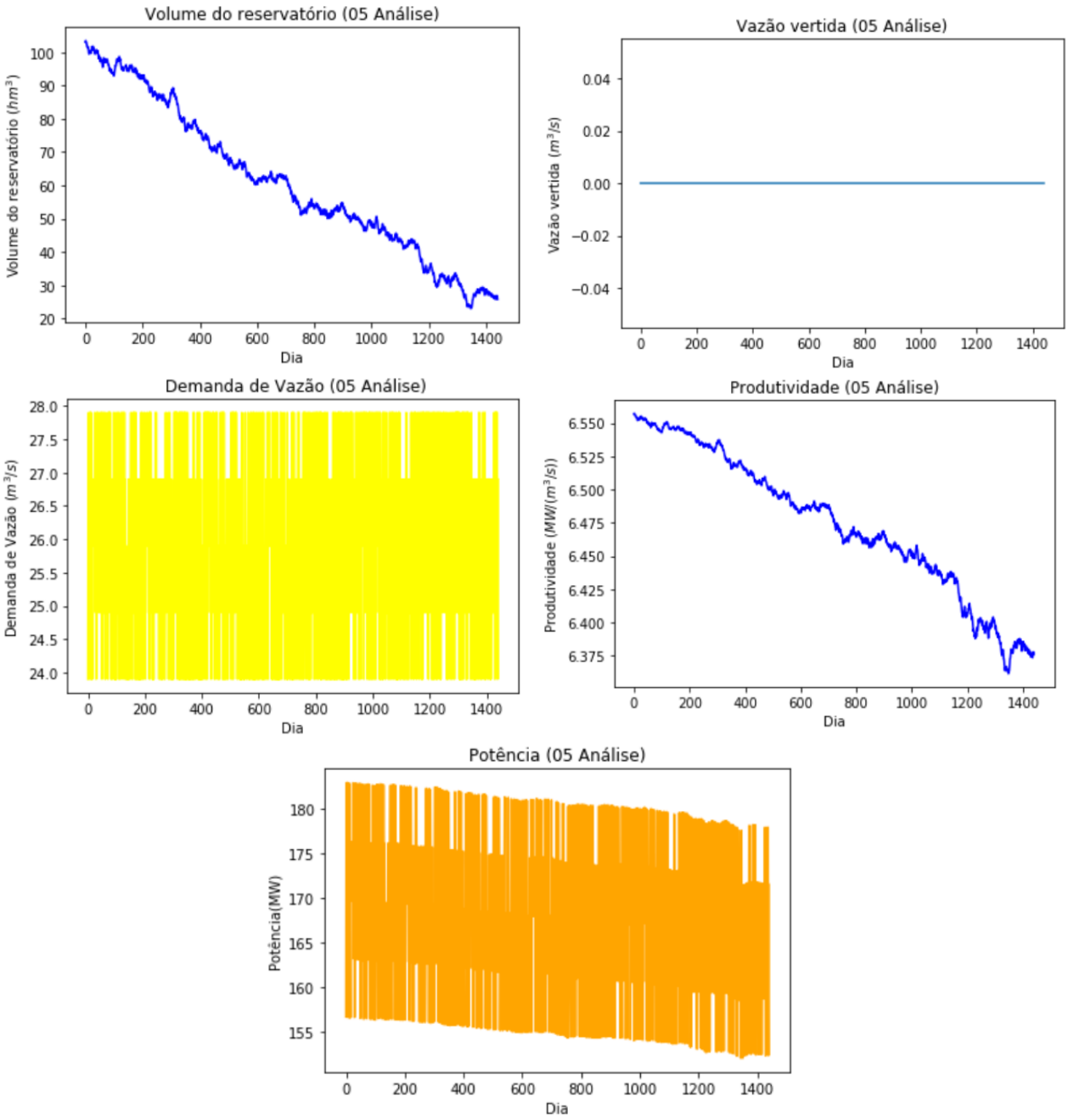


Figura 10 – Caso 03 (Meta de vazão turbinada)



Em relação a essa situação em todos os períodos a produtividade decaiu, pois com a maximização da demanda de vazão o volume do reservatório foi decaindo ao longo dos dias. E somente na analise 01 a demanda de vazão obteve seu valor máximo, em todos os dias, tornando-se flat. Em nenhum momento foi necessário verter água. Com a produtividade decaindo e o demanda de vazão alternando o seu valor, a potência também obteve valores oscilando. Exceto na analise 01 que devido a demanda de vazão constante, a potência também ficou constante.

Elaborou-se a também Tabela 2 em que se compara o Algoritmo 2 e o solver CPLEX como o tempo de execução e o δu calculados em cada programa.

Novamente observou-se que o Algoritmo 2 em todos os períodos teve um tempo de execução

menor quando comparado ao solver CPLEX. E o valor do δu calculado nos programas foram praticamente o mesmo nos períodos comparados.

Tabela 2 – Comparação entre CPLEX e o Algoritmo 02

Dias	Tempo Algoritmo	δu Algoritmo	Tempo CPLEX	δu CPLEX
48	289 µs ± 1.76 µs	46.3317	0.10s	46.332
144	301 µs ± 9.64 µs	33.0550	0.11 s	33.055
336	289 µs ± 3.17 µs	29.3201	0.28 s	29.32
720	293 µs ± 4.28 µs	25.9409	0.32 s	25.941
1440	320 µs ± 31.7 µs	25.9071	0.41 s	25.907

3.2 Cálculo da potência constante para demanda de vazão constante

Neste segundo caso vamos explorar a otimização da meta de potência, ao invés da meta de vazão, como mostrado anteriormente. A função objetivo visa maximizar a potência gerada de maneira a se manter o mesmo valor de potência em todos instantes de tempo. Esta operação é conhecida como geração de base, que fornece base de potência necessária. A demanda pode representar um nível mínimo que a usina hidrelétrica deve fornecer em cada período de tempo.

Se a produção não exceder a demanda, o modelo aproximará a geração de energia elétrica com a demanda como sendo o pior caso possível. Neste caso, a formulação para produção de energia hidrelétrica apresentada anteriormente fica simplificada em termos da demanda de vazão.

O primeiro algoritmo desenvolvido nesse trabalho, tem a demanda de vazão como constante em relação ao tempo. Observa-se que a média em que a usina hidrelétrica produz a energia elétrica, com o intuito de obter demanda de vazão, o volume do reservatório tende a diminuir ao longo desse período. Em geral isto será verdadeiro, pois estamos maximizando a vazão turbinada no dia. Como a produtividade está diretamente relacionada com o volume do reservatório, ela também poderá diminuir ao longo do período. Logo, mesmo mantendo o mesmo nível de vazão turbinada, a potência não se mantém, pois existem grandes variações no nível do reservatório.

Caso a produtividade diminua ao longo do período e, considerando o fato de que a demanda de vazão será sempre constante, poderá ocasionar uma notória redução da potência ao longo do período.

Numa usina hidrelétrica deseja-se que o trabalho seja realizado com um perfil de potência. E ao controlar a demanda de vazão, as usinas conseguem garantir o fornecimento de energia elétrica mesmo com as variações horárias e diárias de consumo. Por isso, nos períodos que a demanda de vazão era maior do que a potência média, seria necessário turbinar menos água. Nessa situação, provocará a diminuição da produtividade. E para os períodos em que a demanda

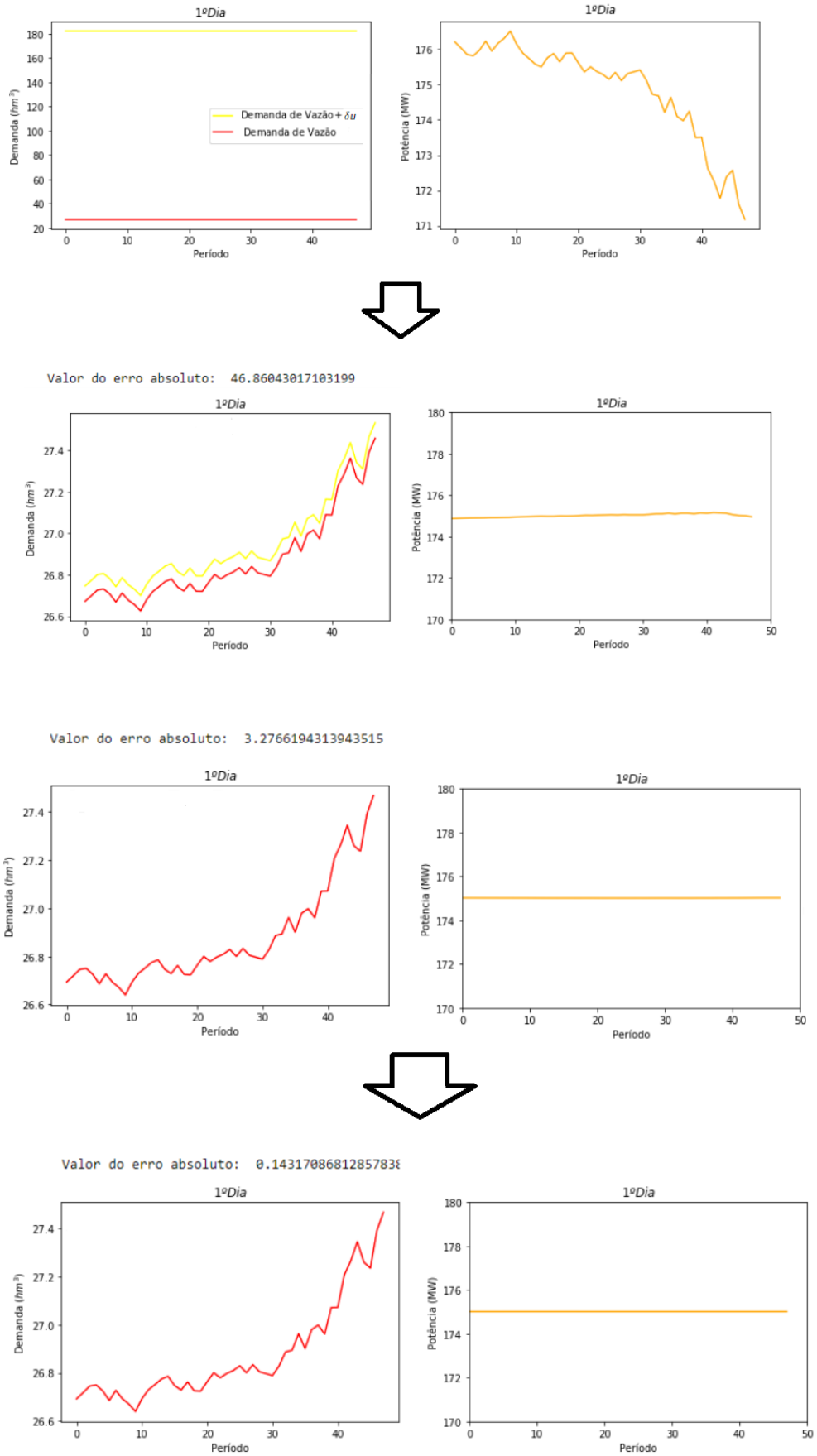
de vazão era menor do que a potência média, seria necessário turbinar mais água para aumentar a produtividade.

Essa operação de reajustar o valor da demanda de vazão para que se possa obter um perfil de potência foi realizada até que o erro absoluto, potência desejada menos potência real, teria o valor aproximado de zero.

Então o algoritmo calcula uma nova demanda de vazão, que gera uma nova potência até que esta estivesse próxima do valor ideal. Em cada iteração o volume do reservatório e a produtividade também eram alterados, pois o volume de água turbinado na usina hidrelétrica era alterado.

A seguir, criou-se um gráfico para apresentar a evolução da demanda de vazão e da potência em cada iteração.

Figura 11 – Evolução da demanda de vazão e da potência em cada iteração.



No Algoritmo 1 como é exigido uma demanda de vazão constante para se calcular o valor do δu. Ao tentar alcançar uma potência constante ocorrerá na primeira iteração uma atualização no valor da demanda de vazão, que deixará de ser constante. Isso ocorrerá porque a nova demanda de vazão é alcançada ao se multiplicar a demanda de vazão mais o δu pela análise de desvio (potência média divida pela potência do período). Como a potência em cada período não é constante, a nova demanda de vazão consequentemente deixará de ser constante.

Para obter uma potência constante utilizando os exemplos da formulação 01, a nova demanda de vazão deixará de ser constante. Assim, no primeiro cálculo do δu a demanda de vazão deverá iniciar em todos os períodos com o mesmo valor. Nas, próximas iterações os novos valores de demanda de vazão não terão mais a obrigatoriedade de serem constante.

Depois dessa alteração na formulação 01, obteve uma potência constante para todos os períodos. Abaixo os resultados desses exemplos.

Figura 12 – Caso 01 (Meta de potência constante)

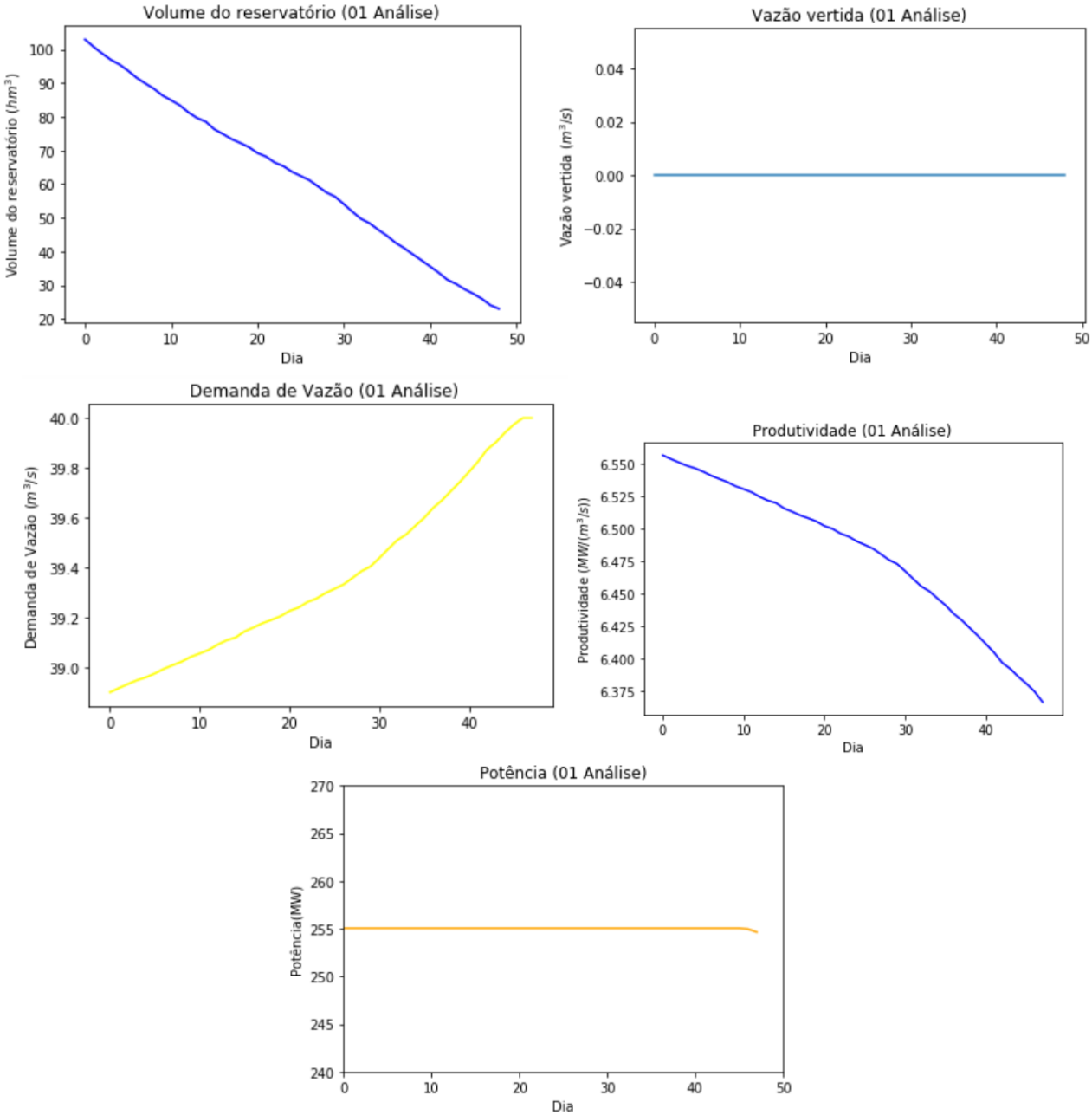


Figura 13 – Caso 02 (Meta de potência constante)

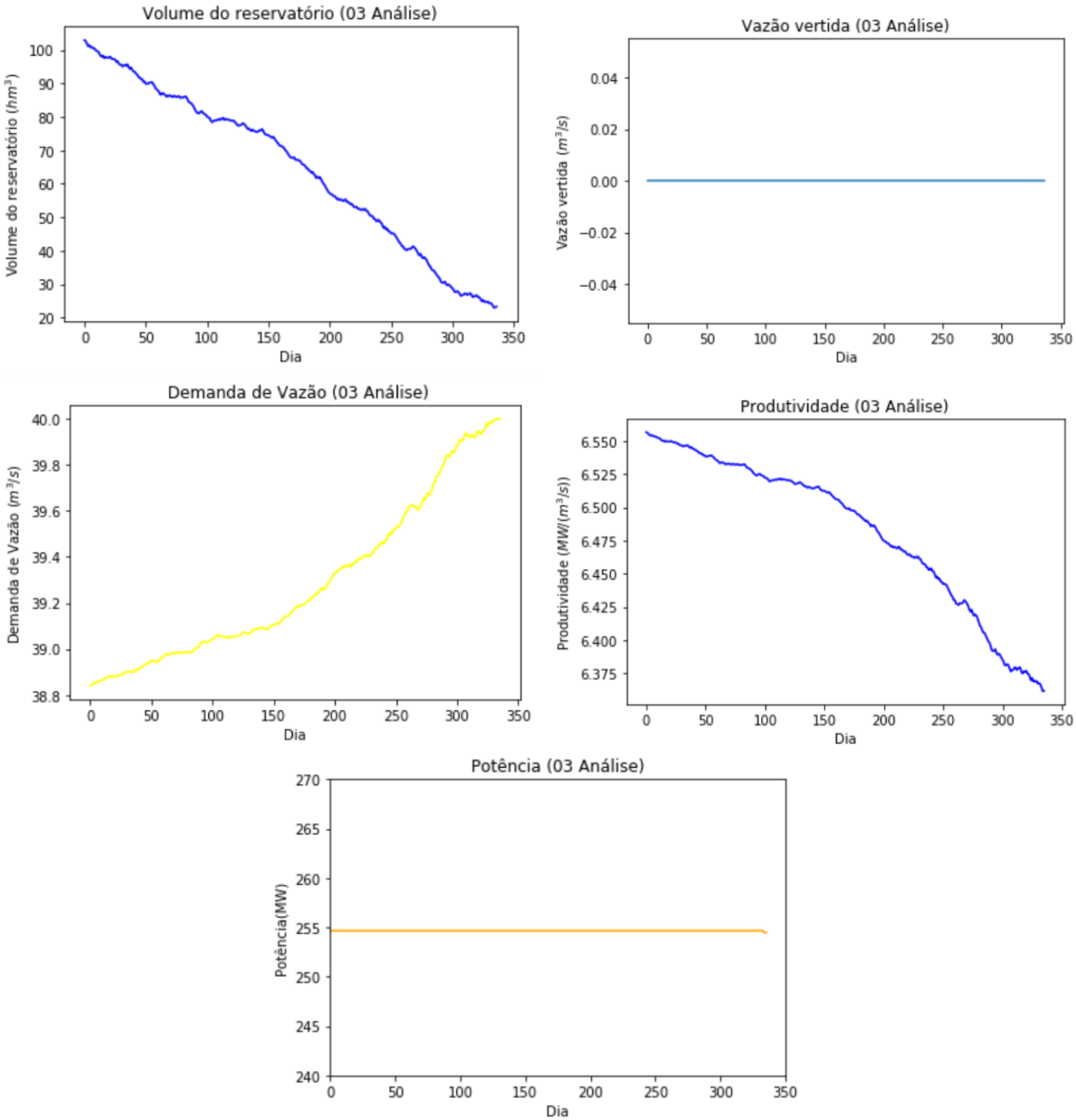
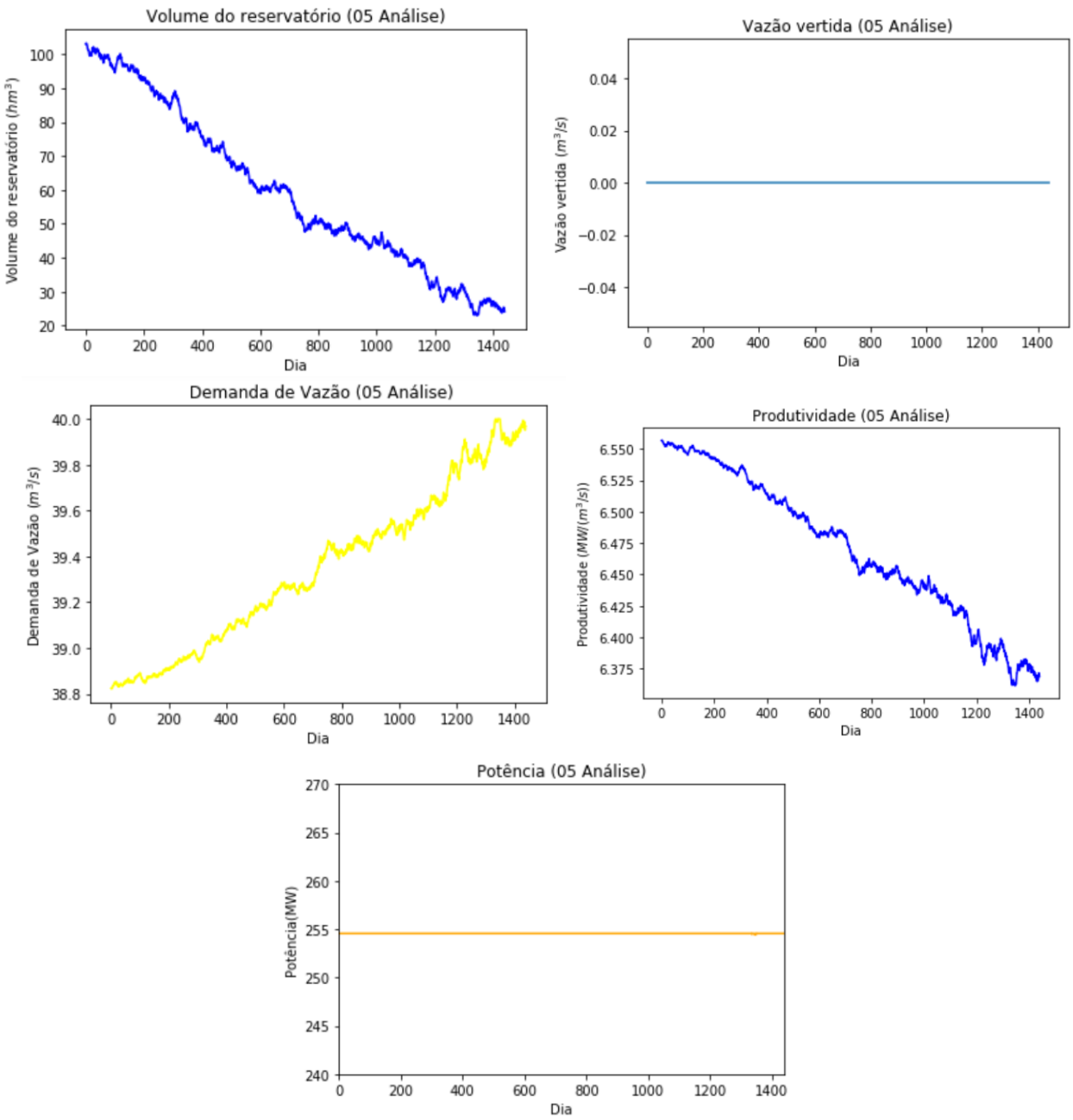


Figura 14 – Caso 03 (Meta de potência constante)



O Algoritmo 03 conseguiu alterar o valor da demanda de vazão de modo a obter uma potência com o perfil flat, em todas as analises.

A seguir, a Tabela 3 demonstra a evolução do erro absoluto, para todos os períodos, até que fosse obtido um valor menor do que um.

Tabela 3 – Evolução do erro absoluto

Análise	Cálculo do primeiro erro	Cálculo do último erro	Total de iterações
1	89.42046929113619	0.9689635983630183	41
3	659.0250118668644	0.9964716128676514	117
5	2837.2460945849216	0.9969294819590289	235

Depois, calculou-se o tempo de execução final do programa na linguagem em python, em que as configurações da máquina seriam de um sistema operacional Windows, processador core i5, memória 8GB e armazenamento 1TB:

Tabela 4 – Tempo de execução para a meta de potência constante

Dias	Tempo de execução
48	318 µs ± 24.4 µs
144	312 µs ± 13.1 µs
336	297 µs ± 9.66 µs
720	309 µs ± 16.5 µs
1440	323 µs ± 16.4

O próximo exemplo em que deseja obter uma potência constante com os valores de demanda alternados, torna-se a potência desejada uma curva. O que se assemelha com a variação do consumo de energia. A demanda de vazão tem a função de regularizar a produção de energia elétrica, permitindo que o abastecimento seja constante, mesmo em picos de consumo.

Com a demanda de potência é possível indicar se é necessário uma potência maior ou menor, para um determinado período.

Com base novos valores da potência e da demanda de vazão foram plotados os gráficos, com os novos valores.

Figura 15 – Caso 01 (Meta de potência variada)

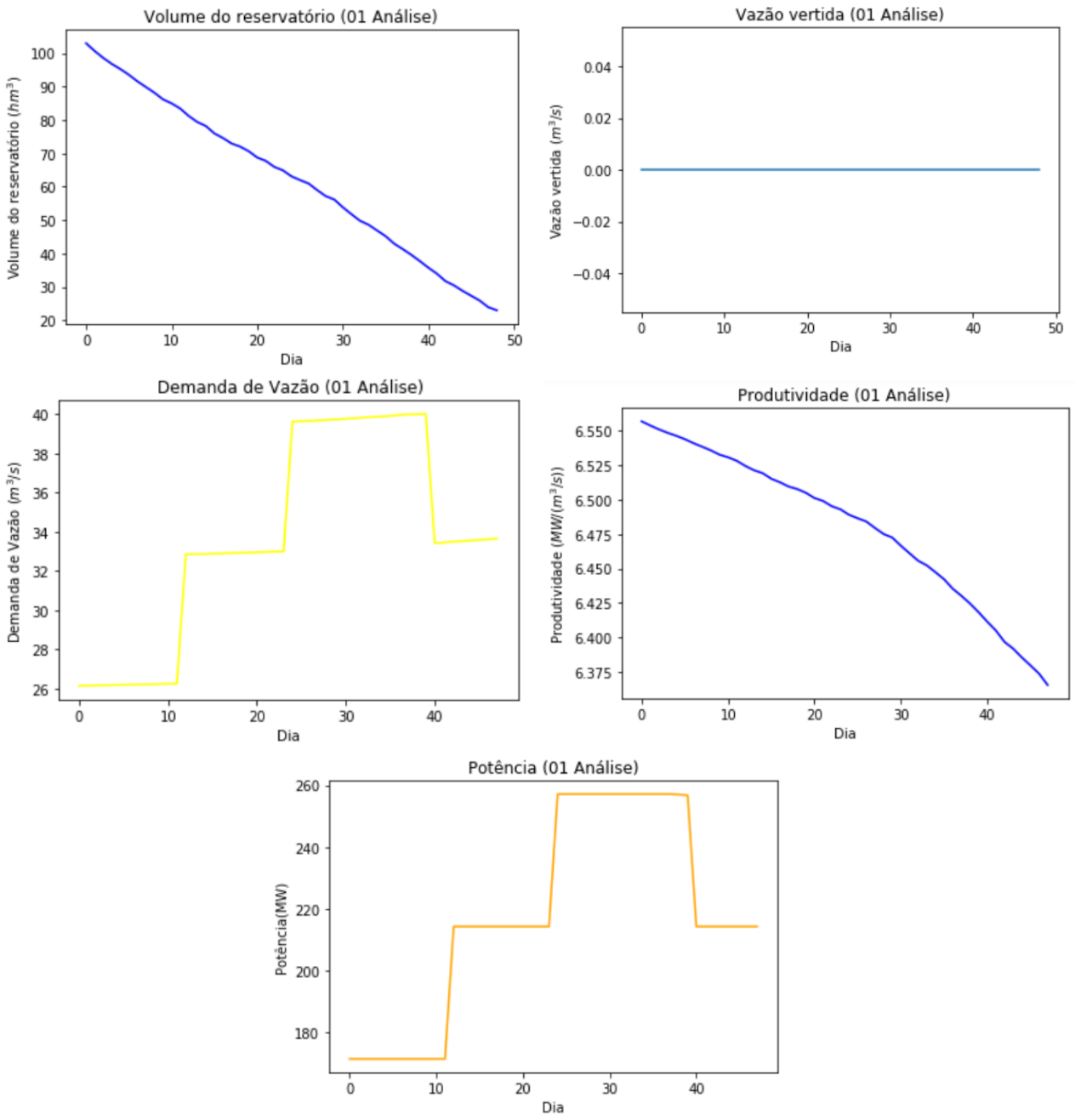


Figura 16 – Caso 02 (Meta de potência variada)

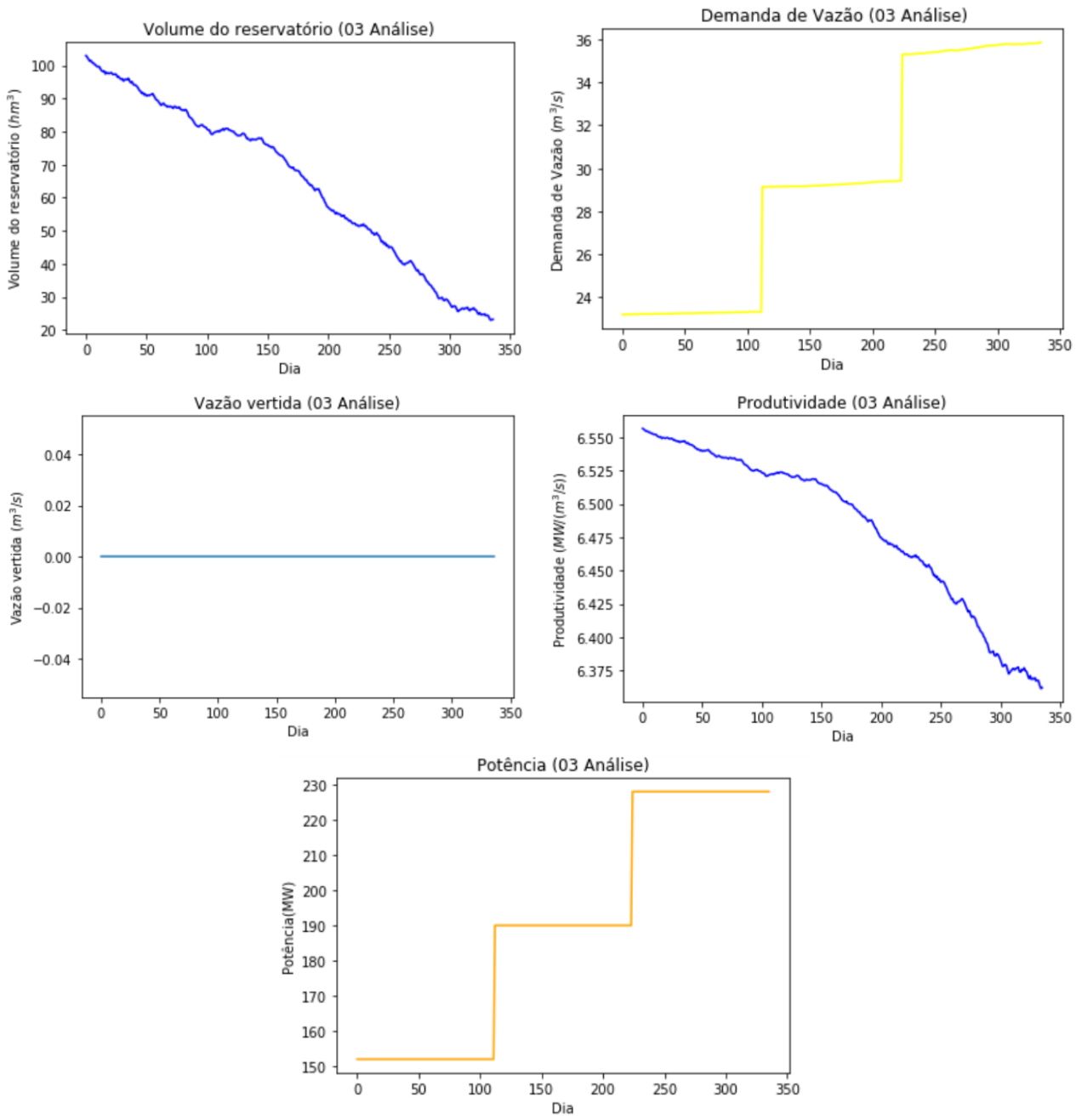
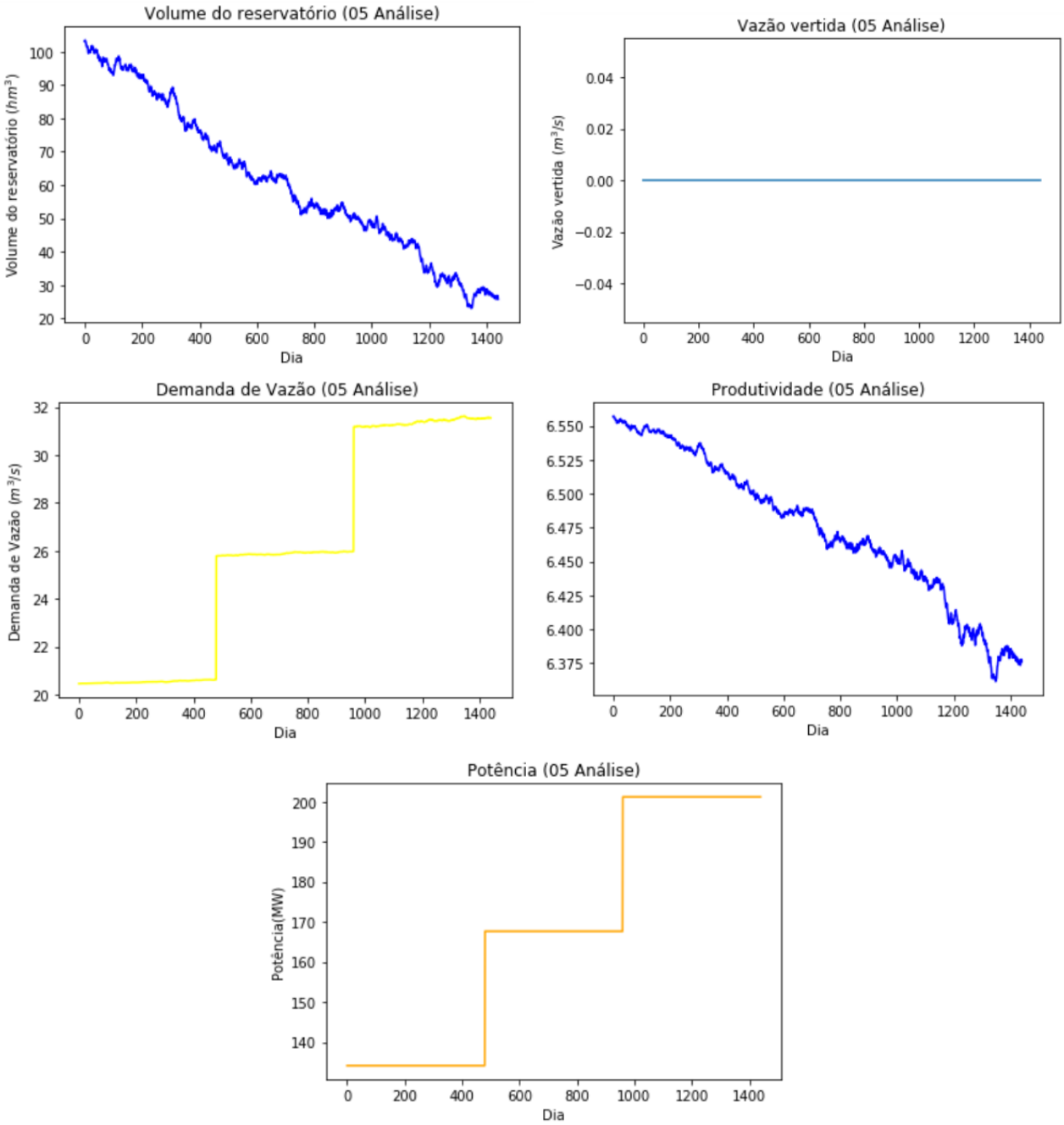


Figura 17 – Caso 03 (Meta de potência variada)



Em todos os períodos alcançou um perfil de potência, com base no valor da nova demanda de vazão. Assim, o Algoritmo 03 conseguiu alterar o valor da demanda de vazão de modo a obter o perfil de potência desejado.

Abaixo, a Tabela 5 indica a evolução do erro absoluto, em cada iteração.

Tabela 5 – Evolução do erro absoluto

Análise	Cálculo do primeiro erro	Cálculo do último erro	Total de iterações
1	1525.0949642133219	0.9993794924748158	39
3	9777.46257939842	5.144329406903125e-12	2
5	37273.0580402657	3.2514435588382185e-11	2

Depois, calculou-se o tempo de execução final do programa na linguagem em python, em que as configurações da máquina seriam de um sistema operacional Windows, processador core i5, memória 8GB e armazenamento 1TB:

Tabela 6 – Tempo de execução para a meta de potência variada.

Dias	Tempo de execução
48	318 µs ± 24.4 µs
144	312 µs ± 13.1 µs
336	297 µs ± 9.66 µs
720	309 µs ± 16.5 µs
1440	323 µs ± 16.4

3.3 Simulações

O modelo matemático para calcular δu tem como objetivo a otimização do sistema de reservatório para a geração de energia elétrica. Em que é formulado para maximizar a vazão turbinada de uma usina hidrelétrica.

Como citado anteriormente, os reservatórios não possuem uma geometria regular, impossibilitando assim a utilização de uma função linear em relação da altura da coluna d'água com o volume armazenado no reservatório. O setor elétrico brasileiro adota para representação dessa função um polinômio de até quarto grau,chamado de polinômio cota volume que caracteriza cada reservatório.

Na usina hidrelétrica a água ao passar pelas turbinas retoma seu caminho natural ao leito do rio através do canal de fuga. A diferença imediatamente após a saída da água do canal de fuga e o nível do mar é chamada de cota do canal de fuga, também é representada por um polinômio.

Esses polinômios foram utilizados para calcular a produtividade das usinas de Três Marias, Itaparica e Sobradinho, uma vez que o atrito do fluxo de água nas tubulações do sistema hidráulico não foi considerado constante.

No estudo de (MOLINA, 2016) consta as tabelas dos coeficientes do polinômio de acordo com a usina hidrelétrica e com os Coeficientes dos polinômios do canal de fuga e a perda hidráulica das usinas. Com as informações desse estudo criou-se a Tabela 7 e Tabela 8, referentes aos valores dos Coeficientes dos polinômios e a Constante de perda hidráulica:

Cota X Volume	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Três Marias	5.303318E+02	6.075960E-03	-4.836150E-07	2.203479E-11	-3.846580E-16
Sobradinho	3.741790E+02	1.396690E-03	-5.351590E-08	1.155989E-12	-9.545989E-18
Itaparica	2.758130E+02	6.764889E-03	-8.868370E-07	7.067909E-11	-2.239850E-15
Canal de Fuga	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Três Marias	5.146558E+02	1.606860E-03	-2.552750E-07	2.885479E-11	-1.179780E-15
Sobradinho	3.596538E+02	1.964010E-03	-2.968730E-07	2.508280E-11	-7.702299E-16
Itaparica	2.515000E+02	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

Tabela 7 – Coeficientes dos polinômios

Usina	Perda Hidráulica
Três Marias	0.6
Sobradinho	0.5
Itaparica	0.8

Tabela 8 – Constante de perda hidráulica

Com base nesses dados e também com os valores da demanda de vazão e vazão defluente disponível em (CEMIG, 2021) para a usina de Três Marias, e no (MOLINA, 2016) para a usina de Sobradinho e a usina de Itaparica, foi possível calcular o δu ao utilizar os algoritmos 2 e 3

A usina Hidrelétrica de Três Marias tem uma potência instalada de 396MW, o volume total do reservatório é de 19,528 hm^3, o volume útil 15,278 hm^3, a produtividade específica é de 0,008564 $MW/m^3/s/m$. E para essa simulação a demanda de vazão máxima foi de 850 m^3/s.

A seguir, os resultados dos algoritmos:

Figura 18 – Usina de Três Marias, resultado com o algoritmo 2

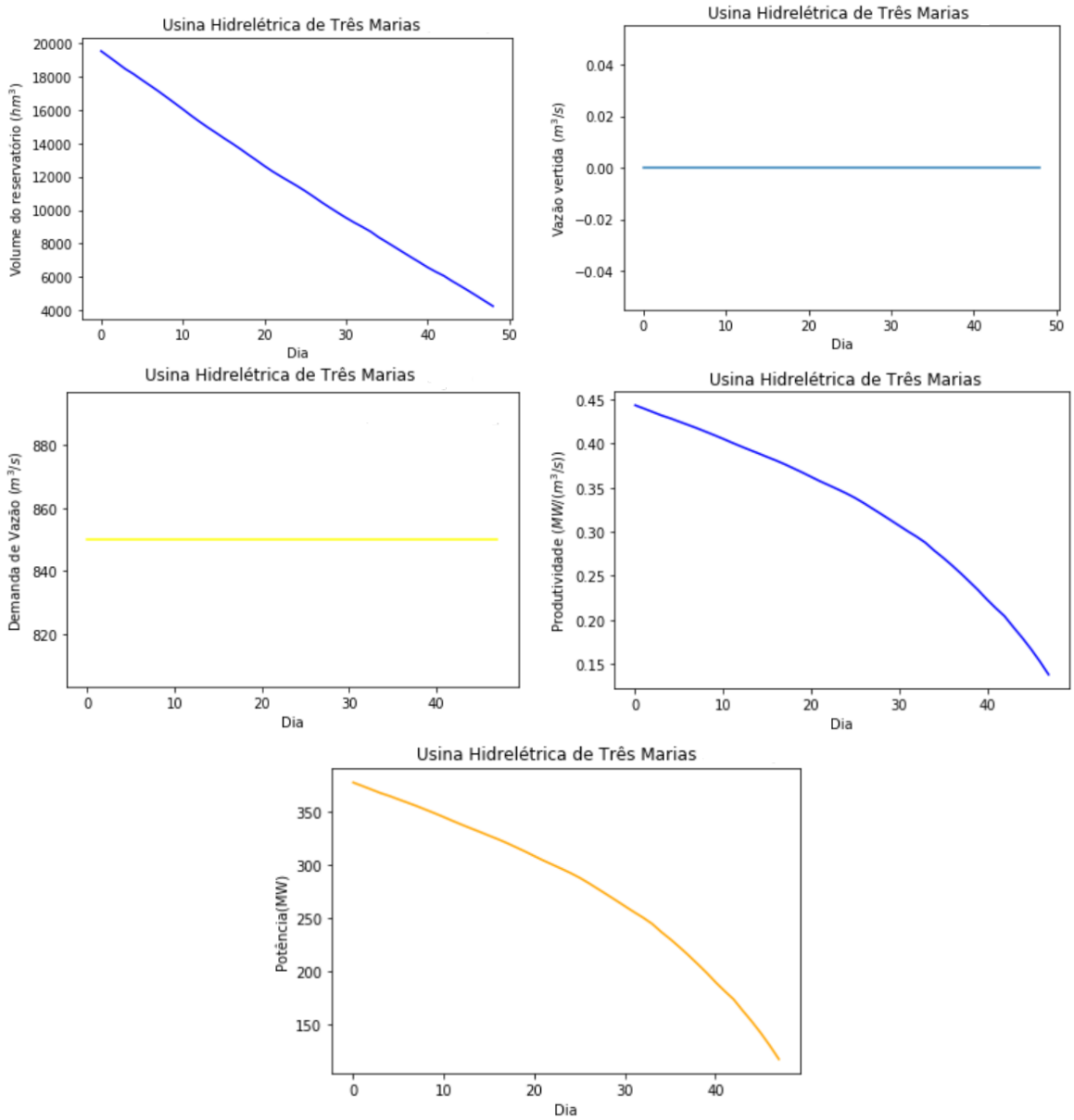
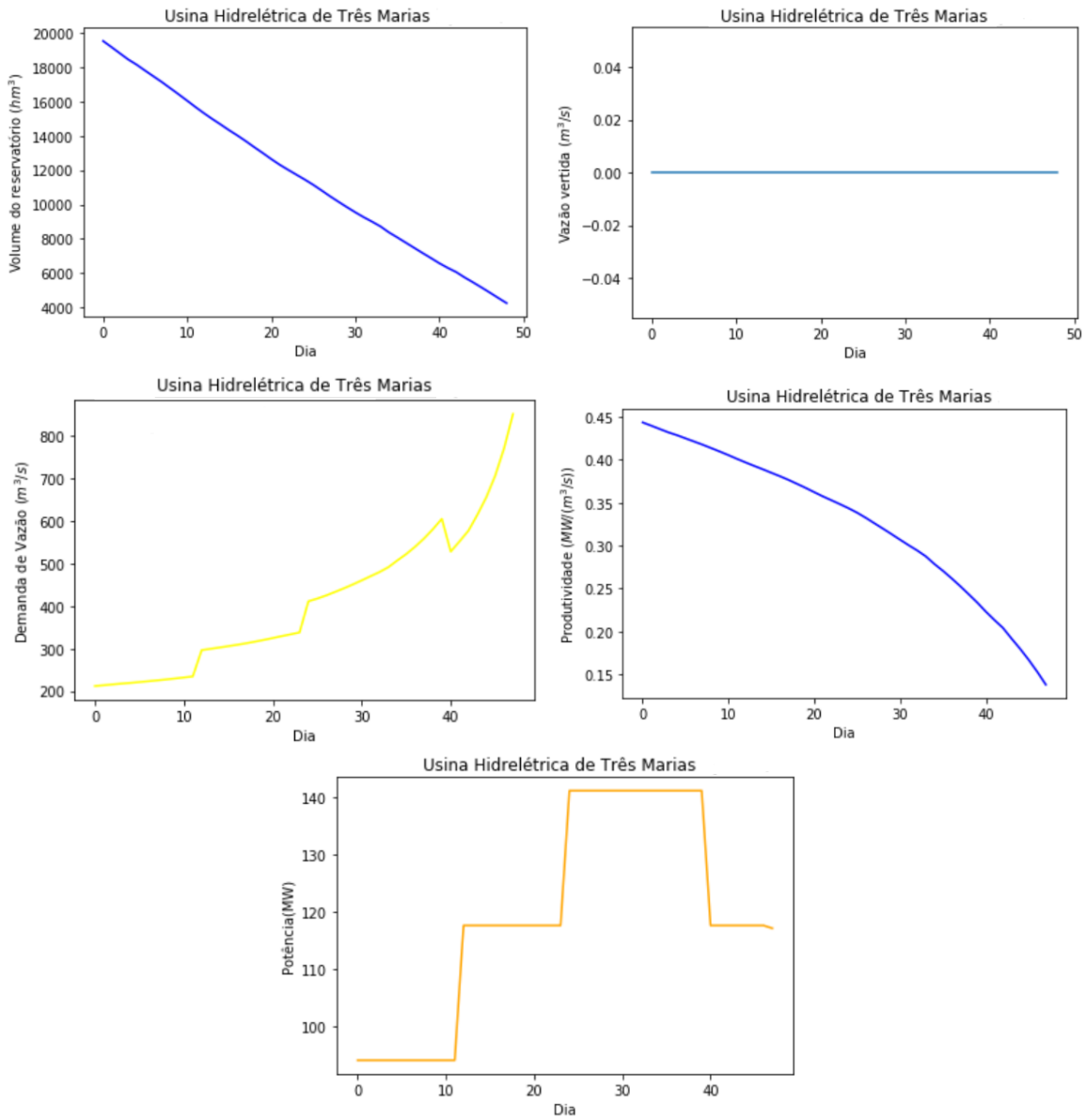


Figura 19 – Usina de Três Marias, resultado com o algoritmo 3



A Usina Hidrelétrica de Sobradinho tem uma potência instalada de 1050 MW, o volume total do reservatório é de 34,116 hm^3, o volume útil 28.669 hm^3, a produtividade específica é de 0,009023 $MW/m^3/s/m$. E para essa simulação a demanda de vazão máxima foi de 4750 m^3/s.

Também gerou-se gráficos com os resultados dos algoritmos:

Figura 20 – Usina de Sobradinho, resultado com o algoritmo 2

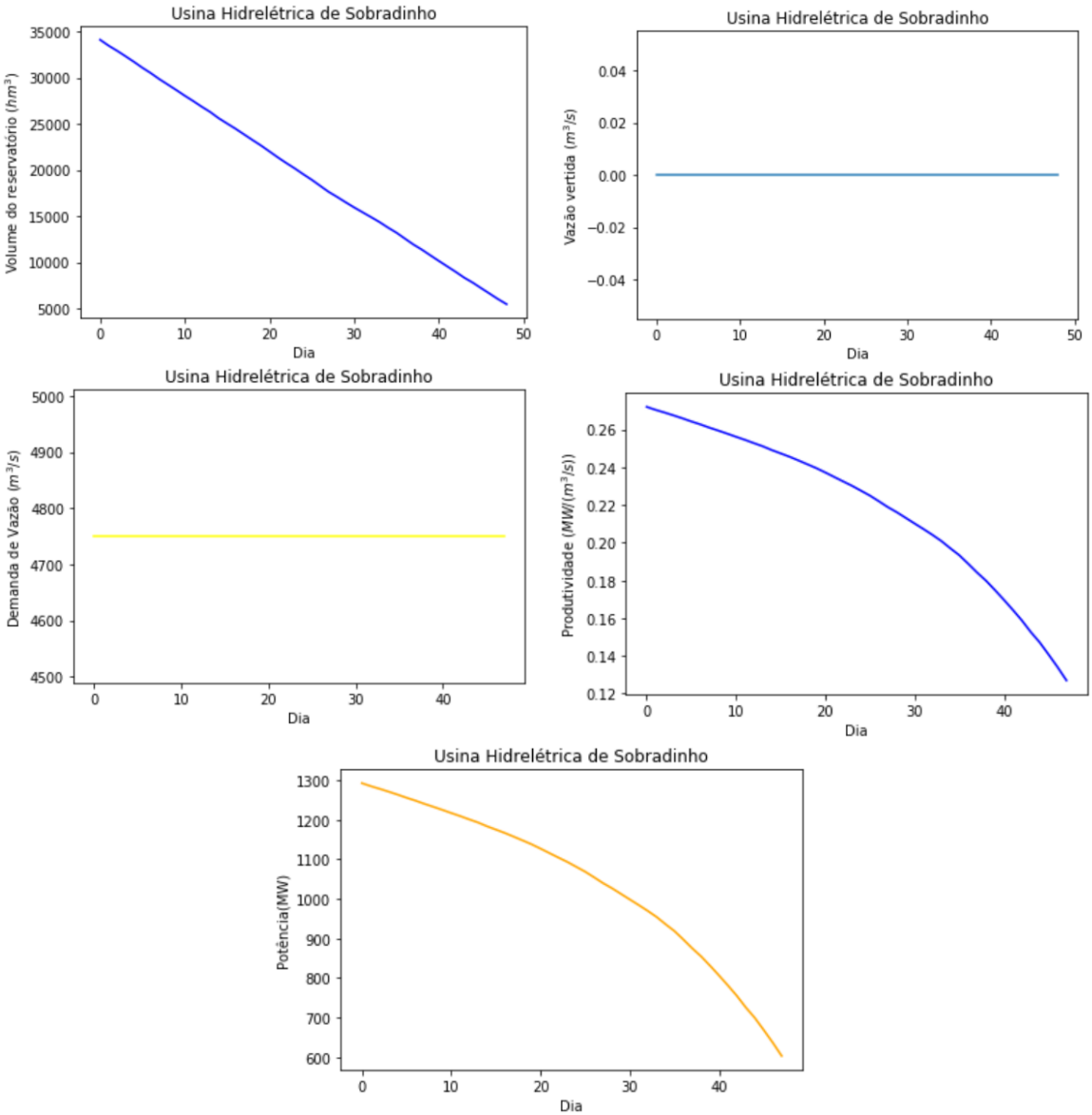
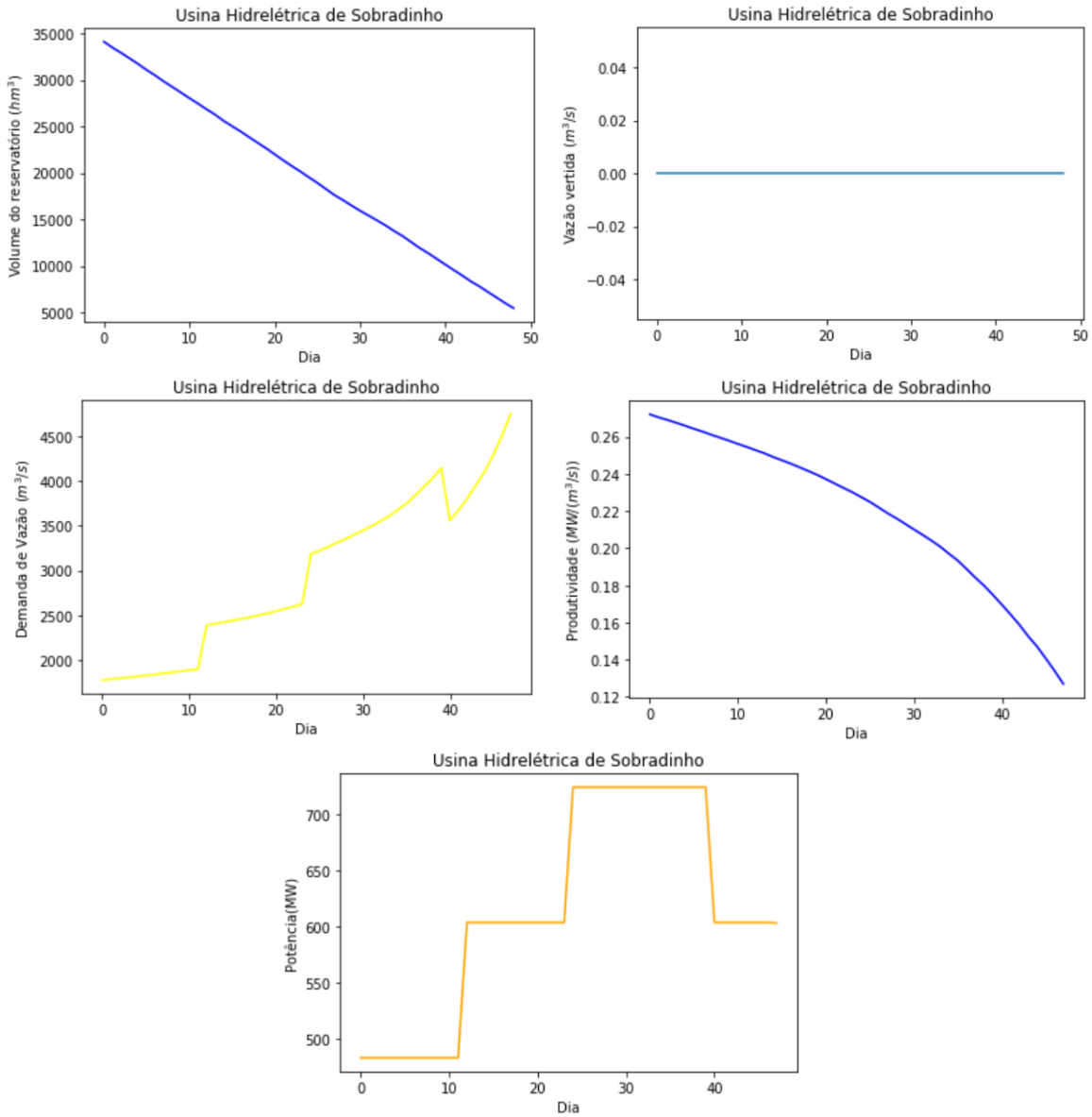


Figura 21 – Usina de Sobradinho, resultado com o algoritmo 3



Por último, a reprodução do Pós Operativo de Itaparica (Luiz Gonzaga) A usina hidrelétrica de Itaparica, denominada também de Usina hidrelétrica Luiz Gonzaga. Tem uma potência instalada de 1479,6 MW, o volume total do reservatório é de 10,782 hm^3, volume útil 3548 hm^3. E para essa simulação a demanda de vazão máxima foi de 3050 m^3/s.

Figura 22 – Usina de Itaparica, resultado com o algoritmo 2

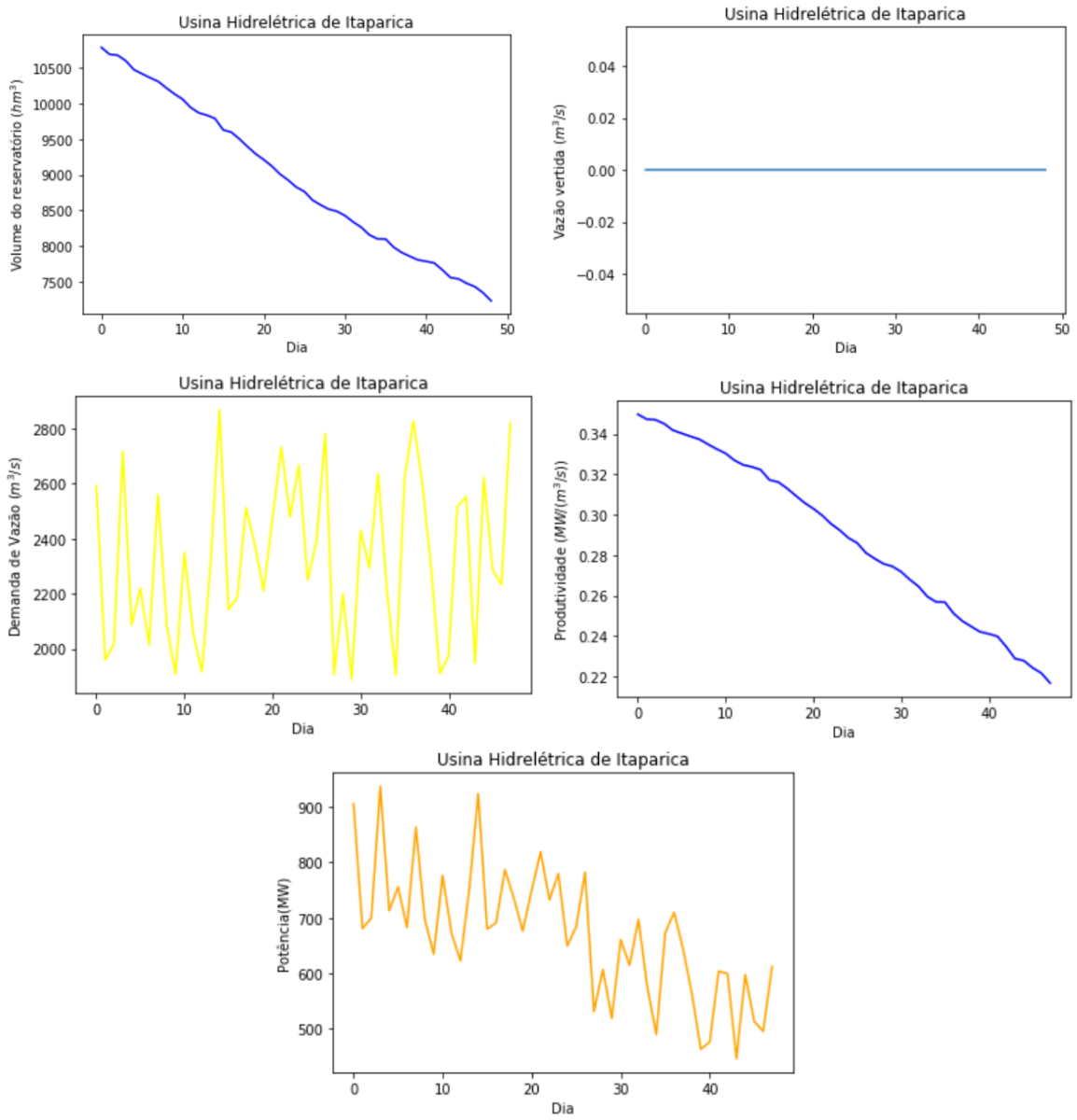
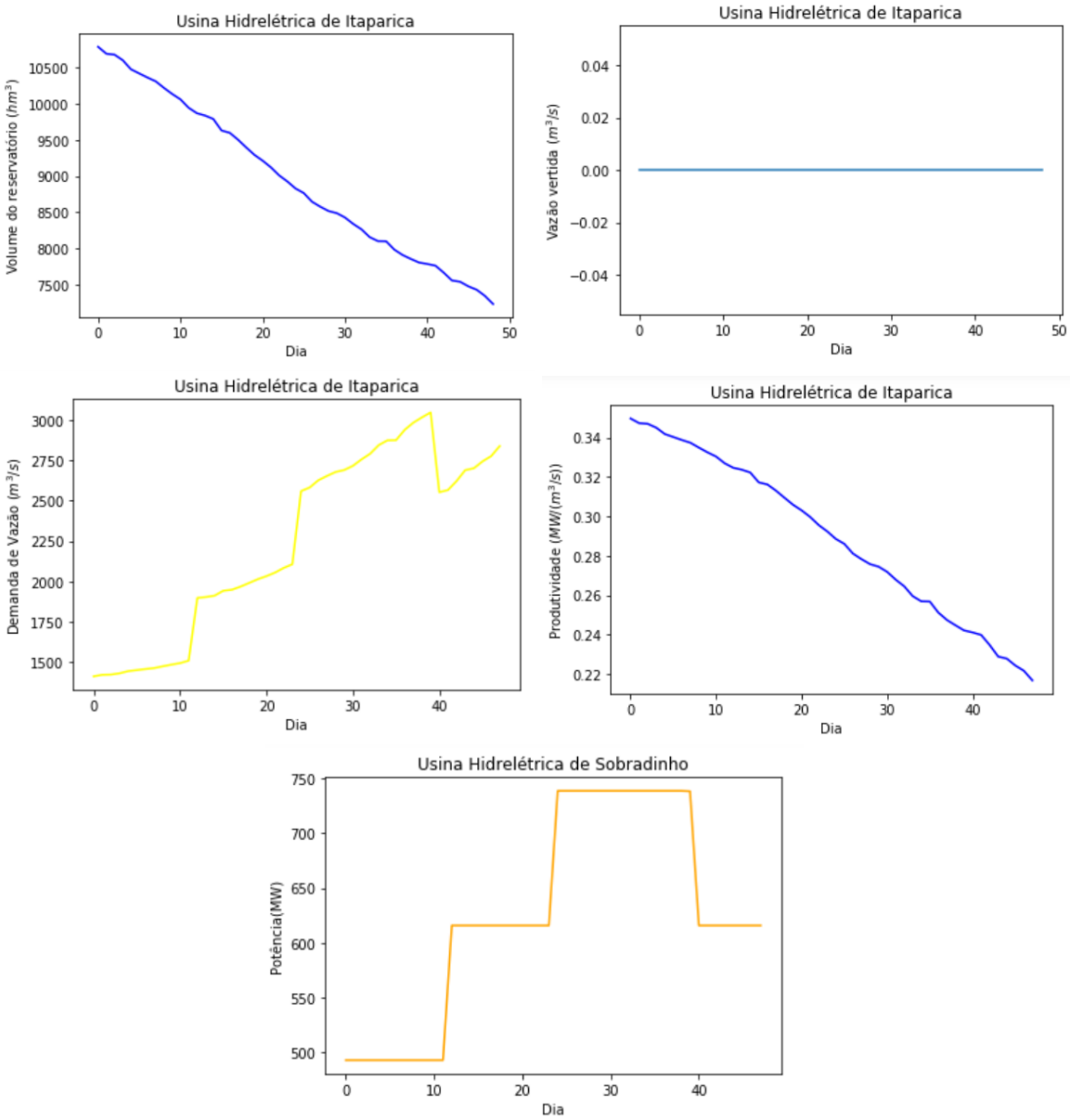


Figura 23 – Usina de Itaparica, resultado com o algoritmo 3



Na usina de Três Marias o valor do erro absoluto na primeira iteração foi de 4410,29, e na última iteração foi de 0,99, com o tempo de execução igual a 348 µs ± 18 µs. Na usina de Sobradinho o valor do erro absoluto iniciou-se em 13375,79, e terminou em 0,98, com o tempo de execução igual a 356 µs ± 77,8 µs. E por último a usina de Itaparica o valor do erro absoluto iniciou-se em 7531,91, e terminou em 0,798, com o tempo de execução igual a 296 µs ± 7,42 µs.

Observou-se, conforme desejado, tanto na usina de Três Marias, assim como na usina de Sobradinho, que a demanda de vazão atingiu o seu valor máximo. Já na usina de Itaparica, a demanda de vazão não atingiu o seu valor máximo, provavelmente devido ter pouca precipitação pluviométrica no período em analise. E, em relação á potência, obteve-se o perfil almejado em todas as usinas.

Capítulo 4

Conclusão

Este estudo considerou o problema de geração de médio prazo em uma usina hidrelétrica considerando balanço hídrico, e os limites de volume da barragem.

O algoritmo proposto se divide em duas fases. Na primeira fase foi desenvolvida uma solução analítica que permite calcular qual a maior vazão turbinada que pode se realizar, dado um perfil desejado de vazão, sem violar as restrições.

Na fase dois, com o Algoritmo 03, foi definida uma heurística para se alterar a meta de volume de vazão para se obter a geração máxima de potência seguindo uma meta de perfil pré-determinada. Esta heurística considera a produtividade da usina para realizar ajustes na vazão turbinada.

Os resultados mostraram que o método é capaz de convergir para o valor esperado em um problema de teste utilizando dados reais de uma usina hidrelétrica.

4.1 Trabalhos Futuros

Nas simulações do algoritmo que obtêm o perfil de potência, constatou-se a obrigatoriedade da média da demanda de potência ser igual a um. Provavelmente, houve violações das restrições, sendo necessário um estudo aprofundado para dizer quais.

O rendimento de uma turbina hidráulica também poderia ser adicionado como análise do algoritmo. Esse rendimento é uma função não linear, entre a altura da queda líquida e a vazão turbinada, e, para se fazer este cálculo, manipula-se a curva colina.

Por último, a função objetivo desse trabalho é maximizar a produção da energia em uma usina hidrelétrica. Outra pretensão do trabalho poderia ser a maximização do volume final do reservatório. O problema se tornaria multiobjetivo, e, além de maximizar a energia, também iria garantir a geração futura.

Referências

ABRAPCH, A. B. D. P. E. C. **O que são PCH's e CGH's.** 1997. Disponível em: <https://abrapch.org.br/o-setor/o-que-sao-pchs-e-cghs/>. Acesso em: 27 de outubro de 2020. Citado na página 4.

ANEEL, A. N. D. E. E. B. **Atlas de energia elétrica do Brasil - Agência Nacional de Energia Elétrica.** Brasília, 2008. Citado na página 4.

BAKER, J. New technology and possible advances in energy storage. **Energy Policy**, v. 36, n. 12, p. 4368–4373, 2008. Citado na página 5.

BARBOSA, F. A. R. et al. The cascading reservoir continuum concept (crcc) and its application to the river tiete-basin. **Theoretical Reservoir Ecology and its Application. Rio de Janeiro: Brazilian Academy of Sciences and Backhuys Publishers**, p. 425–437, 1999. Citado na página 4.

BARIN, A. et al. Alzenira da rosa. seleção de fontes alternativas de geração distribuída utilizando uma análise multicriterial baseada no método ahp e na lógica fuzzy. **Sba Controle & Automação**, Campinas, v. 21, n. 5, p. 477–486, 2010. Citado na página 9.

BAZARAA, M.; SHERALI, H.; SHETTY, C. **Nonlinear programming: theory and applications**. John Wiley and Sons: [s.n.], 2006. Citado na página 15.

BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization, Berichte über verteilte messysteme**. Cambridge University Press: [s.n.], 2004. Citado na página 11.

BRASIL. **Lei nº 8.987, de 13 de fevereiro de 1995**. Planalto: [s.n.], 1995. Citado na página 6.

BRIANTI, L. et al. **Profissões do Futuro na Área de Energia e Implicações para a Formação Profissional**. [S.l.], 2021. Citado na página 1.

CAMARGO, F. H. F. **Aplicação de meta heurísticas na otimização multiobjetivo de sistemas hidrotérmicos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017. Citado na página 12.

CAMPOS, P. H. et al. Programação diária da operação considerando incertezas de defluência de usinas a montante operadas por outras empresas. **XXV SNPTEE - SEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA**, 11 2019. Citado na página 12.

CATALÃO, J. P. S. et al. Scheduling of head-sensitive cascaded hydro systems: A nonlinear approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 24, n. 1, p. 337–346, 2009. Citado na página 5.

CEMIG, C. E. d. M. G. **USINA HIDRELÉTRICA DE TRÊS MARIAS**. [S.l.], 2021. Disponível em: <https://www.cemig.com.br/usina/tres-marias/>. Acesso em: 21 mar. 2021. Citado na página 58.

CHEN, H. et al. Progress in electrical energy storage system: A critical review. **Progress in Natural Science**, v. 19, n. 3, p. 291–312, 2009. ISSN 1002-0071. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S100200710800381X>. Citado na página 6.

CICOGNA, M. A. **Otimização da operação diária de usinas hidrelétricas em cascata utilizando Metaheurísticas**. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, Campinas, SP, Brasil, 1999. Citado na página 4.

DINIZ, A. L.; ESTEVES, P. P. I.; SAGASTIZABAL, C. A. A mathematical model for the efficiency curves of hydroelectric units. **In: Power Engineering Society General Meeting**, p. 1 – 7, June 2007. Citado na página 7.

DOROCHE, M. R.; ANSCHAU, C. T. Oferta de energia elétrica no brasil. **Revista Cientifica Tecnológica**, Chapecó, v. 2, n. 1, p. 402–414, 2015. Citado na página 1.

ELETROBRAS, C. E. B. **Diretrizes para estudos e projetos de pequenas centrais hidrelétricas**. 2. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro, 2000. Citado na página 3.

FAIAS, S.; SOUSA, J.; CASTRO, R. Embedded energy storage systems in the power grid for renewable energy sources integration. **Renewable Energy, TJ Hammons**, p. 978–953, 2009. Citado na página 6.

FORTUNATO, L. A. M. et al. **Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Produção de Energia Elétrica**. Niterói: Universidade Federal Fluminense: [s.n.], 1990. Citado na página 8.

FRANCATO, A. L.; COIADO, L. C.; LINO, V. F. Análise da garantia física de usinas hidroelétricas de forma cooperativa por meio de modelos de otimização. **Brazilian Journal of Development**, 2020. Citado na página 13.

GOLDEMBERG, J.; LUCON, O. **Energia, Meio Ambiente e Desenvolvimento.** 3. ed. [S.l.: s.n.], 2012. Citado na página 1.

GOMES, C. A. M. **Otimização da operação diária de usinas hidrelétricas em cascata utilizando Metaheurísticas**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018. Citado na página 5.

GOULART, J. A. G. **EFEITOS DE PROGRAMAS DE RESPOSTA À DEMANDA E DA MICRO-GERAÇÃO NAS REDES DE DISTRIBUIÇÃO**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015. Citado na página 6.

GUEDES, L. et al. Hydro generation scheduling: nonlinear programming and optimality conditions. In: ____. [S.l.: s.n.], 2017. p. 161–183. ISBN 9781785611957. Citado na página 13.

GUEDES, L. S. M. et al. A continuous compact model for cascaded hydro-power generation and preventive maintenance scheduling. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 73, n. 702, p. 710, 2015. Citado na página 13.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. Introdução à pesquisa operacional. **9 ed. Porto Alegre : McGraw-Hill.**, 2013. Citado na página 14.

HORA, M. A. G. M. Compatibilização da geração de energia em aproveitamentos hidrelétricos com os demais usos dos recursos hídricos. **2ª Edição. Niterói: EDUFF - Editora da Universidade Federal Fluminense**, p. 102, 2012. Citado na página 8.

JUNIOR, I. C. S.; ALVES, T. d. R.; CAMPOS, L. A. Estudo e otimização do modelo smap: Study and optimization of the smap model. **Principia: Caminhos Da Iniciação Científica**, 2020. Citado na página 13.

LIMA, A. E. D. et al. Influência da cascata de reservatórios do submédio e baixo rio são francisco sobre a concentração de sólidos suspensos totais e suas frações orgânica e inorgânica na água. **JORNADA DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO, 10., 2010, Recife. Anais ...**, Recife: UFRPE, 2010. Citado na página 5.

LISBOA, A. et al. Otimização multiobjetivo de usinas hidrelétricas em cascata. **XXII SNPTEE - SEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA**, 10 2013. Citado na página 12.

LOPES, J. E. G. **Otimização de Sistemas Hidroenergéticos.** Dissertação (Mestrado) — EPUSP-PHD, Campinas, SP, Brasil, 2001. Citado na página 2.

MARCATO, A. L. M. **Representação Híbrida de Sistemas Equivalentes e Individualizados para o Planejamento da Operação de Médio Prazo de Sistemas de Potência de Grande Porte.** Tese (Doutorado) — PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2002. Citado na página 7.

MENDONÇA, M. et al. Heurística para unit commitment de turbinas hidráulicas distintas que visa maximizar a eficiência de geração de uma usina hidrelétrica e minimizar o ligamento/desligamento de máquinas considerando indisponibilidades programadas. **XXV SNPTEE - SEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA**, 11 2019. Citado na página 12.

MOLINA, X. B. D. L. C. **Avaliação da Acurácia do Modelo de Simulação a Usinas Individualizadas Baseada no Pós Operativo**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.

MORAES, L. A. M. **Considerações dos Contratos de Gás natural com Cláusulas Take-or-Pay no Planejamento Energético a Médio Prazo**. Dissertação (Mestrado) — IMPA, Rio de Janeiro, 2007. Citado na página 7.

MORAIS, L. C. d. **Estudo sobre o panorama da energia elétrica no Brasil e tendências futuras.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista., Bauru, SP, 2015. Citado na página 2.

MOROMISATO, G. D. Y. **Programação dinâmica aplicada ao cálculo da energia firme de usinas hidrelétricas.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012. Citado na página 2.

NIERADKA, I. **Sistema de monitoramento da instrumentação de segurança: um estudo de caso considerando a usina de Itaipu.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2016. Citado na página 5.

O'KANE, J. F.; SPENCELEY, J. R.; TAYLOR, R. Simulation as an essential tool for advanced manufacturing technology problems. **Journal Of Materials Processing Technology, [s.l.]**, Elsevier BV, v. 107, n. 1-3, p. 412–424, nov 2000. Citado na página 5.

PLOSKAS, N.; SAMARAS, N. Efficient gpu-based implementations of simplex type algorithms. **APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION**, p. 552–570, 2015. Citado na página 18.

RAMOS, G. L. **Avaliação do Desempenho de Regras de Operação de Reservatórios em Cascata Baseada em Dados do Pós-operativo**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 9.

SALDANHA, R. et al. Estratégia para tratamento de restrições no algoritimo nelder-mead com aplicações na otimização da programação diária da operação de usinas hidrelétricas. **Conference: XXVI SIMPEP**, 11 2019. Citado na página 12.

SAMPAIO, L. M. B.; RAMOS, F. S.; SAMPAIO, Y. Privatização e eficiência das usinas hidrelétricas brasileiras. **Econ. Apl.**, Ribeirão Preto, v. 9, n. 3, p. 465–480, Sept 2005. Citado na página 4.

SÈGUIN, S. et al. Stochastic short-term hydropower planning with inflow scenario trees. **European Journal of Operational Research**, v. 259, n. 3, p. 1156–1168, jun 2017. Citado na página 8.

VIEIRA, D. A. V. et al. Formulations for hydroelectric energy production with optimality conditions. **Energy Conversion and Management**, p. 781 – 788, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 13, 14, 16, 37 e 42.