

ISABELLA CAROLINE VIEIRA MACHADO

**Estudo da influência das tensões e das
deformações por cisalhamento em pórticos
planos de aço via Análise Avançada**

Dissertação de Mestrado

Departamento de Engenharia Civil

Belo Horizonte, fevereiro de 2022

**ESTUDO DA INFLUÊNCIA DAS TENSÕES E DAS DEFORMAÇÕES POR
CISALHAMENTO EM PÓRTICOS PLANOS DE AÇO VIA ANÁLISE AVANÇADA**

**Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia de Civil do
Centro Federal de Educação Tecnológica de
Minas Gerais como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Engenharia
Civil.**

Orientadora: Profa. Dra. Renata Gomes Lanna da Silva

BELO HORIZONTE

2022

Machado, Isabella Caroline Vieira
M149e Estudo da influência das tensões e das deformações por cisalhamento
em pórticos planos de aço via análise avançada / Isabella Caroline Vieira
Machado. – 2022.

123 f. : il., gráfs, tabs.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Civil.

Orientadora: Renata Gomes Lanna da Silva.

Bibliografia: f. 121-123.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de
Minas Gerais, Departamento de Engenharia Civil

1. Aço – Estruturas – Teses. 2. Pórticos estruturais – Teses.
3. Cisalhamento – Teses. 4. Deformações e tensões – Teses. 5. Análise
elástica (Engenharia) – Teses. I. Silva, Renata Gomes Lanna da. II. Centro
Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Departamento de
Engenharia Civil. III. Título.

CDD 620.112

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ISABELLA CAROLINE VIEIRA MACHADO

ESTUDO DA INFLUÊNCIA DAS TENSÕES E DAS DEFORMAÇÕES POR
CISALHAMENTO EM PÓRTICOS PLANOS DE AÇO VIA ANÁLISE AVANÇADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Civil do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Aprovado em 18 de fevereiro de 2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Renata Gomes Lanna da Silva – Orientadora

Prof. Dr. Lineker Max Goulart Coelho - CEFET-MG

Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall - UFMG

Prof. Dr. William Taylor Matias Silva -UnB

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida e do conhecimento, por toda força despejada em mim nos momentos de desespero e angústia, por sempre me iluminar e mostrar o melhor caminho.

À Prof^a. Dr^a Renata Gomes Lanna da Silva, pela orientação humana, por ser exemplo e inspiração em sua dedicação, paciência e incentivo. Agradeço pela oportunidade de trabalhar com o que amo e por me receber com carinho e compreensão.

Ao Prof. Me. Harley Francisco Viana, pela disponibilidade, paciência e contribuições para a realização deste trabalho. Sua participação foi essencial para o resultado final dessa dissertação.

Aos membros da banca, pelas contribuições para o aprimoramento desse estudo.

Aos meus amados pais, Marilene e Cleto, por todo amor, carinho e dedicação. Por abraçarem meus sonhos e por serem exemplos de sacrifício e determinação. Por tudo que fizeram e fazem por mim e pelo meu irmão. Não existem palavras para descrever todo amor e gratidão a vocês.

À minha madrinha Márcia e ao meu padrinho Luiz Antônio, pelo acolhimento e apoio. Ao meu irmão João, pelo companheirismo e paciência. À toda minha família e amigos, pelo incentivo e orações.

Ao meu noivo Thiago Diniz, pelo amor, amizade, compreensão, carinho e parceria. Por me incentivar a ser melhor todos os dias, por me dar forças e acreditar em mim quando eu mesma não o fiz.

Aos professores e funcionários do CEFET-MG, especialmente aos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, pela dedicação e disponibilidade, especialmente nos tempos de pandemia.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, e ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET-MG, pelo suporte financeiro.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a formação da pessoa que sou hoje e para a realização deste trabalho. Muito obrigada.

“A coisa mais bonita que podemos experimentar é o mistério. Essa é a chave para toda verdadeira arte e ciência. Aquele para quem a emoção é uma estranha, quem não consegue mais parar para se maravilhar e ficar extasiado de admiração, está praticamente morto, seus olhos estão fechados. ”

Einstein, Albert (1931)

RESUMO

O aço é um material amplamente utilizado em projetos estruturais e, atualmente, vários estudos vêm sendo desenvolvidos para apresentar softwares que utilizam Análise Avançada com o intuito de fornecer resultados mais condizentes com o comportamento real das estruturas e possibilitar o dimensionamento aproveitando a maior capacidade de carga do sistema estrutural. Muitos trabalhos baseiam-se na teoria clássica de Bernoulli-Euler, mas para o caso de barras curtas e para perfis metálicos do tipo I, uma análise mais rigorosa, que inclua os efeitos do cisalhamento, aplicando a hipótese cinemática de Timoshenko e a interação da tensão normal e da tensão de cisalhamento na plastificação da seção transversal, tornam-se necessárias. O objetivo do presente trabalho é apresentar um estudo do comportamento de pórticos planos de aço considerando a influência das deformações por cisalhamento utilizando os conceitos da Análise Avançada. A metodologia numérica proposta leva em conta o escoamento gradual do aço na seção transversal e ao longo do comprimento das barras e os efeitos de segunda ordem $P-\Delta$ e $P-\delta$. A inclusão dos efeitos causados pelas tensões de cisalhamento na plastificação das barras é realizada por implementação do modelo de von Mises no software PPLANLEP. A partir de modelos numéricos pode-se visualizar um adequado funcionamento do software para realizar análises elastoplásticas de segunda ordem. Além disso, foram observados que em modelos pouco submetidos à força cortante, as capacidades de carga dos sistemas estruturais não sofreram alterações ao considerar o critério de falha de von Mises. Porém, para vigas, especialmente as mais curtas, a consideração da interação entre tensões normal e de cisalhamento acarretaram em menores capacidades de carga, com variação entre 1 e 8,5% de acordo com a relação L/h analisada, quando comparadas aos resultados considerando somente tensões normais.

Palavras-chave: Deformações por cisalhamento, Hipótese de Timoshenko, Modelo de von Mises, Análise avançada, Efeitos de segunda ordem, Método da zona plástica, Pórticos Planos de Aço.

ABSTRACT

Steel is a material used in projects and, currently, several studies are carried out to propose software programs based on Advanced Analysis concepts in order to provide results that are more consistent with the real structures' behavior and enable the design taking advantage of the maximum load capacity of the structural system. Many works are based on classical Euler-Bernoulli theory; however, in the case of short structural members and I-shaped steel profiles, a more rigorous analysis taking into account the shear effects through the kinematic hypothesis of Timoshenko and the interaction of normal and shear stresses on cross-section yielding become necessary. The aim of this work is to present a study of the behavior of plane steel frames considering the influence of shear strains using the concepts of Advanced Analysis. The proposed numerical methodology takes into account the spread of plasticity within the cross section and along the member length and the second-order effects $P-\Delta$ and $P-\delta$. The inclusion of the effects caused by shear stresses in the plastification of members is carried out by implementing the von Mises yield criterion in the PPLANLEP software. From numerical models, it is possible to visualize the proper functioning of the software program to perform second-order elastoplastic analyses. Furthermore, it was observed that in structural models that were little subjected to shear force, the load capacities of the structural systems did not change when considering the von Mises yield criterion. Nevertheless, for beams, especially the shorter ones, the consideration of the interaction between normal and shear stresses in the cross-section yielding resulted in lower load capacities, with variation between 1 and 8.5% according to the L/h ratio analyzed, when compared to results considering only normal stresses.

Keywords: Shear deformations, Timoshenko's hypothesis, von Mises' model, Advanced analysis, Second-order effects, Distributed plasticity approach, Steel Plane Frames.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Comportamento força x deslocamento dos vários tipos de análise	26
Figura 2 - Discretização no Método de Zona Plástica	29
Figura 3 - Força normal combinada com momento fletor: (a) Seção transversal; (b) Distribuição de tensão plástica completa, $e < D/2$; (c) Deslocamentos normais.	30
Figura 4 - Força normal combinada com momento fletor: (a) Deslocamento normal, $e \geq D/2$; (b) Distribuição de tensão plástica completa.	32
Figura 5 - Zona plástica para balanço com seção transversal retangular.	34
Figura 6 - Distribuição de tensão para a viga em balanço com seção transversal retangular: (a) Distribuição de σ_x na seção AA; (b) Distribuição de τ na seção AA.	35
Figura 7 - Distribuição elastoplástica da tensão σ_x para seção transversal retangular.	37
Figura 8 - Distribuição de tensão para balanço com seção transversal retangular: (a) Distribuição de σ_x e σ_y na seção BB; (b) Distribuição de τ na seção BB.	38
Figura 9 - Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rígido.	45
Figura 10 - Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rotulada.	47
Figura 11 - Campo de deslocamento na flexão considerando a teoria de Timoshenko.	50
Figura 12 - Rotação α da seção transversal.	51
Figura 13 - Fluxograma descrevendo metodologia do trabalho.	61
Figura 14 - Método de Newton-Raphson.	64
Figura 15 - Comportamento elastoplástico do material para o caso uniaxial.	66
Figura 16 - Modelo de fatias.	68
Figura 17 - Fluxograma do algoritmo de solução incremental-iterativo para análises estáticas.	73
Figura 18 - Procedimentos para análise do estado de tensões em cada fatia utilizando o critério de falha de von Mises.	75
Figura 19 - Pilar Biapoiado.	76
Figura 20 - Pilar engastado na base e livre no topo.	80
Figura 21 - Treliça plana.	83
Figura 22 - Comportamento pós-flambagem da diagonal comprimida.	86

Figura 23 - Gráfico fator de carga x deslocamento horizontal no ponto de atuação da carga, para os casos isostáticos e hiperestáticos.	87
Figura 24 - Viga em balanço com carga aplicada na extremidade livre.	88
Figura 25 - Carga Aplicada x Deslocamento Vertical para viga em balanço, $L/h = 10$	89
Figura 26 – Tensões de (a) cisalhamento e (b) normal no centro das fatias da seção transversal do engaste para $P = 70\%$ e $L/h = 10$: comportamento elástico.	89
Figura 27 - Tensões de (a) cisalhamento e (b) normal no centro das fatias da seção transversal do engaste para $P = 99\%$ e $L/h = 10$: comportamento elastoplástico.	90
Figura 28 - Tensões de (a) cisalhamento e (b) normal no centro das fatias da seção transversal do engaste para $P = 100,5\%$ e $L/h = 10$: comportamento totalmente plástico.	90
Figura 29 - Distribuição da plastificação ao considerar a teoria Timoshenko sem von Mises para $L/h = 10$	92
Figura 30 - Distribuição da plastificação ao considerar a teoria Timoshenko sem von Mises para $L/h \leq 5$	92
Figura 31 - Distribuição da plastificação no meio do vão considerando o critério de falha de von Mises para diferentes razões L/h , onde: a) $L/h = 10$; b) $L/h = 5$; c) $L/h = 4$; d) $L/h = 3$; e) $L/h = 2$; f) $L/h = 1,5$; g) $L/h = 1$	93
Figura 32 - Viga biapoada com carga concentrada no meio do vão.	94
Figura 33 - Distribuição plastificação considerando o escoamento apenas em relação à tensão normal.	96
Figura 34 - Distribuição da plastificação no meio do vão considerando o critério de falha de von Mises para diferentes razões L/h , onde: a) $L/h = 1,4$; b) $L/h = 2$; c) $L/h = 4$; d) $L/h = 6$; e) $L/h = 7$; f) $L/h = 8$; g) $L/h = 10$; h) $L/h = 12$	97
Figura 35 - Viga biengastada com carga concentrada aplicada a $1/3$ do vão.	98
Figura 36 - Propagação da plastificação nas seções A, B e C para viga biengastada considerando Bernoulli-Euler.	99
Figura 37 - Propagação da plastificação nas seções A, B e C para viga biengastada considerando Timoshenko e von Mises.	99
Figura 38 - Relação carga x flecha da viga biengastada com carga concentrada aplicada a $1/3$ do vão.	102
Figura 39 - Pilar biapoado de Chen, Goto e Liew.	103
Figura 40 - Deslocamento horizontal no meio do vão (cm).	103

Figura 41 - Percentual de plastificação nas zonas plásticas dos pilares ao considerar o escoamento por von Mises: (a) $\lambda = 100$; (b) $\lambda = 60$; (c) $\lambda = 20$	105
Figura 42 - Pórtico de Kanchanalai.	106
Figura 43 - Diagrama de interação para o pórtico de Kanchanalai (1977) sem imperfeição geométrica.	107
Figura 44 - Diagrama de interação para o pórtico de Kanchanalai (1977) com imperfeição geométrica.	108
Figura 45 - Distribuição da plastificação no pórtico de Kanchanalai (1977) ao considerar o escoamento por von Mises: (a) 0% de H_y ; (b) 100% de H_y	109
Figura 46 - Portal de Vogel.....	110
Figura 47 - Curva fator de carga x deslocamento para o pórtico de Vogel com conexões viga-pilar rígidas.....	110
Figura 48 - Curva fator de carga x deslocamento para o pórtico de Vogel com conexões viga-pilar rotuladas.....	111
Figura 49 - Percentual da plastificação ao considerar o escoamento por von Mises para o pórtico de Vogel: (a) Ligações rígidas, (b) Ligações rotuladas.....	113
Figura 50 - Pórtico de Seis Andares e dois vãos de Vogel.	114
Figura 51 - Curva fator de carga x deslocamento para o pórtico de Vogel de seis andares e dois vãos.	115
Figura 52 - Percentual da plastificação ao considerar o escoamento por von Mises para o pórtico de 6 andares e 2 vãos de Vogel.	116

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Formulação para momento reduzido M_N	33
Tabela 2 - Tipos de distribuição das tensões residuais.....	70
Tabela 3 - Comparação entre os resultados de deslocamentos (mm) no meio do vão obtidos pelo PPLANLEP, pelo processo analítico e pela AISC.....	78
Tabela 4 - Comparação entre os resultados de momentos fletores (kN.m) no meio do vão obtidos pelo PPLANLEP, pelo processo analítico e pela AISC.	79
Tabela 5 - Comparação entre os resultados de deslocamentos (mm) na extremidade livre obtidos pelo PPLANLEP, pelo processo analítico e pela AISC.	82
Tabela 6 - Comparação entre os resultados de momentos fletores (kN.m) na extremidade engastada obtidos pelo PPLANLEP, pelo processo analítico e pela AISC.....	82
Tabela 7 - Dados das barras constituintes das estruturas treliçadas.	84
Tabela 8 - Forças normais para a estrutura isostática em kN.	84
Tabela 9 - Forças normais para a estrutura hiperestática em kN.....	85
Tabela 10 - Fator de carga última para diferentes razões de comprimento por altura (L/h).....	91
Tabela 11 - Fator de carga última para diferentes razões de comprimento por altura (L/h).....	95
Tabela 12 - Flecha na seção B e propagação de plastificação nas seções.	98
Tabela 13 - Fatores de carga última para o pilar biapoiado.	104
Tabela 14 - Comparação dos fatores de carga última obtidas no presente trabalho com os resultados de Nguyen e Kim (2016).....	112

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AISC	– Centro Brasileiro da Construção em Aço
CEFET-MG	– Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
MRE	– Método da Rótula Elastoplástica
MRP	– Método da Rótula Plástica
MRPR	– Método da Rótula Plástica Refinado
MZP	– Método da Zona Plástica
NBR	– Norma Brasileira
PPLANLEP	– Pórticos Planos de aço, considerando a Análise Não Linear Elasto-Plástica
PT	– Presente Trabalho

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas Minúsculas

a, b	– Nós do elemento nas extremidades da esquerda e direita, respectivamente
b_f	– Largura das mesas de seção I
b_i	– Largura da fatia i
d	– Deslocamento axial
$d\varepsilon$	– Acréscimo de deformação
$d\sigma$	– Acréscimo de tensão normal
e	– Distância entre eixo neutro e eixo de simetria
h_w	– Altura da alma de seção I
l_r, l_c	– Comprimento do elemento ou fibra na configuração de referência e corrigida, respectivamente
k_{ij}	– Coeficientes da matriz de rigidez tangente do elemento, onde $i, j = 1, \dots, 6$
k_m^{-ep}	– Forma local da matriz de rigidez constitutiva no regime elastoplástico em coordenadas cartesianas
k_t	– Matriz de rigidez tangente do elemento
k_M	– Forma local da matriz de rigidez constitutiva em coordenadas cartesianas
$\bar{k}_G$	– Forma local da matriz de rigidez geométrica no regime elástico em coordenadas cartesianas
p_i	– Graus de liberdade cartesianos, onde $i = 1, \dots, 6$
q	– Carga distribuída
q_α	– Vetor que contém os graus de liberdade naturais ou corrotacionais, onde $\alpha = 1, 2, 3$
q_1	– Grau de liberdade natural que mede a mudança de comprimento da corda de um elemento (alongamento ou encurtamento)
q_2, q_3	– Graus de liberdade naturais que medem o ângulo α a da extremidade a do elemento e o ângulo α b da extremidade b do elemento, respectivamente, na configuração corrigida, independentes da rotação de corpo rígido
t_f	– Espessura das mesas de seção I

t_w	– Espessura da alma de seção I
u	– Deslocamento axial do nó
$\bar{u}$	– Deslocamento axial dos pontos situados sobre o eixo da barra
u_a, u_b	– Deslocamento axial dos nós a e b, respectivamente
v	– Deslocamento transversal do nó
$\bar{v}$	– Deslocamento transversal dos pontos situados sobre o eixo da barra
v_a, v_b	– Deslocamento transversal dos nós a e b, respectivamente
x	– Coordenada genérica do ponto no eixo das abscissas
x_a, x_b	– Coordenadas nodais, segundo o eixo das abscissas na configuração de referência
x_c, x_r	– Eixo paralelo ao elemento no sistema local corrotacional centrado, respectivamente, nos elementos deformado e de referência
y_a, y_b	– Coordenadas nodais, segundo o eixo das ordenadas na configuração de referência
y_c, y_r	– Eixo perpendicular ao elemento no sistema local corrotacional centrado, respectivamente, nos elementos deformado e de referência

Letras Romanas Maiúsculas

A	– Área da seção transversal
A_f	– Área da mesa da seção I
A_w	– Área da alma da seção I
B	– Largura da seção transversal, largura da mesa da seção I
$\mathbf{B}$	– Matriz de mudança de coordenadas
$\bar{\mathbf{B}}$	– Forma local da matriz $\mathbf{B}$
D	– Altura total da seção transversal
D_f, D_c	– Módulo de rigidez do material devido à flexão e ao cisalhamento, respectivamente
D^c	– Matriz constituinte da parcela constitutiva da matriz de rigidez tangente devido ao cisalhamento
D^f	– Matriz constituinte da parcela constitutiva da matriz de rigidez tangente devido à flexão
$D_{\alpha,\beta}^c$	– Elementos da matriz de rigidez constitutiva do elemento no sistema de

	coordenadas corrotacionais devido ao cisalhamento
$D_{\alpha,\beta}^f$	– Elementos da matriz de rigidez constitutiva do elemento no sistema de coordenadas corrotacionais devido à flexão
E	– Módulo de elasticidade longitudinal
E_t	– Módulo tangente
F	– Força transversal
F_p	– Força de cisalhamento plástico
G	– Módulo de elasticidade transversal
G_α	– Matriz simétrica que representa uma parcela da matriz de rigidez geométrica e vem da derivada segunda $q_{\alpha,ij}$, onde $\alpha = 1, 2, 3$ e $i = 1, \dots, 6$
$\overline{G}_\alpha$	– Forma local da matriz G_α
H'	– Parâmetro de encruamento
H^c	– Matriz constituinte da parcela geométrica da matriz de rigidez tangente devido ao cisalhamento
H^f	– Matriz constituinte da parcela geométrica da matriz de rigidez tangente devido à flexão
$H_{\alpha,\beta}^c$	– Elementos da matriz H devido ao cisalhamento
$H_{\alpha,\beta}^f$	– Elementos da matriz H devido à flexão
H_y	– Carga horizontal que provoca o colapso rígido-plástico
I	– Momento de inércia no plano de flexão
K	– Matriz de rigidez tangente global do sistema
L	– Comprimento de viga
M	– Momento fletor
M_N	– Momento plástico reduzido
M_p	– Momento plástico
M_y	– Momento de escoamento
N	– Força axial
N_e	– Carga crítica de flambagem elástica de Euler
N_p	– Força normal de plastificação
N_{sd}	– Força solicitante de cálculo
N_y	– Carga de escoamento da seção à compressão
P	– Carga vertical

P_i	– Forças nodais internas de um elemento no sistema global de coordenadas cartesianas
Q	– Vetor dos esforços internos naturais no sistema de coordenadas corrotacionais, onde $\alpha = 1, 2, 3$
Q_α	– Esforços internos nas coordenadas naturais ou corrotacionais
S	– Momento estático
$\overline{S}_c$	– Comprimento de uma fibra situada no eixo da barra na configuração corrigida
T	– Matriz de rotação de eixos
T^T	– Transposta da matriz de rotação de eixos
V	– Força cortante
V_r	– Volume do elemento nas configurações de referência
W	– Trabalho
Z_p	– Módulo plástico
$(Z_p)_e$	– Módulo plástico da zona sombreada

Letras Gregas

α	– Ângulo de rotação do eixo de um elemento em relação à sua corda após a deformação; rotação da seção devido à flexão
α'	– Derivada do ângulo entre a corda e a tangente ao eixo da barra
α_a, α_b	– Ângulo de rotação nas extremidades do elemento, $\alpha_a = q_2$ e $\alpha_b = q_3$
α_s	– Fator de forma para o cisalhamento
β	– Ângulo de rotação devido ao cisalhamento; coeficiente de ponderação de carga horizontal
δ	– Flecha; deslocamento
δ_0	– Flecha máxima devido ao efeito da imperfeição geométrica da peça
δ_1	– Deslocamento de 1ª ordem
δ_2	– Deslocamento de 2ª ordem
$\delta\varepsilon$	– Deformação virtual de uma fibra
δp_i	– Vetor de deslocamentos nodais virtuais do elemento
δw_i	– Trabalho virtual interno de uma fibra
Δ	– Flecha; deslocamento
Δ_1	– Deslocamento global de 1ª ordem

Δ_2	– Deslocamento global de 2ª ordem
$\varepsilon_{,\alpha}$	– Derivada primeira do campo de deformação
$\varepsilon_{,\alpha\beta}$	– Derivada segunda do campo de deformação
ε_x	– Deformação longitudinal do elemento
$\bar{\varepsilon}_x$	– Deformação de uma fibra genérica situada no eixo longitudinal
$\bar{\varepsilon}_{xm}$	– Valor médio para a deformação de $\bar{\varepsilon}_x$
γ	– Coeficiente de ponderação de carga vertical; rotação devido ao cisalhamento
γ_{xy}	– Distorção no plano xy
$\gamma_{,\alpha}$	– Derivada primeira do campo de deformação γ
$\gamma_{,\alpha\beta}$	– Derivada segunda do campo de deformação γ
θ	– Rotação
θ_a, θ_b	– Rotação dos nós a e b medidos a partir da configuração de referência até a corda
λ	– Estiramento de uma fibra genérica; índice de esbeltez
σ_0	– Tensão de escoamento
σ_r	– Tensão residual
σ_x	– Tensão normal na direção x
τ	– Tensão de cisalhamento
τ_{xy}	– Tensão de cisalhamento
ϕ_r, ϕ_c	– Ângulos que a corda do elemento faz com o eixo das abscissas nas configurações de referência e deformada
ψ	– Imperfeição geométrica inicial dos pilares
ψ_i	– Função de interpolação para os deslocamentos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	PERGUNTA DE PESQUISA	23
1.2	OBJETIVOS	23
1.2.1	Objetivo geral.....	23
1.2.2	Objetivos específicos.....	23
1.3	JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA	24
1.4	RESTRIÇÕES E LIMITAÇÕES	25
1.5	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	25
2	REFERENCIAL TEÓRICO	26
2.1	TIPOS DE ANÁLISE	26
2.1.1	Análise elástica de primeira ordem.....	27
2.1.2	Análise elástica de segunda ordem	27
2.1.3	Análise elastoplástica de primeira ordem	27
2.1.4	Análise elastoplástica de segunda ordem	27
2.2	INFLUÊNCIA DA FORÇA CORTANTE NA PLASTIFICAÇÃO DE BARRAS 29	
2.2.1	Efeitos de força normal.....	30
2.2.2	Efeito de força cortante.....	33
2.2.2.1	Seções transversais retangulares	33
2.2.2.2	Seção I fletida no eixo de maior inércia.....	39
2.3	ANÁLISE AVANÇADA – ESTADO DA ARTE	40
3	FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS DE AÇO	44
3.1	FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO PLANO.....	44
3.2	CINEMÁTICA DO ELEMENTO	49
3.3	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	52
3.4	MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE	52

3.5	INTERPOLAÇÃO	54
3.6	VALOR MÉDIO DE DEFORMAÇÃO	55
3.7	MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE CONSTITUTIVA E GEOMÉTRICA	56
4	METODOLOGIA	60
5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	63
5.1	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PURO	63
5.2	CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA	64
5.3	MODELO CONSTITUTIVO	65
5.4	MODELO DE FATIAS	68
5.5	DESCRIÇÃO DAS SUB-ROTINAS	71
5.6	IMPLEMENTAÇÃO DO CRITÉRIO DE FALHA DE VON MISES	74
6	EXEMPLOS NUMÉRICOS	76
6.1	EXEMPLOS NUMÉRICOS CONSIDERANDO A ANÁLISE ELÁSTICA EM TEORIA DE 2ª ORDEM	76
6.1.1	Pilar biapoiado	76
6.1.2	Pilar engastado na base e livre no topo	79
6.1.3	Treliça plana	83
6.2	EXEMPLOS NUMÉRICOS CONSIDERANDO A ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA EM TEORIA DE 2ª ORDEM	87
6.2.1	Viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre	87
6.2.2	Viga Biapoiada com carga concentrada no meio do vão	94
6.2.3	Viga biengastada com carga concentrada a 1/3 do vão	97
6.2.4	Pilar biapoiado de Chen, Goto e Liew	102
6.2.5	Pórtico de Kanchanalai	105
6.2.6	Pórtico de um andar e um vão de Vogel	109
6.2.7	Pórtico de seis andares e dois vãos de Vogel	113
7	CONCLUSÃO	118
7.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES	118

7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	120
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	121

1 INTRODUÇÃO

O aço é um material amplamente utilizado em projetos estruturais pelas suas vantagens como resistência e durabilidade, boa ductilidade, rapidez na fabricação e montagem, além de ser um material totalmente reciclável e reutilizável. Estudos recentes baseados em softwares que utilizam análises aprimoradas fornecem resultados mais condizentes com o comportamento real das estruturas e possibilitam o dimensionamento aproveitando a maior capacidade de carga do sistema estrutural, produzindo estruturas mais otimizadas e esbeltas, minimizando custos e materiais.

Antes do advento dos computadores as análises utilizadas para estruturas de aço eram as elásticas lineares (primeira ordem). Nestas análises eram necessárias verificações posteriores com equações de interação, visto que essa técnica não avaliava adequadamente a estabilidade ou a resistência última das estruturas. Com o desenvolvimento tecnológico têm sido desenvolvidos diversos métodos de análise que combinam estabilidade e plasticidade, denominados métodos de análises avançada (SILVA, 2010).

Atualmente, a realização de um projeto estrutural de edifícios em aço tem como referência a norma brasileira NBR 8800:2008 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2008) e é dividido em duas etapas. Primeiro são determinados os esforços nas barras e nós constituintes da estrutura de acordo com sua classificação de deslocabilidade, em geral utilizando análise elástica de 2ª ordem, depois, em uma segunda etapa, é realizado o dimensionamento dos elementos e ligações. Essa dissociação entre análise e dimensionamento pode ser entendida como uma limitação, uma vez que a análise elástica é utilizada para determinar os esforços atuantes nas barras, enquanto que no dimensionamento, que é feito tratando cada barra como um elemento isolado, os esforços resistentes são obtidos atendendo a possibilidade de instabilidade e plastificação da seção transversal. Dessa forma, não há compatibilidade entre a barra como elemento isolado e a barra como elemento constituinte de um sistema estrutural (ALMEIDA, 2006; SILVA, 2010).

Nesse contexto, surge o conceito de Análise Avançada referindo-se a métodos que avaliam simultaneamente a resistência e a estabilidade de um sistema estrutural. Essa análise pode prever com bastante precisão os possíveis modos de

falha de uma estrutura, garantindo maior segurança e confiabilidade na análise e dimensionamento. Além disso, pode aproveitar a maior capacidade de carga do sistema estrutural por meio da redistribuição de esforços, produzindo estruturas mais otimizadas e esbeltas e, conseqüentemente, minimizando custos e materiais, que são valores associados ao peso, tempo e processos (VIANA, 2019).

Os métodos de Análise Avançada incluem no modelo condições próximas as reais e produzem resultados mais consistentes. Um método de Análise Avançada considera, entre outros efeitos, a teoria de 2ª ordem, a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, as imperfeições geométricas iniciais, as deformações por cisalhamento e a flexibilidade das ligações. Dessa forma, é eliminada a necessidade de verificação de cada elemento estrutural isolado por meio de calibração do método com os coeficientes de ponderação das resistências estabelecidas pelas Normas Técnicas (SILVA, R. G. L. *et al.*, 2018).

A análise do comportamento de elementos estruturais é realizada por meio da teoria clássica de Bernoulli-Euler. Nesse caso, considera-se a hipótese de que as seções transversais planas, inicialmente normais ao eixo da viga, permanecem planas, indeformáveis e normais a este eixo após a deformação, portanto, sem considerar a distorção causada pela tensão de cisalhamento. Porém, esse método demonstra-se mais apropriado para barras cujas dimensões da seção transversal são pequenas em comparação com seu comprimento (barras longas e esbeltas). Para o caso de barras curtas, em que a razão entre o comprimento e a altura da seção transversal é pequena e, principalmente, para perfis metálicos do tipo I, nos quais os elevados fatores de forma evidenciam a influência da deformação por cisalhamento, a adoção da teoria de Timoshenko passa a ser mais adequada (SILVA, 2010).

Assim, assume-se na teoria de Timoshenko que os efeitos do cisalhamento são constantes ao longo da altura da seção transversal da barra, e que as seções transversais permanecem planas após a deformação, mas não perpendiculares ao eixo da barra. Dessa forma, a teoria admite, portanto, além da deformação causada pelo momento fletor, a distorção da seção devido à força cortante.

Com relação ao escoamento do material, muitos trabalhos relacionam a superfície de escoamento com força normal e momento fletor, ignorando as influências do escoamento provocado pela tensão de cisalhamento. Nesse contexto, este trabalho apresenta uma formulação exata geometricamente e fisicamente não

linear para análise de pórticos planos de aço, incluindo os efeitos do cisalhamento aplicando a hipótese cinemática de Timoshenko e a implementação no modelo do critério de falha de von Mises, buscando capturar tanto o escoamento por flexão quanto o escoamento por cisalhamento, particularmente importante para vigas curtas. O desenvolvimento teórico leva em consideração uma rigorosa formulação Lagrangiana atualizada e a técnica corrotacional para a dedução consistente da matriz de rigidez tangencial constitutiva e geométrica do elemento com extremidade rígido-rígido, rígido-rótula e rótula-rígido. A formulação apresentada permite que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações e as barras sofram grandes alongamentos e curvaturas e, além disso, estas barras podem ser não-homogêneas, não-prismáticas, possuir tensões residuais, imperfeições iniciais e podem ser constituídas de material elastoplástico.

1.1 PERGUNTA DE PESQUISA

As considerações das deformações por cisalhamento utilizando a teoria de Timoshenko e a inclusão do modelo de von Mises como critério de falha influenciam nos resultados de deslocamentos, na resistência última e na plastificação da seção transversal dos elementos de pórticos planos de aço?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo investigar o comportamento de pórticos planos de aço considerando a influência das deformações por cisalhamento, utilizando-se os conceitos da Análise Avançada.

1.2.2 Objetivos específicos

Para alcance do objetivo geral foram definidos os objetivos específicos:

- i. Estudar a formulação geometricamente exata do elemento finito com ambas as extremidades rígidas e com uma extremidade rotulada e a outra rígida, considerando a Teoria de Timoshenko;
- ii. Desenvolver um algoritmo para a implementação do modelo de von Mises no programa computacional desenvolvido por Lavall (1996) e adaptado por Silva (2010).

- iii. Validar a implementação computacional por meio de aplicações em exemplos práticos de estruturas reticuladas planas, considerando-se os efeitos da deformação por cisalhamento e as condições de extremidades do elemento de pórtico plano.

1.3 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

As análises estruturais são realizadas para garantir que as estruturas tenham adequada segurança e desempenho nas condições de utilização, garantindo também menores custos (VIANA, 2019).

O procedimento de projeto baseado em duas etapas (determinação de esforços solicitantes e dimensionamento dos membros e ligações isoladas) acaba tendo limitações por considerar as barras como elementos isolados e não como parte de um sistema estrutural. Dessa forma, com o avanço tecnológico, os métodos de Análise Avançada, que se aproximam cada vez mais do comportamento real da estrutura, vêm sendo desenvolvidos ao longo dos anos, permitindo dimensionamentos mais seguros e eficientes (ALMEIDA, 2006; SILVA, 2010).

O portfólio bibliográfico apresentado no Capítulo 2 demonstrou que embora a literatura apresente muitas formulações de análise não linear baseadas na teoria de Timoshenko, ainda faltam métodos que considerem os efeitos de deformação por cisalhamento associados a atributos importantes que afetam o comportamento de estruturas de pórticos de aço, como as não linearidades geométricas e materiais. A não linearidade geométrica inclui efeitos de segunda ordem associados a $P-\delta$ e $P-\Delta$, e os efeitos causados por imperfeições geométricas. A não linearidade do material inclui a distribuição de escoamento ou plasticidade associada à influência de tensões residuais. Uma modelagem realista de uma estrutura de aço requer o uso desses atributos se uma resposta precisa da estrutura for desejada. O efeito da deformação por cisalhamento pode contribuir significativamente para o comportamento não linear das estruturas. Consequentemente, a teoria de Timoshenko deve ser extensivamente investigada e aplicada na análise não linear.

Dessa forma, este trabalho incorpora os efeitos causados pelo cisalhamento utilizando o modelo de Timoshenko e estabelece, para a consideração do escoamento do material, a interação entre as tensões normal e de cisalhamento considerando o modelo de von Mises.

1.4 RESTRIÇÕES E LIMITAÇÕES

A teoria geral para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considera a influência das deformações por cisalhamento no comportamento de barras de estruturas de aço por meio da hipótese cinemática da Teoria de Timoshenko. Outras hipóteses que levam em conta a influência do cisalhamento não serão consideradas.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O capítulo 2 apresenta inicialmente as conceituações sobre tipos de análise existentes, focando na Análise Elastoplástica de Segunda Ordem. Esse tipo de análise considera a plastificação na seção transversal da barra e os efeitos de 2ª ordem. Em seguida apresentada uma abordagem incluindo a degradação do material baseada no modelo de von Mises, que combina os efeitos de momento fletor e força cortante. Conceitua-se a Análise Avançada de pórticos de aço, descrevendo os atributos utilizados neste método de análise e seus efeitos no comportamento do sistema estrutural. Por fim, o capítulo discorre sobre pesquisas realizadas considerando métodos de análise avançada.

No capítulo 3 apresenta-se a formulação numérica de um elemento finito com condições de extremidade rígido-rígido, rígido-rótula e rótula-rígido, considerando a hipótese de Timoshenko e a distribuição da plasticidade. O desenvolvimento teórico é feito dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana, que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente da matriz de rigidez tangente do elemento de pórtico plano. Uma descrição mais detalhada da formulação apresentada pode ser obtida no trabalho de Silva (2010). O capítulo 4 discorre sobre os métodos e procedimentos para atingir o objetivo proposto.

O capítulo 5 descreve brevemente os aspectos de implementação da formulação descrita no programa computacional PPLANLEP desenvolvido por Lavall (1996) e adaptado por Silva (2010). Apresenta-se também as sub-rotinas que executam os procedimentos para a análise elastoplástica em segunda ordem de pórticos planos de aço. O capítulo também apresenta a implementação do critério de falha por von Mises e as alterações realizadas no código existente. O capítulo 6 apresenta os exemplos numéricos que serão utilizados para validação da formulação apresentada. Finalmente, no capítulo 7 são apresentadas as considerações finais, as conclusões do trabalho, além de sugestões para trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

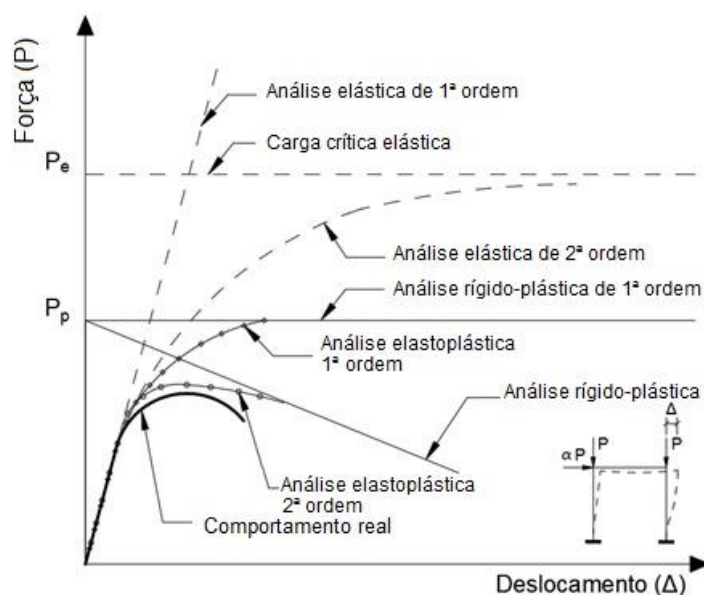
Este capítulo irá apresentar conceitos relevantes ao desenvolvimento do trabalho, discutindo os tipos de análises usuais focando na Análise Avançada de pórticos de aço, descrevendo os atributos utilizados neste método de análise e seus efeitos no comportamento do sistema estrutural. Uma abordagem levando-se em conta a influência da força cortante na plastificação da barra baseada no modelo de von Mises é apresentada. Além disso, o capítulo discorre sobre o estado da arte relacionada à análise estrutural de pórticos de aço.

2.1 TIPOS DE ANÁLISE

As análises estruturais podem ser de primeira ou de segunda ordem, e elásticas ou elastoplásticas. As análises em primeira ordem consideram o equilíbrio da estrutura na sua posição indeslocada enquanto que, as análises em segunda ordem consideram o equilíbrio da estrutura na sua posição deslocada. As análises elásticas estão relacionadas à aplicabilidade da Lei de Hooke que estabelece a proporcionalidade entre tensões e deformações. Já as análises elastoplásticas consideram a não linearidade do material devido aos efeitos de dissipação de energia causados pelo processo de degradação ou plastificação do material.

A Figura 1 mostra a curva *força x deslocamento lateral* para um pórtico rígido submetido a cargas estáticas para diferentes tipos de análise.

Figura 1 - Comportamento força x deslocamento dos vários tipos de análise



Fonte: SILVA, 2010

2.1.1 Análise elástica de primeira ordem

Neste tipo de análise o equilíbrio da estrutura é formulado segundo sua geometria inicial, ou seja, na sua posição indeslocada e o material é modelado como elástico linear. Esta análise considera a hipótese de pequenos deslocamentos e a elasticidade do material sendo válido o princípio da superposição dos efeitos. Também conhecida como análise elástica linear, a análise não fornece informações sobre a influência da plasticidade e da estabilidade no comportamento da estrutura.

2.1.2 Análise elástica de segunda ordem

Na análise elástica de segunda ordem o equilíbrio é formulado com a estrutura em sua posição deslocada, porém o material ainda é elástico linear. Como ilustrado na Figura 1, a curva *força x deslocamento lateral* tende assintoticamente para a carga crítica elástica (P_e) da estrutura. Essa análise inclui os efeitos da instabilidade elástica, porém não fornece informações sobre os efeitos da plasticidade do material no comportamento do pórtico.

2.1.3 Análise elastoplástica de primeira ordem

Na análise elastoplástica de primeira ordem o equilíbrio é verificado com a geometria indeslocada da estrutura e considera-se a não linearidade do material. Pode-se observar na Figura 1 que, para o caso de um material elastoplástico perfeito, a resposta da curva *força x deslocamento lateral* de uma análise elastoplástica de primeira ordem aproxima assintoticamente da carga limite plástica (P_p).

2.1.4 Análise elastoplástica de segunda ordem

Neste tipo de análise o equilíbrio da estrutura é realizado na sua forma deslocada e se considera a não linearidade física do material. Essa análise não linear geométrica e do material possibilita a obtenção de valores de cargas limites mais próximos do comportamento real de um pórtico conforme pode ser verificado na Figura 1.

Nas análises elastoplásticas, de primeira ou segunda ordem, os efeitos do escoamento do material são considerados empregando-se desde os modelos mais simples de rótulas plásticas até modelos mais detalhados que consideram a propagação da plastificação no interior das barras.

Método da Rótula Plástica

O Método da Rótula Plástica (MRP) pode ser classificado em duas abordagens: o primeiro, denominado de Método da Rótula Plástica (MRP) e o segundo, de Método da Rótula Plástica Refinada (MRPR). Normalmente, esses modelos utilizam um elemento de viga-pilar para cada barra do pórtico, assumindo que os mesmos permaneçam elásticos exceto nas suas extremidades, onde as rótulas plásticas de comprimento nulo se formam. Assim, quando a seção do elemento atinge a resistência plástica forma-se uma articulação, ocorrendo uma redistribuição de forças antes que o mecanismo de colapso seja atingido. Esse método determina a sequência de formação das rótulas plásticas, o fator de carga associado a cada rótula e a variação do momento fletor nas barras entre cada rótula formada, além de permitir o cálculo aproximado dos deslocamentos durante a história do carregamento. Porém, essa abordagem não inclui os efeitos das imperfeições geométricas e das tensões residuais na análise e não representa a diminuição da rigidez causada pelo espalhamento do escoamento na barra especialmente para membros espessos e na análise de pórticos com múltiplos andares e grandes cargas axiais nos pilares, superestimando a resistência das barras (FOLEY; VINNAKOTA, 1997; KIM et al., 2004).

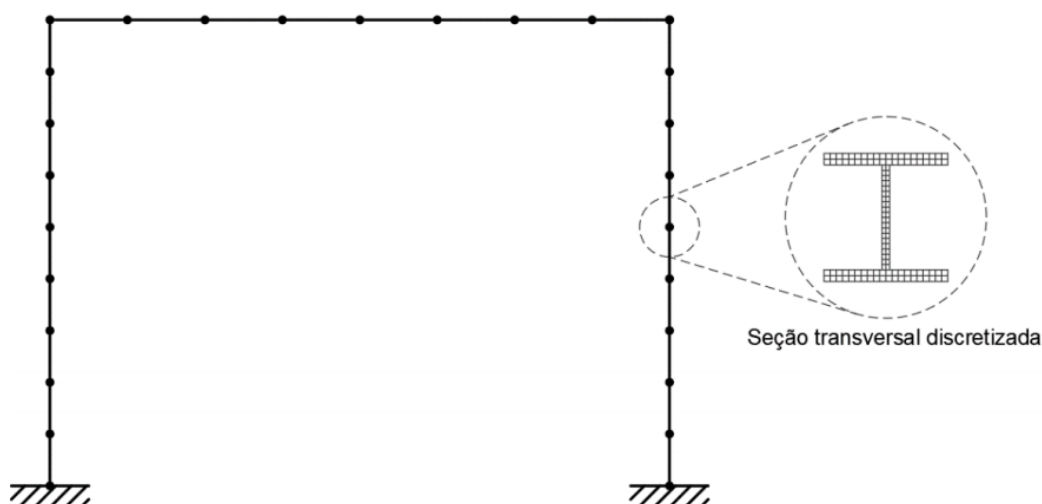
No Método da Rótula Plástica Refinada, modificações são realizadas no Método da Rótula Plástica possibilitando a avaliação da degradação gradual da rigidez da seção e da barra entre duas rótulas plásticas. O método utiliza o conceito de módulo tangente para capturar os efeitos das tensões residuais ao longo do elemento. Já os efeitos de segunda ordem associados com a instabilidade (efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$) são calculados usando-se funções de estabilidade ou por formulação Lagrangiana, que utiliza técnica corrotacional para deduzir as matrizes de rigidez (NGO-HUU; NGUYEN; KIM, 2012; SILVA, A. R.; PRADO; SILVEIRA, 2013)

Formulações baseadas no método da rótula plástica são apresentadas por White (1993), Ngo-Huu, Nguyen e Kim (2012), Bozzo e Gambarotta (1985). Trabalhos como o de Gizejowski et al. (2006) apresentam ambas as metodologias de rótula plástica e rótula plástica refinada, possibilitando discussão à cerca das mesmas. As pesquisas de King, White e Chen (1992), Richard Liew, White e Chen (1993), Kim e Chen (1998), White e Hajjar (2000), Gizejowski et al. (2004), Yun e Kim, (2005) e Landesmann e Batista (2005) utilizam os métodos da rótula plástica refinada.

Método da Zona Plástica ou Plasticidade Distribuída

Esse método é considerado o mais preciso e possibilita a avaliação da distribuição gradual da plasticidade no volume do elemento. As barras do pórtico são discretizadas em vários elementos finitos e a seção transversal divididas em fatias conforme ilustra a Figura 2. A distribuição da plasticidade pode ser captada pelo cálculo do estado de tensões em cada fatia. É um método considerado “exato” de Análise Avançada, por eliminar a necessidade de verificação das barras de forma isolada (SILVA, 2010; VIANA, 2019).

Figura 2 - Discretização no Método de Zona Plástica



Fonte: VIANA, 2019

Pode-se identificar trabalhos que utilizam o método da zona plástica em Clarke et al. (1992), Lavall (1996), Foley e Vinnakota (1997), Foley e Schinler (2003), Almeida (2006), Silva e Silva (2014), Silva (2010), Alvarenga (2020) e Viana (2019).

2.2 INFLUÊNCIA DA FORÇA CORTANTE NA PLASTIFICAÇÃO DE BARRAS

Considere um elemento estrutural com seção transversal A qualquer submetido à flexão simples e representado por várias fibras horizontais. As fibras inferiores do material encontram-se tracionadas, enquanto as fibras superiores estão comprimidas. O escoamento se inicia nas fibras mais externas do elemento quando a tensão atuante alcança a tensão de escoamento sob a ocorrência do momento de escoamento M_y . Ao ultrapassar o valor de M_y , o escoamento passa a espalhar-se pelas fibras mais interiores da seção transversal. O momento plástico M_p é atingido

quando todas as fibras da seção se encontram escoadas. Este processo de escoamento gradual das fibras, causando mudanças nas tensões suportadas por elas devido ao incremento de carga e, conseqüentemente, ao aumento do momento fletor, é denominado plastificação.

De forma geral, M_p é assumido constante para uma determinada barra, baseado na distribuição de tensão plástica, que leva ao valor de momento plástico $Z_p \sigma_0$, produzindo resultante somente de momento fletor, sendo Z_p o módulo plástico e σ_0 a resistência ao escoamento do material. Porém, uma barra pode resistir às forças normal e de cisalhamento. Dessa forma, distribuições mais complexas que consideram os efeitos desses esforços irão reduzir o valor do momento plástico $Z_p \sigma_0$.

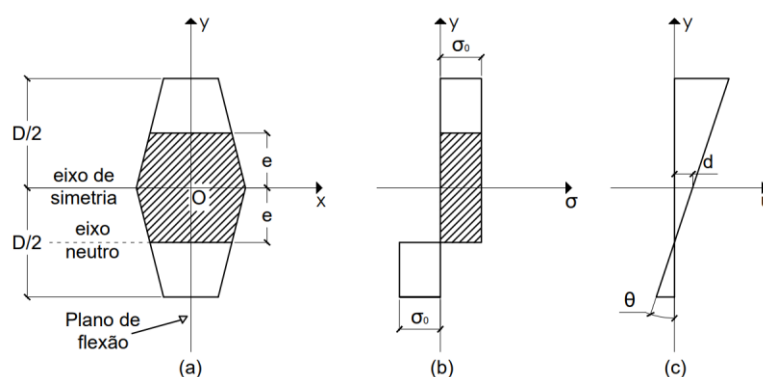
Esta seção apresenta, de forma sucinta, os efeitos causados pela força normal e, detalhadamente, os efeitos causados pelo cisalhamento, escopo deste trabalho.

2.2.1 Efeitos de força normal

O efeito de força normal no momento plástico é apresentado em Neal (1985) e será feito considerando uma viga com seção transversal com dois eixos de simetria e com plano de flexão coincidente com um desses eixos, conforme ilustra a Figura 3(a). Assume-se que a superfície neutra é plana e perpendicular ao plano de flexão.

Suponha-se que atue uma força axial de tração N e que, na plasticidade completa, o momento que seria M_p , na ausência de força normal, é reduzido à M_N . A distribuição de tensão é mostrada na Figura 3(b). O eixo neutro é deslocado em uma distância e do eixo de simetria e assume-se inicialmente que $e < D/2$, de forma que, o eixo neutro permaneça dentro da seção transversal.

Figura 3 - Força normal combinada com momento fletor: (a) Seção transversal; (b) Distribuição de tensão plástica completa, $e < D/2$; (c) Deslocamentos normais.



Fonte: NEAL, 1985

A área sombreada entre $y = \pm e$ é submetida a uma tensão de tração uniforme. Dessa forma, esta distribuição apresenta uma força normal resultante localizada no centroide O da seção transversal. As duas áreas não sombreadas estão submetidas à tensão de mesma intensidade, mas de sinais opostos. A área sombreada, chamada de A_e , pode ser considerada como a região responsável por suportar a força normal N , de modo que:

$$N = A_e \sigma_0 \quad (2.1)$$

O valor da força normal que causaria a plastificação completa na ausência de momento fletor, é definida como N_p , que é a força axial correspondente ao escoamento da seção transversal. Se a área total da seção transversal é A , N_p é dado por:

$$N_p = A \sigma_0 \quad (2.2)$$

de forma que:

$$n = \frac{N}{N_p} = \frac{A_e}{A} \quad (2.3)$$

O efeito de N é reduzir o momento plástico pelo valor de $(M_p)_e$, que seria contribuído pela área sombreada na ausência de qualquer força normal. Definindo $(M_p)_e = (Z_p)_e \sigma_0$, e lembrando que $M_p = Z_p \sigma_0$ tem-se:

$$M_N = M_p \left[1 - \frac{(Z_p)_e}{Z_p} \right] \quad (2.4)$$

Este resultado também é válido para força normal de compressão devido à simetria dupla.

A Figura 3(c) mostra o deslocamento normal u na rótula plástica. A rotação θ acontece em torno do eixo neutro, que é distância e abaixo do eixo de simetria Ox . Assim, no eixo de simetria existe um deslocamento axial d correspondente à N , além da rotação θ correspondente à M_N , onde:

$$d = e\theta \quad (2.5)$$

A rótula pode assim ser denominada complexa, sendo o trabalho absorvido W igual a:

$$W = M_N \theta + Nd \quad (2.6)$$

Assumindo agora que e excede $D/2$, os deslocamentos são todos de tração e com distribuição de tensão normal conforme a Figura 4 a seguir. Nesta situação, a

força normal é agora N_p e o momento fletor é zero e o trabalho absorvido é simplesmente:

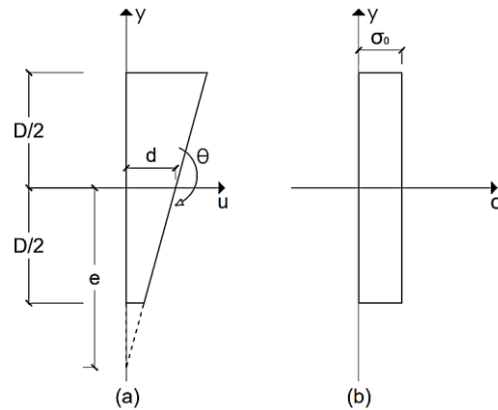
$$W = N_p d \quad (2.7)$$

No entanto, no eixo de simetria ocorre o deslocamento axial d correspondente à N_p , e a Equação (2.5) se mantém. Como $e \geq D/2$, segue-se que:

$$\theta \leq \frac{2d}{D} \quad (2.8)$$

e, apesar do fato do momento ser zero, a rótula continua complexa, com a rotação θ de qualquer magnitude de acordo com a Equação (2.8).

Figura 4 - Força normal combinada com momento fletor: (a) Deslocamento normal, $e \geq D/2$; (b) Distribuição de tensão plástica completa.



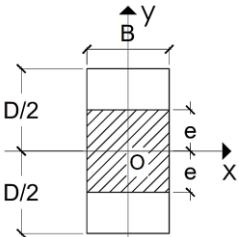
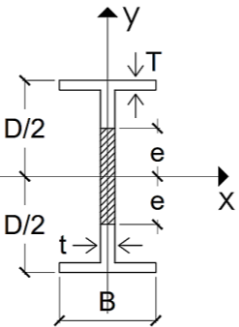
Fonte: NEAL, 1985

Análises similares são realizadas para determinar a redução do momento plástico para outros formatos de seção transversal. A Tabela 1 apresenta as equações de momento reduzido desenvolvidas por Neal (1985) para as seções retangular e em I, cujos módulos plásticos são dados, respectivamente, pelas Equações (2.9) e (2.10):

$$Z_p = \frac{1}{4} B D^2 \quad (2.9)$$

$$Z_p = B T (D - T) + \frac{1}{4} t (D - 2T)^2 \quad (2.10)$$

Tabela 1 - Formulação para momento reduzido M_N

Seção	Relação $n = A_e/A$	Momento reduzido M_N
	$n = \frac{2e}{D}$	$M_N = M_p (1 - n^2)$
	$e < \frac{D}{2} - T \quad n = \frac{2et}{A}$ $e > \frac{D}{2} - T \quad n = \frac{(D-2T)t + 2B \left[e - \left(\frac{D}{2} - T \right) \right]}{A}$	$M_N = M_p (1 - kn^2)$ $M_N = M_p \cdot k \cdot \frac{t}{B} (1 - n) \left[\frac{2BD}{A} - 1 + n \right]$

Fonte: Adaptado de NEAL, 1985

Sendo k uma relação estabelecida entre $(Z_p)_e$ e Z_p , dado por:

$$k = \frac{A^2}{4tZ_p} \quad (2.11)$$

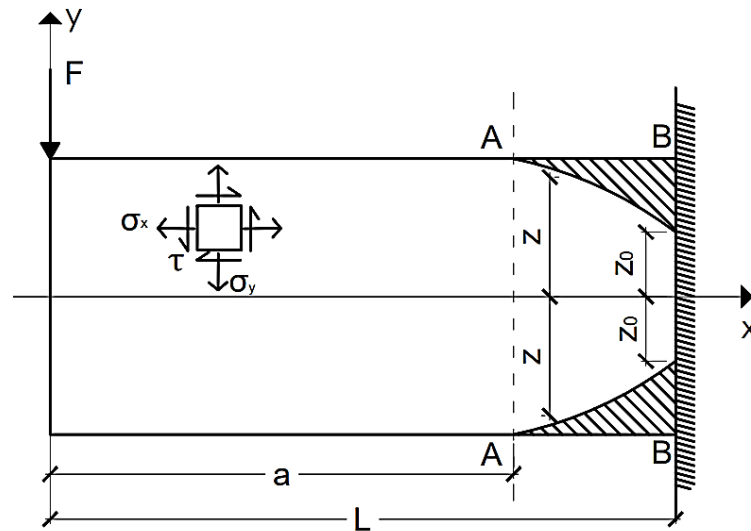
2.2.2 Efeito de força cortante

Esta seção apresenta o desenvolvimento analítico da redução do momento plástico M_p considerando a influência da tensão de cisalhamento para seções retangulares e I, conforme apresentado por Neal (1985).

2.2.2.1 Seções transversais retangulares

Considere uma viga em balanço com seção retangular de largura B e altura D , submetida a uma força de extremidade F , conforme mostra a Figura 5. O comprimento da viga é L e o momento atuante na extremidade fixa é dado por FL . O valor de M_F será determinado considerando-se a plasticidade completa e o resultado será comparado com o valor do momento plástico, $M_p = (BD^2\sigma_0)/4$, na ausência do cisalhamento.

Figura 5 - Zona plástica para balanço com seção transversal retangular.



Fonte: NEAL, 1985

Conforme mostrado na Figura 5, assume-se que o balanço é completamente elástico à esquerda da seção AA. Nesta seção, a tensão normal σ_x atinge a tensão de escoamento σ_0 somente nas fibras mais externas. À direita da seção AA as zonas de escoamento acontecem respeitando a teoria simples de flexão, em que os efeitos de cisalhamento não são considerados. Nas zonas plásticas o estado de tensão é: $\sigma_x = \pm \sigma_0$, $\sigma_y = 0$, $\tau = 0$.

Uma vez que $\tau = 0$ nas zonas de escoamento, a força cortante F deve ser suportada inteiramente pela tensão de cisalhamento no núcleo elástico de altura $2z$. À medida que z diminui, a magnitude dessas tensões de cisalhamento deve aumentar, de modo que na seção BB, o escoamento deve ocorrer dentro do núcleo. A análise que se segue visa determinar as distribuições de tensões estaticamente admissíveis ao longo da viga que são seguras de modo que o critério de escoamento não seja violado, mas seja atendido apenas na seção crítica BB.

O critério de von Mises será utilizado. Para a condição de tensão plana, tem-se:

$$\phi = [\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau^2]^{1/2} \leq \sigma_0 \quad (2.12)$$

A tensão de escoamento para o cisalhamento puro de acordo com esse critério é $\sigma_0/\sqrt{3}$.

As duas equações de equilíbrio são:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

Na parte elástica da viga $x \leq a$, $\sigma_y = 0$ e σ_x varia linearmente ao longo da seção em concordância com a teoria simples de flexão elástica, de modo que:

$$\sigma_x = \frac{12Fxy}{D^3B} \quad (2.15)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (2.16)$$

A solução para as Equações (2.13) e (2.14) tendo em mente que $\tau = 0$ quando $y = \pm D/2$ é:

$$\tau = \frac{3F}{2BD} \left[1 - \left(\frac{2y}{D} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

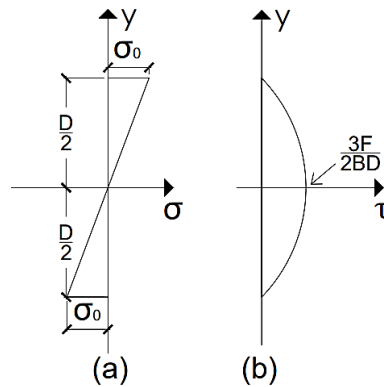
Na seção AA, onde $x = a$, $\sigma_x = \sigma_0$ quando $y = D/2$, a Equação (2.15) torna-se:

$$\sigma_0 = \frac{6Fa}{D^2B}$$

$$Fa = M_y = \frac{1}{6}BD^2\sigma_0 \quad (2.18)$$

A distribuição das tensões σ_x e τ ao longo da seção AA é mostrada na Figura 6. Assume-se que, para $x \leq a$, a tensão de cisalhamento não excede a tensão de escoamento no cisalhamento puro ($\tau \leq \sigma_0/\sqrt{3}$), de modo, considerando-se a Equação (2.17) tem-se que:

Figura 6 - Distribuição de tensão para a viga em balanço com seção transversal retangular: (a) Distribuição de σ_x na seção AA; (b) Distribuição de τ na seção AA.



Fonte: NEAL, 1985

$$\frac{3F}{2BD} \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

$$F \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} BD\sigma_0 \quad (2.19)$$

A força de cisalhamento na plastificação F_p é definida como a força de cisalhamento correspondente ao desenvolvimento da tensão de escoamento no cisalhamento puro sobre toda seção transversal:

$$F_p = \frac{1}{\sqrt{3}} BD\sigma_0 \quad (2.20)$$

Desta condição junto com a Equação (2.19) tem-se a relação:

$$f = \frac{F}{F_p} \leq \frac{2}{3} \quad (2.21)$$

Para situação limite, em que a Equação (2.19) torna-se uma igualdade, a situação na seção AA é:

$$\sigma_x = \sigma_0 \left(\frac{2y}{D} \right) \quad (2.22)$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{2y}{D} \right)^2 \right] \quad (2.23)$$

E, substituindo essas relações no critério de escoamento da Equação (2.12), tem-se:

$$\phi = \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{2y}{D} \right)^2 + \left(\frac{2y}{D} \right)^4 \right]^{1/2} \quad (2.24)$$

Nota-se que $\phi \leq \sigma_0$ para $-D/2 \leq y \leq D/2$, demonstrando que essa distribuição de tensão é segura.

Avaliando agora a parte elastoplástica da viga, ou seja, para $x \geq a$, assume-se que no núcleo elástico a tensão σ_x ainda varia linearmente com y , de modo que:

$$\sigma_x = \sigma_0 \left(\frac{y}{Z} \right) \quad (2.25)$$

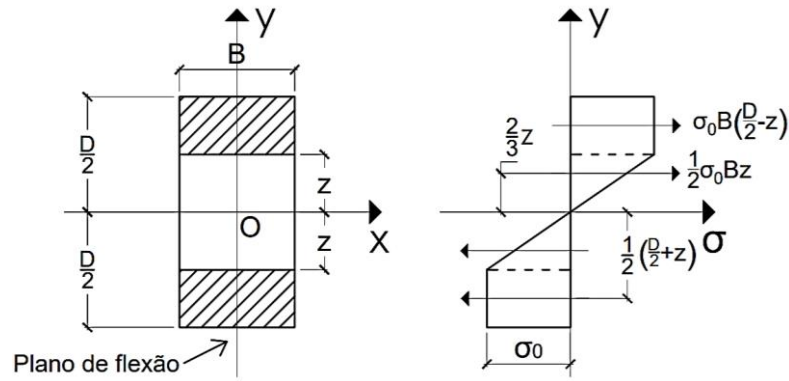
Já na zona plástica, $\sigma_x = \pm\sigma_0$, enquanto τ e σ_y são zero. Seguindo a teoria simples de flexão elastoplástica (Figura 7), o momento fletor é dado por:

$$M = Fx = B \left[\frac{D^2}{4} - \frac{1}{3} z^2 \right] \sigma_0 \quad (2.26)$$

de modo que:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{3F}{2Bz\sigma_0} \quad (2.27)$$

Figura 7 - Distribuição elastoplástica da tensão σ_x para seção transversal retangular.



Fonte: Elaborado pelo autor

Utilizando este resultado com o resultado da Equação (2.25), a solução de equilíbrio das Equações (2.13) e (2.14) são:

$$\tau = \frac{3F}{4Bz} \left[1 - \left(\frac{y}{z} \right)^2 \right] \quad (2.28)$$

$$\sigma_y = - \frac{9F^2}{8B^2 z^2 \sigma_0} \left(\frac{y}{z} \right) \left[1 - \left(\frac{y}{z} \right)^2 \right] \quad (2.29)$$

A distribuição de tensão definida pelas Equações (2.25), (2.28) e (2.29) é estaticamente admissível. Assume-se agora que a condição crítica é encontrada na seção BB, onde $z = z_0$ devido à τ atingir $\sigma_0/\sqrt{3}$ em $y = 0$, de modo que:

$$\frac{3F}{4Bz_0} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (2.30)$$

A distribuição de tensão nesta seção torna-se então:

$$\sigma_x = \sigma_0 \left(\frac{y}{z_0} \right) \quad (2.31)$$

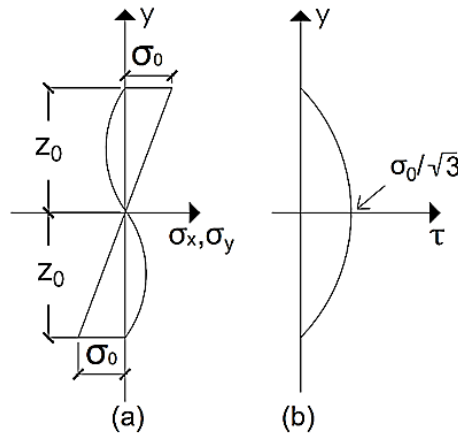
$$\tau = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[1 - \left(\frac{y}{z_0} \right)^2 \right] \quad (2.32)$$

$$\sigma_y = - \frac{2}{3} \sigma_0 \left(\frac{y}{z_0} \right) \left[1 - \left(\frac{y}{z_0} \right)^2 \right] \quad (2.33)$$

Essas distribuições são mostradas na Figura 8 a seguir. Substituindo essas relações no critério de escoamento da Equação (2.12):

$$\phi = \left\{ 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{y}{z_0} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{y}{z_0} \right)^2 \right] \left[1 - 4 \left(\frac{y}{z_0} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \sigma_0 \quad (2.34)$$

Figura 8 - Distribuição de tensão para balanço com seção transversal retangular: (a) Distribuição de σ_x e σ_y na seção BB; (b) Distribuição de τ na seção BB.



Fonte: NEAL, 1985

Para o intervalo de $-z_0 \leq y \leq z_0$, ϕ apresenta valor máximo de $1,003\sigma_0$ quando $y = \pm 0,34z_0$, de modo que o critério de escoamento não é atendido. Porém, desde que a violação não ultrapasse 3%, a distribuição de tensão é aceitável como segura e estaticamente admissível. Pode-se então verificar que BB é de fato a seção mais crítica, como esperado.

O valor de M_F é então determinado da Equação (2.26) com z tendo o valor de z_0 definido pela Equação (2.30). Usando a Equação (2.20) tem-se:

$$M_F = M_p (1 - 0,75f^2) \quad (2.35)$$

Essa equação é uma relação de interação entre M_F/M_p e f , e está sujeita à limitação dada pela Equação (2.21), ou seja, f não pode exceder $2/3$. Caso f assumisse esse valor, a Equação (2.35) mostra que $M_F = 2M_p/3 = M_y$ e com a Equação (2.30) encontra-se que $z_0 = D/2$. Isto mostra que as seções AA e BB mostrada na Figura 5 coincidem e o comprimento da viga é “a” que é encontrado a partir da Equação (2.18) sendo $D\sqrt{3}/4 = 0,433D$. Dessa forma, a condição $f \leq 2/3$ é equivalente à relação $L/D \geq 0,433$.

Neal (1985) menciona também um estudo detalhado realizado por Horne (1951), em que o crescimento da zona central de escoamento na vizinhança da seção BB é considerado. Obtém-se o resultado semelhante ao obtido pela Equação (2.35), diferindo apenas nos valores das constantes numéricas:

$$M_F = M_p (1 - 0,44f^2), \quad f \leq 0,79 \quad (2.36)$$

2.2.2.2 Seção I fletida no eixo de maior inércia

Para seção I fletida em relação ao eixo de maior inércia, assume-se que a força de cisalhamento é suportada apenas pela alma. Dessa forma, se a área da alma é A_w , a força de cisalhamento de plastificação utilizando o critério de von Mises é dada por:

$$F_p = \frac{1}{\sqrt{3}} A_w \sigma_0 \quad (2.37)$$

O momento plástico para viga com seção I sobre o eixo de maior inércia na ausência de cisalhamento, constituída por um par de mesas com largura B e espessura T , e por uma alma com altura $D-2T$ e espessura t , é dado por:

$$M_p = \left[BT(D-T) + \frac{1}{4} t(D-2T)^2 \right] \sigma_0 \quad (2.38)$$

Negligenciando T em comparação à D , simplifica-se sendo:

$$M_p = \frac{1}{4} D [2A_f + A_w] \sigma_0 \quad (2.39)$$

Na Equação (2.39) a primeira parcela representa a contribuição das mesas com a área total A_f e o segundo a contribuição da alma de área A_w .

A fim de simplificar o problema, considera-se que o momento da mesa não é afetado pelo cisalhamento e modifica-se o momento da alma de forma semelhante à realizada para seções retangulares. Usando o resultado apresentado pela Equação (2.36) tem-se:

$$M_F = \frac{1}{2} D A_f \sigma_0 + \frac{1}{4} D A_w \sigma_0 (1 - 0,44 f^2)$$

$$M_F = M_p \left[1 - 0,44 \left(\frac{A_w}{2A_f + A_w} \right) f^2 \right]; \quad f \leq 0,79 \quad (2.40)$$

Neal (1985) também apresenta uma relação empírica, dada pela Equação (2.41), mas afirma a necessidade de estudos que investiguem formulações de limites inferiores e superiores e novas configurações de cargas para avaliar as possibilidades de utilização:

$$M_F = M_p \left\{ 1 - \left(\frac{A_w}{2A_f + A_w} \right) \left[1 - (1 - f^2)^{1/2} \right] \right\}; \quad f \leq 1 \quad (2.41)$$

O item 2.2 teve como objetivo mostrar que a capacidade de momento plástico de uma seção é significativamente afetada não apenas pelas as forças axiais, mas também pelas forças de cisalhamento.

2.3 ANÁLISE AVANÇADA – ESTADO DA ARTE

Diversos métodos de análise foram desenvolvidos ao longo do tempo e podem ser divididos em dois grupos distintos, do ponto de vista da análise geométrica, linear ou não linear (de primeira ou segunda ordem), e em outros dois grupos com relação ao material linear e não linear (elástica ou elastoplástica). Antes do advento dos computadores, as análises elásticas de primeira ordem eram mais comumente utilizadas. Essa metodologia pode levar a resultados imprecisos com relação a estabilidade e resistência última da estrutura, sendo necessário verificações complementares utilizando equações de interação. Com a evolução tecnológica, novas metodologias de análise têm propiciado o desenvolvimento de formulações teóricas rigorosas e consistentes, segundo a filosofia da Análise Avançada.

A Análise Avançada é um método de análise que, de forma adequada, avalia simultaneamente a resistência e a estabilidade de um sistema estrutural como um todo. Esse tipo de análise consiste em introduzir no modelo numérico e nas formulações diversos fatores considerados relevantes na análise da estrutura como, principalmente, os efeitos não lineares decorrentes da plastificação da barra, os efeitos de 2ª ordem ($P-\Delta$ e $P-\delta$), a deformação por cisalhamento, a flexibilidade das ligações, as imperfeições geométricas e as tensões residuais. Essa análise pode prever com bastante precisão os possíveis modos de falha de uma estrutura, apresentar um nível mais uniforme de segurança e proporcionar um maior índice de confiabilidade na análise e dimensionamento, ao se utilizar adequadamente os fatores de combinação das ações e os coeficientes de ponderação das resistências. Esse capítulo tem como objetivo apresentar o estado da arte acerca das evoluções dos métodos de análise avançada de pórticos de aço.

Foley e Vinnakota (1997) desenvolveram um procedimento de elemento finito baseado em um modelo de fibras para captar a distribuição da plasticidade na seção transversal, incorporando também as tensões residuais, a flexibilidade das ligações modeladas por meio de curva quadrilinear de momento-rotação e as não linearidades geométricas. Para traçar a resposta não linear dos pórticos planos de aço, a teoria de Bernoulli-Euler foi utilizada para solucionar as equações incrementais de equilíbrio.

Kim e Chen (1998) apresentaram uma formulação para análise avançada utilizando o método da rótula plástica refinada. O método, implementado em

FORTAN, incluiu em suas análises os efeitos de segunda ordem por meio de funções de estabilidade, o escoamento gradual devido à tensão residual fazendo a redução do módulo de elasticidade da seção transversal baseado em equações de resistência para colunas proposta pelo CRC e a degradação da rigidez associada à flexão, além das imperfeições geométricas modeladas de forma explícita, por carga equivalente ou por redução do módulo tangente. Um método semelhante foi desenvolvido por Kim *et al.* (2004). Os autores apresentaram um modelo de rótula plástica para a análise elastoplástica de segunda ordem de pórticos sujeitos a cargas distribuídas. O conceito de “nó móvel” foi utilizado para identificar a região de momento máximo no elemento e localizar a posição de formação da rótula plástica.

Os autores Lu e Bradford (2012a) desenvolveram uma formulação para análise elástica de segunda ordem utilizando funções de deslocamento de quarta ordem para simular o comportamento de curvatura do elemento, sendo implementado utilizando uma formulação Lagrangiana atualizada. Este trabalho foi complementado pelos mesmos autores (2012b) incluindo a não linearidade do material com abordagem de rótula plástica refinada, que permitiu capturar o escoamento gradual com inserção de tensões residuais.

Ngo-Huu, Nguyen e Kim (2012) apresentaram um modelo para análise elastoplástica de segunda ordem para pórticos espaciais de aço. Os autores consideraram apenas um elemento de comprimento nulo nas extremidades do elemento finito com três molas translacionais e três rotacionais para simular a rigidez da ligação. Os efeitos de segunda ordem foram incluídos por funções de estabilidade e a inserção da tensão residual e da imperfeição geométrica foi considerada pela redução do módulo tangente.

Na mesma linha, Nguyen e Kim (2014) propuseram um método de análise para pórticos tridimensionais incluindo as não linearidades geométrica, do material e das ligações. A propagação da plasticidade foi desenvolvida por meio de um modelo de fibras relacionando tensão e deformação para cada uma delas. O comportamento das ligações também foi considerado por meio de modelos analíticos.

Saritas e Koseoglu (2015) apresentaram um modelo para captura do comportamento cíclico de ligações semirrígidas baseado em rotação quadrilinear. O método também incorporou a não linearidade geométrica e a distribuição da plasticidade utilizando subdivisão da seção transversal em fatias. Somente um elemento por membro estrutural foi considerado, evitando a discretização do sistema

em vários elementos finitos conforme o método de Zona Plástica. As tensões residuais e as imperfeições geométricas não foram incluídas na análise. A formulação foi baseada na teoria de viga de Timoshenko e o escoamento foi determinado considerando a interação entre a tensão normal e a tensão de cisalhamento nas seções transversais de vigas longas e curtas de aço.

Os trabalhos de Kucukler, Gardner e Macorini (2014, 2016) e Kucukler e Gardner (2018) utilizaram uma abordagem diferente para análise elastoplástica de segunda ordem. Os autores propuseram formulações para determinação de fatores, utilizados para reduzir a rigidez dos membros que compõem o sistema estrutural sujeitos à força axial ou momento fletor, bem como a combinação de ambos. Essas formulações incluíram os efeitos causados por imperfeições geométricas iniciais e pelas tensões residuais. Para aplicação dos fatores torna-se necessário a utilização de software auxiliar baseado em elementos finitos que inicialmente procede uma análise elástica de primeira ordem. Com as informações de esforços obtidos dessa análise, os fatores de redução de rigidez são determinados para cada membro do sistema estrutural, sendo então aplicado em cada elemento para reduzir sua rigidez flexional. A partir dessa redução, o mesmo software procede uma análise geometricamente não linear com rigidez reduzida para que sejam incluídos os efeitos de segunda ordem.

Chiorean e Marchis (2017) apresentaram um novo método computacional para análise elastoplástica não linear de pórticos de aço compostos por barras não prismáticas. A formulação do elemento proposto combina a abordagem de séries de potência para obter a solução geral dos momentos fletores de segunda ordem com o método Maxwell-Mohr para calcular a relação força-deslocamento do elemento genérico de viga-pilar contínuo e não prismático de Timoshenko-Euler.

Rezaiee-Pajand e Gharaei-Moghaddam (2017) apresentaram um elemento 2D de viga de Timoshenko para análise de pórticos planos formulado utilizando os princípios variacionais e o método da força. A formulação considerou as não linearidades geométricas e do material, a interação do momento fletor e da força axial, além de remover os problemas relacionados ao travamento por força cortante.

No Brasil, pode-se citar o trabalho de Silva, Prado e Silveira (2013) que implementaram uma ferramenta computacional para análise avançada estática e dinâmica de pórticos planos de aço baseado em elemento finito de viga-pilar e no método da rótula plástica refinada. O software, chamado de CS-ASA, possibilita a

consideração dos efeitos de segunda ordem, a flexibilidade da ligação, o comportamento elastoplástico do material e a inclusão dos efeitos de cisalhamento pela hipótese de Timoshenko. As ligações semirrígidas foram simuladas utilizando elementos de mola. Gonçalves et al. (2019) implementaram, no mesmo software, uma formulação para análise elastoplástica de segunda ordem de pilares de aço submetidos a flexão em relação ao eixo de menor inércia. Os autores utilizaram a abordagem da rótula plástica refinada e a redução do módulo tangente para captar o escoamento devido às tensões residuais e às imperfeições geométricas.

O software para análise não linear de pórticos desenvolvido por Silva e Silva (2014) foi baseado no elemento de viga de Timoshenko para capturar as deformações por cisalhamento. Os autores utilizaram o método da plasticidade distribuída para incluir o escoamento do material, considerando o modelo de von Mises com encruamento isotrópico. Além disso, as matrizes de rigidez foram obtidas utilizando uma formulação corrotacional, que se mostrou bastante eficiente para capturar grandes deslocamentos e rotações. Também, puderam verificar a redução da capacidade de carga do sistema estrutural ao considerar a análise elastoplástica.

Silva et al. (2018) desenvolveram um modelo de elementos finitos para análise elastoplástica de segunda ordem de pórticos planos de aço. O modelo considerou a propagação da plastificação na seção transversal e ao longo do comprimento da barra, as distribuições de tensões residuais, as imperfeições geométricas, as deformações por cisalhamento baseadas na teoria de Timoshenko e os efeitos de segunda ordem $P-\Delta$ e $P-\delta$. Os autores utilizaram uma formulação lagrangiana atualizada e a técnica corrotacional para a dedução consistente da matriz de rigidez tangente do elemento. A plasticidade foi considerada com relação à tensão normal, não incorporando a relação entre σ_x e τ_{xy} . Os exemplos apresentados pelos autores comprovaram a precisão da formulação desenvolvida.

Vale ressaltar que, somente os trabalhos de Saritas e Koseoglu (2015) e de Silva e Silva (2014) consideraram a relação entre a tensão normal e a tensão de cisalhamento no escoamento da seção nos elementos de aço, sendo possível identificar uma lacuna nesse sentido. Dessa forma, o presente trabalho irá implementar, no software desenvolvido por Silva et al. (2018), o modelo de von Mises para considerar a interação das tensões normal e de cisalhamento na plastificação das seções transversais.

3 FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS DE AÇO

Essa seção apresenta, de forma sucinta, a formulação para análise não linear de pórticos planos de aço pelo método de elementos finitos. O modelo é descrito detalhadamente em Silva (2010) e implementado no software PPLANLEP. A formulação é baseada no modelo de viga de Timoshenko em que as seções transversais permanecem planas após a deformação, mas não mais perpendiculares ao eixo deformado. Dessa forma, a teoria admite, além da deformação oriunda do momento fletor, uma deformação adicional devido à distorção da seção.

A formulação, que considera ambos os comportamentos não lineares, geométrico e de material, permite que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações e as barras sofram grandes alongamentos e curvaturas. O desenvolvimento teórico considera a formulação Lagrangiana e a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes do elemento de pórtico plano.

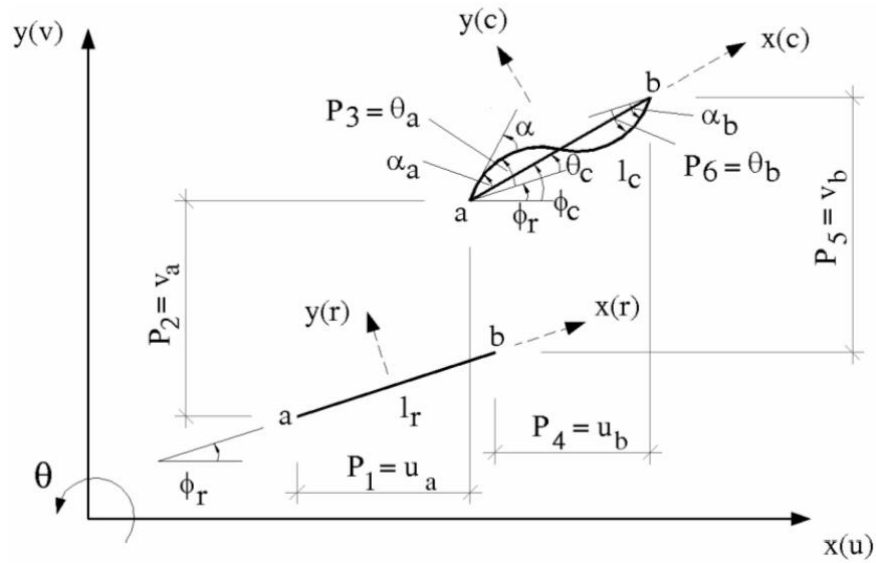
A seguir é feita uma apresentação itemizada desta teoria, desenvolvida por Lavall (1996) e adaptada por Silva (2010) para considerar o efeito do cisalhamento nas seções transversais das barras por meio da teoria de Timoshenko.

3.1 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO PLANO

Condição de extremidade: Rígido – Rígido

Considera-se um elemento ab pertencente a um pórtico plano com barras retas em sua configuração inicial, com comprimento de referência l_r , e com nós nas extremidades do elemento a e b rígidas, conforme ilustra a Figura 9. O elemento está posicionado no sistema global de referência (x,y) e os nós do pórtico possuem três graus de liberdade, sendo duas translações u e v nas direções x e y , respectivamente, e uma rotação θ , considerada positiva se medida no sentido anti-horário. É criado um sistema de coordenadas local corrotacional (x_r, y_r) centrado no elemento, em que o ângulo formado entre ele e o eixo x é φ_r .

Figura 9 - Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rígido.



Fonte: SILVA, 2010

Os graus de liberdade naturais ou corrotacionais e os cartesianos são definidos por q_α^T e p_i^T , respectivamente, onde $\alpha = 1,2,3$, e $i = 1,2,3,4,5,6$, e podem ser escritos como:

$$\mathbf{q}_\alpha^T = \{q_1 = l_c - l_r; q_2 = \alpha_a; q_3 = \alpha_b\}; \quad \mathbf{p}_i^T = \{u_a; v_a; \theta_a; u_b; v_b; \theta_b\} \quad (3.1)$$

As relações entre os graus de liberdade naturais e cartesianos são:

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \theta_a - \theta_c = P_3 - \phi_c + \phi_r \\ q_3 = \alpha_b = \theta_b - \theta_c = P_6 - \phi_c + \phi_r \end{cases} \quad (3.2)$$

Por meio da Figura 9 sabe-se que:

$$\begin{cases} l_c = \left[(x_b - x_a + P_4 - P_1)^2 + (y_b - y_a + P_5 - P_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ l_r = \left[(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \sin \phi_c = \frac{y_b - y_a + P_5 - P_2}{l_c}; \quad \cos \phi_c = \frac{x_b - x_a + P_4 - P_1}{l_c} \\ \phi_c = \arctg \left(\frac{y_b - y_a + P_5 - P_2}{x_b - x_a + P_4 - P_1} \right); \quad \phi_r = \arccos \left(\frac{x_b - x_a}{l_r} \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

Na Equação (3.3) x_a, x_b, y_a, y_b são as coordenadas dos elementos na sua configuração de referência.

Ao se derivar q_α em relação a p_i , isto é $\partial q_\alpha / \partial p_i$ ou em forma indicial $q_{\alpha,i}$, pode-se escrever a matriz $\mathbf{B}_{3 \times 6}$ que representa as relações diferenciais entre as coordenadas

locais corrotacionais e as coordenadas globais cartesianas, sendo definida como uma matriz de “mudança de coordenadas”. A matriz $\mathbf{B}$ também pode ser escrita como $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{T}$ sendo $\bar{\mathbf{B}}$ a forma local de $\mathbf{B}$ que relaciona os graus de liberdade naturais do sistema corrotacional com os graus de liberdade do sistema cartesiano local (mudança de coordenadas) e $\mathbf{T}$ é a matriz de rotação dos eixos, que muda as coordenadas do sistema cartesiano local para as coordenadas do sistema cartesiano global. As matrizes $\bar{\mathbf{B}}$ para as condições de extremidade rígido-rígido e a matriz $\mathbf{T}$ são dados por:

$$\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{T}_{(6 \times 6)} = \begin{bmatrix} t & 0_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & t \end{bmatrix}; \quad t = \begin{bmatrix} \cos \varphi_c & \sin \varphi_c & 0 \\ -\sin \varphi_c & \cos \varphi_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Derivando-se novamente q_α em relação a p_i , ou seja $\partial^2 q_\alpha / \partial p_i \partial p_j$ ou $q_{\alpha,ij}$, obtêm-se uma relação que envolve apenas geometria, isto é, deslocamentos em coordenadas corrotacionais e cartesianas, e será uma parcela da matriz de rigidez geométrica (teoria de segunda ordem). A matriz geométrica $\mathbf{G}_\alpha$ pode ser escrita como um triplo produto matricial dado por $\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{G}}_\alpha \mathbf{T}$, onde $\bar{\mathbf{G}}_\alpha$ ($\alpha = 1,2,3$) é a forma local de $\mathbf{G}_\alpha$ e $\mathbf{T}$ é a matriz de rotação de eixos, sendo:

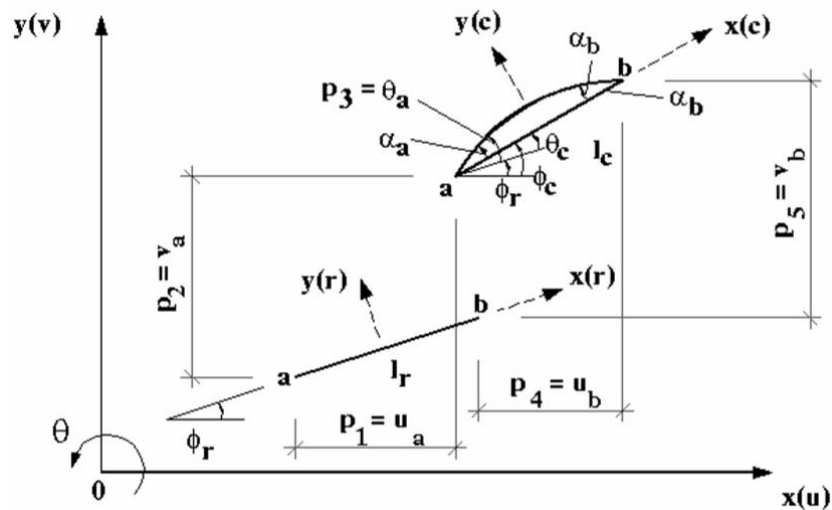
$$\bar{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_2 = \bar{\mathbf{G}}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Condição de extremidade: Rígido - Rótula

Considerando um elemento ab pertencente a um pórtico plano com barras retas em sua configuração inicial, com comprimento de referência l_r , e com extremidade a perfeitamente rígida e a extremidade b idealmente rotulada, conforme ilustra a Figura 10.

Figura 10 - Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rotulada.



Fonte: SILVA, 2010

Analogamente ao caso anterior, as relações entre os graus de liberdade naturais e cartesianos para um elemento com extremidade a rígida e extremidade b rotulada, considerando os efeitos do cisalhamento a partir da teoria de Timoshenko são dadas por:

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \theta_a - \theta_c = P_3 - \phi_c + \phi_r \\ q_3 = \alpha_b = \eta q_2 = \eta(P_3 - \phi_c + \phi_r) \end{cases} \quad (3.8)$$

Sendo:

$$\eta = - \frac{2-\beta}{4+\beta} \quad (3.9)$$

e β o fator de cisalhamento obtido utilizando a teoria de Timoshenko, dado por:

$$\beta = \frac{12EI}{k_c GA l_r^2} \quad (3.10)$$

Onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, G é o módulo de elasticidade transversal, I o momento de inércia no plano de flexão, A é a área da seção

transversal, l_r o comprimento do elemento na posição de referência e $1/k_c$ o fator de forma para o cisalhamento.

Pensando na forma local de $\mathbf{B}$, originada do produto $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{T}$, tem-se $\bar{\mathbf{B}}$:

$$\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 0 \\ 0 & \eta \frac{1}{l_c} & \eta & 0 & -\eta \frac{1}{l_c} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Com $\mathbf{T}$ dado pela Equação (3.5).

Pensando no produto $\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{G}}_\alpha \mathbf{T}$, onde $\bar{\mathbf{G}}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) é a forma local de $\mathbf{G}_\alpha$ e $\mathbf{T}$ é a matriz de rotação de eixos, tem-se:

$$\bar{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_2 = \frac{1}{l_c^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_3 = \frac{\eta}{l_c^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Condição de extremidade: Rótula - Rígido

De forma análoga, a relação entre os graus de liberdade cartesianos p_i , e os graus de liberdade corrotacionais q_α , considerando-se as condições das extremidades a rotulada e b rígida, têm-se.

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \eta q_3 = \eta(P_6 - \phi_c + \phi_r) \\ q_3 = \alpha_b = \theta_b - \theta_c = P_6 - \phi_c + \phi_r \end{cases} \quad (3.15)$$

Pensado na forma local de $\mathbf{B}$, originada do produto $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{T}$, tem-se $\bar{\mathbf{B}}$

$$\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta \frac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\eta \frac{1}{l_c} & \eta \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Pensando no produto $\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{G}}_\alpha \mathbf{T}$, onde $\bar{\mathbf{G}}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) é a forma local de $\mathbf{G}_\alpha$ e $\mathbf{T}$ é a matriz de rotação de eixos, tem-se:

$$\bar{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_2 = \frac{\eta}{l_c^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

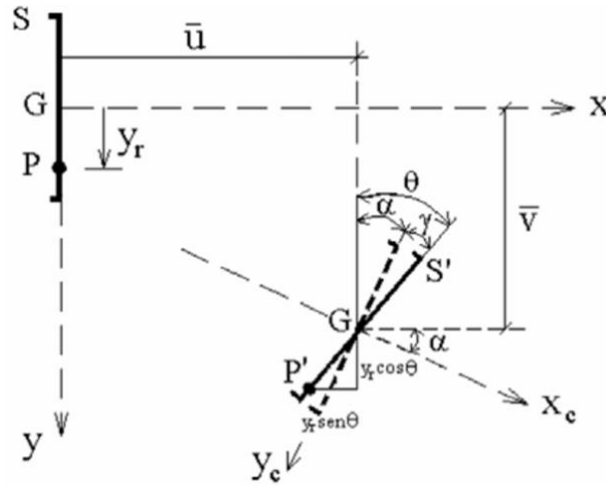
3.2 CINEMÁTICA DO ELEMENTO

Campo de deslocamento

A teoria estrutural aqui utilizada segue a hipótese cinemática do modelo de Timoshenko no qual “as seções transversais planas e ortogonais ao eixo da barra, permanecem planas e indeformáveis após a deformação, porém não permanecem ortogonais ao eixo da barra”.

Segundo a teoria de flexão de Timoshenko (1921), conhecendo-se os deslocamentos axiais ($\bar{u}$) e transversais ($\bar{v}$) dos pontos situados sobre os eixos das barras e as rotações (θ) transversais é possível determinar o campo de deslocamento dos demais pontos pertencentes à barra analisada, conforme ilustra a Figura 11.

Figura 11 - Campo de deslocamento na flexão considerando a teoria de Timoshenko.



Fonte: SILVA, 2010

No sistema corrotacional (x_c, y_c) os deslocamentos u_c e v_c representam os campos de deslocamento do ponto P pertencente à seção S , caracterizado pela coordenada y_r relativa ao eixo da barra. Supondo que o ângulo de rotação é suficientemente pequeno, esses campos de deslocamento podem ser obtidos por:

$$u_c(x, y) = \bar{u}_c(x) - y_r \theta \quad (3.20)$$

$$v_c(x, y) = \bar{v}_c(x) - y_r \frac{\theta^2}{2} \quad (3.21)$$

sendo $\bar{u}_c$ e $\bar{v}_c$ os deslocamentos do eixo da barra no sistema corrotacional.

Campo de deformação

Sabendo-se que a rotação total θ é resultado da soma da rotação devido à flexão α e da rotação devido ao cisalhamento γ e desprezando-se os termos de ordem superior, as expressões analíticas do campo de deformação consistente com a mecânica dos materiais sólidos podem ser dadas por:

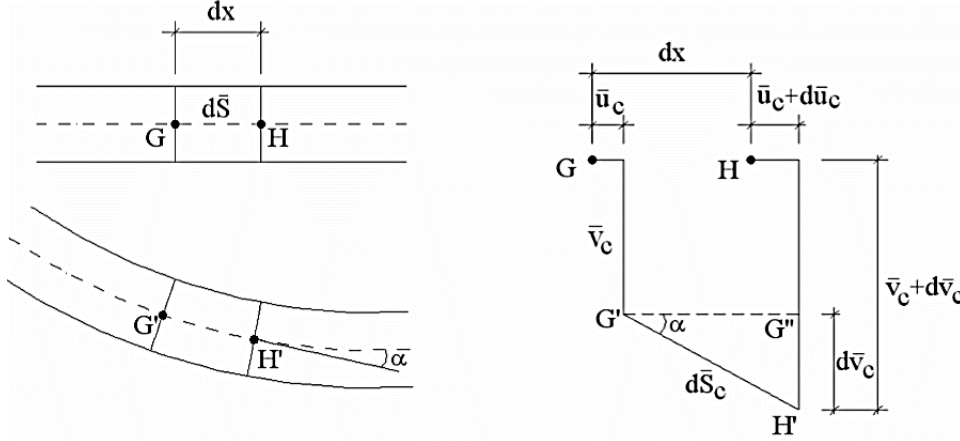
$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d\bar{u}}{dx} - y_r \frac{d\theta}{dx} = \bar{\epsilon}_x - y_r \alpha' \quad (3.22)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -\theta + \alpha = -\gamma \quad (3.23)$$

A Figura 12 mostra um elemento infinitesimal do eixo da barra. A rotação de flexão α das seções transversais decorre dos deslocamentos $\bar{u}_c$ e $\bar{v}_c$ dos pontos situados sobre o eixo, sendo obtida por:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = \left(\frac{d\bar{v}_c}{dx + d\bar{u}_c} \right) = \left(\frac{d\bar{v}_c/dx}{1 + d\bar{u}_c/dx} \right) = \left(\frac{\bar{v}_c'}{1 + \bar{u}_c'} \right) \quad (3.24)$$

Figura 12 - Rotação α da seção transversal



Fonte: SILVA, 2010

Após deformação, o comprimento infinitesimal da fibra do eixo da barra é dado pela expressão:

$$d\bar{S}_c = [(dx + d\bar{u}_c)^2 + (d\bar{v}_c)^2]^{1/2} \quad (3.25)$$

O alongamento ou encurtamento de uma fibra do eixo da barra é calculado pela relação entre o comprimento corrigido e de referência:

$$\bar{\lambda} = \frac{d\bar{S}_c}{dx} = [(1 + d\bar{u}_c')^2 + (d\bar{v}_c')^2]^{1/2} \quad (3.26)$$

O cosseno do ângulo α é dado por:

$$\cos \alpha = \frac{dx + d\bar{u}_c}{d\bar{S}_c} = \frac{1 + \bar{u}_c'}{\bar{\lambda}} \quad (3.27)$$

Assim, a Equação (3.26) pode ser reescrita como:

$$\bar{\lambda} = (1 + \bar{u}_c') \sec \alpha \quad (3.28)$$

A deformação longitudinal da fibra do eixo da barra pode ser obtida pela relação:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\lambda} - 1 \quad (3.29)$$

Assim, a expressão analítica do campo de deformações consistente com a mecânica dos sólidos torna-se:

$$\epsilon_x = (1 + \bar{u}_c') \sec \alpha - 1 - y_r \alpha' \quad (3.30)$$

Adotando-se aproximações de segunda ordem para a função trigonométrica, o campo de deformações é dado por:

$$\varepsilon_x = (1 + \overline{u_c}') \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) - 1 - y_r \alpha' ; \quad \gamma_{xy} = -\theta + \alpha = -\gamma \quad (3.31)$$

Essas deformações dependem da escolha de funções de interpolação expressas em função dos graus de liberdade naturais.

3.3 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é utilizado para determinar o equilíbrio dos elementos. O trabalho virtual interno de um elemento é dado por:

$$\delta W_i = P_i \delta p_i = \int_{V_r} \sigma_x \delta \varepsilon_x dV_r + \int_{V_r} \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dV_r \quad (3.32)$$

onde dV_r é o elemento de volume na configuração de referência, σ_x a tensão normal, τ_{xy} a tensão de cisalhamento, $\delta \varepsilon_x$ a deformação longitudinal virtual, $\delta \gamma_{xy}$ a distorção virtual de uma fibra e P_i são as forças nodais do elemento.

As deformações virtuais, alongamento e distorção, são dados respectivamente por:

$$\delta \varepsilon_x = \varepsilon_{x,a} q_{a,i} \delta p_i \quad (3.33)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \gamma_{xy,a} q_{a,i} \delta p_i \quad (3.34)$$

Assim, as equações de equilíbrio do elemento são obtidas por:

$$P_i = Q_\alpha q_{\alpha,i} \quad (3.35)$$

sendo Q_α os esforços internos naturais nas coordenadas corrotacionais dado por:

$$Q_\alpha = \int_{V_r} (\sigma_x \varepsilon_{x,\alpha} + \tau_{xy} \gamma_{xy,\alpha}) dV_r \quad (3.36)$$

Agrupando P_i e Q_α em dois vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$, respectivamente, pode-se escrever a Equação (3.35) na forma matricial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \quad (3.37)$$

3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Considerando uma formulação de equilíbrio incremental, a derivada de $\mathbf{P}$ em relação ao tempo pode ser dada:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \quad (3.38)$$

sendo $\mathbf{K}$ a matriz de rigidez tangente do elemento em coordenadas cartesianas.

As componentes k_{ij} da matriz de rigidez são obtidas por meio das derivadas de P_i em relação às coordenadas cartesianas p_j :

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = k_{ij} = q_{\alpha,i} Q_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij} \quad (3.39)$$

onde $Q_{\alpha,\beta}$ é obtida derivando-se a Equação (3.36) em relação à q_{β} :

$$Q_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \left(\underbrace{\varepsilon_{x,\alpha} D_f \varepsilon_{x,\beta}}_{D_{\alpha,\beta}^f} + \underbrace{\sigma_x \varepsilon_{x,\alpha\beta}}_{H_{\alpha,\beta}^f} + \underbrace{\gamma_{xy,\alpha} D_c \gamma_{xy,\beta}}_{D_{\alpha,\beta}^c} + \underbrace{\tau_{xy} \gamma_{xy,\alpha\beta}}_{H_{\alpha,\beta}^c} \right) dV_r \quad (3.40)$$

em que D_f e D_c são as rigidezes tangente axial e de cisalhamento da fibra

$$D_f = d\sigma_x/d\varepsilon_x \quad \text{e} \quad D_c = d\tau_{xy}/d\gamma_{xy} \quad (3.41)$$

Define-se a partir da Equação (3.40):

$$D_{\alpha,\beta}^f = \int_{V_r} \varepsilon_{x,\alpha} D_f \varepsilon_{x,\beta} dV_r \quad (3.42)$$

$$H_{\alpha,\beta}^f = \int_{V_r} \sigma_x \varepsilon_{x,\alpha\beta} dV_r \quad (3.43)$$

$$D_{\alpha,\beta}^c = \int_{V_r} \gamma_{xy,\alpha} D_c \gamma_{xy,\beta} dV_r \quad (3.44)$$

$$H_{\alpha,\beta}^c = \int_{V_r} \tau_{xy} \gamma_{xy,\alpha\beta} dV_r \quad (3.45)$$

Dessa forma, as matrizes de rigidez tangente constitutiva e geométrica, ambas no sistema de coordenadas corrotacionais, são dadas por:

$$k_{ij} = \underbrace{q_{\alpha,i} (D_{\alpha,\beta}^f + D_{\alpha,\beta}^c) q_{\beta,j}}_{\text{Parcela constitutiva}} + \underbrace{q_{\alpha,i} (H_{\alpha,\beta}^f + H_{\alpha,\beta}^c) q_{\beta,j} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}}_{\text{Parcela geométrica}} \quad (3.46)$$

A parcela constitutiva da matriz corresponde à primeira parte da Equação (3.46), já a parcela geométrica, formada pelos efeitos P- δ e P- Δ , é representada pela segunda e terceira parte, respectivamente.

Escrevendo em notação matricial, usando-se $q_{\alpha,i} = q_{\beta,j} = B_{(3 \times 6)}$; $D_{\alpha,\beta}^f = D_{(3 \times 3)}^f$; $D_{\alpha,\beta}^c = D_{(3 \times 3)}^c$; $H_{\alpha,\beta}^f = H_{(3 \times 3)}^f$; $H_{\alpha,\beta}^c = H_{(3 \times 3)}^c$; $q_{\alpha,ij} = G_{\alpha,(6 \times 6)}$; sendo $\alpha = 1,2,3$, a matriz de rigidez tangente, simétrica (6x6), pode ser dada por:

$$k_t = k_M + k_G = B^T (D^f + D^c) B + \underbrace{B^T (H^f + H^c) B}_{\text{P-}\delta} + \underbrace{Q_{\alpha} G_{\alpha}}_{\text{P-}\Delta} \quad (3.47)$$

E no sistema global:

$$k_t = T^T (k_M + k_G) T \quad (3.48)$$

3.5 INTERPOLAÇÃO

Para determinar os campos de deformação, torna-se necessário definir funções de interpolação para o deslocamento $\bar{u}_c$ do eixo da barra, para o ângulo de rotação por flexão α e para o ângulo de distorção γ . Utilizando funções de interpolação usuais da análise numérica, pode-se escrever as deformações em função dos graus de liberdade corrotacionais, desconsiderando-se os movimentos de corpo rígido. O deslocamento $\bar{u}_c$ é interpolado linearmente por:

$$\bar{u}_c = q_1 \psi_1 = q_1 \left(\frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.49)$$

O polinômio de deslocamentos transversais é expresso em função dos parâmetros generalizados. A rotação por flexão α para elemento com extremidades **rígido-rígido**, **rígido-rótula** e **rótula-rígido**, é dada, respectivamente, por:

$$\alpha = q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3' \quad (3.50)$$

$$\alpha = q_2 (\psi_2' + \eta \psi_3') \quad (3.51)$$

$$\alpha = q_3 (\eta \psi_2' + \psi_3') \quad (3.52)$$

onde:

$$\begin{cases} \psi_2' = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\beta}{1+\beta} \left(-\frac{x_r}{l_r} \right) \\ \psi_3' = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{x_r}{l_r} \right) \end{cases} \quad (3.53)$$

A rotação total θ para elemento com extremidades **rígido-rígido**, **rígido-rótula** e **rótula-rígido**, é dada, respectivamente, por:

$$\theta = q_2 \psi_4' + q_3 \psi_5' \quad (3.54)$$

$$\theta = q_2 (\psi_4' + \eta \psi_5') \quad (3.55)$$

$$\theta = q_3 (\psi_4' + \eta \psi_5') \quad (3.56)$$

onde:

$$\begin{cases} \psi_4' = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\beta}{1+\beta} \left(-\frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \right) \\ \psi_5' = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad (3.57)$$

A distorção pode ser obtida fazendo a diferença entre as Equações (3.54) e (3.50) para **rígido-rígido**, Equações (3.55) e (3.51) para **rígido-rótula** e entre as Equações (3.56) e (3.52) para **rótula-rígido**:

$$\gamma = q_2 \psi_6' + q_3 \psi_7' \quad (5.58)$$

$$\gamma = q_2(\psi_6' + \eta \psi_7') \quad (3.59)$$

$$\gamma = q_3(\psi_6' + \eta \psi_7') \quad (3.60)$$

sendo:

$$\begin{cases} \psi_6' = \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{2} \right) \\ \psi_7' = \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad (3.61)$$

3.6 VALOR MÉDIO DE DEFORMAÇÃO

A deformação do eixo da barra é variável ao longo de seu comprimento, uma vez que ψ_2' e ψ_3' variam com x_r . Para facilitar o desenvolvimento analítico da formulação, Lavall (1996) adotou um valor médio dado por:

$$\bar{\epsilon}_{x_m} = \frac{1}{l_r} \int \bar{\epsilon}_x dx_r \quad (3.62)$$

Resolvendo a integral acima, chega-se à expressão da deformação média $\bar{\epsilon}_{x_m}$ para condição de extremidade **rígido-rígido**, **rígido-rótula** e **rótula-rígido**, respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{x_m} = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left\{ (q_2^2 + q_3^2) \left[\frac{1}{(1+\beta)^2} \frac{1}{15} + \frac{\beta}{(1+\beta)^2} \frac{1}{12} + \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} \frac{1}{24} \right] + \right. \\ \left. + q_2 q_3 \left[\frac{1}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{30}\right) + \frac{\beta}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{12}\right) \right] \right\} \quad (3.63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{x_m} = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left\{ q_2^2 \left[(\eta^2 + 1) \left(\frac{1}{(1+\beta)^2} \frac{1}{15} + \frac{\beta}{(1+\beta)^2} \frac{1}{12} + \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} \frac{1}{24} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta \left(\frac{1}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{30}\right) + \frac{\beta}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{12}\right) \right) \right] \right\} \quad (3.64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{x_m} = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left\{ q_3^2 \left[(\eta^2 + 1) \left(\frac{1}{(1+\beta)^2} \frac{1}{15} + \frac{\beta}{(1+\beta)^2} \frac{1}{12} + \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} \frac{1}{24} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta \left(\frac{1}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{30}\right) + \frac{\beta}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{12}\right) \right) \right] \right\} \quad (3.65) \end{aligned}$$

Dessa forma, a expressão para final para a deformação longitudinal é dada por:

$$\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_{x_m} - y_r \alpha' \quad (3.66)$$

onde $\bar{\varepsilon}_{x_m}$ é dado pelas Equações (3.63), (3.64) e (3.65) e α' é dado pelas Equações (3.50), (3.51) e (3.52) para condições de extremidade **rígido-rígido**, **rígido-rótula** e **rótula-rígido**, respectivamente.

3.7 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE CONSTITUTIVA E GEOMÉTRICA

Para a determinação dos esforços naturais internos Q_α e dos elementos da matriz $D_{\alpha,\beta}^f$; $D_{\alpha,\beta}^c$; $H_{\alpha,\beta}^f$ e $H_{\alpha,\beta}^c$ nas coordenadas corrotacionais, deve-se calcular as derivadas $\varepsilon_{x,\alpha}$; $\varepsilon_{x,\alpha\beta}$; $\gamma_{xy,\alpha}$; $\gamma_{xy,\alpha\beta}$. Desprezando-se os elementos multiplicados por q_2 e por q_3 por serem suficientemente pequenos as matrizes de rigidez tangente, constitutiva e geométrica, em regime elastoplástico podem ser determinadas.

Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elastoplástico

A matriz de rigidez constitutiva $\mathbf{k}_m^{\text{ep}}$ em regime elastoplástico, no sistema local do elemento, em coordenadas cartesianas, é dada por:

Condição de Extremidade: Rígido-Rígido

$$\mathbf{k}_m^{\text{ep}} = \begin{bmatrix} \frac{C_{1m}}{I_r} & 0 & -\frac{C_{2m}}{I_r} & -\frac{C_{1m}}{I_r} & 0 & \frac{C_{2m}}{I_r} \\ & \frac{12C_{3m}}{I_r I_c^2 (1+\beta)} & \frac{6C_{3m}}{I_r I_c (1+\beta)} & 0 & -\frac{12C_{3m}}{I_r I_c^2 (1+\beta)} & \frac{6C_{3m}}{I_r I_c (1+\beta)} \\ & & \frac{C_{3m}}{I_r} \left(\frac{4+\beta}{1+\beta} \right) & \frac{C_{2m}}{I_r} & -\frac{6C_{3m}}{I_r I_c (1+\beta)} & \frac{C_{3m}}{I_r} \left(\frac{2-\beta}{1+\beta} \right) \\ & & & \frac{C_{1m}}{I_r} & 0 & -\frac{C_{2m}}{I_r} \\ \text{Simétrica} & & & & \frac{12C_{3m}}{I_r I_c^2 (1+\beta)} & -\frac{6C_{3m}}{I_r I_c (1+\beta)} \\ & & & & & \frac{C_{3m}}{I_r} \left(\frac{4+\beta}{1+\beta} \right) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

onde $C_{1m} = \int_{A_r} D^f dA_r$; $C_{2m} = \int_{A_r} D^f y_r dA_r$; $C_{3m} = \int_{A_r} D^f y_r^2 dA_r$. C_1 , C_2 e C_3 são constantes em cada seção, mas variam ao longo do elemento, pois D^f não é necessariamente constante ao longo de x_r . Nota-se que quando $C_{1m} = EA$; $C_{2m} = 0$ e $C_{3m} = EI$ obtém-se a matriz constitutiva no regime elástico.

Condição de Extremidade: Rígido-Rótula

$$k_m^{-ep} = \begin{bmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{C_{2m}}{l_r} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & 0 \\ & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c (4+\beta)} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & 0 \\ & & \frac{12C_{3m}}{l_r (4+\beta)} & \frac{C_{2m}}{l_r} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{12C_{3m}}{l_r l_c (4+\beta)} & 0 \\ & & & \frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Condição de Extremidade: Rótula-Rígido:

$$k_m^{-ep} = \begin{bmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & 0 & -\frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & \frac{C_{2m}}{l_r} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) \\ & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & 0 & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c (4+\beta)} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{C_{2m}}{l_r} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) \\ & \text{Simétrica} & & & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & -\frac{12C_{3m}}{l_r l_c (4+\beta)} \\ & & & & & \frac{12C_{3m}}{l_r (4+\beta)} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Matriz de Rigidez Tangente Geométrica em Regime Elastoplástico

A matriz de rigidez tangente geométrica, em regime elastoplástico é análoga a matriz no regime elástico, com N e V calculados no regime elastoplástico.

Condição de Extremidade: Rígido-Rígido

$$\bar{k}_G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{l_c(1+\beta)} \left(1 + \frac{\beta}{\lambda} \right) & 0 & 0 & -\frac{V}{l_c(1+\beta)} \left(1 + \frac{\beta}{\lambda} \right) & 0 \\ & \frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{1}{5(1+\beta)^2} \right) & \frac{N}{10(1+\beta)^2} & -\frac{V}{l_c(1+\beta)} \left(1 + \frac{\beta}{\lambda} \right) & -\frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{1}{5(1+\beta)^2} \right) & \frac{N}{10(1+\beta)^2} \\ & & \frac{N l_c}{(1+\beta)^2} \left(\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right) & 0 & -\frac{N}{10(1+\beta)^2} & \frac{N l_c}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{30} - \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{12} \right) \\ & & & 0 & \frac{V}{l_c(1+\beta)} \left(1 + \frac{\beta}{\lambda} \right) & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & \frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{1}{5(1+\beta)^2} \right) & -\frac{N}{10(1+\beta)^2} \\ & & & & & \frac{N l_c}{(1+\beta)^2} \left(\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Sendo $\lambda = l_c/l_r$.

Condição de Extremidade: Rígido-Rótula

$$\bar{k}_G = \begin{bmatrix} \bar{k}_{Gaa} & \bar{k}_{Gab} \\ \bar{k}_{Gab}^T & \bar{k}_{Gbb} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\bar{k}_{Gaa} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) - \frac{4}{(4+\beta)} \frac{M_a}{l_c^2} & 0 \\ \frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2} \right) & \frac{16N}{5(4+\beta)^2} & \frac{16Nl_c}{5(4+\beta)^2} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$\bar{k}_{Gab} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) + \frac{4}{(4+\beta)} \frac{M_a}{l_c^2} & 0 \\ -\frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) + \frac{4}{(4+\beta)} \frac{M_a}{l_c^2} & -\frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2} \right) & 0 \\ 0 & -\frac{16N}{5(4+\beta)^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\bar{k}_{Gbb} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) - \frac{4}{(4+\beta)} \frac{M_a}{l_c^2} & 0 \\ \frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Condição de Extremidade: Rótula-Rígido:

A matriz de rigidez tangente geométrica para condição de extremidade rótula-rígido é também dada pela Equação (3.71) sendo:

$$\bar{k}_{Gaa} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) + \frac{4}{(4+\beta)} \frac{M_b}{l_c^2} & 0 \\ \frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\bar{k}_{Gab} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) - \frac{4}{(4+\beta)} \frac{M_b}{l_c^2} & 0 \\ -\frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) - \frac{4}{(4+\beta)} \frac{M_b}{l_c^2} & -\frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2} \right) & \frac{16N}{5(4+\beta)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\bar{k}_{Gbb} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) + \frac{4}{(4+\beta)} \frac{M_b}{l_c^2} & 0 \\ \frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2} \right) & -\frac{16N}{5(4+\beta)^2} & \frac{16N l_c}{5(4+\beta)^2} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

4 METODOLOGIA

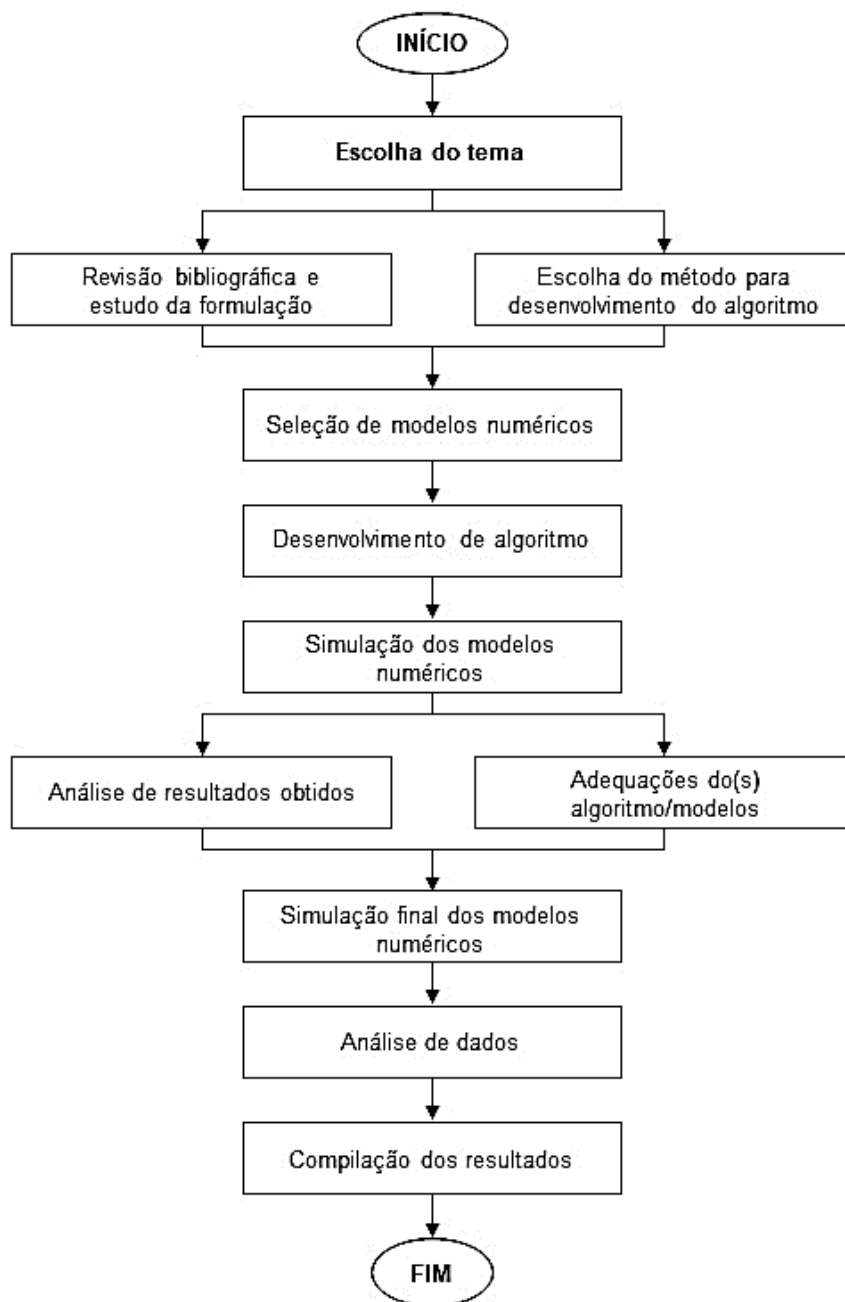
O presente trabalho utiliza a formulação descrita na seção 3 para a obtenção do comportamento não linear de estruturas planas de aço. Tal formulação é capaz de considerar os efeitos de segunda ordem, as deformações por cisalhamento com base na teoria de Timoshenko. Neste item será discutido o modelo constitutivo da plasticidade distribuída.

Para o desenvolvimento dos objetivos, inicialmente apresentou-se uma fundamentação teórica e uma revisão bibliográfica sobre a influência do cisalhamento na análise de elementos estruturais de barra.

Com a finalidade de reproduzir a resposta mais consistente dos efeitos causados pelo cisalhamento desenvolveu-se um algoritmo para a implementação do modelo de von Mises no programa computacional desenvolvido por Lavall (1996) e adaptado por Silva (2010), para levar em conta a interação entre as tensões normal e de cisalhamento na propagação do escoamento ao longo do comprimento da barra e na altura da seção transversal. A Figura 13 ilustra por meio de um fluxograma as etapas para desenvolvimento do presente trabalho.

Dessa forma, a formulação passará a permitir dois critérios de escoamento. O primeiro, já implementado por Lavall (1996), que monitora as relações de tensão normal-deformação longitudinal, e o segundo que estabelece a interação entre as tensões normal e de cisalhamento de acordo com o critério de falha de von Mises.

Figura 13 - Fluxograma descrevendo metodologia do trabalho.



Fonte: Elaborado pelo autor

Para demonstrar a eficiência da análise proposta na obtenção do comportamento não linear das estruturas, exemplos numéricos são apresentados e divididos em subitens, visando:

- a) Verificar a capacidade do programa computacional para realizar a análise incluindo os efeitos global e local de 2ª ordem e a deformação por cisalhamento.

- i) Dois exemplos de pilares de referência, apresentados pela AISC (2016), são analisados. O primeiro refere-se a um pilar biapoiado submetido a uma força axial juntamente com uma carga transversal distribuída, visando analisar apenas os efeitos locais de 2ª ordem (efeito $P-\delta$). O segundo refere-se a um pilar engastado na base e livre no topo onde são aplicadas forças, isto é, uma força axial juntamente com uma força lateral. Este problema busca analisar os efeitos locais (efeito $P-\delta$) e globais (efeito $P-\Delta$) de 2ª ordem. Para confirmar a precisão do programa computacional, os momentos fletores e deslocamentos transversais, para vários níveis da força axial, devem apresentar diferenças máximas de 3% e 5%, respectivamente, em relação aos valores apresentados nos exemplos do manual;
 - ii) Um exemplo de treliça plana é apresentado com o objetivo de avaliar problemas com grandes deslocamentos. Uma comparação entre os comportamentos elásticos pós flambagem da estrutura treliçada plana hiperestática com a estrutura isostática é realizada. Além de validar a matriz de rigidez tangente desenvolvida para barras com nós rígido-rotulado.
- b) Avaliar as respostas de deslocamentos nos nós, dos esforços solicitantes nas barras e estudar a propagação da plastificação ao longo da altura da seção transversal e no comprimento do elemento, considerando a análise não linear geométrica e de material e as condições de extremidade dos elementos. Os resultados considerando-se a Teoria de Timoshenko sem e com von Mises são comparados com aqueles obtidos da Teoria de Bernoulli-Euler. As seguintes estruturas são analisadas:
- i) Viga em balanço com carga na extremidade
 - ii) Viga biapoiada com carga concentrada no meio do vão
 - iii) Viga biengastada com carga concentrada a 1/3 do vão
 - iv) Pilar biapoiado de Chen, Goto e Liew;
 - v) Pórtico de um andar e um vão de Kanchanalai;
 - vi) Pórtico de um andar de Vogel;
 - vii) Pórtico de seis andares e dois vãos de Vogel.

5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

As matrizes obtidas no capítulo 3 foram implementadas por Silva (2010) no programa desenvolvido por Lavall (1996), denominado PPLANLEP (**P**órticos **P**lanos de aço, considerando a **A**nálise **N**ão **L**inear **E**lasto-**P**lástica), escrito na linguagem FORTRAN 90.

Por meio de processo incremental e iterativo, o método de Newton-Raphson Puro é utilizado juntamente com o controle de carga para análise não linear do sistema de equações. O equilíbrio é verificado em cada iteração segundo um critério de convergência baseado nos deslocamentos. Essa seção apresenta o método de Newton-Raphson Puro, utilizado para solução das equações não lineares que descrevem o problema, o critério de convergência adotado na verificação final do processo incremental-iterativo, os modelos constitutivos atribuídos ao material e as aproximações adotadas.

5.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PURO

Conforme se sabe da literatura técnica sobre o assunto, o uso do MEF para análise não linear de estruturas leva ao sistema de equações simultâneas, que associam o vetor de cargas aplicadas P com o vetor de deslocamentos p , através da matriz de rigidez tangente global do sistema k :

$$kp + P = 0 \quad (5.1)$$

Se os coeficientes da matriz k dependem das incógnitas de p ou de suas derivadas, o problema torna-se não linear e o uso de um processo iterativo faz-se necessário.

Conforme afirmam vários autores, o procedimento numérico mais recomendado para análises não lineares é o Método de Newton-Raphson o qual, a cada incremento de carga, atualiza a matriz de rigidez e, por iteração, retorna os deslocamentos nodais sofridos, após a determinação do equilíbrio da estrutura. No Método de Newton-Raphson supõe-se um sistema de forças residuais segundo a Equação (5.2):

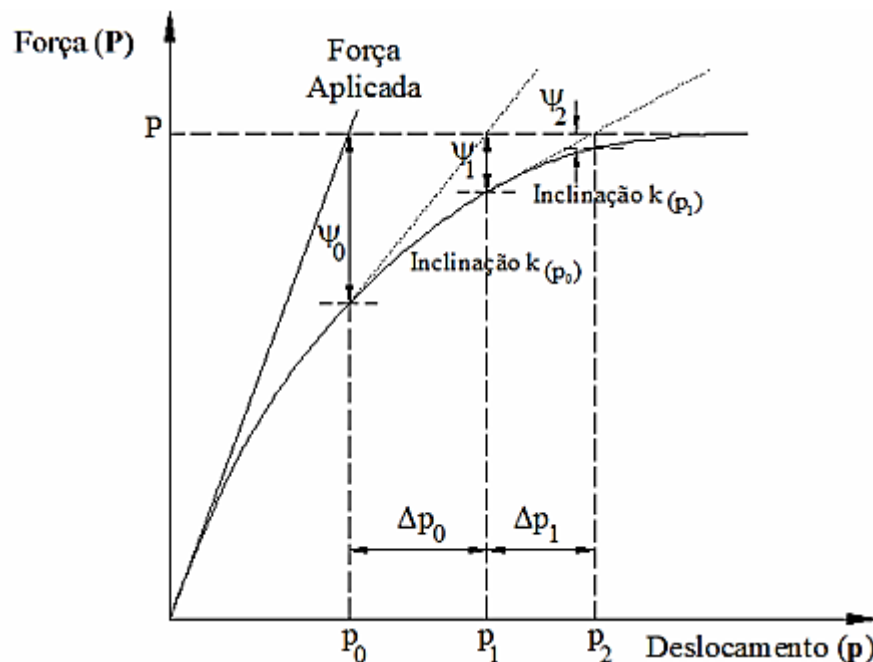
$$\psi = kp + P \neq 0 \quad (5.2)$$

onde as forças residuais ψ podem ser interpretadas como uma medida de distância entre a solução apresentada e a curva do equilíbrio da estrutura.

Em problemas estruturais, a solução, para qualquer nível de carga, é também função do histórico do carregamento. Assim, o processo incremental-iterativo é utilizado, como ilustra a Figura 14, para o caso de uma única variável. A solução parte da definição do valor inicial para o vetor de deslocamentos p_0 (para problemas estruturais, é tomado como nulo). A matriz de rigidez tangente k associada a este deslocamento é determinada e o vetor ψ_0 é então calculado segundo a Equação (5.2). A correção Δp_0 pode ser definida através da Equação (5.3):

$$\Delta p_0 = - \frac{\psi_{(p_0)}}{k_{(p_0)}} \quad (5.3)$$

Figura 14 - Método de Newton-Raphson.



Fonte: SILVA, 2010

Então, uma melhor aproximação para o vetor dos deslocamentos é obtido por $p_1 = p_0 + \Delta p_0$ e o processo iterativo prossegue até a solução convergir para a resposta não linear, ou seja, até que a norma do vetor ψ_r ou do vetor Δp_r tenda a zero.

5.2 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Como descrito anteriormente, o processo iterativo é executado até a solução convergir para uma tolerância adequada, previamente definida. Essa verificação deverá ocorrer no final de cada iteração.

No presente trabalho verifica-se a convergência da solução comparando-se os valores dos deslocamentos nodais da iteração corrente com aqueles da iteração imediatamente anterior. No instante em que a diferença entre esses valores for inferior ou igual à tolerância, para cada um dos valores nodais, admite-se que a convergência foi atingida. Assim:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^r)^2 - \sum_{i=1}^n (p_i^{r-1})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^1)^2}} \times 100 \leq \text{Tolerância Adotada} \quad (5.4)$$

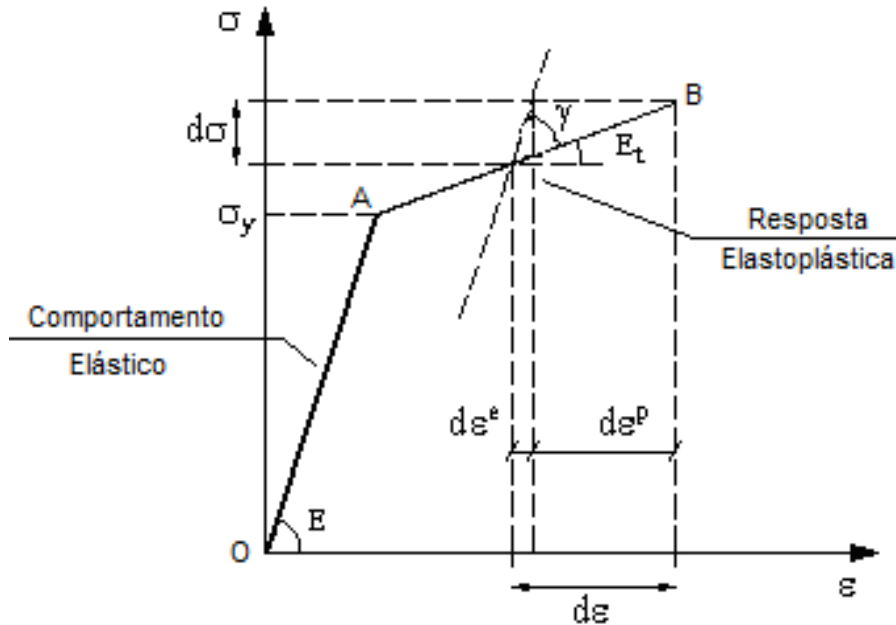
onde n é o número total de graus de liberdade da estrutura e r e $r-1$ referem-se às iterações sucessivas. A tolerância deve ser indicada em porcentagem, já que a Equação (5.4) é multiplicada por 100.

Observa-se que a convergência é atingida quando a diferença entre as normas de duas iterações sucessivas é menor ou igual ao valor da tolerância multiplicada pela norma da primeira iteração. O valor 0,5% de tolerância será adotado, pois é considerado adequado para a maioria das aplicações em Engenharia Estrutural.

5.3 MODELO CONSTITUTIVO

A Figura 15 idealiza o comportamento elastoplástico por meio de um diagrama bilinear, onde se distingue um comportamento elástico (região OA), com módulo de elasticidade E , e um comportamento elastoplástico (região AB), com encruamento linear e módulo tangente E_t .

Figura 15 - Comportamento elastoplástico do material para o caso uniaxial.



Fonte: SILVA, 2010

O material deforma-se, inicialmente, com módulo de elasticidade E até que a tensão atuante atinja o valor da resistência ao escoamento σ_y . Para níveis de tensões superiores à este limite, o material passa a se deformar segundo o módulo tangente E_t . Nota-se que num certo estágio após o escoamento inicial, o acréscimo de deformação $d\varepsilon$ é associado a um acréscimo de tensão $d\sigma$. Separando-se as deformações elástica e plástica, tem-se:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (5.5)$$

O parâmetro de endurecimento H' é definido por:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (5.6)$$

Com o auxílio da Equação (5.5), o parâmetro de encruamento pode ser escrito em função do módulo tangente E_t :

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{E_t}{1 - (E_t/E)} \quad (5.7)$$

Reescrevendo e desenvolvendo a Equação (5.5), tem-se que:

$$d\varepsilon = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H'} \right) d\sigma = \left(\frac{H' + E}{EH'} \right) d\sigma \quad (5.8)$$

Logo,

$$d\sigma = \left(\frac{EH'}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (5.9)$$

Sendo $d\sigma = E_t d\varepsilon$, conclui-se que:

$$E_t = \left(\frac{EH'}{E + H'} \right) \quad (5.10)$$

Segundo a Figura 15, pode-se escrever $d\sigma$ como:

$$d\sigma = E_t d\varepsilon = (E - \gamma) d\varepsilon \quad (5.11)$$

Sendo $E_t = E - \gamma$ e com auxílio da Equação (5.10), determina-se:

$$\gamma = \frac{E^2}{E + H'} \quad (5.12)$$

Levando a Equação (5.12) na Equação (5.11), tem-se:

$$d\sigma = E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (5.13)$$

E, finalmente, define-se o módulo tangente adotado para níveis de tensões superiores à de escoamento:

$$E_t = E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) = \left(\frac{EH'}{E + H'} \right) \quad (5.14)$$

Assim, na implementação do programa, as tensões serão tratadas como:

$$d\sigma = \begin{cases} E d\varepsilon & \text{fase elástica} \\ E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon & \text{fase plástica} \end{cases} \quad (5.15)$$

Quando $H' = 0$ tem-se que $E_t = 0$ e o comportamento elástico perfeitamente plástico é contemplado.

Sendo $d\sigma = E_t d\varepsilon = E d\varepsilon^e$, e ainda com o auxílio das Equações (5.6) e (5.9), as deformações elástica e plástica são dadas por:

$$d\varepsilon^e = \left(\frac{E_t}{E} \right) d\varepsilon \quad (5.16)$$

$$d\varepsilon^p = \left(\frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (5.17)$$

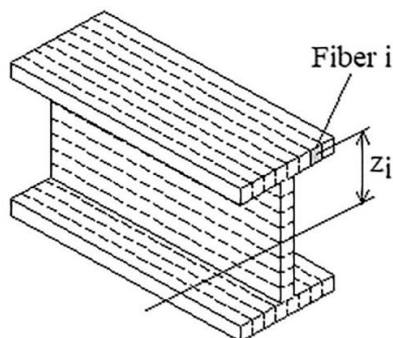
Visando uma maior generalização para se considerar diversas leis constitutivas para o aço, com o objetivo de se estudar, por exemplo, o comportamento elastoplástico com ou sem patamar de escoamento, a influência do encruamento, etc., foi adotada neste trabalho a solução através de diagramas tensão-deformação multilineares.

5.4 MODELO DE FATIAS

Ao se considerar a não linearidade física do material, permite-se que as fibras constituintes da seção transversal plastifiquem devido às tensões provenientes do carregamento aplicado serem superiores à resistência ao escoamento do material. A formulação apresentada na seção 3 ainda prevê o espalhamento da plastificação ao longo das barras da estrutura, ao dividi-la em elementos finitos.

Os coeficientes da matriz de rigidez são dados em função do módulo de elasticidade longitudinal do material E , da área da seção transversal A , do momento de inércia I , do momento estático S e das forças normal e de cisalhamento N e V . Para determinação dessas propriedades é utilizado o método da plasticidade distribuída, onde a seção transversal é discretizada em fatias conforme ilustra a Figura 16. Além da alma, as mesas foram fatiadas permitindo o estudo das tensões residuais, medidas na metade da espessura de cada fatia.

Figura 16 - Modelo de fatias.



Fonte: SILVA et al., 2018

Dessa forma, toma-se cada fatia como uma fibra da seção transversal, considerando somente a contribuição das fatias elásticas, ou seja, seções que estiverem sujeitas a tensões menores que a tensão de escoamento σ_0 . Nesse caso, o estado de tensões no centro da fatia é considerado representativo para toda ela e as fibras que atingirem a tensão de escoamento são tomadas como elastoplásticas. O software permite que a análise seja realizada considerando somente a tensão normal, ou a interação entre tensões normal e de cisalhamento conforme o critério de falha de von Mises, apresentado na Equação (5.18):

$$\phi = [\sigma_x^2 + 3\tau^2]^{1/2} \leq \sigma_0 \quad (5.18)$$

As propriedades totais de EA , EI e ES são determinadas pelo somatório da contribuição de cada fatia:

$$EA = \sum_i E_i b_i t_i \quad (5.19)$$

$$ES = \sum_i E_i b_i t_i z_i \quad (5.20)$$

$$EI = \sum_i E_i \left(b_i t_i z_i^2 + \frac{b_i t_i^3}{12} \right) \quad (5.21)$$

sendo que b_i , t_i e z_i são, respectivamente, largura da fatia i , espessura da fatia i e coordenada z no centro da fatia i , em relação ao centro de gravidade da seção transversal e E_i é o módulo de elasticidade do material da fatia i .

Com a fibra na fase elástica tem-se:

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (5.22)$$

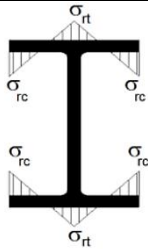
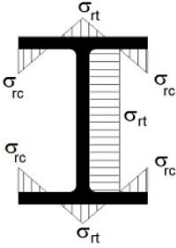
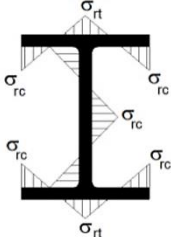
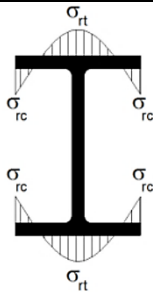
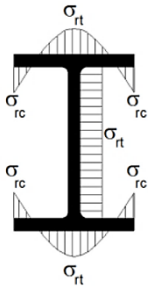
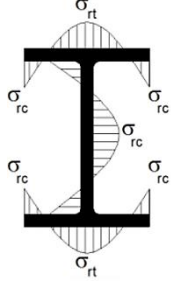
E na fase elastoplástica

$$d\sigma = E_{ti} d\varepsilon = E \left(1 - \frac{E}{E+H'} \right) d\varepsilon \quad (5.23)$$

sendo que, quando o parâmetro de encruamento $H' = 0$, $E_{ti} = 0$, o comportamento elástico perfeitamente plástico é alcançado. No presente trabalho, ao utilizar o critério de von Mises, o comportamento do material é elástico perfeitamente plástico. Nesse caso, quando o estado de tensões no centro de fatia não atende ao critério de falha, dado pela Equação (5.18), assume-se que o E_i das Equações (5.19), (5.20) e (5.21) é igual a zero. Dessa forma, as fatias que se plastificaram pelo critério de von Mises deixam de contribuir para o cálculo das propriedades da seção transversal. Quando o critério é atendido, E_i é o módulo de elasticidade do material.

As tensões residuais são previstas como dados de entrada, atribuídas a cada fibra da seção transversal do elemento e são automaticamente adicionadas às tensões normais durante a análise. A Tabela 2 apresenta expressões auto equilibradas da relação entre as tensões residuais de tração σ_{rt} (+) e de compressão σ_{rc} (-), segundo os tipos de distribuição que podem ser considerados no presente programa. Nas expressões, b_f e t_f são a largura e a espessura das mesas; h_w e t_w são a altura e a espessura da alma e d é a altura total do perfil (ALMEIDA, 2006).

Tabela 2 - Tipos de distribuição das tensões residuais

Configuração	Distribuição		Tensão residual de tração
	Mesas	Alma	σ_{rt}
	Linear	Sem Tensão Residual	$\sigma_{rt} = -\sigma_{rc}$
	Linear	Constante	$\sigma_{rt} = -\frac{t_f b_f}{t_f b_f + t_w h_w} \sigma_{rc}$ onde: $h_w = d - 2t_f$
	Linear	Linear	$\sigma_{rt} = -\sigma_{rc}$
	Parabólico	Sem Tensão Residual	$\sigma_{rt} = -\frac{\sigma_{rc}}{2}$
	Parabólico	Constante	$\sigma_{rt} = -\frac{2t_f b_f}{4t_f b_f + 3t_w h_w} \sigma_{rc}$
	Parabólica	Parabólica	$\sigma_{rt} = -\frac{t_f b_f + t_w h_w}{4t_f b_f + t_w h_w} 2\sigma_{rc}$

Fonte: ALMEIDA, 2006

5.5 DESCRIÇÃO DAS SUB-ROTINAS

O programa adaptado de Lavall (1996) e Silva (2010), escrito na linguagem FORTRAN 90, divide-se em duas partes: o programa principal, que estabelece a sequência das sub-rotinas e controla o número de iterações a serem executadas e as sub-rotinas que executam os procedimentos para que seja feita a análise não linear da estrutura em questão. A Figura 17 apresenta o fluxograma indicando a sequência dos procedimentos.

- **Sub-rotina DADOS:** Através da leitura de um arquivo de texto, os parâmetros característicos do problema são coletados e atribuídos às variáveis. Além de informações básicas, tais como coordenadas, vinculações e carregamentos nodais, fatores limitantes referentes às iterações e à convergência da solução, são também informados os tipos de análise (Bernoulli-Euler ou Timoshenko), o número e divisões das fatias, os valores das tensões residuais aplicadas, parâmetros das curvas multilíneas para o material (tensão e deformação) e para a ligação (momento e rotação relativa).

- **Sub-rotina INICIA:** Visando o correto preenchimento dos dados, são zerados vetores e matrizes.

- **Sub-rotina INCAR:** Controla o processo incremental do carregamento e atualiza o vetor correspondente a cada passo do processo.

- **Sub-rotina ALGOR:** Controla o tipo de algoritmo a ser empregado para a solução do problema. Como citado anteriormente, o algoritmo escolhido foi o Método de Newton-Raphson puro.

- **Sub-rotina MATRIG:** Determina a matriz de rigidez tangente do elemento de barra atualizadas em cada iteração do processo, em regime elástico ou elastoplástico. Com o auxílio da **sub-rotina FATIA** são avaliados o nível de plastificação da seção transversal, através da contribuição de cada fatia no cálculo de propriedades geométricas e nos coeficientes de rigidez. Quando a tensão no centro de uma fatia alcança o valor de escoamento, considera-se que esta fatia da seção transversal plastificou.

- **Sub-rotina MONRIG:** Executa a montagem da matriz de rigidez global do sistema e do vetor de cargas, através da superposição da matriz de rigidez de cada elemento de barra, de acordo como a incidência nodal adotada.

- **Sub-rotina REDGAS:** Executa os procedimentos necessários ao desenvolvimento da fase de eliminação progressiva do Método de Redução de Gauss para solução do sistema de equações não lineares a cada iteração do processo.

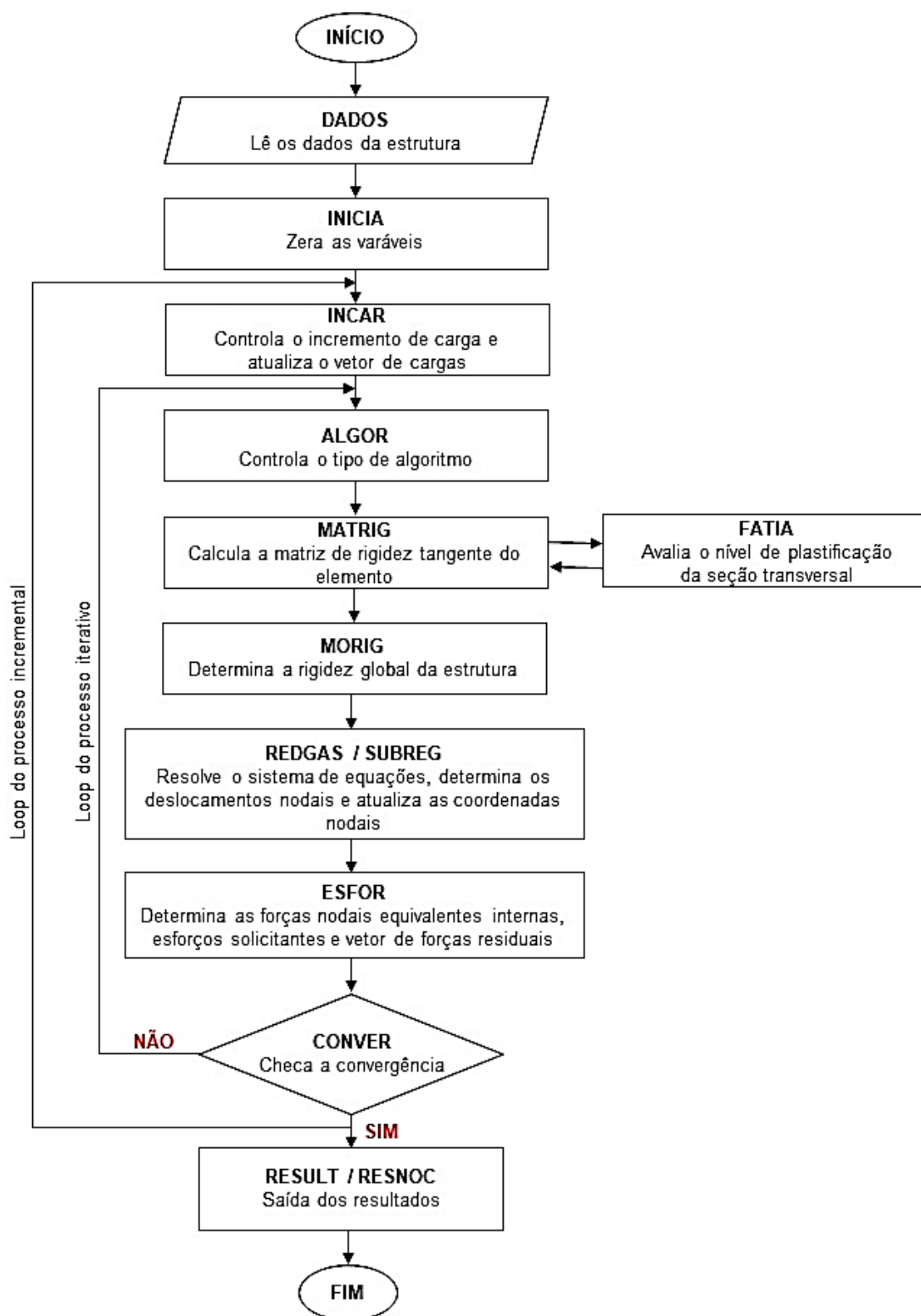
- **Sub-rotina SUBREG:** Executa a substituição regressiva do sistema de equações triangular superior originado pela sub-rotina REDGAS. São calculados os deslocamentos nodais e as reações de apoio, além de proceder a atualização das coordenadas nodais, dos comprimentos e dos cossenos diretores dos elementos.

- **Sub-rotina ESFOR:** Determina o vetor das forças nodais equivalentes internas, levando-se em conta se o elemento está em carga ou descarga, de acordo com a lei constitutiva. Seguindo a formulação adotada, são calculados os deslocamentos, correspondentes aos graus de liberdade nos sistemas cartesiano e no corrotacional, definindo as rotações de corpo rígido e seus valores acumulativos. As deformações são calculadas, e, através da lei constitutiva, são calculados os esforços nodais equivalentes e os esforços residuais que serão reaplicados à estrutura até que a mesma esteja em equilíbrio (princípio do processo iterativo).

- **Sub-rotina CONVER:** Verifica a convergência da solução do problema através do controle do erro entre os deslocamentos nodais da iteração corrente com a anterior.

- **Sub-rotina RESULT:** Fornece a saída dos resultados da análise do problema apresentado, tais como os deslocamentos nodais e as reações de apoio segundo o sistema global de referência, os esforços solicitantes nas extremidades de cada elemento de barra (coordenadas locais) e as deformações elásticas, plásticas e totais calculadas em cada fatia nas extremidades do elemento de barra, além do valor de tensões nas mesmas.

Figura 17 - Fluxograma do algoritmo de solução incremental-iterativo para análises estáticas.



Fonte: SILVA, 2010

5.6 IMPLEMENTAÇÃO DO CRITÉRIO DE FALHA DE VON MISES

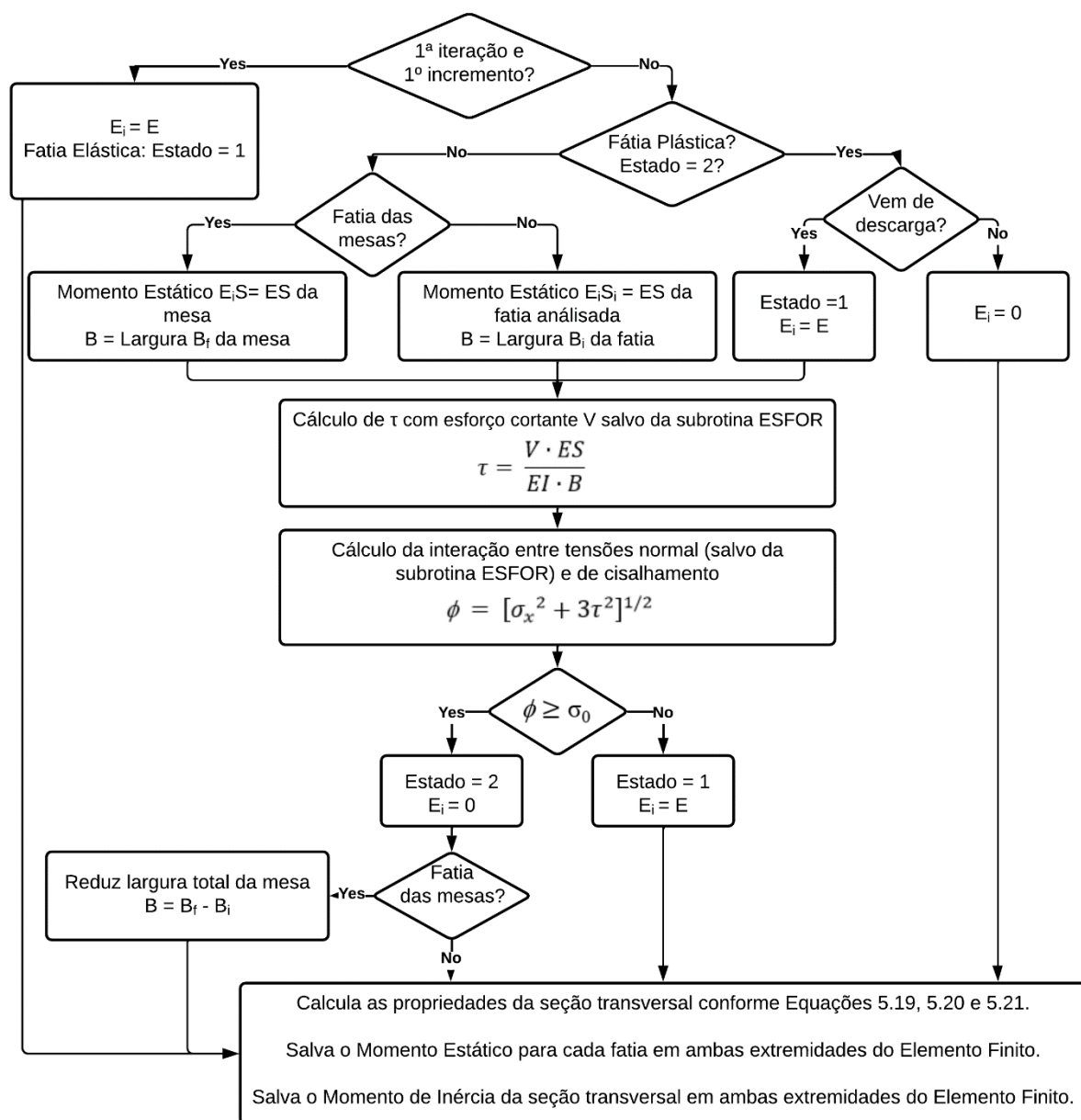
Para implementação do critério de von Mises foram realizadas alterações no código existente no programa PPLANLEP.

A matriz de rigidez tangente do elemento de barra determinada na **sub-rotina MATRIG** é atualizada em cada iteração do processo, em regime elástico ou elastoplástico perfeito. Com o auxílio da **sub-rotina FATIA** são avaliados o estado de plastificação da seção transversal, por meio da contribuição de cada fatia no cálculo das propriedades geométricas, conforme as Equações (5.19), (5.20) e (5.21). A formulação permite dois critérios de escoamento, o primeiro com relação apenas à tensão normal, e o segundo estabelecendo a interação entre as tensões normal e de cisalhamento de acordo com o critério de falha de von Mises, Equação (5.18). A implementação do critério de von Mises é ilustrada na Figura 18 de forma esquemática, demonstrando a sequência de cálculos realizados para cada fatia na **sub-rotina FATIA**, considerando o comportamento elástico perfeitamente plástico. A influência do encruamento do material não é contemplada na implementação do critério de von Mises. O módulo tangente é igual a zero para considerar o comportamento elástico-perfeitamente plástico do material. Para o cálculo das propriedades da seção transversal é considerado somente a contribuição das fatias elásticas, ou seja, aquelas que estão sujeitas a tensões menores que a tensão de escoamento. Dessa forma, quando o critério de falha dado pela Equação (5.18) é atendido, E_i é o módulo de elasticidade do material e, quando o critério é extrapolado, E_i é igual a zero.

A tensão de escoamento ($\pm \sigma_0$) é um dos dados de entrada do programa. As propriedades geométricas são armazenadas ao final da **sub-rotina FATIA**, e a força cortante interna e as tensões normais ao final da **sub-rotina ESFOR**. Essas informações são utilizadas na iteração seguinte para avaliar o estado de tensões em cada fatia conforme esquematizado na Figura 18.

Além das saídas dos resultados descritas anteriormente, a **sub-rotina RESULT** também fornece uma saída específica para análise considerando o critério de von Mises, apresentando o estado de cada fatia (elástico ou plástico) nas extremidades dos elementos finitos.

Figura 18 - Procedimentos para análise do estado de tensões em cada fatia utilizando o critério de falha de von Mises.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

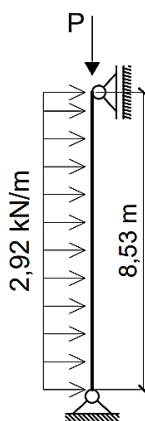
Nessa seção são apresentadas a descrição e a discussão dos exemplos numéricos utilizados para validar a metodologia proposta. Os primeiros modelos consistem em uma análise elástica para verificar o correto funcionamento do software. Para validar o modelo plástico considerando o critério de falha de von Mises inicia-se com análises elastoplásticas sem levar em conta as tensões residuais e as imperfeições geométricas e, por fim, realiza-se análises elastoplásticas de modelos incluindo esses atributos.

6.1 EXEMPLOS NUMÉRICOS CONSIDERANDO A ANÁLISE ELÁSTICA EM TEORIA DE 2ª ORDEM

6.1.1 Pilar biapoado

Este exemplo trata de um pilar biapoado submetido a uma força de compressão, P , e uma carga transversal distribuída, q , de 2,92 kN/m. O pilar possui 8,53 m de comprimento, L , e seção transversal constituída pelo perfil W 360x72 com flexão em relação ao eixo de maior inércia, conforme mostra a Figura 19. O módulo de elasticidade longitudinal, E , do aço é igual a 20000 kN/cm² e o módulo de elasticidade transversal, G , igual a 7700 kN/cm². Para a implementação dos dados no programa, o pilar foi dividido, inicialmente, em 4 elementos de igual comprimento e, posteriormente, em 6 e 12 elementos. As seções dos perfis foram discretizadas em 20 fatias, sendo uma fatia para cada mesa e 18 para a alma. A solução analítica para a determinação do momento fletor e do deslocamento de 2ª ordem elástica no meio do vão é apresentada a seguir.

Figura 19 - Pilar Biapoado.



Fonte: AISC, 2016

Ao considerar a teoria de Euler-Bernoulli, o momento fletor máximo do pilar, sem carga vertical P, é calculado pela equação a seguir:

$$M = \frac{qL^2}{8} \quad (6.1)$$

E o deslocamento máximo, obtido pela equação da linha elástica, é dada pela expressão:

$$\delta_1 = \frac{5qL^4}{384EI} \quad (6.2)$$

sendo I, o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo de flexão.

Aplicando-se uma carga vertical P superior a zero, um momento fletor é adicionado ao momento fletor máximo de 1ª ordem, resultando no momento de 2ª ordem, dado por:

$$M = \frac{qL^2}{8} + P\delta \quad (6.3)$$

Já para o cálculo do deslocamento lateral do pilar levando-se em conta a influência de P na barra deformada, é adicionado um deslocamento na estrutura, δ_2 , que pode ser calculado conforme equações abaixo:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{\delta_1}{1-\eta} \quad (6.4)$$

onde:

$$\eta = \frac{N_{Sd}}{N_e} = \frac{P}{\frac{\pi^2 EI_x}{(KL)^2}} \quad (6.5)$$

sendo K, o fator do comprimento efetivo, considerado igual a 1, por ser uma estrutura contraventada.

Ao considerar a teoria de Timoshenko, o momento fletor máximo do pilar biapoiado, na ausência da carga vertical P é calculado pela Equação (6.1). Levando-se em conta a influência do cisalhamento na expressão da linha elástica, o deslocamento de 1ª ordem é dado por:

$$\delta_1 = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{\alpha qL^2}{8GA} = \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + \frac{48\alpha_s EI}{5GA L^2} \right) \quad (6.6)$$

sendo A, a área da seção transversal e α_s , o fator de forma para o cisalhamento

Aplicando uma carga axial P superior a zero, um momento fletor é adicionado ao momento de 1ª ordem, o que resulta em um momento de 2ª ordem dado por:

$$M = \frac{qL^2}{8} + P\delta \quad (6.7)$$

O deslocamento de 2ª ordem, é determinado adicionando ao deslocamento de 1ª ordem, o valor de δ_2 , que pode ser calculado conforme a Equação (6.4).

A Tabela 3 e a Tabela 4 apresentam, respectivamente, os resultados obtidos do deslocamento transversal e do momento fletor no meio da altura do pilar biapoado, utilizando 4, 6 e 12 elementos finitos. O pilar foi analisado considerando a ausência e a presença de força axial aplicada juntamente com a carga transversal distribuída de 2,92 kN/m. A força axial aplicada ao topo do pilar foi igual a 667 kN, 1334 kN e 2001 kN. Os resultados obtidos pelo programa foram comparados com os resultados obtidos analiticamente e com os resultados apresentados pela AISC (2016).

Pode-se verificar que o programa computacional proposto é adequado para realizar uma análise incluindo o efeito local de segunda ordem. Os resultados de momentos fletores e dos deslocamentos transversais, para os diferentes níveis de força axial aplicada, apresentaram diferenças inferiores a 3% e 5%, respectivamente, em relação aos valores analíticos e resultados da AISC.

Tabela 3 - Comparação entre os resultados de deslocamentos (mm) no meio do vão obtidos pelo PPLANLEP, pelo processo analítico e pela AISC.

DESLOCAMENTO (mm)						
Carga P (kN)	Quantidade de elementos	Resultado software	Resultado analítico	Diferença percentual	AISC	Diferença percentual
0	4	5,00		3,12		2,52
	6	5,14	5,16	0,42	5,13	0,19
	12	5,23		1,32		1,95
667	4	5,70		3,49		2,82
	6	5,88	5,90	0,35	5,86	0,34
	12	5,99		1,51		2,22
1334	4	6,61		3,98		3,32
	6	6,87	6,89	0,25	6,84	0,44
	12	7,02		1,93		2,63
2001	4	7,88		4,70		4,02
	6	8,24	8,27	0,35	8,21	0,37
	12	8,47		2,44		3,17

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4 - Comparação entre os resultados de momentos fletores (kN.m) no meio do vão obtidos pelo PPLANLEP, pelo processo analítico e pela AISC.

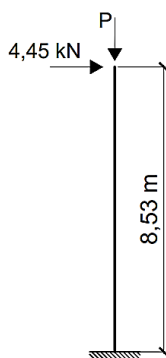
MOMENTO FLETOR (kN.m)						
Carga P (kN)	Quantidade de elementos	Resultado software	Resultado analítico	Diferença percentual	AISC	Diferença percentual
0	4	26,56		0,00		0,16
	6	26,56	26,56	0,00	26,60	0,16
	12	26,56		0,00		0,16
667	4	30,35		0,48		0,50
	6	30,47	30,49	0,08	30,50	0,10
	12	30,54		0,15		0,13
1334	4	35,36		1,08		0,95
	6	35,70	35,74	0,13	35,70	0,00
	12	35,90		0,43		0,56
2001	4	42,30		1,86		1,63
	6	43,02	43,10	0,19	43,00	0,05
	12	43,47		0,85		1,09

Fonte: Elaborado pelo autor.

6.1.2 Pilar engastado na base e livre no topo

Este exemplo trata de um pilar engastado na base e livre no topo submetido a uma força de compressão e uma carga transversal aplicada no topo de 4,45 kN, conforme Figura 20. O pilar possui 8,53 m de comprimento L e seção transversal constituída pelo perfil W 360x72 com flexão em relação ao eixo de maior inércia. O módulo de elasticidade longitudinal, E, do aço é igual a 20000 kN/cm² e o módulo de elasticidade transversal, G, igual a 7700 kN/cm². Para a implementação dos dados no programa, o pilar foi dividido, inicialmente, em 4 elementos de igual comprimento e, posteriormente, em 6 e 12 elementos. As seções dos perfis foram discretizadas em 20 fatias, sendo uma fatia para cada mesa e 18 para a alma. A solução analítica para a determinação do momento fletor na extremidade engastada e do deslocamento de 2ª ordem elástica na extremidade livre é apresentada a seguir.

Figura 20 - Pilar engastado na base e livre no topo.



Fonte: AISC, 2016

Ao considerar a teoria de Euler-Bernoulli, o momento fletor máximo do pilar engastado-livre, sem carregamento axial P , se encontra na base do pilar e é calculado pela equação a seguir:

$$M = VL \quad (6.8)$$

E o deslocamento máximo de 1ª ordem ocorre na extremidade livre do pilar e é dado pela expressão:

$$\Delta_1 = \frac{VL^3}{3EI} \quad (6.9)$$

Aplicando-se uma carga axial P superior a zero, um momento adicional $P\Delta$ é adicionado ao momento fletor de 1ª ordem, o que resulta em um momento fletor em 2ª ordem dado por:

$$M = VL + P\Delta \quad (6.10)$$

O deslocamento lateral do pilar, levando-se em conta a carga axial P aplicada na extremidade livre, é dado pelo deslocamento de 1ª ordem acrescido de um deslocamento adicional na estrutura, Δ_2 , resultando no deslocamento de 2ª ordem dado por:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{VL^3}{3EI} \left(\frac{1}{1-\eta} \right) \quad (6.11)$$

sendo K , o fator do comprimento efetivo, considerado igual a 2, por ser uma estrutura não contraventada.

Ao considerar a teoria de Timoshenko, o momento fletor máximo do pilar engastado-livre, quando P for igual a zero, se encontra na base do pilar e é calculado pela Equação (6.8). Levando-se em conta a influência do cisalhamento na expressão da linha elástica, o deslocamento de 1ª ordem é dado por:

$$\Delta_1 = \frac{VL^3}{3EI} + \frac{\alpha VL}{GA} \quad (6.12)$$

Aplicando uma carga axial P superior a zero, é considerado um momento adicional devido ao efeito de 2ª ordem, $P\Delta$, o que resulta na Equação (6.11).

O deslocamento lateral do pilar, levando-se em conta a carga axial P aplicada na extremidade livre, é dado pelo deslocamento de 1ª ordem acrescido de um deslocamento adicional na estrutura, Δ_2 , resultando no deslocamento de 2ª ordem, considerando-se a influência do cisalhamento:

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{1-\eta} \quad (6.13)$$

$$\eta = \frac{P}{N_e} \quad (6.14)$$

$$N_e = \frac{\pi^2 EI_x}{(KL)^2} \quad (6.15)$$

A Tabela 5 e a Tabela 6 apresentam os resultados do deslocamento transversal no topo e do momento fletor na base do pilar na ausência e presença da força axial juntamente com uma força lateral de 4,45 kN. Ao considerar a força axial, os valores adotados foram 445kN, 667kN e 890kN. Os resultados numéricos obtidos pelo programa foram comparados com os resultados obtidos analiticamente e apresentados pela AISC (2016).

Pode-se observar que, apenas para o pilar com carga axial aplicada de 890kN, os resultados de deslocamento lateral no topo e do momento fletor na base do pilar obtidos pelo programa apresentaram diferenças superiores a 5% e 3%, respectivamente, em relação aos valores apresentados pela AISC, para a discretização com 6 e 12 elementos. Apesar disso, observa-se que os resultados obtidos pelo programa foram próximos aos obtidos analiticamente, demonstrando que o programa computacional é adequado para realizar uma análise incluindo o efeito global de segunda ordem.

Tabela 5 - Comparação entre os resultados de deslocamentos (mm) na extremidade livre obtidos pelo PPLANLEP, pelo processo analítico e pela AISC.

DESLOCAMENTO (mm)						
Carga P (kN)	Quantidade de elementos	Resultado software	Resultado analítico	Diferença percentual	AISC	Diferença percentual
0	4	23,65		0,64		2,38
	6	23,65	23,50	0,64	23,1	2,38
	12	23,65		0,64		2,38
445	4	35,23		0,19		3,01
	6	35,36	35,30	0,18	34,2	3,39
	12	35,43		0,38		3,60
667	4	46,73		0,77		3,61
	6	47,06	47,09	0,07	45,1	4,35
	12	47,26		0,36		4,79
890	4	69,70		1,67		4,65
	6	70,69	70,89	0,28	66,6	6,14
	12	71,30		0,58		7,06

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6 - Comparação entre os resultados de momentos fletores (kN.m) na extremidade engastada obtidos pelo PPLANLEP, pelo processo analítico e pela AISC.

MOMENTO FLETOR						
Carga P (kN)	Quantidade de elementos	Resultado software	Resultado analítico	Diferença percentual	AISC	Diferença percentual
0	4	37,96		0,00		0,11
	6	37,96	37,96	0,00	38,00	0,11
	12	37,96		0,00		0,11
445	4	53,63		0,07		0,81
	6	53,68	53,67	0,03	53,20	0,90
	12	53,72		0,10		0,98
667	4	69,11		0,37		1,48
	6	69,33	69,37	0,06	68,10	1,81
	12	69,47		0,15		2,01
890	4	99,98		1,06		2,86
	6	100,85	101,05	0,20	97,20	3,76
	12	101,40		0,35		4,32

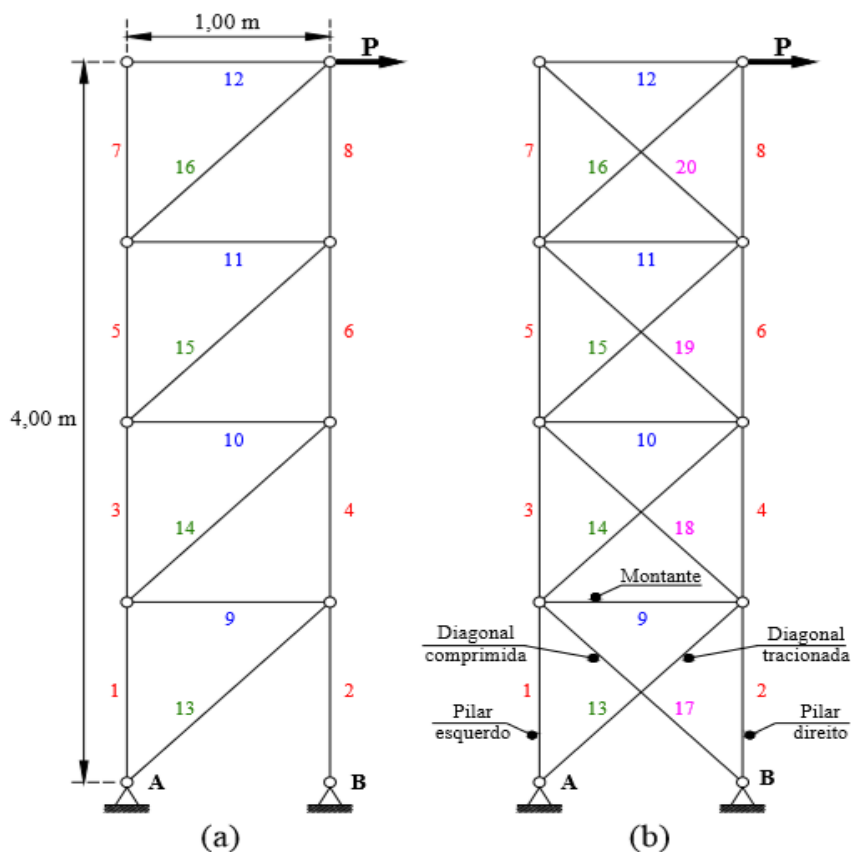
Fonte: Elaborado pelo autor.

6.1.3 Treliça plana

A treliça plana mostrada na Figura 21 foi analisada por Almeida (2006) considerando a teoria de Bernoulli-Euler para validar a formulação para problemas com grandes deslocamentos. Neste trabalho, a treliça foi analisada com o intuito de validar a formulação desenvolvida considerando a teoria de Timoshenko para as condições de extremidade Rígido-Rótula e Rótula-Rígido.

A treliça possui largura de 1,00 m, altura total de 4,00 m, dividida em 4 níveis e está submetida à uma força horizontal P igual a 156,25 kN, conforme indicado na Figura 21. As barras indicadas pelos números de 1 a 8 representam os pilares da estrutura, de 9 a 12 representam os montantes e as diagonais são definidas pelas barras de 13 a 20. A treliça isostática apresenta diagonal simples, enquanto a treliça hiperestática, diagonais duplas. Todas as barras foram divididas em 8 elementos e a seção transversal em 10 fatias. O material possui módulo de elasticidade E igual a 20500 kN/cm².

Figura 21 - Treliça plana.



Fonte: ALMEIDA, 2006

A Tabela 7 apresenta os dados referentes à seção transversal das barras, bem como seus índices de esbeltez, cargas teóricas de escoamento e de flambagem elástica, considerando a Teoria de Bernoulli-Euler. Com o propósito meramente didático, foram adotadas seções transversais quadradas para as barras da estrutura.

Tabela 7 - Dados das barras constituintes das estruturas treliçadas.

Tipo de elemento	Seção transversal (cm²)	Esbeltez	Carga de escoamento (kN)	Carga de flambagem elástica (kN)
Pilar	(5,0 x 5,0)	69,28	625,00	1.053,79
Montante	(4,0 x 4,0)	86,60	400,00	431,63
Diagonal	(3,0 x 3,0)	163,30	225,00	68,29

Fonte: ALMEIDA,2006

Para validar o modelo do presente trabalho, a estrutura isostática foi analisada em teoria de primeira ordem elástica. A Tabela 8 apresenta as forças normais de compressão para a barra 2 (pilar direito) e de tração para a barra 13 (diagonal tracionada), situadas no nível do piso, a fim de mostrar a correlação de resultados entre o presente trabalho e de Almeida (2006).

Tabela 8 - Forças normais para a estrutura isostática em kN.

	PRESENTE TRABALHO		ALMEIDA (2006)	
P/P_{MAX}	Pilar direito (barra 2)	Diagonal tracionada (barra 13)	Pilar direito (barra 2)	Diagonal tracionada (barra 13)
10	-62,49	22,09	-62,50	22,10
20	-124,96	44,19	-124,98	44,19
30	-187,43	66,28	-187,46	66,29
40	-249,88	88,36	-249,92	88,38
50	-312,33	110,45	-312,38	110,47
55	-343,54	121,49	-343,61	121,52
60	-374,76	132,54	-374,83	132,56
61	-381,00	134,74	-381,07	134,77
62	-387,24	136,95	-387,32	136,98
65	-405,97	143,58	-406,05	143,61
70	-437,18	154,62	-437,26	154,66
80	-499,58	176,70	-499,69	176,75
90	-561,98	198,78	-562,11	198,83
100	-624,37	220,85	-625,00	221,00

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Tabela 9 são apresentados os resultados das forças normais da estrutura hiperestática para as barras comprimidas 2 (pilar direito) e 17 (diagonal comprimida) e para a barra tracionada 13 (diagonal tracionada). Nesse modelo é considerado uma análise elástica geometricamente não linear com grandes deslocamentos, e os resultados também são comparados com os resultados de Almeida (2006).

Tabela 9 - Forças normais para a estrutura hiperestática em kN.

P/P_{MAX}	PRESENTE TRABALHO			ALMEIDA (2006)		
	Pilar direito (barra 2)	Diagonal tracionada (barra 13)	Diagonal comprimida (barra 17)	Pilar direito (barra 2)	Diagonal tracionada (barra 13)	Diagonal comprimida (barra 17)
10	-54,69	11,05	-11,05	-54,68	11,05	-11,05
20	-109,37	22,10	-22,11	-109,35	22,09	-22,10
30	-164,04	33,14	-33,17	-164,01	33,14	-33,16
40	-218,69	44,19	-44,23	-218,66	44,18	-44,21
50	-273,33	55,23	-55,30	-273,30	55,24	-55,25
55	-300,65	60,75	-60,83	-300,65	60,80	-60,73
60	-328,01	66,33	-66,30	-328,27	66,76	-65,82
61	-333,58	67,58	-67,26	-333,99	68,22	-66,57
62	-339,42	69,22	-67,83	-339,84	69,88	-67,11
65	-357,90	75,49	-68,18	-358,02	75,73	-67,89
70	-389,05	86,43	-68,28	-388,95	86,37	-68,28
80	-451,44	108,47	-68,31	-451,19	108,19	-68,52
90	-513,85	130,53	-68,31	-513,53	130,16	-68,61
100	-576,26	152,61	-68,35	-582,12	152,34	-68,66

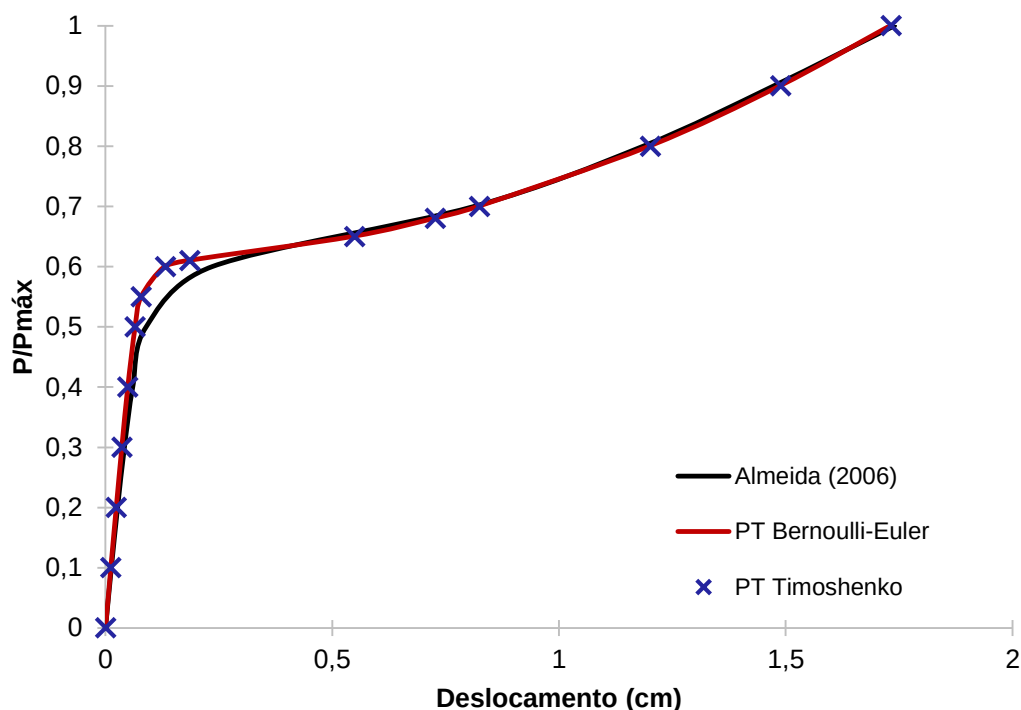
Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se que, até 55% de P, as forças normais atuantes nas diagonais são praticamente as mesmas. Após a força normal da diagonal comprimida chegar próximo da carga teórica de flambagem (a partir de 60%) o acréscimo de carga passa a ser absorvido pela diagonal tracionada. Os resultados obtidos considerando-se a análise de Timoshenko são iguais aos da teórica clássica.

A Figura 22 representa o comportamento pós-flambagem da diagonal comprimida, relacionando os acréscimos de carga com os deslocamentos horizontais do ponto médio da diagonal. No modelo analisado pelo presente trabalho, o comportamento é geometricamente não linear, com pequenos deslocamentos até cerca de 60% da carga, enquanto que Almeida (2006) obteve essa resposta em torno dos 50%. Após essa etapa, o comportamento da treliça

passa a apresentar grandes deslocamentos e os resultados se encontram aos da autora de referência.

Figura 22 - Comportamento pós-flambagem da diagonal comprimida.

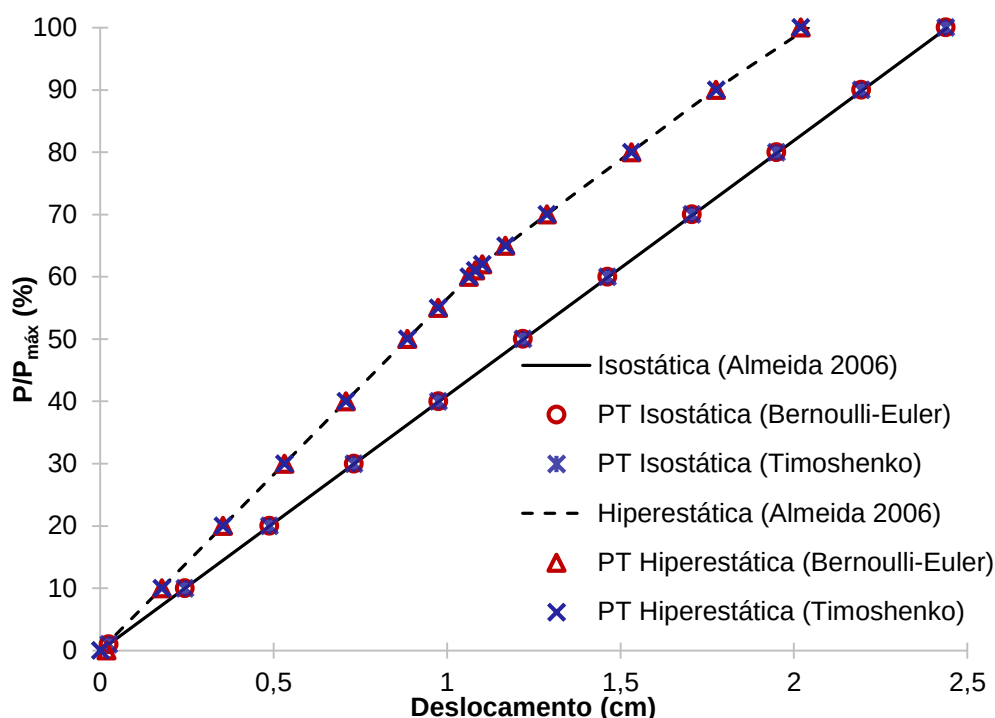


Fonte: Elaborado pelo autor

O gráfico apresentado na Figura 23 ilustra a curva de fator de carga x deslocamento no topo da treliça, para ambas as estruturas, analisando a teoria clássica e a teoria de Timoshenko. Percebe-se que a estrutura isostática apresenta comportamento elástico linear para todo o carregamento em todas as análises.

Já a estrutura hiperestática, comporta-se linearmente até as proximidades de 50 e 60% do carregamento, para teoria clássica e a teoria de Timoshenko, respectivamente, pontos onde o comportamento começa a mudar em decorrência da diminuição da rigidez das diagonais comprimidas. Pode-se visualizar uma boa aproximação ao comparar os resultados do presente programa com os de Almeida (2006).

Figura 23 - Gráfico fator de carga x deslocamento horizontal no ponto de atuação da carga, para os casos isostáticos e hiperestáticos.



Fonte: Elaborado pelo autor

6.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS CONSIDERANDO A ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA EM TEORIA DE 2ª ORDEM

6.2.1 Viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre

Este exemplo visa analisar a carga de colapso de uma viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre, conforme mostra a Figura 24, e mostrar a propagação da plastificação ao longo da altura da seção transversal à medida que as fatias vão se tornando plásticas. Esse modelo é apresentado em Oliveira (2016) para a razão L/h igual a 10. No presente trabalho, para verificar os efeitos decorrentes do cisalhamento, diferentes razões de comprimento por altura de seção transversal são consideradas, variando somente o comprimento da viga. Para isso, emprega-se a teoria de Timoshenko sem e com o critério de escoamento de von Mises, isto é, no primeiro caso, a plastificação é considerada apenas com relação à tensão normal e, no segundo, leva-se em conta a interação da tensão normal e da tensão de cisalhamento no escoamento da seção transversal. A viga é constituída de seção retangular, com carga concentrada P aplicada na extremidade livre, correspondente à carga teórica de colapso plástico. O vão L foi dividido em 50

elementos de comprimentos iguais e a seção transversal dividida em 20 fatias. O aço adotado tem módulo de elasticidade igual a 21000 kN/cm^2 e resistência ao escoamento igual a 24 kN/cm^2 .

Figura 24 - Viga em balanço com carga aplicada na extremidade livre.



Fonte: Elaborado pelo autor

A carga última obtida para o presente trabalho (PT) para $L = 1000 \text{ mm}$, utilizando Timoshenko sem e com von Mises foi de $30,15 \text{ kN}$. A carga teórica de colapso plástico é de 30 kN e, a carga obtida por Oliveira (2016) foi de $30,47 \text{ kN}$. Dessa forma, a presente formulação apresenta um erro relativo a esses valores de $0,5\%$ e $1,05\%$, respectivamente, o que demonstra uma boa concordância de resultados. A Figura 25 mostra a comparação da solução numérica obtida pela presente formulação com o resultado de Oliveira (2016). As diferenças entre as trajetórias de equilíbrio podem ser justificadas pelo método adotado para obtenção das soluções não lineares.

As Figuras 26, 27 e 28 ilustram o estado de tensões das fatias no engaste da viga analisada para diferentes fatores de carga. Na Figura 26 são apresentadas as tensões para 70% do carregamento, que corresponde ao último estado totalmente elástico da viga. Pode-se visualizar a distribuição linear da tensão normal e a distribuição parabólica da tensão cisalhante. Na Figura 27 são apresentadas as distribuições de tensões para a seção do engaste da viga parcialmente plastificada com 99% do carregamento. Essa figura ilustra que, quando acontece o escoamento das fatias, as tensões normais assumem o formato retangular e o cisalhamento é assumido como nulo, dessa forma, somente as fatias elásticas passam a suportar o esforço solicitante. Por fim, na Figura 28, tem-se o diagrama das tensões quando ocorre a formação da rótula plástica na seção do engaste, isto é, quando a seção está completamente escoada, visualizando-se o formato retangular do diagrama da tensão normal e a tensão de cisalhamento nula para todas as fatias.

Figura 25 - Carga Aplicada x Deslocamento Vertical para viga em balanço, $L/h = 10$.

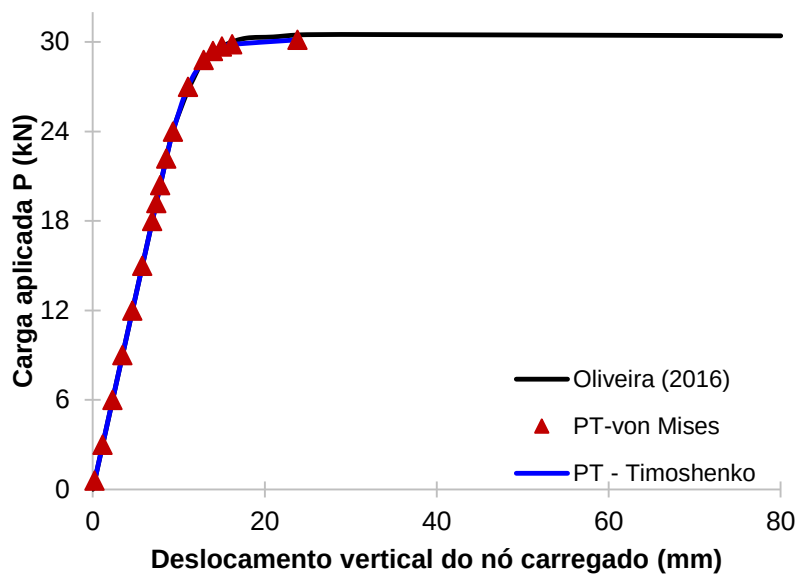


Figura 26 – Tensões de (a) cisalhamento e (b) normal no centro das fatias da seção transversal do engaste para $P = 70\%$ e $L/h = 10$: comportamento elástico.

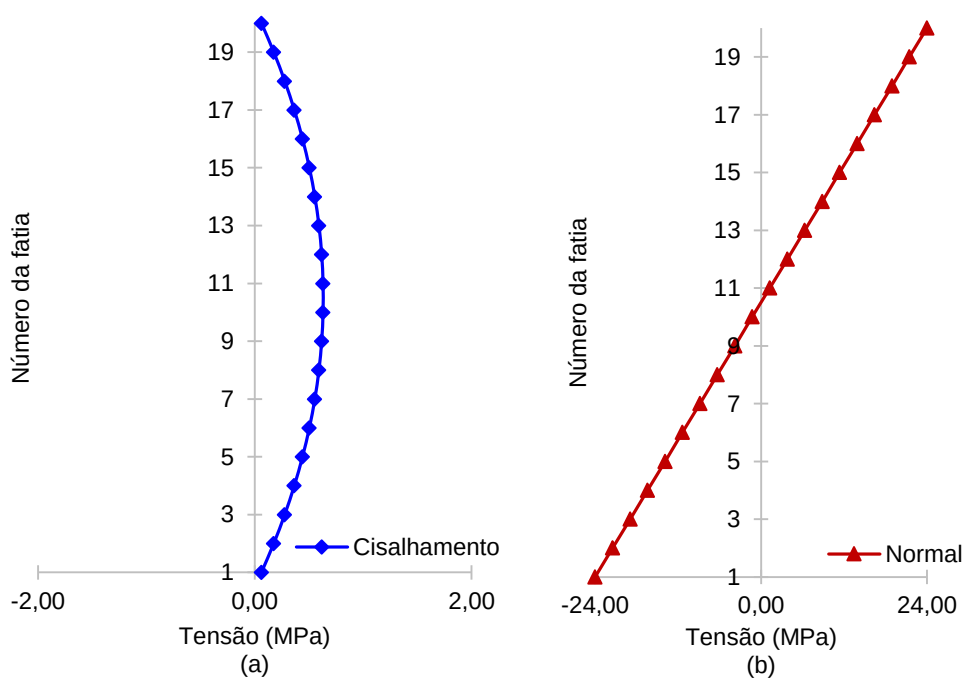
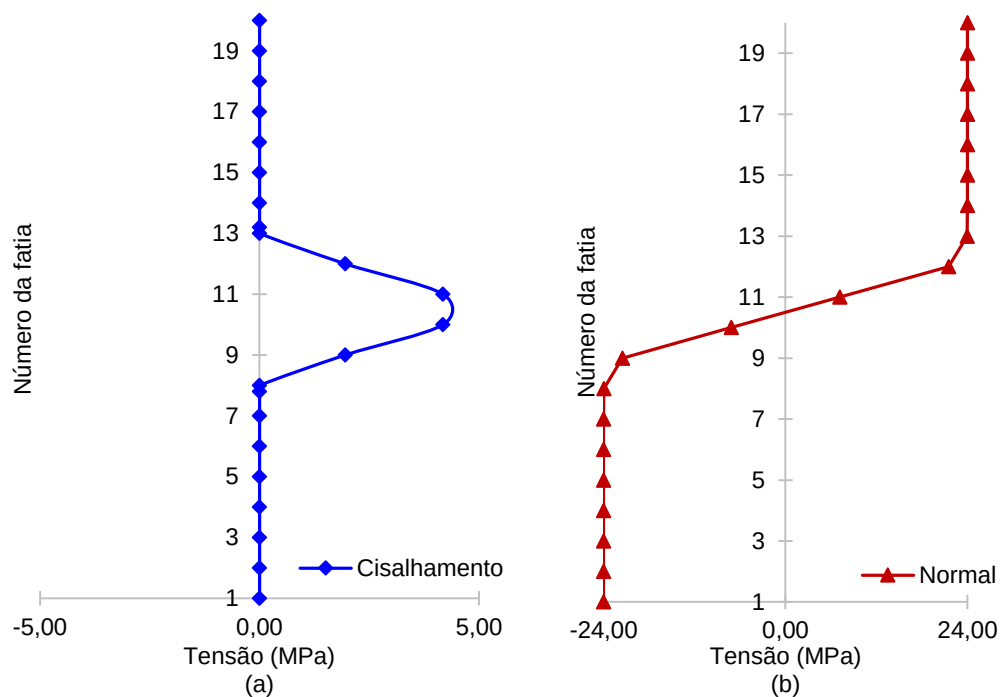
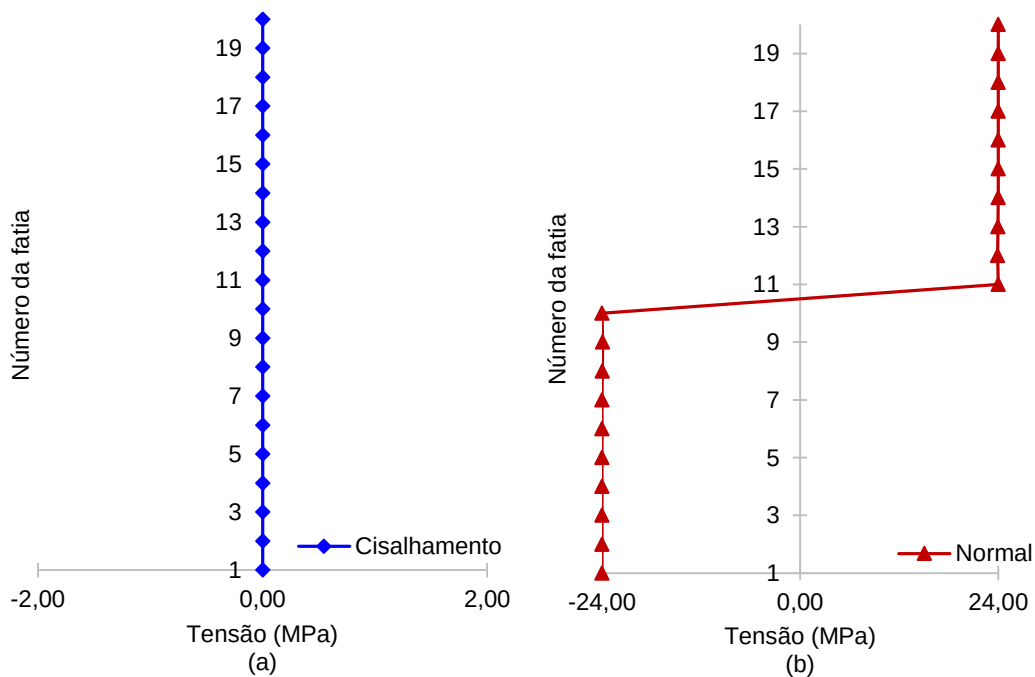


Figura 27 - Tensões de (a) cisalhamento e (b) normal no centro das fatias da seção transversal do engaste para $P = 99\%$ e $L/h = 10$: comportamento elastoplástico.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 28 - Tensões de (a) cisalhamento e (b) normal no centro das fatias da seção transversal do engaste para $P = 100,5\%$ e $L/h = 10$: comportamento totalmente plástico.



Fonte: Elaborado pelo autor

Os fatores de carga última obtidos para as diferentes razões L/h (comprimento/altura da seção transversal) analisados são apresentados na Tabela 10. Pode-se observar que para barras mais curtas, onde essa razão é menor, as tensões de cisalhamento exercem maiores influências no escoamento da seção, que resulta em menores fatores de carga última ao associar a falha por von Mises. Dessa forma, foram verificadas variações entre 1,5 e 8,5% nas cargas últimas ao comparar os resultados utilizando Timoshenko sem e com von Mises, para razões de L/h entre 1 e 3. Além disso, para razões iguais ou maiores do que 4, os fatores de carga, considerando ou não o critério de von Mises, foram iguais.

Tabela 10 - Fator de carga última para diferentes razões de comprimento por altura (L/h).

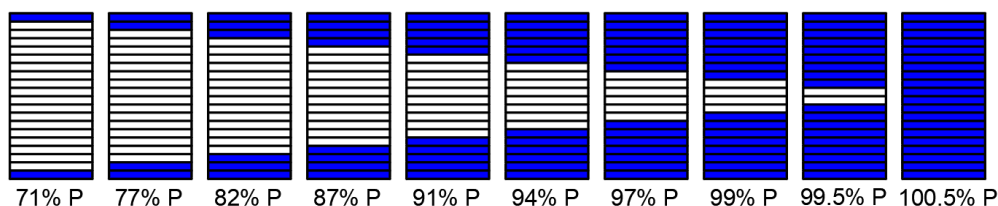
L (m)	L/h	Força aplicada (kN)	FATOR DE CARGA ÚLTIMA	
			Timoshenko sem von Mises	Timoshenko com von Mises
0,10	1,0	300	100,50% P	92,00% P
0,15	1,5	200	100,50% P	95,00% P
0,20	2,0	150	100,50% P	98,00% P
0,30	3,0	100	100,50% P	99,00% P
0,40	4,0	75	100,50% P	100,50% P
0,50	5,0	60	100,50% P	100,50% P
1,00	10,0	30	100,50% P	100,50% P

Fonte: Elaborado pelo autor

A propagação da plastificação ao longo da altura da seção transversal na extremidade engastada, ao considerar a teoria de Timoshenko e, levando-se em conta o escoamento apenas em relação à tensão normal, desenvolve-se conforme a Figura 29, para L/h igual a 10, e conforme a Figura 30 para $L/h \leq 5$. Pode-se observar pela Figura 29 que até 70% do carregamento, nenhuma fatia da seção encontra-se plastificada, comportando-se de forma elástica. Já para $L/h \leq 5$, Figura 30, verifica-se que o comportamento elástico se dá até 69% do carregamento, apresentando a primeira fatia plastificada em 70% da carga. Para essas razões L/h , verifica-se que o escoamento acontece de forma mais distribuída e assimétrica. Em todos os casos, com 71% da carga as duas fatias extremas encontram-se plastificadas e, à medida que o carregamento aumenta, a propagação da

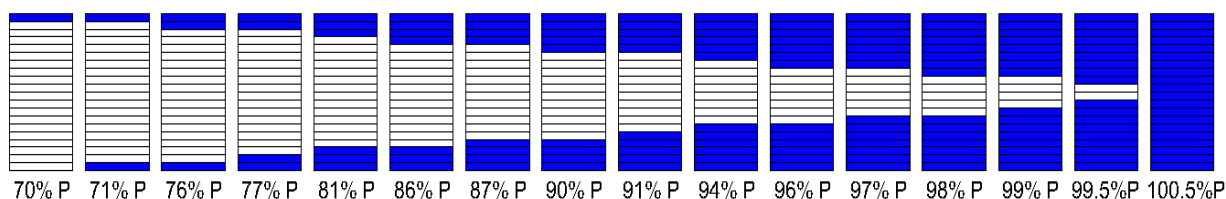
plastificação se desenvolve ao longo da altura da seção. Além disso, verifica-se que o colapso ocorreu em 100,5% P com escoamento de todas as fatias da seção transversal, formando a rótula plástica na seção do engaste.

Figura 29 - Distribuição da plastificação ao considerar a teoria Timoshenko sem von Mises para $L/h = 10$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 30 - Distribuição da plastificação ao considerar a teoria Timoshenko sem von Mises para $L/h \leq 5$.

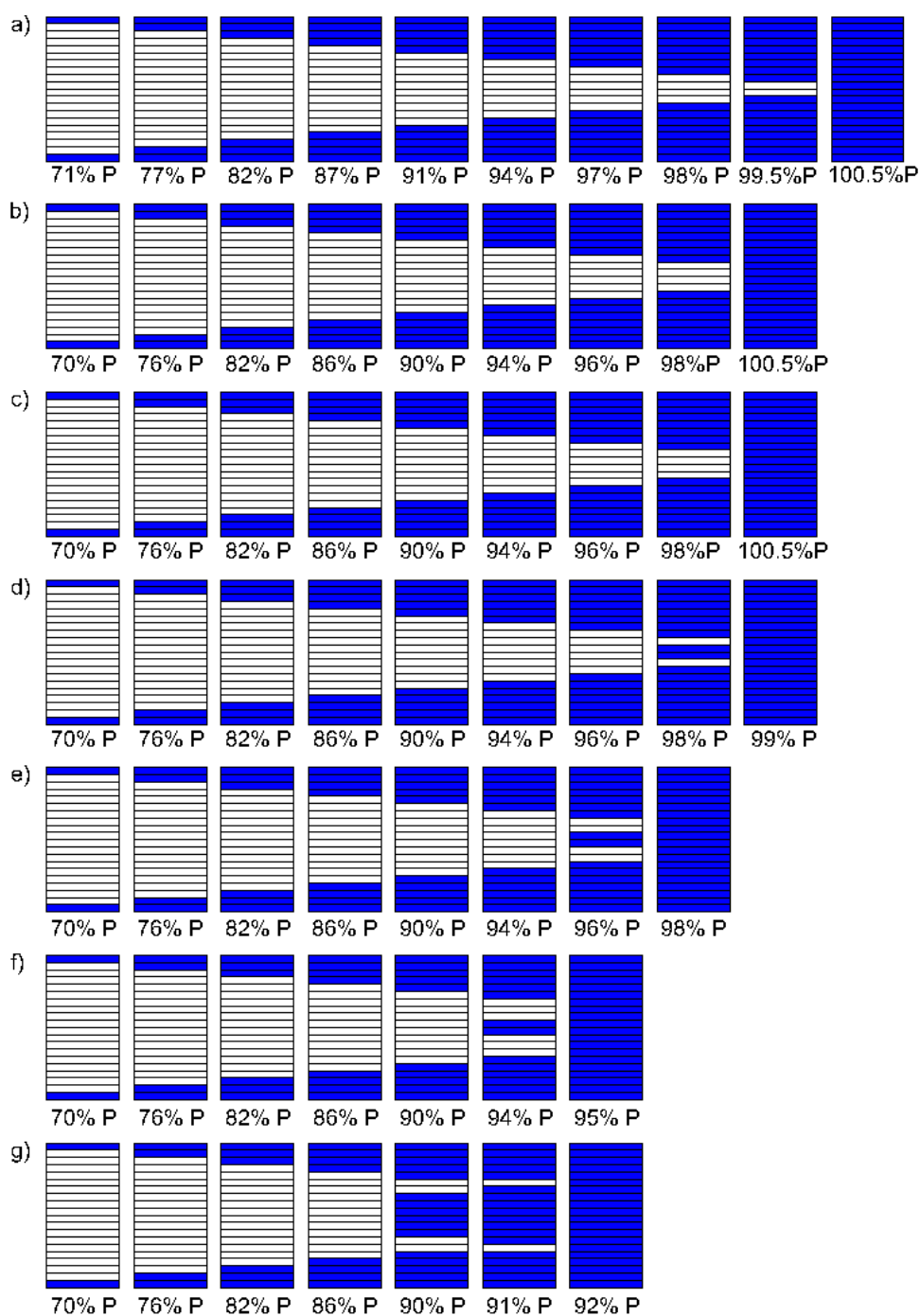


Fonte: Elaborado pelo autor

Ao considerar o critério de falha de von Mises, percebe-se uma variação na propagação da plastificação de acordo com o comprimento da viga. Na Figura 31 é apresentada a distribuição da plastificação na extremidade engastada da viga para as razões L/h analisadas. Para a razão L/h igual a 10, Figura 31a, pode-se visualizar que o escoamento da seção transversal acontece de forma bem semelhante à ilustrada na Figura 29, variando somente quanto ao escoamento de 16 fatias da seção transversal, que acontece em 99% P ao utilizar Timoshenko, e em 98% P ao associar o critério de von Mises. Para as relações L/h iguais a 5 e 4, Figura 31b e Figura 31c, respectivamente, verifica-se também a semelhança da distribuição da plastificação com aquela desenvolvida sem utilizar von Mises, ocorrendo o escoamento completo da seção transversal em 100,5% P. Para as vigas mais curtas, com as relações L/h menores ou iguais a 3, Figura 31d até Figura 31g, os efeitos das tensões de cisalhamento são enfatizados, uma vez que o

escoamento inicia-se de forma similar à Figura 29 mas, ao aproximar-se dos fatores de cargas últimas, as fatias centrais da seção transversal escoam antecipadamente, até a plastificação completa da seção transversal.

Figura 31 - Distribuição da plastificação no meio do vão considerando o critério de falha de von Mises para diferentes razões L/h , onde: a) $L/h = 10$; b) $L/h = 5$; c) $L/h = 4$; d) $L/h = 3$; e) $L/h = 2$; f) $L/h = 1.5$; g) $L/h = 1$.



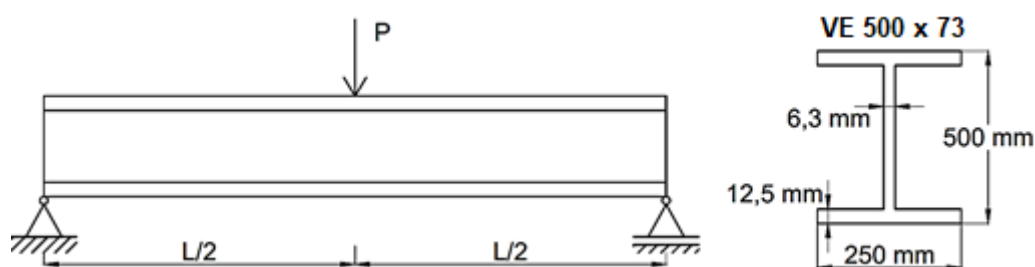
Fonte: Elaborado pelo autor

6.2.2 Viga Biapoiada com carga concentrada no meio do vão

Este exemplo tem como objetivo mostrar a influência da interação de σ_x e τ_{xy} durante o escoamento, considerando a teoria de Timoshenko e o critério de falha de von Mises.

A Figura 32 mostra uma viga biapoiada, constituída pelo perfil VE 500x73, com carga concentrada P aplicada no meio do vão, correspondente à carga teórica de colapso plástico. Considera-se a viga totalmente contida lateralmente. Para capturar os efeitos causados pelo cisalhamento ao incluir a interação entre as tensões normais e de cisalhamento, diferentes razões de comprimento por altura de seção transversal são consideradas, variando somente o comprimento da viga. O vão L foi dividido em 20 elementos de comprimentos iguais e a seção transversal dividida em 50 fatias. O aço adotado tem módulo de elasticidade igual a 20000 kN/cm² e tensão de escoamento igual a 25 kN/cm².

Figura 32 - Viga biapoiada com carga concentrada no meio do vão.



Fonte: Elaborado pelo autor

Os fatores de carga última obtidos para as razões L/h são apresentados na Tabela 11. Pode-se observar que para barras mais curtas, onde essa razão L/h é menor, as tensões de cisalhamento exercem maiores influências no escoamento da seção, o que resulta em menores fatores de carga última ao associar a falha por von Mises. Dessa forma, verificaram-se variações entre 1 e 7% nas cargas últimas ao comparar os resultados utilizando a teoria de Timoshenko sem e com von Mises, para razões de L/h entre 1,4 e 8. Além disso, para razões maiores ou igual 10 obteve-se fatores de carga iguais ao utilizar ou não von Mises.

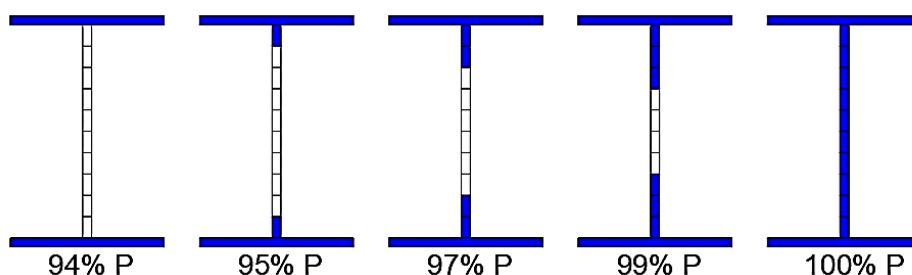
Tabela 11 - Fator de carga última para diferentes razões de comprimento por altura (L/h).

L (m)	L/h	Força aplicada (kN)	FATOR DE CARGA ÚLTIMA	
			Timoshenko sem von Mises	Timoshenko com von Mises
0,7	1,4	2688,60	100% P	93% P
1,0	2,0	1882,00	100% P	93% P
2,0	4,0	941,00	101% P	94% P
3,0	6,0	627,30	101% P	95% P
3,5	7,0	537,72	101% P	97% P
4,0	8,0	470,50	101% P	100% P
5,0	10,0	376,40	101% P	101% P
6,0	12,0	313,67	101% P	101% P
8,0	16,0	235,25	101% P	101% P
10,0	20,0	188,20	101% P	101% P
20,0	40,0	94,10	101% P	101% P

Fonte: Elaborado pelo autor

A propagação da plastificação ao longo da altura da seção transversal no meio do vão, levando-se em conta o escoamento apenas em relação à tensão normal (Timoshenko sem von Mises), se desenvolve de forma semelhante para todas as relações L/h de vigas. A Figura 33 apresenta a propagação da plastificação ao longo da altura da seção transversal para todas as relações de L/h. Pode-se observar que até 93% do carregamento, nenhuma fatia encontra-se plastificada, ou seja, o comportamento da viga é elástico. Com 94% da carga as duas fatias extremas, que representam as mesas do perfil, encontram-se plastificadas. À medida que o carregamento aumenta, as fatias da alma vão se plastificando, caracterizando a propagação da plastificação ao longo da altura da seção. Verifica-se que o colapso ocorre para 101% P quando todas as fatias da seção apresentaram-se escoadas. Neste incremento, durante o processo iterativo, o colapso ocorreu quando houve a formação do mecanismo plástico.

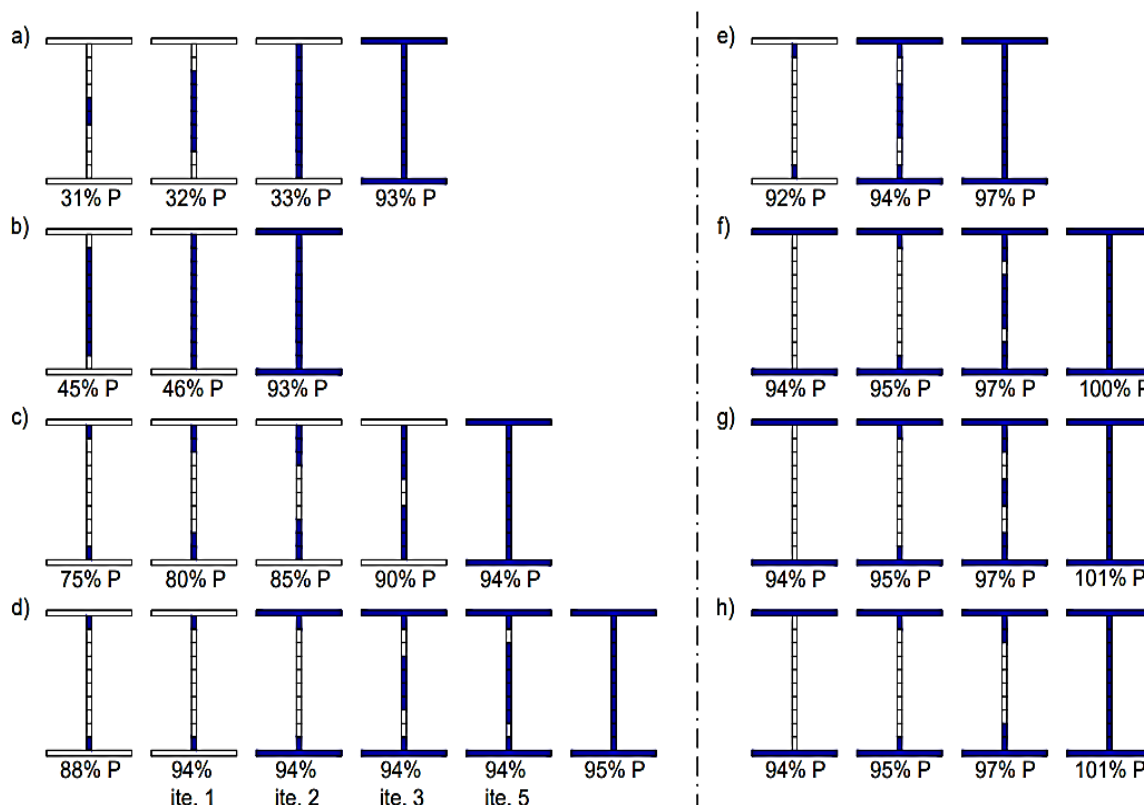
Figura 33 - Distribuição plastificação considerando o escoamento apenas em relação à tensão normal.



Fonte: Elaborado pelo autor

Ao considerar o critério de falha de von Mises, percebe-se uma variação na propagação da plastificação de acordo com o comprimento da viga. A Figura 34 apresenta a distribuição da plastificação no meio do vão da viga para razões L/h variando de 1,4 a 12. Observa-se que para as vigas mais curtas, com razões L/h até 2, o escoamento inicia-se pelas fatias centrais da alma, uma vez que essas regiões são mais solicitadas ao cisalhamento. Já para L/h variando-se de 4 a 7, o escoamento ainda se inicia pela alma do perfil, porém nas fatias mais externas, demonstrando que, para esses casos, a combinação efetiva entre as tensões normal e de cisalhamento causam o escoamento das fatias. Observa-se a influência do cisalhamento na plastificação da seção transversal até a relação L/h igual a 10, com o surgimento do escoamento das fatias na região central da alma. Verifica-se que, à medida que L/h aumenta, a propagação da plastificação na seção transversal devido ao incremento de carga assume um comportamento cada vez mais próximo daquele ilustrado pela Figura 33. A partir da relação L/h igual a 16, essas distribuições tornam-se idênticas e a influência da interação das tensões normais e de cisalhamento podem ser desconsideradas. Esse estudo evidencia a necessidade de se considerar as influências das tensões de cisalhamento na plastificação das seções, especialmente para situações de barras curtas.

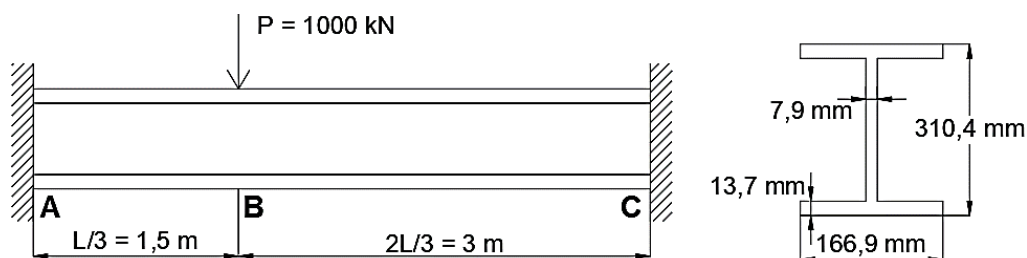
Figura 34 - Distribuição da plastificação no meio do vão considerando o critério de falha de von Mises para diferentes razões L/h , onde: a) $L/h = 1,4$; b) $L/h = 2$; c) $L/h = 4$; d) $L/h = 6$; e) $L/h = 7$; f) $L/h = 8$; g) $L/h = 10$; h) $L/h = 12$.



6.2.3 Viga biengastada com carga concentrada a 1/3 do vão

Este exemplo é apresentado por NEAL (1985) e tem como objetivo estudar o comportamento elastoplástico de uma viga biengastada. Para isso, realiza-se a comparação entre os resultados obtidos pelo programa, considerando a teoria clássica de Bernoulli-Euler e a teoria de Timoshenko com o critério de falha de von Mises, até a formação do mecanismo. A viga biengastada possui 4,5 m de vão, totalmente contida lateralmente, e está submetida à uma carga concentrada, P igual a 1000 kN, aplicada a 1/3 do vão, na seção B, conforme mostra a Figura 35. A relação L/h é igual a 14,5.

A viga foi dividida em 18 elementos de igual comprimento e a seção transversal do perfil "I", com dimensões apresentada na Figura 35, foi dividida em 20 fatias. O módulo de elasticidade e a tensão de escoamento do aço adotados foram, respectivamente, iguais a 20500 kN/cm² e 25 kN/cm².

Figura 35 - Viga biengastada com carga concentrada aplicada a 1/3 do vão.

Fonte: Elaborado pelo autor

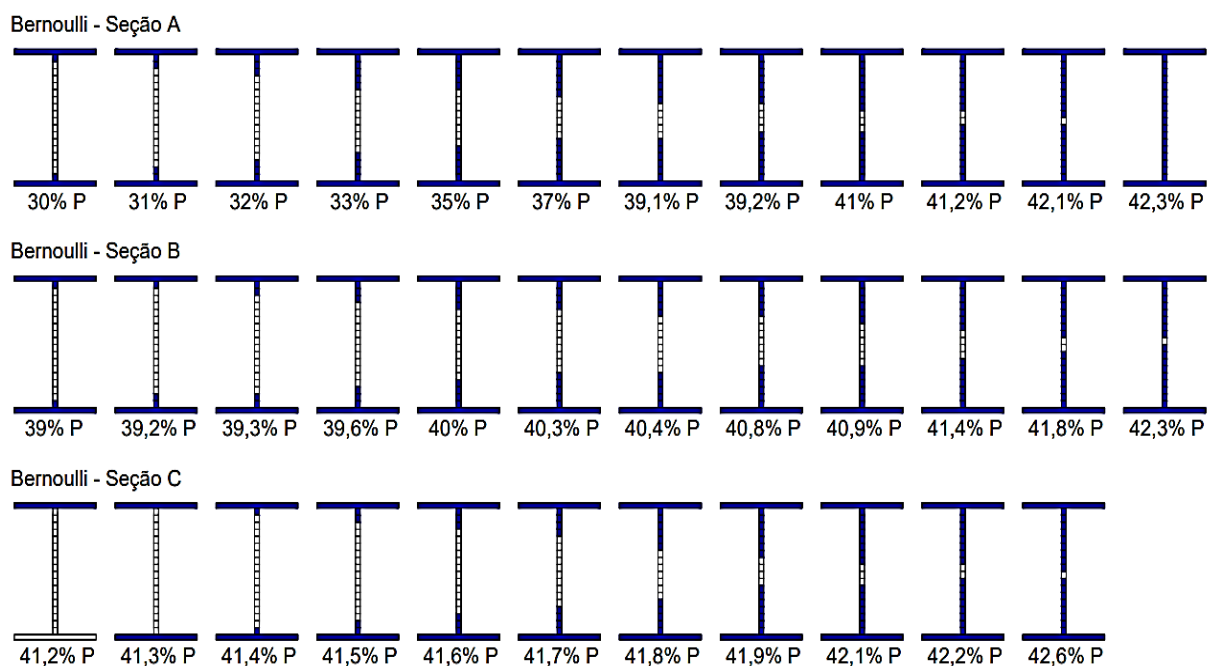
A Tabela 12 apresenta o desenvolvimento da flecha na seção B e a propagação da plastificação nas seções A, B e C em função do incremento de carga, considerando as teorias de Bernoulli-Euler e Timoshenko com von Mises, obtidas pelo programa. A Figura 36 ilustra a propagação da plastificação nessas seções considerando a teoria clássica e a Figura 37 levando-se em conta a teoria de Timoshenko e o critério de escoamento de von Mises.

Tabela 12 - Flecha na seção B e propagação de plastificação nas seções.

Carga (kN)	Bernoulli		Timoshenko e von Mises	
	Δ_B (cm)	Porcentagem de plastificação	Δ_B (cm)	Porcentagem de plastificação
280	-0,394	-	-0,557	A=3,65%
300	-0,429	A=70,81%	-0,600	A=100%
340	-0,540	A=81,76%	-0,771	A=100%
350	-0,572	A=85,41%	-0,821	A=100% B=3,65%
380	-0,669	A=89,05%	-0,974	A=100% B=9,12%
390	-0,727	A=89,05% B=70,81%	-1,047	A=100% B=96,35%
393	-0,754	A=92,70% B=74,46%	-1,086	A=100% B=100%
408	-1,006	A=92,70% B=87,23%	-1,406	A=100% B=100%
409	-1,034	A=92,70% B=89,05%	-1,439	A=100% B=100% C=40,88%
410	-1,062	A=94,52% B=89,05%	-1,481	A=100% B=100% C=42,70%
412	-1,121	A=96,35% B=89,05% C=33,58%	-1,572	A=100% B=100% C=76,29%
413	-1,162	A=96,35% B=89,05% C=67,16%	-1,655	A=100% B=100% C=89,05%
414	-1,221	A=96,35% B=92,70% C=70,81%	-	-
423	-3,430	A=100% B=98,17% C=96,35%	-	-
426	-4,758	A=100% B=98,17% C=98,17%	-	-

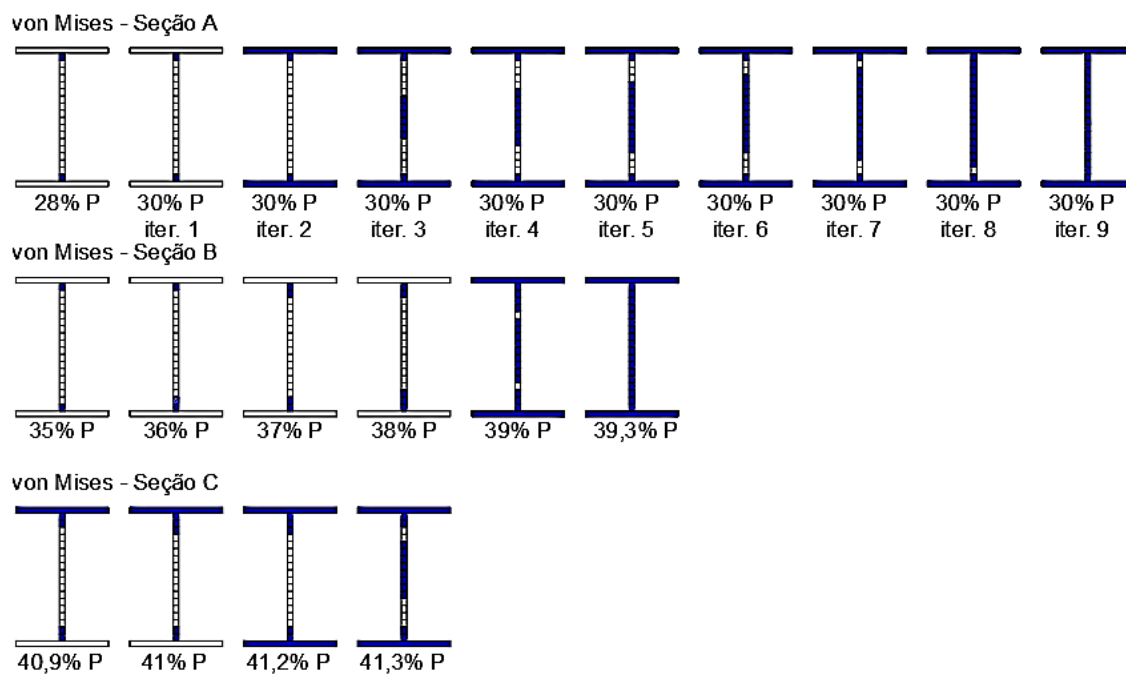
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 36 - Propagação da plastificação nas seções A, B e C para viga biengastada considerando Bernoulli-Euler.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 37 - Propagação da plastificação nas seções A, B e C para viga biengastada considerando Timoshenko e von Mises.



Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se na Tabela 12 e nas Figuras 36 e 37 que, quando a teoria clássica é considerada, o desenvolvimento da flecha até 280kN de carga ocorre no regime elástico sem apresentar escoamento em qualquer seção, com um valor igual 0,395 cm na seção B. Quando a teoria de Timoshenko associada ao critério de von Mises é adotada, verifica-se que a flecha para o mesmo incremento de carga aumenta consideravelmente, passando a ter um valor igual a 0,557 cm. A partir de 300kN de carga, observa-se o aparecimento das fatias nas mesas escoadas na seção A, quando a teoria clássica é empregada. A plastificação na viga, considerando-se a teoria de Timoshenko com von Mises inicia-se antes, quando a carga é igual a 280kN. Diferentemente da teoria clássica, observa-se que o início do escoamento ocorre nas extremidades da alma da seção transversal, devido a influência do cisalhamento na plastificação.

Pode-se observar que para a carga de colapso ao utilizar a teoria de Timoshenko associado ao critério de von Mises (413 kN), a flecha obtida é 42% maior quando comparada ao resultado para o mesmo valor de P da teoria clássica de Bernoulli-Euler.

O número de fatias plastificadas na seção A aumenta de forma gradativa, mas com diferença no comportamento da propagação do escoamento nas fatias até o colapso entre as análises. Antes da formação completa da rótula plástica em A, inicia-se a formação da rótula na seção B, a partir de 390kN de carga, quando a teoria clássica é adotada. Quando se considera a teoria de Timoshenko com von Mises, o início da plastificação em B somente ocorre após a formação completa da rótula na seção A, tornando-se uma rótula plástica na seção B com 393kN de carga.

Antes da formação completa da rótula plástica em A e B, que ocorre em 423kN de carga, inicia-se a formação da rótula na seção C, a partir de 412kN de carga, quando a teoria clássica é adotada. Quando se considera a teoria de Timoshenko com von Mises, o início da plastificação em C somente ocorre após a formação completa das rótulas nas seções A e B, ou seja, para 409kN de carga, tornando-se uma rótula plástica quando a carga atinge 413kN na seção C.

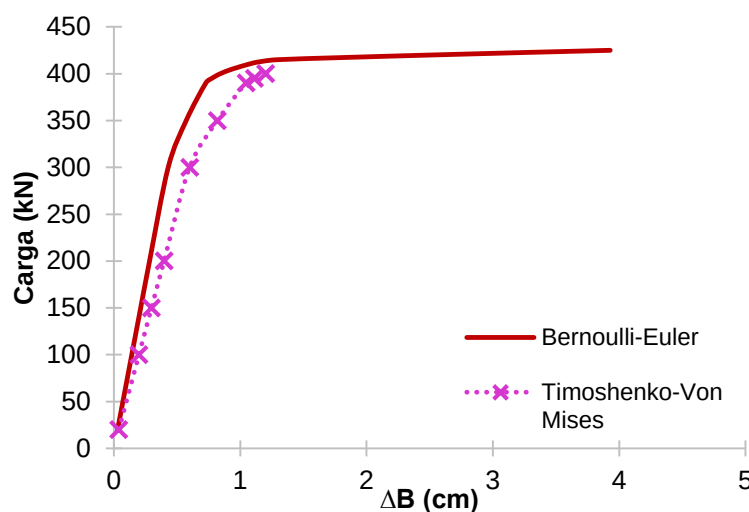
As seções A, B e C estão parcialmente bastante plastificadas, mostrando que as rótulas plásticas não se formam instantaneamente nas seções, conforme prevê o cálculo plástico teórico. Entretanto, nota-se uma diferença no comportamento da propagação do escoamento nas fatias das seções até o colapso entre as análises clássica de Bernoulli e Timoshenko associada ao critério de falha de von Mises.

Neste exemplo, o mecanismo plástico ocorre para 426kN e 413kN da carga aplicada, para a análise considerando-se a teoria clássica e a teoria de Timoshenko com von Mises, respectivamente. Para as cargas de colapso, as flechas na seção B são iguais a 4,758cm e 1,655cm para as respectivas teorias, conforme pode ser observado na Tabela 12.

Pela Figura 37 observa-se um escoamento aparentemente abrupto da seção A ao utilizar o critério de falha de von Mises. Porém, percebe-se que o escoamento gradual ocorre no incremento analisado, a partir do processo iterativo que é aplicado pelo software. Isso acontece pois, em cada iteração as propriedades da seção são recalculadas à medida que as fatias vão se tornando plásticas, dessa forma, áreas cada vez menores passam a resistir aos esforços solicitantes do incremento em questão. Além disso, pode-se visualizar que, o estado de tensões proposto por von Mises causa um escoamento bem antecipado das seções transversais quando comparado ao método clássico.

Neal (1985) obteve os valores de carga última iguais a 421,5 kN e 391,2 kN na ausência e presença do critério de von Mises, respectivamente, apresentando uma diferença de cerca de 7,2% entre as análises. Já para os resultados numéricos, essa diferença foi de 3%, demonstrando uma boa adequação de resultados obtidos pelo programa. O gráfico da Figura 38 apresenta o comportamento da viga comparando os resultados do presente programa ao utilizar a análise clássica e a de Timoshenko com von Mises. Conclui-se que, ambas as análises preveem com boa precisão a carga de colapso da estrutura e que a deformação por cisalhamento tem influência sob a carga última e sob a flecha, em todos os incrementos de carga até o colapso.

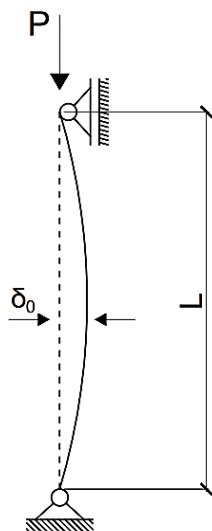
Figura 38 - Relação carga x flecha da viga biengastada com carga concentrada aplicada a 1/3 do vão



Fonte: Elaborado pelo autor

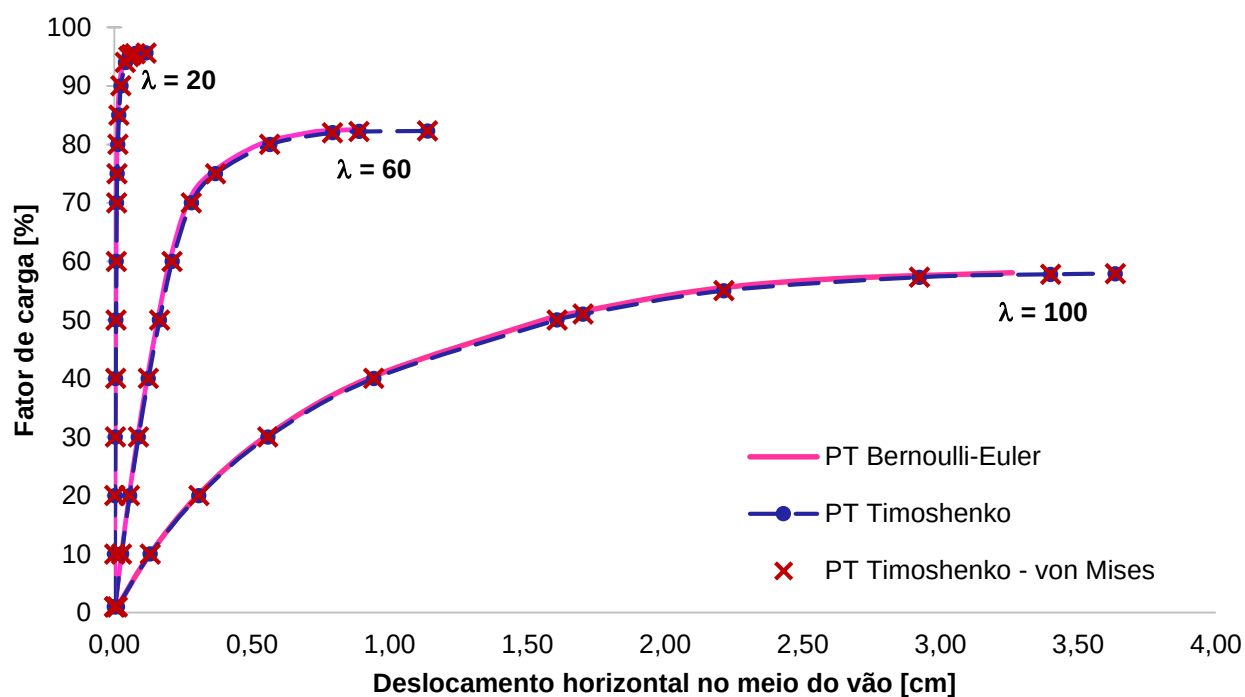
6.2.4 Pilar biapoiado de Chen, Goto e Liew

O modelo apresentado em Chen, Goto e Liew (1996) e discutido em Kim e Chen (1996) é ilustrado na Figura 39. São analisados pilares com três índices de esbeltez, considerando imperfeição geométrica e tensões residuais, com o intuito de obter a carga de flambagem elástica ou elastoplástica. Os pilares, constituídos pelo perfil 8WF31, são adaptados pelo perfil W 200x46,1 com momento de inércia e dimensões equivalentes. O pilar é constituído de aço ASTM 36, com tensão de escoamento igual a 25 kN/cm² e módulo de elasticidade igual a 20000 kN/cm². Considera-se a tensão residual igual a 30% da resistência ao escoamento do aço, do tipo linear nas mesas e constante na alma, e a imperfeição geométrica inicial igual a $L/1000$. Avalia-se os três índices de esbeltez para o pilar, sendo os valores de λ iguais a 100, 60 e 20, obtendo comprimentos L iguais a 881 cm, 528,6 cm e 176,2 cm. No pilar atua uma carga vertical $P = \gamma P_y$, sendo $P_y = 1465$ kN. O pilar é dividido em 10 elementos finitos e a seção transversal é dividida em 50 fatias, sendo 20 fatias para cada mesa e 10 fatias para a alma.

Figura 39 - Pilar biapoado de Chen, Goto e Liew

Fonte: Adaptado de CHEN, GOTO E LIEW (1996)

As trajetórias de equilíbrio apresentadas na Figura 40 relacionam o fator de carga e o deslocamento horizontal no meio do vão do pilar, para a análise considerando Bernoulli-Euler e Timoshenko sem e com von Mises para os três índices de esbeltez mencionados. Os fatores de carga última (P/P_y) obtidos pela presente formulação são comparados com os apresentados por Kim e Chen (1996) e dispostos na Tabela 13.

Figura 40 - Deslocamento horizontal no meio do vão (cm).

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 13 - Fatores de carga última para o pilar biapoado.

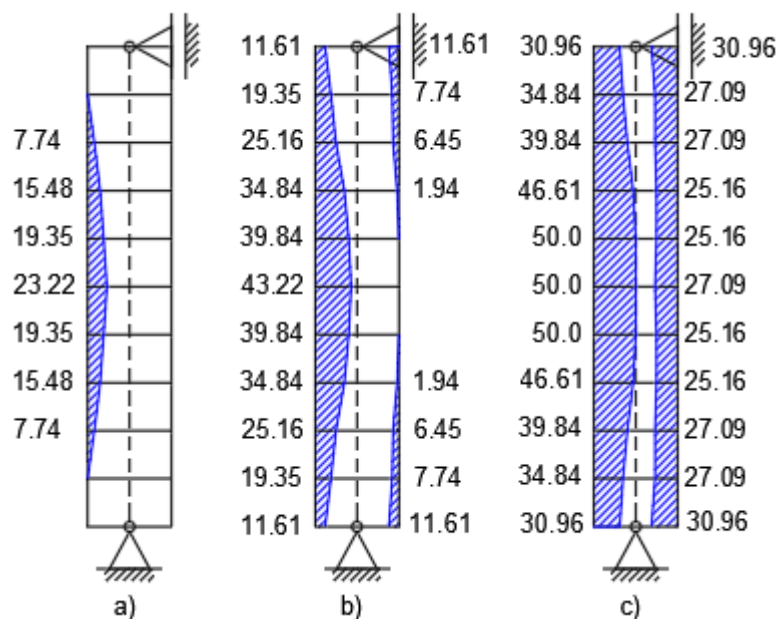
λ	Kim e Chen (1996)	PT Bernoulli-Euler	PT Timoshenko sem e com von Mises
20	0,938	0,957	0,955
60	0,792	0,825	0,823
100	0,590	0,581	0,579

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela Figura 40 observa-se que, ao utilizar a teoria de Timoshenko para todos os índices de esbeltez λ , o modelo analisado passa a admitir maiores deslocamentos associados à menores capacidades de carga quando comparado com a teoria clássica. Ao associar a teoria de viga de Timoshenko ao critério de falha de von Mises não ocorreram variações dos resultados em relação ao modelo sem o critério, indicando que, nessas condições, os efeitos das tensões de cisalhamento não são determinantes para a falha da estrutura. Pode-se perceber por meio da Tabela 13 que, para os valores de λ iguais a 20 e a 60, os resultados de Kim e Chen (1996) mostraram-se mais conservadores em relação aos da presente formulação. Já para λ igual a 100, os fatores de carga do presente trabalho foram menores. Para os três índices de esbeltez analisados, considerando tanto a teoria clássica de Bernoulli-Euler, quanto Timoshenko sem e com von Mises, as diferenças de capacidades de cargas foram menores que 5% em relação aos obtidos por Kim e Chen (1996), demonstrando uma boa aproximação de resultados.

A Figura 41 ilustra a distribuição da plastificação ao longo do comprimento longitudinal dos pilares no colapso ao utilizar a teoria de Timoshenko associado ao critério de falha de von Mises. Pode ser observado que quanto menor a esbeltez do pilar, mais acentua-se o processo de escoamento. Além disso, a plastificação máxima ocorre no meio do vão para todos os casos.

Figura 41 - Percentual de plastificação nas zonas plásticas dos pilares ao considerar o escoamento por von Mises: (a) $\lambda = 100$; (b) $\lambda = 60$; (c) $\lambda = 20$.

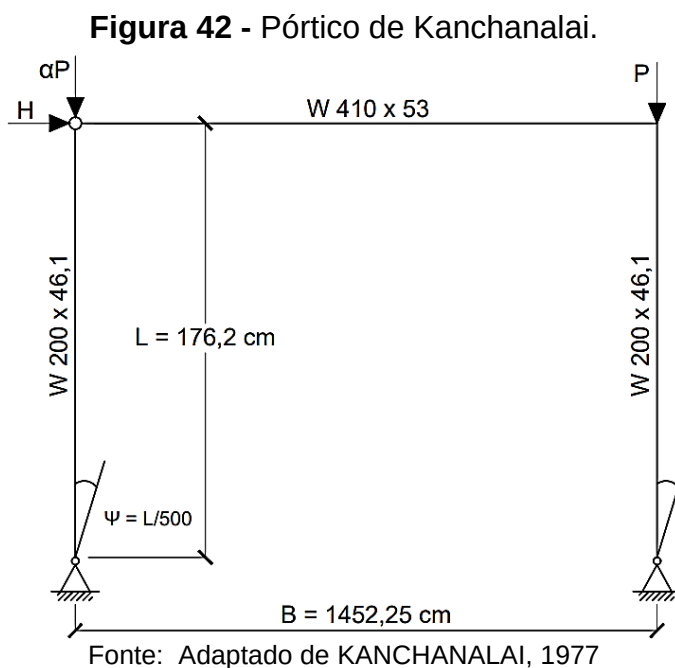


Fonte: Elaborado pelo autor

6.2.5 Pórtico de Kanchanalai

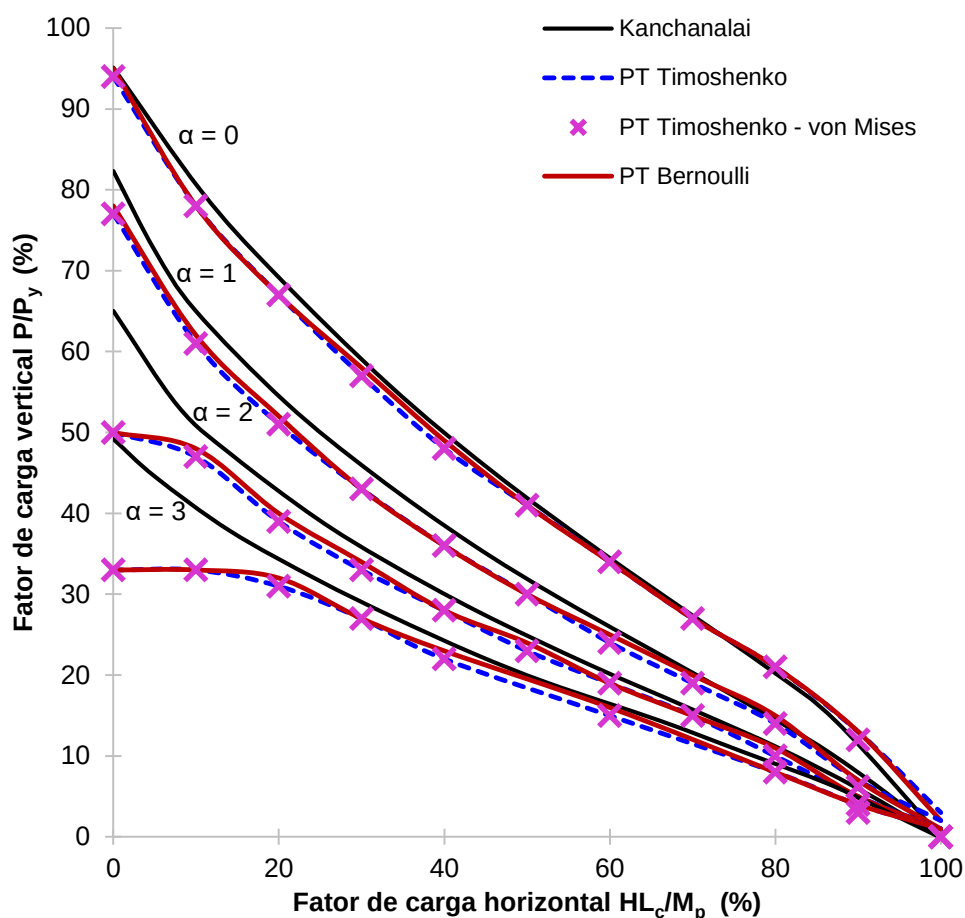
Kanchanalai (1977) analisou o pórtico de um andar e um vão em que o pilar da esquerda é instável (leaned-column). O pórtico é ilustrado na Figura 42. Esse exemplo tem como objetivo determinar a curva de interação entre o momento fletor e a força normal, considerando as imperfeições geométricas e as tensões residuais. Os pilares são constituídos pelo perfil 8WF31 e foram adaptados pelo perfil W 200x46,1 com momento de inércia e dimensões equivalentes. A seção transversal foi dividida em 50 fatias, sendo 20 fatias para cada mesa e 10 fatias para a alma. O autor não indica o perfil da viga, sendo selecionada a seção que respeite a relação de rigidez viga-pilar $G = 2$, adotando-se então o perfil W 410x53. A esbelteza $L/r_x = 20$ foi utilizada para determinar a altura dos pilares, sendo $r_x = 8,81$ cm e $L = 176,2$ cm. Os membros são constituídos de aço ASTM 36, com resistência ao escoamento igual a 25 kN/cm^2 e módulo de elasticidade igual a 20500 kN/cm^2 . Considera-se a tensão residual sendo igual a 30% da resistência ao escoamento do aço, com distribuição linear nas mesas e constante na alma, e imperfeição geométrica inicial $\delta_0 = L/500 = 0,3524$ cm. O pórtico apresenta uma carga vertical no topo dos pilares $P = \%P_y$, em que $P_y = 1465 \text{ kN}$ é a carga correspondente ao escoamento do pilar e uma força horizontal $H = \%H_y$, em que $H_y = M_p/L = 70,2 \text{ kN}$, que causa formação de

rótula plástica pelo momento plástico $M_p = 12.382,5 \text{ kN.cm}$. Nesse exemplo são analisadas diferentes intensidades de cargas axiais aplicadas no pilar instável, onde são considerados fatores de α aplicados à carga P , sendo adotados α igual a 0, 1, 2 e 3. O pórtico foi dividido em 6 elementos finitos para cada pilar e 8 elementos finitos para a viga.



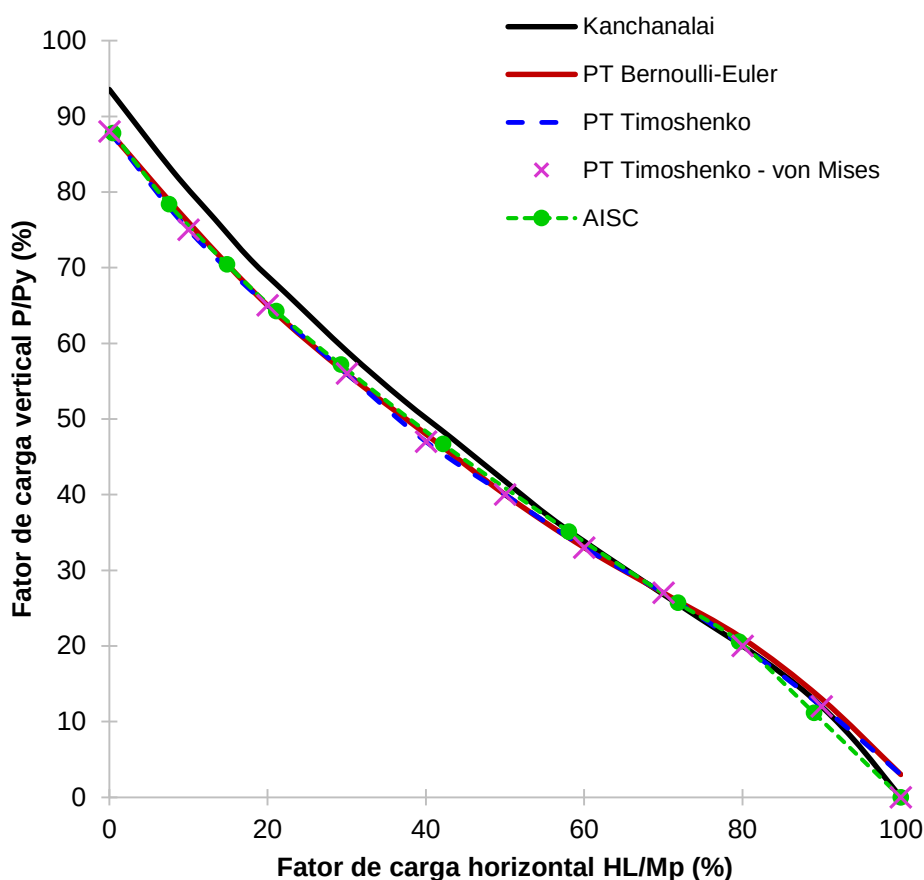
Na Figura 43 são apresentadas as curvas de interação propostas por Kanchanalai (1977) atuando a carga P no pilar direito e a carga αP no pilar esquerdo, sem considerar, inicialmente, as imperfeições geométricas. O gráfico apresenta no eixo das ordenadas os fatores de carga referentes ao carregamento axial, enquanto que no eixo das abscissas são considerados os fatores referentes ao momento fletor do pilar. Pode ser observado que os resultados da presente formulação para α igual a 0 e a 1 aproximam-se bastante dos obtidos por Kanchanalai, demonstrando um adequado funcionamento do software. Para α igual a 2 e a 3, quando não há atuação da força horizontal, o pórtico falha para porcentagem de cargas αP que causa o escoamento do pilar instável. Além disso, para esse exemplo, pode ser verificado que os efeitos das tensões de cisalhamento não são preponderantes no escoamento da seção.

Figura 43 - Diagrama de interação para o pórtico de Kanchanalai (1977) sem imperfeição geométrica.



Na Figura 44 apresenta-se a curva de interação proposta por Kanchanalai (1977) quando da atuação de uma carga vertical P no pilar direito e nenhuma carga vertical no pilar esquerdo ($\alpha = 0$), e incluindo as imperfeições geométricas e tensões residuais. Observa-se uma boa correlação dos resultados obtidos pelo programa com aqueles obtidos por Kanchanalai e uma excelente correlação com os resultados do AISC LRFD. Essas pequenas variações com relação aos valores de referência podem ser decorrentes da adequação do perfil do pilar ou pela escolha do perfil da viga a partir dos dados disponibilizados por Kanchanalai.

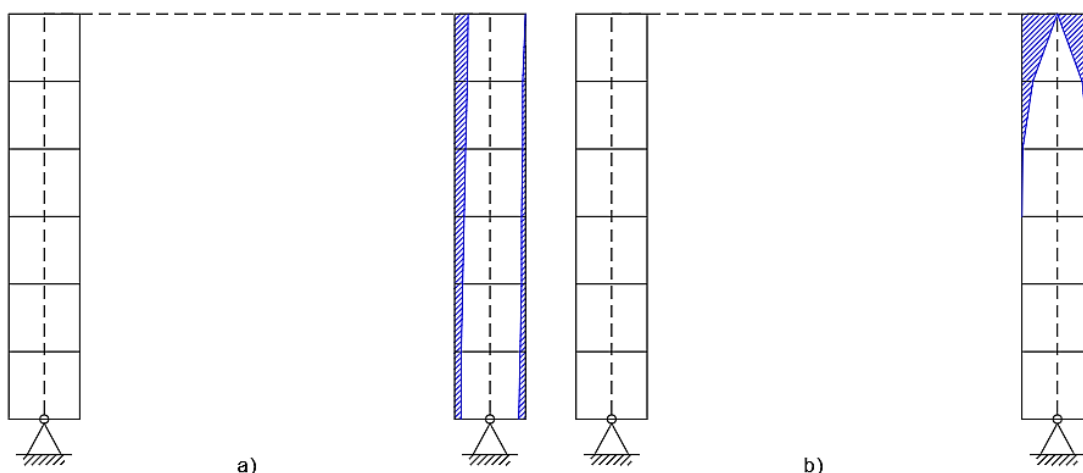
Figura 44 - Diagrama de interação para o pórtico de Kanchanalai (1977) com imperfeição geométrica.



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 45 ilustra a distribuição da plastificação ao longo dos pilares do pórtico para o carregamento último quando tem-se a atuação de uma carga vertical P no pilar direito e nenhuma carga vertical no pilar esquerdo ($\alpha = 0$), ao utilizar a teoria de Timoshenko associada ao critério de von Mises e considerando as imperfeições geométricas. A Figura 45a representa a plastificação sem a atuação da força horizontal, isto é $\mu = 0\%$, e a Figura 45b com 100% dessa força, correspondente à carga de formação do momento plástico M_p . Pode ser visualizado no primeiro caso o desenvolvimento da plastificação ao longo de todo comprimento do pilar direito, enquanto que no segundo caso a plastificação ocorre na extremidade superior do pilar direito ocorrendo o colapso da estrutura.

Figura 45 - Distribuição da plastificação no pórtico de Kanchanalai (1977) ao considerar o escoamento por von Mises: (a) 0% de H_y ; (b) 100% de H_y .



Fonte: Elaborado pelo autor

6.2.6 Pórtico de um andar e um vão de Vogel

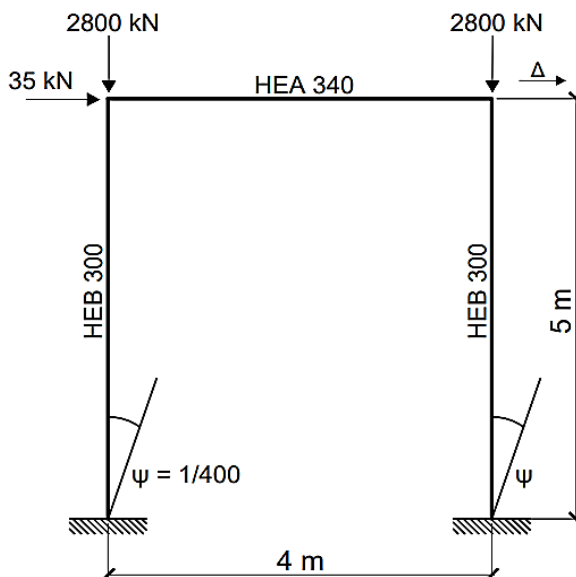
A estrutura do portal mostrada na Figura 46 foi analisada por Vogel (1985) considerando as ligações rígidas. Essa estrutura foi estudada por diversos pesquisadores como uma referência de solução, considerando as não linearidades geométricas e do material, as tensões residuais, a distribuição da plasticidade e as ligações rígidas entre a viga e o pilar, podendo citar Nguyen e Kim (2016) e Silva, et al. (2018). Nguyen e Kim (2016) também analisaram o pórtico considerando o comportamento de ligações semirrígidas e de ligações idealmente rotuladas. Os autores analisaram a influência das deformações por cisalhamento na estrutura.

As cargas aplicadas, a seção transversal das barras, bem como a geometria da estrutura do portal estão apresentados na Figura 46. A imperfeição geométrica inicial dos pilares é assumida como $\psi = 1/400$ e foi considerada neste trabalho como uma carga nocional de 14,0 kN aplicada no topo do pórtico. Foram consideradas tensões residuais lineares nas mesas e na alma com valores iguais a 50% e 30% da resistência ao escoamento do aço para pilares e vigas, respectivamente.

Na discretização da estrutura, a viga e os pilares foram divididos em 10 elementos e as seções transversais em 50 fatias, sendo 20 fatias para cada mesa e 10 fatias para a alma. O carregamento vertical e horizontal foi incrementado até a estrutura atingir a carga última. O comportamento tensão-deformação é considerado elástico perfeitamente plástico até uma deformação de escoamento igual a 0,04. A tensão de escoamento é igual a 235 MPa e o módulo de elasticidade longitudinal

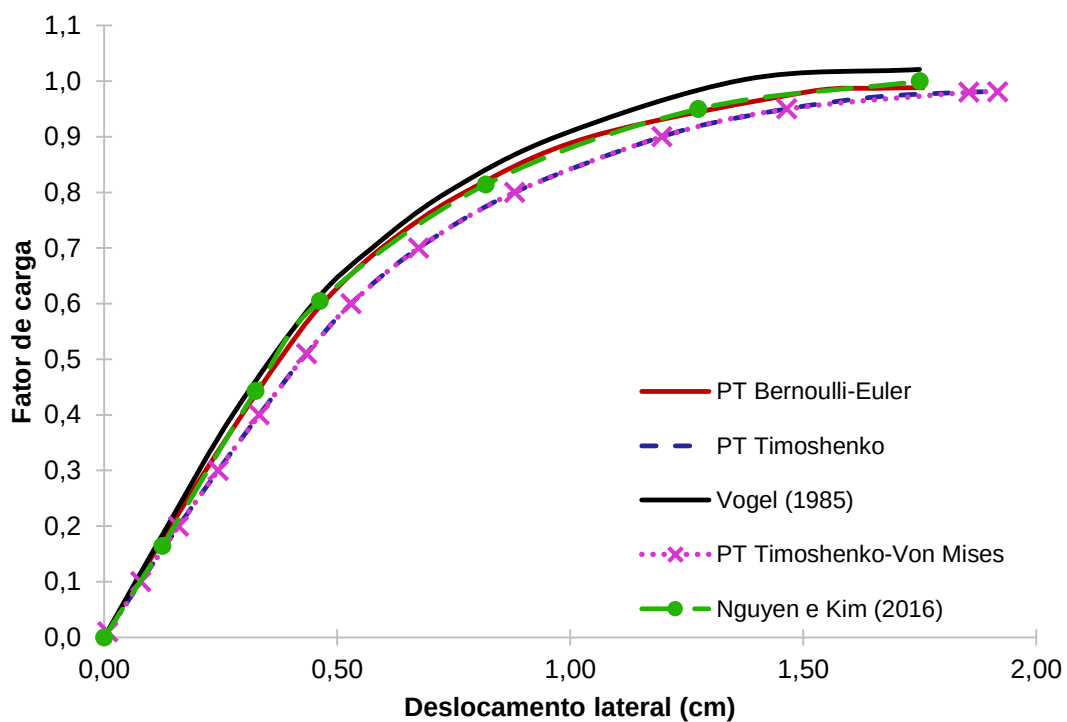
igual a 205 GPa. Os resultados obtidos pelo programa foram comparados com os resultados obtidos por Nguyen e Kim (2016) e são apresentados na Figura 47, considerando as ligações rígidas, e na Figura 48 para as ligações rotuladas.

Figura 46 - Portal de Vogel.



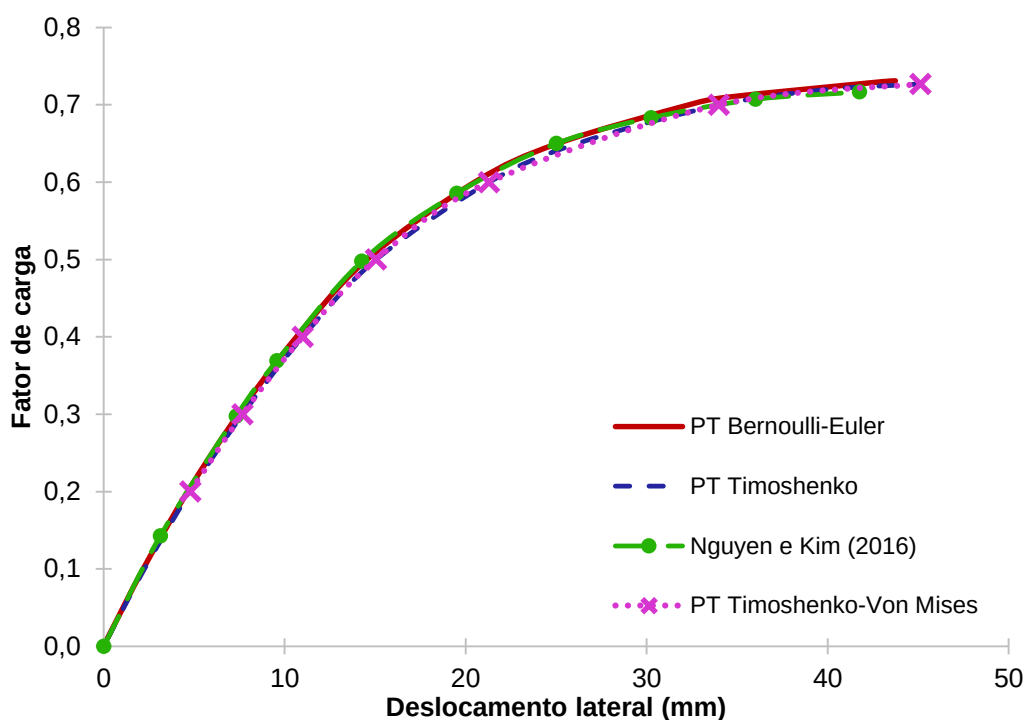
Fonte: NGUYEN E KIM, 2016

Figura 47 - Curva fator de carga x deslocamento para o pórtico de Vogel com conexões viga-pilar rígidas.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 48 - Curva fator de carga x deslocamento para o pórtico de Vogel com conexões viga-pilar rotuladas.



Fonte: Elaborado pelo autor

Das Figuras 47 e 48, observa-se que os resultados obtidos pelo programa PPLANLEP apresentam boa concordância com os resultados de Nguyen e Kim (2016), principalmente quando se considera a teoria clássica de Euler-Bernoulli, que foi o método também adotado pelos autores. Para o pórtico com ligações rígidas, os fatores de carregamento do presente trabalho são mais conservadores, principalmente quando se utiliza a teoria de vigas de Timoshenko, obtendo uma diferença de 2% em relação a Nguyen e Kim (2016). Para o pórtico considerando as ligações rotuladas, os resultados de fator de carga obtidos por Nguyen e Kim (2016) são menores, atingindo uma diferença de 1,81% ao considerar a teoria de Euler-Bernoulli, e 1,25% ao considerar Timoshenko com e sem critério de escoamento de von Mises. Para ambas as ligações, observa-se que, ao considerar a teoria de Timoshenko, a redução da capacidade de carga está associada a maiores deslocamentos. Além disso, pode-se observar que, para esse modelo, as tensões de cisalhamento não influenciam o escoamento do material e, conseqüentemente, ao utilizar o critério de escoamento de von Mises, as cargas últimas não apresentam variações. As capacidades de carga obtidas pela presente formulação são

comparadas com os resultados de Vogel (1985) e Nguyen e Kim (2016) na Tabela 14.

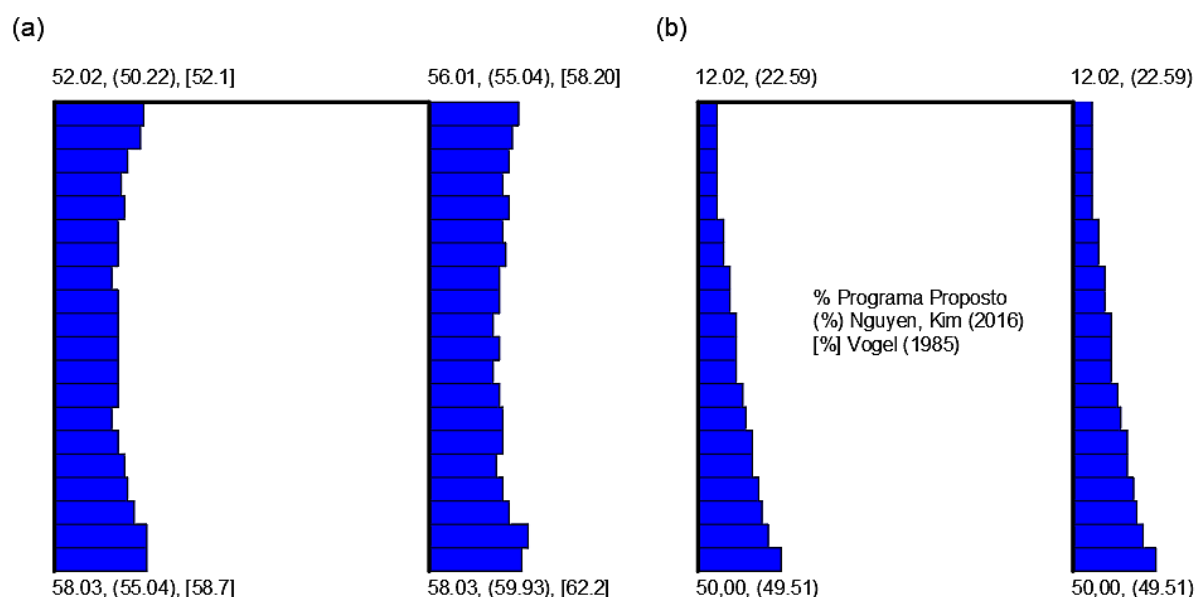
Tabela 14 - Comparação dos fatores de carga última obtidas no presente trabalho com os resultados de Nguyen e Kim (2016).

Tipo de pórtico	Método	Fator de carga última	Diferença (%)
Rígido	Plasticidade distribuída (Vogel 1985)	1,022	-
	Plasticidade distribuída (Nguyen e Kim 2016)	1,001	-
	Plasticidade distribuída (PT - Bernoulli-Euler)	0,988	-1,30
	Plasticidade distribuída (PT - Timoshenko)	0,981	-2,00
	Plasticidade distribuída (PT - Timoshenko e von Mises)	0,981	-2,00
Rotulado	Plasticidade distribuída (Nguyen e Kim 2016)	0,718	-
	Plasticidade distribuída (PT - Bernoulli-Euler)	0,731	1,81
	Plasticidade distribuída (PT - Timoshenko)	0,727	1,25
	Plasticidade distribuída (PT - Timoshenko e von Mises)	0,727	1,25

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 49, mostra a porcentagem da área da seção transversal que sofreu escoamento para o pórtico de Vogel, considerando as ligações rígidas e rotuladas entre vigas e pilares, ao utilizar o critério de falha de von Mises associado à teoria de Timoshenko. Verifica-se uma boa concordância entre as soluções propostas e as obtidas por outros autores, o que indica uma boa capacidade do software em representar a distribuição da plastificação nos elementos.

Figura 49 - Percentual da plastificação ao considerar o escoamento por von Mises para o pórtico de Vogel: (a) Ligações rígidas, (b) Ligações rotuladas.



Fonte: Elaborado pelo autor

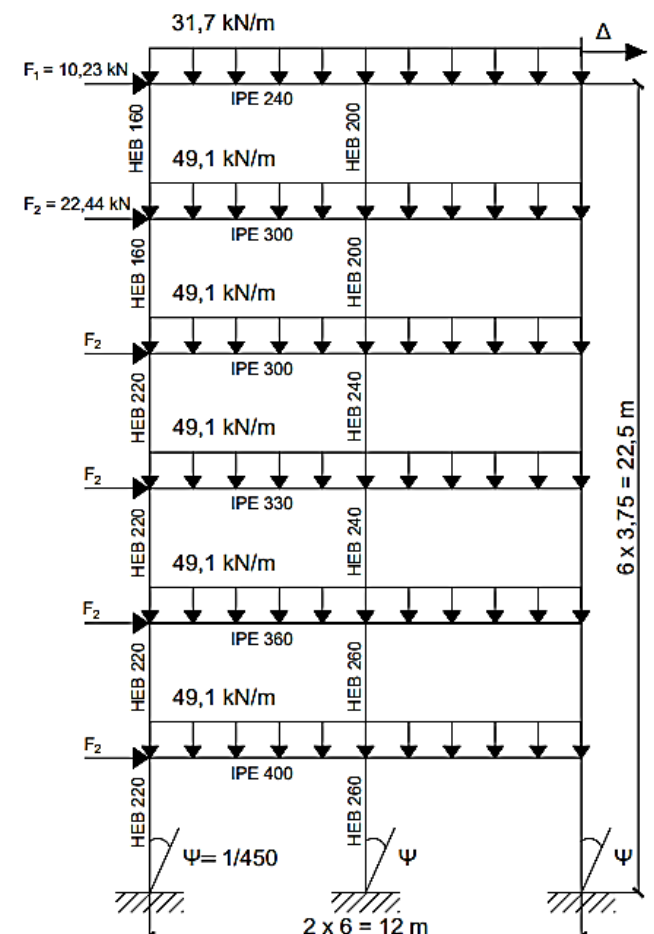
6.2.7 Pórtico de seis andares e dois vãos de Vogel

O pórtico de seis andares e dois vãos apresentado na Figura 50 foi analisado por Vogel (1985) considerando-se as ligações rígidas. O autor investigou o pórtico usando o método da plasticidade distribuída na análise elastoplástica de segunda ordem, empregando-se a hipótese de Bernoulli- Euler. O pórtico foi analisado por vários pesquisadores considerando as ligações rígida e semirrígidas entre viga-pilar, podendo citar Chan e Chui (2000), Saritas e Koseoglu (2015), Nguyen e Kim (2016) e Silva et al. (2018).

Conforme mostra a Figura 50, as vigas do primeiro ao quinto andar e as vigas do último andar do pórtico são submetidas a um carregamento uniformemente distribuído de 49,10 kN/m e 31,70 kN/m, respectivamente. Além disso, são aplicadas forças horizontais de magnitudes de 20,44 kN e 10,23 kN nas vigas do primeiro ao quinto andar e último andar, respectivamente. Foram consideradas tensões residuais lineares nas mesas e na alma com valores iguais a 50% e 30% da resistência ao escoamento do aço para pilares e vigas, respectivamente. A imperfeição geométrica inicial dos pilares é assumida sendo $\psi = 1/450$. No presente trabalho, a imperfeição geométrica inicial é considerada por meio da aplicação de

uma carga nocional de 1,31 kN nos topos do primeiro ao quinto andar e de 0,85 kN no topo do último andar. As ligações entre viga-pilar são consideradas rígidas.

Figura 50 - Pórtico de Seis Andares e dois vãos de Vogel.



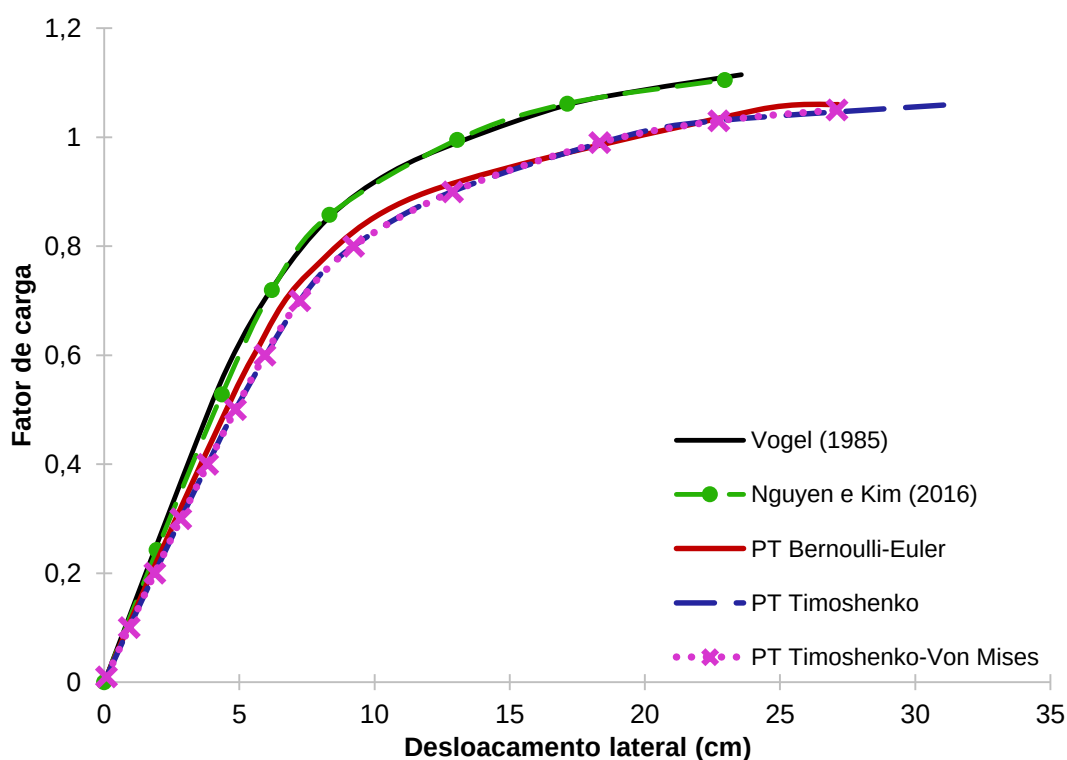
Fonte: Adaptado de SILVA, et al., 2018

Na discretização da estrutura, as vigas e os pilares são divididos em 6 elementos e as seções transversais em 50 fatias, sendo 20 fatias para cada mesa e 10 fatias para a alma. O carregamento vertical e horizontal é incrementado até a estrutura atingir a carga última. O comportamento de tensão-deformação bilinear é assumido com uma tensão de escoamento igual a 235 MPa e módulo de elasticidade igual a 205 GPa. Considera-se o comportamento elastoplástico perfeito com deformação final igual a 0,04.

A Figura 51 mostra o deslocamento lateral no topo do pórtico obtido pela presente formulação considerando a teoria clássica (sem deformações de cisalhamento) e a teoria de Timoshenko sem e com a associação do critério de falha de von Mises. A carga última obtida ao considerar a teoria clássica de Bernoulli-

Euler e a de Timoshenko é igual a 1,07, levemente inferior que o valor obtido por Vogel e igual a 1,11. Ao se considerar as deformações por cisalhamento, o topo do pórtico apresenta maiores deslocamentos, resultando em uma estrutura mais flexível em relação à teoria clássica. Contudo, ao incluir as tensões de cisalhamento para capturar o escoamento da seção transversal, percebe-se uma redução do fator de carga última obtido na análise e igual a 1,05. Observa-se uma boa adequação de resultados com relação à teoria de Timoshenko, porém com a ocorrência da falha antecipada e com deslocamentos próximos ao obtido pela teoria clássica. Percebe-se que a deformação por cisalhamento afeta significativamente a rigidez global da estrutura durante o procedimento de análise.

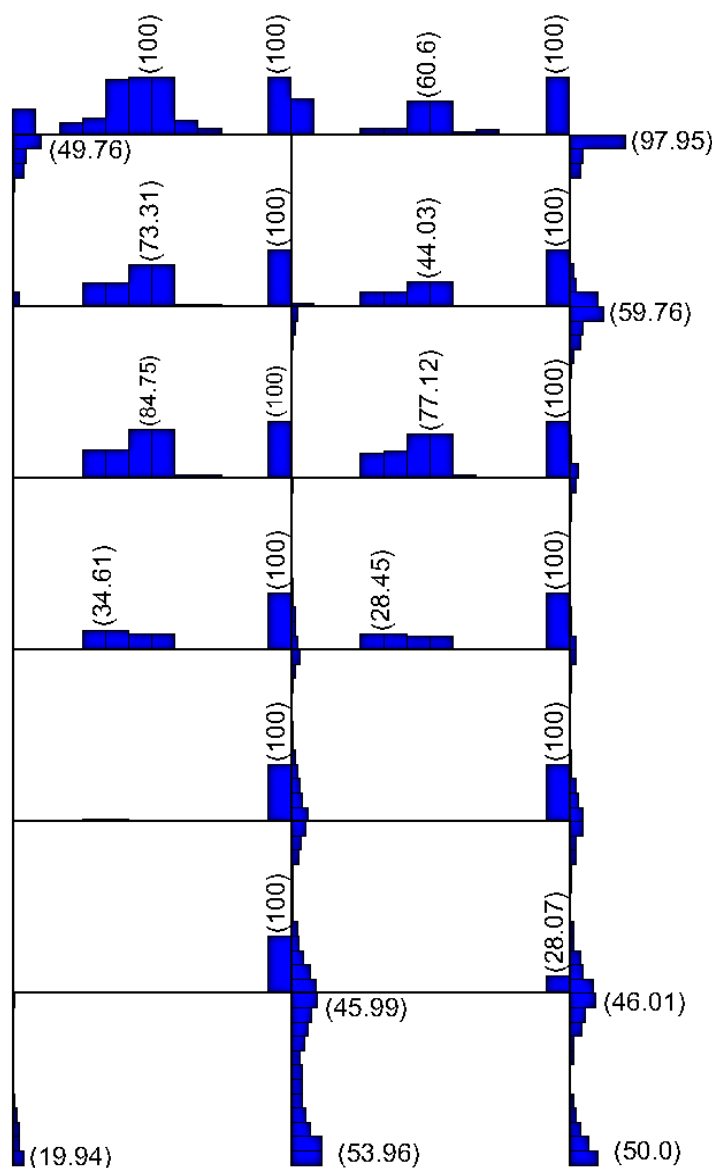
Figura 51 - Curva fator de carga x deslocamento para o pórtico de Vogel de seis andares e dois vãos.



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 52 apresenta a distribuição da plastificação para a carga última do pórtico de seis andares, ao se considerar a teoria de Timoshenko associada ao critério de von Mises para o fator de carga de colapso, igual a 1,05.

Figura 52 - Percentual da plastificação ao considerar o escoamento por von Mises para o pórtico de 6 andares e 2 vãos de Vogel.



A altura das barras perpendiculares aos eixos longitudinais de vigas e pilares representam a porcentagem da área da seção transversal que sofreu escoamento. A distribuição da plasticidade ao longo do comprimento da barra ocorre gradualmente até o colapso. Observa-se a formação de várias rótulas plásticas no momento do colapso. Uma grande plastificação é desenvolvida próxima ou exatamente no meio do vão das vigas do quarto ao sexto andar, e rótulas plásticas com 100% do escoamento da seção são observadas na extremidade direita das vigas do segundo ao último andar, na extremidade direita da viga da esquerda do primeiro andar.

Grandes percentuais de plastificação são observados também nas extremidades do pilar localizado à direita do sexto andar; e na extremidade superior do pilar localizado à direita do quinto andar.

Esse exemplo mostra que, a abordagem elastoplástica considerando as tensões de cisalhamento pode gerar influências consideráveis na plastificação do sistema estrutural e, a formulação desenvolvida pode prever o desenvolvimento gradual do escoamento, inclusive para pórticos de múltiplos andares.

7 CONCLUSÃO

Neste capítulo são descritas as considerações finais, as conclusões obtidas do estudo desenvolvido e sugestões para trabalhos futuros, visando-se à continuidade da pesquisa.

7.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo investigar o comportamento de pórticos planos de aço considerando a influência das deformações por cisalhamento, utilizando-se os conceitos da Análise Avançada. Dessa forma, foi realizado o estudo de uma formulação geometricamente exata para a análise elastoplástica de segunda ordem de pórticos planos de aço incluindo as deformações de cisalhamento baseada na teoria de Timoshenko e considerando as condições de extremidade do elemento como rígida-rígida, rígida-rótula e rótula-rígida. A não linearidade geométrica foi considerada por meio de uma abordagem corrotacional e a não linearidade do material foi considerada utilizando-se o método da plasticidade distribuída (método da zona plástica). O escoamento gradual foi capturado, monitorando o estado de tensão de cada fatia, utilizando dois pontos de integração ao longo do comprimento do elemento.

Um algoritmo para a implementação do modelo de von Mises no programa computacional PPLANLEP foi desenvolvido, visando analisar a influência da interação da tensão normal e da tensão de cisalhamento na carga última e nos deslocamentos da estrutura, e a plastificação ao longo do comprimento dos elementos e da altura da seção transversal.

A formulação permite considerar dois critérios de escoamento. O primeiro leva em conta apenas as tensões normais no processo de escoamento da seção transversal, e o segundo, avalia o escoamento por interação entre as tensões normal e de cisalhamento com base no critério de escoamento de von Mises. No segundo critério apenas o comportamento elástico-perfeitamente plástico do material pode ser considerado.

Baseado nos modelos numéricos, verificou-se, inicialmente, o adequado funcionamento do software ao realizar análises elásticas de segunda ordem, capturando corretamente os valores de deslocamentos e dos momentos fletores atuantes nos pilares contraventado e não contraventado, de acordo com os resultados obtidos analiticamente e pela AISC (2016). Esses exemplos mostraram

que o programa computacional é adequado para realizar análises incluindo o efeito local (efeito $P-\delta$) e global (efeito $P-\Delta$) de 2ª ordem. O exemplo de treliça validou a matriz de rigidez tangente desenvolvida para barras com nós rotulados e a formulação para problemas com grandes deslocamentos.

Visando capturar os efeitos causados pelo cisalhamento ao incluir a interação entre as tensões normais e de cisalhamento, ao se considerar a análise elastoplástica de 2ª ordem, foram analisadas vigas com diferentes condições de contorno, com seções retangular e em perfil I, e diferentes razões de comprimento por altura de seção transversal. Observou-se uma variação na propagação da plastificação e na carga de colapso de acordo com a relação L/h . À medida que o comprimento das vigas reduzia, a influência da tensão de cisalhamento ficava ainda mais acentuada, corroborando com a ideia de que esse efeito é mais pronunciado em barras curtas. Ainda, com o monitoramento do estado de tensões nas fatias, verificou-se que o escoamento iniciava na alma das seções, uma vez que essas regiões eram as mais submetidas às forças cortantes. Esses exemplos confirmaram que a influência do cisalhamento é de grande importância na análise de barras com baixa relação comprimento/altura.

Posteriormente, foi investigado um pilar birrotulado variando-se o índice de esbeltez e levando-se em conta a imperfeição geométrica e as tensões residuais. Foi observado que quanto menor a esbeltez, mais acentuado era o processo de escoamento no pilar.

Com relação aos pórticos estudados, pôde-se verificar que não houve diferenças significativas nos fatores de carga última e nas trajetórias de equilíbrio ao adotar ou não o critério de escoamento de von Mises, o que indica que as tensões de cisalhamento não foram determinantes para o escoamento dos membros dessas estruturas.

Pode-se concluir que, os resultados dos fatores de carga última e das trajetórias de equilíbrio foram satisfatórios quando comparados aos modelos de referência, confirmando que a formulação proposta é bastante precisa e eficiente. O método avançado de análise é capaz de avaliar a resistência e a estabilidade da estrutura e prever com precisão os seus modos de falha. Além disso, o método é adequado para vigas curtas, uma vez que os efeitos de deformações e tensões de cisalhamento foram incorporados na análise.

Finalmente, respondendo à pergunta da pesquisa, as considerações das deformações por cisalhamento utilizando a teoria de Timoshenko e a inclusão do modelo de von Mises como critério de falha influenciam nos resultados de deslocamentos, na resistência última e na plastificação da seção transversal dos elementos de pórticos planos de aço.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Dado o grande potencial de aprimoramento do programa desenvolvido e de melhoria deste trabalho, são apresentadas a seguir algumas sugestões para trabalhos futuros.

1. Desenvolvimento de um algoritmo para monitoramento do estado de tensões considerando o critério de von Mises para membros estruturais sob flexão em torno do eixo de menor inércia.
2. Implementação de um algoritmo que considere o efeito de encruamento isotrópico e cinemático juntamente com o critério de von Mises.
3. Implementação do método do controle de deslocamentos.
4. Aprimoramento do algoritmo para consideração do efeito da flexibilidade das ligações.
5. Desenvolvimento da formulação para o caso tridimensional dos elementos de barras visando o estudo da flambagem lateral com torção.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AISC. **Specification for Structural Steel Buildings**. [S. l.: s. n.], 2016.

ALMEIDA, A. C. B. **Análise inelástica de pórticos planos considerando a plasticidade distribuída e o efeito das tensões residuais nos perfis estruturais de aço**. 2006. - Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Minas Gerais, [s. l.], 2006.

ALVARENGA, A. R. Plastic-zone advanced analysis – Formulation including semi-rigid connection. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 212, p. 110435, 2020. Available at: <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110435>

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, A. **NBR 8800 - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. [S. l.: s. n.], 2008.

BOZZO, E.; GAMBAROTTA, L. Inelastic analysis of steel frames for multistory buildings. **Computers and Structures**, [s. l.], v. 20, n. 4, p. 707–713, 1985. Available at: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(85\)90031-8](https://doi.org/10.1016/0045-7949(85)90031-8)

CHEN, W. F.; GOTO, Y.; LIEW, J. Y. R. **Stability design of semi-rigid frames**. [S. l.]: New York: John Wiley e Sons, Inc., 1996.

CHIOREAN, C. G.; MARCHIS, I. V. A second-order flexibility-based model for steel frames of tapered members. **Journal of Constructional Steel Research**, [s. l.], v. 132, p. 43–71, 2017. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2017.01.002>

CLARKE, M. J. *et al.* Advanced analysis of steel building frames. **Journal of Constructional Steel Research**, [s. l.], v. 23, n. 1–3, p. 1–29, 1992. Available at: [https://doi.org/10.1016/0143-974X\(92\)90034-C](https://doi.org/10.1016/0143-974X(92)90034-C)

FOLEY, C. M.; SCHINLER, D. Automated design of steel frames using advanced analysis and object-oriented evolutionary computation. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 129, n. 5, p. 648–660, 2003. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2003\)129:5\(648\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:5(648))

FOLEY, C. M.; VINNAKOTA, S. Inelastic analysis of partially restrained unbraced steel frames. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 19, n. 11, p. 891–902, 1997. Available at: [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(97\)00175-2](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(97)00175-2)

GIZEJOWSKI, M A *et al.* Review of analysis methods for inelastic design of steel semi-continuous frames. In: , 2006. **Journal of Constructional Steel Research**. [S. l.: s. n.], 2006. p. 81–92. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2005.04.009>

GIZEJOWSKI, Marian A *et al.* Advanced analysis of steel frames with effects of joint deformability and partial strength accounted for. **Journal of Civil Engineering and Management**, [s. l.], v. 10, n. 3, p. 199–208+Ia+Ilb, 2004. Available at: <http://dx.doi.org/10.1080/13923730.2004.9636307>

GONÇALVES, G. A. *et al.* Inelastic second-order analysis of steel columns under minor-axis bending. **Revista Escola de Minas**, [s. l.], v. 72, n. 3, p. 405–414, 2019. Available at: <https://doi.org/10.1590/0370-44672018720046>

IU, C. K.; BRADFORD, M. A. Higher-order non-linear analysis of steel structures part I: Elastic second-order formulation. **Advanced Steel Construction**, [s. l.], v. 8, n. 2, p. 168–182, 2012a.

IU, C. K.; BRADFORD, M. A. Higher-order non-linear analysis of steel structures part II: Refined plastic hinge formulation. **Advanced Steel Construction**, [s. l.], v. 8, n. 2, p. 183–198, 2012b.

KANCHANALAI, T. **The design and behavior of beam-column in unbraced steel frames**. Rep. No. 2ed. [S. l.]: AISI Project 189, 1977.

KIM, S-E.; CHEN, W.-F. Practical advanced analysis for braced steel frame design. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 122, n. 11, p. 1266–1274, 1996. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1996\)122:11\(1266\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1996)122:11(1266))

KIM, S.-E. *et al.* Practical second-order inelastic analysis for steel frames subjected to distributed load. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 26, n. 1, p. 51–61, 2004. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2003.08.010>

KIM, Seung-Eock; CHEN, W.-F. Design guide for steel frames using advanced analysis program. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 21, n. 4, p. 352–364, 1998. Available at:

[https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(97\)00209-5](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(97)00209-5)

KING, W. S.; WHITE, D. W.; CHEN, W. F. Second-order inelastic analysis methods for steel-frame design. **Journal of Structural Engineering (United States)**, [s. l.], v. 118, n. 2, p. 408–428, 1992. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1992\)118:2\(408\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1992)118:2(408))

KUCUKLER, M.; GARDNER, L. Design of laterally restrained web-tapered steel structures through a stiffness reduction method. **Journal of Constructional Steel Research**, [s. l.], v. 141, p. 63–76, 2018. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2017.11.014>

KUCUKLER, M.; GARDNER, L.; MACORINI, L. A stiffness reduction method for the in-plane design of structural steel elements. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 73, p. 72–84, 2014. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.05.001>

KUCUKLER, M.; GARDNER, L.; MACORINI, L. Development and assessment of a practical stiffness reduction method for the in-plane design of steel frames. **Journal of Constructional Steel Research**, [s. l.], v. 126, p. 187–200, 2016. Available at: <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2016.06.002>

LANDESMANN, A.; BATISTA, E. M. Advanced analysis of steel framed buildings using the Brazilian standard and Eurocode-3. **Journal of Constructional Steel Research**, [s. l.], v. 61, n. 8, p. 1051–1074, 2005. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2005.02.008>

LAVAL, A. C. C. **Uma formulação consistente para análise não-linear de pórticos planos de aço considerando imperfeições iniciais e tensões residuais**. 1996. - Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, [s. l.], 1996.

NEAL, B. G. **The plastic methods of structural analysis**. Thirded. [S. l.]: Chapman and Hall, 1985.

NGO-HUU, C.; NGUYEN, P.-C.; KIM, S.-E. Second-order plastic-hinge analysis of space semi-rigid steel frames. **Thin-Walled Structures**, [s. l.], v. 60, p. 98–104, 2012. Available at: <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tws.2012.06.019>

NGUYEN, P.-C.; KIM, S.-E. Advanced analysis for planar steel frames with semi-rigid connections using plastic-zone method. **STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES**, PO BOX 33, YUSEONG, DAEJEON 305-600, SOUTH KOREA, v. 21, n. 5, p. 1121–1144, 2016. Available at: <https://doi.org/10.12989/scs.2016.21.5.1121>

NGUYEN, P.-C.; KIM, S.-E. An advanced analysis method for three-dimensional steel frames with semi-rigid connections. **FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN**, RADARWEG 29, 1043 NX AMSTERDAM, NETHERLANDS, v. 80, p. 23–32, 2014. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2013.11.004>

OLIVEIRA, D. B. **Implementação computacional de modelos elastoplásticos para análise fisicamente não linear**. 2016. - Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Minas Gerais, [s. l.], 2016.

REZAEI-PAJAND, M.; GHARAEI-MOGHADDAM, N. Frame nonlinear analysis by force method. **International Journal of Steel Structures**, [s. l.], v. 17, n. 2, p. 609–629, 2017. Available at: <https://doi.org/10.1007/s13296-017-6019-3>

RICHARD LIEW, J. Y.; WHITE, D. W.; CHEN, W. F. Limit states design of semi-rigid frames using advanced analysis: Part 2: Analysis and design. **Journal of Constructional Steel Research**, [s. l.], v. 26, n. 1, p. 29–57, 1993. Available at: [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0143-974X\(93\)90066-2](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0143-974X(93)90066-2)

SARITAS, A.; KOSEOGLU, A. Distributed inelasticity planar frame element with localized semi-rigid connections for nonlinear analysis of steel structures. **International Journal of Mechanical Sciences**, [s. l.], v. 96–97, p. 216–231, 2015. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.04.005>

SILVA, R. G. L. **Análise inelástica avançada de pórticos planos de aço considerando as influências do cisalhamento e de ligações semirrígidas**. 2010. - Tese de Doutorado - Universidade Federal de Minas Gerais, [s. l.], 2010.

SILVA, A. R. D.; PRADO, I. M.; SILVEIRA, R. A. M. CS-ASA: A new computational tool for advanced analysis of steel frames [CS-ASA: Uma nova ferramenta computacional, para análise avançada de estruturas de aço]. **Revista Escola de Minas**, [s. l.], v. 66, n. 3, p. 281–288, 2013. Available at: <https://doi.org/10.1590/S0370-44672013000300003>

SILVA, A. R.; PRADO, I. M.; SILVEIRA, R. A. M. CS-ASA: a new computational tool for advanced

analysis of steel frames. **REM-REVISTA ESCOLA DE MINAS**, [s. l.], v. 66, n. 3, p. 281–288, 2013. Available at: <https://doi.org/10.1590/S0370-44672013000300003>

SILVA, S. S. da; SILVA, W. T. M. Nonlinear analysis of plane frames using a corotational fomulation and plasticity by layers in a Timoshenko beam element. **Blucher Mechanical Engineering Proceedings**, [s. l.], v. 1, n. 1, 2014. Available at: <https://doi.org/10.5151/meceng-wccm2012-19070>

SILVA, R. G. L. *et al.* Formulation for second-order inelastic analysis of steel frames including shear deformation effect. **Journal of Constructional Steel Research**, [s. l.], v. 151, p. 216–227, 2018. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2018.09.011>

VIANA, H. F. **Análise avançada dinâmica de pórticos planos de aço**. 2019. - Dissertação de Mestrado - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, [s. l.], 2019.

VOGEL, U. Calibrating frames. **Stahlbau** 10, [s. l.], n. Oct, p. 295–301, 1985.

WHITE, D. W. Plastic-Hinge methods for advanced analysis of steel frames. **Journal of Constructional Steel Research**, [s. l.], v. 24, n. 2, p. 121–152, 1993. Available at: [https://doi.org/10.1016/0143-974X\(93\)90059-2](https://doi.org/10.1016/0143-974X(93)90059-2)

WHITE, D. W.; HAJJAR, J. F. Stability of steel frames: The cases for simple elastic and rigorous inelastic analysis/design procedures. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 22, n. 2, p. 155–167, 2000. Available at: [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(98\)00105-9](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(98)00105-9)

YUN, Y. M.; KIM, B. H. Optimum design of plane steel frame structures using second-order inelastic analysis and a genetic algorithm. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 131, n. 12, p. 1820–1831, 2005. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2005\)131:12\(1820\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2005)131:12(1820))



PPGEC – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil
Av Amazonas, 7675, Belo Horizonte-MG
www.civil.cefetmg.br/mestrado