



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

MODELO PARA DINÂMICA DE MERCADO FINANCEIRO BASEADO NO MODELO SIR

CARLA LILIANE GUEDES FONSECA

Orientador: Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
CEFET-MG

BELO HORIZONTE
MAIO DE 2017

F676m Fonseca, Carla Liliane Guedes
Modelo para dinâmica de mercado financeiro baseado no modelo SIR. / Carla Liliane Guedes Fonseca. -- Belo Horizonte, 2017.
xvii, 96 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, 2017.
Orientador: Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães

Bibliografia

1. Modelagem Matemática. 2. Mercado Financeiro. 3. Econofísica.
I. Magalhães, Arthur Rodrigo Bosco de. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título

CDD 511.8

CARLA LILIANE GUEDES FONSECA

MODELO PARA DINÂMICA DE MERCADO FINANCEIRO BASEADO NO MODELO SIR

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

BELO HORIZONTE
MAIO DE 2017



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**“MODELO PARA DINÂMICA DE MERCADO FINANCEIRO BASEADO
NO MODELO SIR”**

Dissertação de Mestrado apresentada por **Carla Liliane Guedes Fonseca**, em 21 de fevereiro de 2017, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Adécio Carlos de Oliveira
Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Albens Altman Picardi Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. José Luiz Acebal Fernandes
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática e Computacional

Dedico este trabalho aos meus amados pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade e condução de meus passos.

Ao professor Arthur pelo crédito dado a mim através de grande incentivo. Foi muito importante o cuidado com que me ensinou, acompanhou e impulsionou.

Aos demais professores pelos muitos ensinamentos e contribuições.

À família pelo suporte físico e afetivo. Em especial aos meus pais e meu marido que zelaram por meu filho durante minha ausência. E a este maravilhoso filho pela cumplicidade e compreensão.

Aos amigos pelos momentos de descontração e relaxamento.

Aos colegas do programa pelo acolhimento, encorajamento e parceria.

Ao pessoal da secretaria, em especial à Maura, pela atenção e cuidados.

Ao Cefet pelo apoio financeiro.

O período dedicado a este trabalho foi muito enriquecedor, agradeço sinceramente toda ajuda recebida.

“Nem todos podem ser ilustres, mas todos podem ser bons” (Confúcio)

Resumo

Neste trabalho, busca-se modelar a dinâmica de preços de ativos, através de equações diferenciais. A pesquisa tem como referência um modelo epidêmico que visa contribuir para a modelagem de sistemas financeiros, considerados complexos, através de sistemas determinísticos simples que agregam características estocásticas. Em analogia ao modelo SIR (Suscetíveis - Infectados - Recuperados), foi construído um modelo de mercado composto de quatro populações, infectados de compra, infectados de venda, suscetíveis de compra e suscetíveis de venda, que resultou em um sistema de quatro equações diferenciais não lineares. Em paralelo às equações inspiradas no modelo SIR, foi formulada a equação do preço. O modelo foi investigado por meio da análise dos autovalores de sua matriz jacobiana nos pontos críticos, e foram extraídas diversas dinâmicas, todas simuladas em um programa específico, construído através do software MATLAB. Num segundo momento, foi inserida aleatoriedade no modelo para novas análises, o que, aparentemente, tornou as curvas de preço por ele produzidas mais parecidas com as curvas encontradas em séries reais. Dois tipos de aleatoriedade foram considerados, uma em que a liquidez no mercado não muda e outra em que tal liquidez varia. Para efeito de validação do modelo, foram realizadas investigações estatísticas através da ferramenta expoente de Hurst e por meio do cálculo da curtose das séries produzidas. As curvas sintéticas extraídas do modelo foram comparadas estatisticamente à curvas reais advindas de ativos do Índice Bovespa. Ao mesmo tempo foram analisadas estatísticas relativas a um caminhante aleatório, para servirem de referência. As estatísticas foram calculadas para *candles* completos, oriundos de séries empíricas ou construídos a partir de séries sintéticas. Os resultados mais interessantes encontrados foram diferenças consistentes nos expoentes de Hurst e nas curtoses quando calculados sobre preços de abertura e fechamento, em relação aos valores relativos a máximo e mínimo. Até onde sabemos, tais resultados não foram reportados na literatura.

Palavras-chave: Econofísica, Modelo SIR, Mercado Financeiro, Equações Diferenciais, Aleatoriedade, Expoentes Característicos, Curtose.

Abstract

This research models the price dynamics of assets through differential equations. It employs an epidemic model as reference, to contribute to the modeling of financial systems, considered complex, through simple deterministic systems that aggregate stochastic features. Similar to the SIR model (Susceptible - Infected - Recovered), it builds a market model composed of four sectors: infected purchase, infected sale, susceptibility of purchase and susceptibility of sale, which, in the SIR model, resulted in a system of four nonlinear differential equations. Parallel to the equations inspired by the SIR model, this research employs the price equation. The model was investigated by analyzing the eigenvalues of its Jacobian matrix at critical points, and from the model were extracted several dynamics, all simulated in a specific program, built through the MATLAB software. Randomness was inserted into the model for further analysis, which apparently made the simulated price curves more similar to the curves found in a real series. Two types of randomness were considered: one, in which market liquidity does not change; and two, where such liquidity varies. For validation of the model, statistical investigations were utilized through the Hurst exponential tool, and by calculating the kurtosis of series produced by the model. The synthetic curves extracted from the model were statistically compared to real curves derived from Bovespa Index assets. At the same time, the statistics for a random walk were analyzed, to serve as reference. All statistics were calculated for complete candles, derived from empirical series or constructed from synthetic series. The most interesting results yielded consistent differences in Hurst exponents, and in the kurtosis when calculated with opening and closing prices, in relation to maximum and minimum values. The research assumes that such results are not reported in the literature.

Keywords: Econophysics, SIR Model, Financial Market, Differential Equations, Randomness, Characteristic Exponents, Kurtosis.

Lista de Figuras

Figura 1 – Plano de fase do modelo SIR, dado pela população de suscetíveis versus a população de infectados.	7
Figura 2 – Representação de epidemia.	8
Figura 3 – Representação de ausência de epidemia.	8
Figura 4 – Curvas com diferentes expoentes de Hurst.	10
Figura 5 – Exemplo de curvas com diferentes rugosidades.	11
Figura 6 – Exemplo de janelas deslizantes.	12
Figura 7 – Cálculo do expoente de Hurst dado por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	12
Figura 8 – Exemplo de funcionamento do método DFA.	13
Figura 9 – Exemplo de uma curva de distribuição normal, onde μ é a média e σ o desvio padrão.	14
Figura 10 – Exemplos de curvas Mesocúrtica, Platicúrtica e Leptocúrtica.	15
Figura 11 – Exemplo de um candle com os quatro preços definidos: preço de abertura, de alta, de baixa e de fechamento.	17
Figura 12 – Exemplos de candles de alta e de baixa.	17
Figura 13 – Representação da dinâmica do modelo.	21
Figura 14 – Representação da dinâmica do modelo através de uma máquina de estados.	23
Figura 15 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 0,01, s_c(0) = s_v(0) = 0,49, P(0) = 10$, com $a = b = 1$	30
Figura 16 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 0,01, s_c(0) = s_v(0) = 0,49, P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$	31
Figura 17 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1, s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1, P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$	32
Figura 18 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais assimétricas, $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 + 0,1, 1/6 + 0,3, 1/3 - 0,1, 1/3 - 0,3), P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$	32
Figura 19 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 + 0,1, 1/6 - 0,1, 1/3 + 0,1, 1/3 - 0,1), P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$	35
Figura 20 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 - 0,1, 1/6 + 0,1, 1/3 - 0,1, 1/3 + 0,1), P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$	36
Figura 21 – Evolução das populações e do preço com autovalores reais para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/2 - 1/20 + 0,01, 1/2 - 1/20 - 0,01, 1/20 + 0,01, 1/20 - 0,01)$, com $a = 20$ e $b = 1$	37

Figura 22 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,01$ e $\eta = 0,002$	39
Figura 23 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 + 0,1, 1/6 - 0,1, 1/3 + 0,1, 1/3 - 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$, $\Delta t = 0,01$ e $\eta = 0,002$	40
Figura 24 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 - 0,1, 1/6 + 0,1, 1/3 - 0,1, 1/3 + 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,01$ e $\eta = 0,002$	40
Figura 25 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,1$, $\eta = 0,002$ e $\xi = 0,1$	42
Figura 26 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 + 0,1, 1/6 - 0,1, 1/3 + 0,1, 1/3 - 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,1$, $\eta = 0,002$ e $\xi = 0,1$	43
Figura 27 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 - 0,1, 1/6 + 0,1, 1/3 - 0,1, 1/3 + 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,1$, $\eta = 0,002$ e $\xi = 0,1$	43
Figura 28 – Expoentes de Hurst das séries de abertura, fechamento, alta e baixa referentes a candlesticks diários de ações da BOVESPA.	46
Figura 29 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento para os mesmos dados da figura (28).	47
Figura 30 – Simulação de curva de preços por um caminhante aleatório, dada por candles de tamanho 5, com $P(0) = 10$ e $\Delta t = 0,1$. Cada passo do caminhante dá-se de acordo com uma distribuição uniforme entre $-2,5\sqrt{\Delta t}$ e $2,5\sqrt{\Delta t}$	48
Figura 31 – Detalhe da curva representada na figura 30.	49
Figura 32 – Média dos expoentes de Hurst das séries do caminhante aleatório, em diferentes tamanhos de candle.	49
Figura 33 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, dadas pelo caminhante aleatório em tamanhos diferentes de candle.	50
Figura 34 – Exemplo de uma curva produzida pelo modelo, definida por candles de tamanho 15.	51
Figura 35 – Figura 34, em detalhe.	52
Figura 36 – Média dos expoentes de Hurst para cada série de preços simuladas pelo modelo, no tamanho de candle 5.	53

Figura 37 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, dadas pelo modelo, em candles de tamanho 5.	53
Figura 38 – Exemplos de dinâmicas simuladas com candle de tamanho 5.	54
Figura 39 – Média dos expoentes de Hurst para cada série de preços simuladas pelo modelo, no tamanho de candle 10.	55
Figura 40 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, dadas pelo modelo, em candles de tamanho 10.	55
Figura 41 – Exemplos de dinâmicas simuladas com candles de tamanho 10.	56
Figura 42 – Média dos expoentes de Hurst para as séries de abertura, fechamento, alta e baixa simuladas pelo modelo, no tamanho de candle 15.	56
Figura 43 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, simuladas pelo modelo, em candles de tamanho 15.	57
Figura 44 – Exemplos de dinâmicas simuladas com candle de tamanho 15.	58
Figura 45 – Média dos expoentes de Hurst para as séries de abertura, fechamento, alta e baixa simuladas pelo modelo, no tamanho de candle 20.	59
Figura 46 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, simuladas pelo modelo, em candles de tamanho 20.	59
Figura 47 – Exemplos de dinâmicas simuladas com candle de tamanho 20.	60
Figura 48 – Média dos expoentes de Hurst para cada série de preços simuladas pelo modelo, no tamanho de candle 25.	61
Figura 49 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, dadas pelo modelo, em candles de tamanho 25.	61
Figura 50 – Exemplos de dinâmicas simuladas com candle de tamanho 25.	62
Figura 51 – Primeira parte dos resultados das curtoses calculadas para as séries de preço de abertura, de fechamento, de alta e de baixa dos dados empíricos.	63
Figura 52 – Segunda parte dos resultados das curtoses calculadas para as quatro séries de preços dos dados empíricos (série de abertura, de fechamento, de alta e de baixa).	63
Figura 53 – Resultados das curtoses de três ativos que fazem parte da segunda metade do índice Bovespa.	64
Figura 54 – Curtoses calculadas para um caminhante aleatório, para séries de abertura, de fechamento, de alta e de baixa em diferentes tamanhos de candles.	65
Figura 55 – Curtoses calculadas para o modelo no tamanho de candle 5.	66
Figura 56 – Curtoses calculadas para o modelo no tamanho de candle 10.	66

Figura 57 – Curtoses calculadas para o modelo no tamanho de candle 15.	67
Figura 58 – Curtoses calculadas para o modelo no tamanho de candle 20.	67
Figura 59 – Curtoses calculadas para o modelo no tamanho de candle 25.	68

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Primeira parte do resultado dos expoentes de Hurst calculados para os ativos reais.	79
Tabela 2 – Segunda parte do resultado dos expoentes de Hurst calculados para os ativos reais.	80
Tabela 3 – Resultado das diferenças calculadas para os ativos reais.	82
Tabela 4 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Caminhante Aleatório.	83
Tabela 5 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 5).	84
Tabela 6 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 10).	85
Tabela 7 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 15).	86
Tabela 8 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 20).	87
Tabela 9 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 25).	88
Tabela 10 – Primeira parte do resultado das curtoses calculadas para os ativos reais.	89
Tabela 11 – Segunda parte do resultado das curtoses calculadas para os ativos reais.	90
Tabela 12 – Resultados das curtoses calculadas para o Caminhante Aleatório.	91
Tabela 13 – Resultados das curtoses calculadas para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 5).	92
Tabela 14 – Resultados das curtoses calculadas para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 10).	93
Tabela 15 – Resultados das curtoses calculadas para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 15).	94
Tabela 16 – Resultados das curtoses calculadas para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 20).	95
Tabela 17 – Resultados das curtoses calculadas para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 25).	96

Lista de Abreviaturas e Siglas

CVM	Comissao de Valores Mobiliarios
HME	Hipótese de Mercado Eficiente
SIR	Suscetíveis - Infectados - Recuperados (Modelo Epidêmico)
DFA	Detrended Fluctuation Analysis - Análise de flutuação sem tendência
D_H	Diferença entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e as médias de tais expoentes das séries de abertura e fechamento

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Ferramentas Conceituais	5
2.1 Modelo SIR	5
2.1.1 Análise do plano de fase das equações	6
2.2 Expoente de Hurst	9
2.2.1 Cálculo do Expoente de Hurst	10
2.3 Curtose	13
2.4 Conceitos de Economia e Finanças	15
2.4.1 Ativo	15
2.4.2 Ações	15
2.4.3 Análise Técnica	15
2.4.4 Análise Fundamentalista	16
2.4.5 Hipótese de Mercado Eficiente	16
2.4.6 Candlesticks	16
2.4.7 Liquidez	17
2.5 Critério de Routh-Hurwitz	18
3 – Modelo sem aleatoriedade	19
3.1 Pensando em uma notícia separadamente	19
3.1.1 Pontos críticos	24
3.1.2 Análise dos pontos críticos	25
3.1.2.1 Utilizando o critério Routh-Hurwitz	27
3.1.2.2 Particularizando o sistema	28
3.1.3 Simulações	29
4 – Modelo com aleatoriedade	38
4.1 Mantendo a liquidez inalterada	38
4.1.1 Simulações	38
4.2 Variando a liquidez	40
4.2.1 Simulações	42
5 – Análises estatísticas	44
5.1 Expoentes de Hurst	44
5.1.1 Dados empíricos	44
5.1.2 Caminhante Aleatório	47

5.1.3	Modelo	50
5.2	Curtose	62
5.2.1	Dados empíricos	62
5.2.2	Caminhante Aleatório	64
5.2.3	Modelo	65
6	Conclusão	69
	Referências	71
	Apêndices	74
APÊNDICE A	– Amostra de ativos do Índice BOVESPA	75
APÊNDICE B	– Tabela de expoentes de Hurst dos ativos do Índice BOVESPA	78
APÊNDICE C	– Tabela de expoentes de Hurst dos ativos do Índice BOVESPA	80
APÊNDICE D	– Tabela das diferenças dos expoentes de Hurst dos ativos do Índice BOVESPA	81
APÊNDICE E	– Tabela de expoentes de Hurst do Caminhante Aleatório	83
APÊNDICE F	– Tabela de expoentes de Hurst do Modelo - Candle de tamanho 5	84
APÊNDICE G	– Tabela de expoentes de Hurst do Modelo - Candle de tamanho 10	85
APÊNDICE H	– Tabela de expoentes de Hurst do Modelo - Candle de tamanho 15	86
APÊNDICE I	– Tabela de expoentes de Hurst do Modelo - Candle de tamanho 20	87
APÊNDICE J	– Tabela de expoentes de Hurst do Modelo - Candle de tamanho 25	88
APÊNDICE K	– Tabela de curtoses dos ativos do Índice BOVESPA	89
APÊNDICE L	– Tabela de curtoses dos ativos do Índice BOVESPA	90
APÊNDICE M	– Tabela de Curtoses do Caminhante Aleatório	91
APÊNDICE N	– Tabela de Curtoses do Modelo - Candle de tamanho 5	92
APÊNDICE O	– Tabela de Curtoses do Modelo - Candle de tamanho 10	93

APÊNDICE P – Tabela de Curtoses do Modelo - Candle de tamanho 15	94
APÊNDICE Q – Tabela de Curtoses do Modelo - Candle de tamanho 20	95
APÊNDICE R – Tabela de Curtoses do Modelo - Candle de tamanho 25	96

1 Introdução

O mercado financeiro é parte importante da economia de um país, afinal é um setor que abrange vários tipos de investimento, é onde ocorre grande movimentação do dinheiro, direta ou indiretamente, seja através de negociações de valores mobiliários, de câmbio ou de outros bens. Entre os diversos benefícios oriundos deste mercado podemos relacionar possíveis ganhos de capital por parte das empresas, gerando novos empregos, a expansão do setor privado, a entrada de capital externo, entre outros. Também é correto dizer que quanto melhor e mais desenvolvida a economia de um país, maiores as oportunidades de negócio e mais fortalecido e eficiente se torna esse mercado [1, 2].

O mercado financeiro é composto por pessoas e empresas que visam algum lucro em suas negociações. Tais negociações se dão por intermédio de corretoras de valores, instituições autorizadas pelo Banco Central e pela Comissão de Valores Mobiliários (CVM) a realizar operações de compra e venda de ativos nas bolsas de valores [3].

É sabido que o mercado de ações trabalha principalmente com a informação. As empresas fornecem informações, ora obrigatórias, ora voluntárias, assim como outros indicadores que podem influenciar a movimentação dos preços. Estas informações se propagam muito rapidamente e são igualmente expandidas, mas podem ser interpretadas de diferentes maneiras por diferentes analistas. Para que não existam privilégios, essas mesmas informações são bem cuidadas pela CVM e pelas bolsas de valores. Desta forma, todos os investidores recebem o mesmo tratamento e têm as mesmas oportunidades, pelo menos, idealmente [1].

Um dos objetivos dos envolvidos nessa área é ir além, é conseguir projetar comportamentos futuros baseados em informações atuais ou passadas, na tentativa de angariar maiores lucros e, para isso, alguns esforços têm sido feitos por parte de estudiosos de diversas áreas.

Desde a década de 70, quando apareceram mudanças significativas no mundo das finanças, surgiram também grandes quantidades de informações a respeito de dados financeiros, armazenados eletronicamente, que foram prontamente disponibilizadas para um número cada vez maior de interessados [2]. Isso, obviamente, ajudou a acelerar ainda mais as transações dentro desse sistema, e a alta frequência desses dados, com intervalo muitas vezes de segundos entre eles, contribuiu para deixar o sistema financeiro ainda mais complexo. O que primeiramente interessava a matemáticos e economistas passou a chamar a atenção também de físicos e, é claro, a abordagem destes veio a complementar abordagens tradicionais já existentes [4].

Os físicos, procurando modelar sistemas complexos com ferramentas e metodologias

de Mecânica Estatística e Física Teórica, fizeram surgir então a Econofísica [2]. Esta, na maioria das vezes, aplica os conceitos da Física Estatística na descrição de sistemas financeiros. Tais conceitos, como correlações de curto e longo alcance, auto-similaridade, escalonamento (*scaling*), entre outros, permitem compreender o comportamento global do sistema econômico sem ter uma descrição mais detalhada deste mesmo sistema. É através dessa propriedade multidisciplinar que a Econofísica vem ganhando terreno e contribuindo com publicações de muitos trabalhos de grande relevância para o assunto [4]. Em mais de 30 anos de trabalho, conseguiu-se resultados importantes, por exemplo, análises estatísticas de séries temporais [5, 6, 7]. Também bastante interessante neste contexto é a construção de modelos de sistemas econômicos baseados em agentes, que podem ser construídos com o uso de autômatos celulares [8, 9]. Outras abordagens aparecem na forma de equações diferenciais [10, 11].

Um modelo baseado em agentes considera que as séries temporais do ativo deixam de ser totalmente aleatórias, sendo influenciadas por uma dinâmica interna do mercado. Isto poderia vir a contrariar a Hipótese de Mercado Eficiente (HME), que, em uma de suas versões, preconiza que não há como auferir ganhos extraordinários, consistentemente, sem correr riscos extraordinários. Num mercado eficiente, todo movimento de preços provém de informações externas que chegam ao mercado. Tais informações são instantaneamente refletidas no preço do ativo, de forma que as séries temporais acabam por ser completamente aleatórias [2]. Evidências de que a HME não é totalmente válida podem ser encontradas em [2, 5, 6, 7], entre outros. Além disso, a multidão de investidores que utiliza análise técnica na tentativa de auferir lucros é indício claro de que as séries de preços guardam alguma memória.

Na referência [12], os autores analisam redes de investidores através de modelos de autômatos celulares e asseguram que fortes dependências entre eles, por meio de imitações, geram grandes flutuações do índice de mercado. Em [9], é criado um modelo baseado em redes de confiança, também através de autômatos celulares, para demonstrar que fatores psicológicos podem influenciar decisões de investidores. Os criadores deste modelo consideram que esses desvios geram imitações que levam à instabilidade do mercado. Atman e Gonçalves, em [8], trabalham com a possibilidade de erro da HME, estudando os efeitos que as finanças comportamentais teriam sobre ela, e utilizam um modelo de autômato celular que visa analisar o mercado financeiro considerando comportamentos de investidores individuais.

Com relação a modelos baseados em equações diferenciais, temos exemplos famosos na área da Biologia, tais como o modelo Predador-Presa [13, 14], o modelo Logístico [15] e o modelo SIR [16], entre outros. Na área de finanças temos várias contribuições de Gunduz Caginalp, entre elas [10], onde trabalha-se com um modelo que incorpora duas diferentes reações dos investidores, que podem ser relacionadas à análise técnica e à ana-

lise fundamentalista, e consegue-se demonstrar que tais motivações levam a consequentes flutuações, desestabilizando o mercado. Em [17], Caginalp, juntamente com David Porter e Vermon Smith (este, ganhador do Prêmio do Banco da Suécia para as Ciências Econômicas em memória a Alfred Nobel, o chamado Prêmio Nobel de Economia, em 2002) trabalha com um modelo baseado em equações diferenciais que analisa o *momentum* do preço e o comportamento dos investidores através de mercados de ativo experimentais. Além disso, compara esse modelo com outros modelos preditivos. Na referência [11], é criado um modelo composto por dois grupos distintos, que analisa a dinâmica dos preços de um ativo considerando diferentes condições, como por exemplo, a chegada de uma nova informação.

Para complementar estes estudos, a Econofísica dispõe de ferramentas estatísticas, como o expoente de Hurst, que analisa séries temporais para determinar se existe alguma correlação entre as mesmas, funcionando como um medidor de eficiência do mercado. Cajueiro e Tabak, em [7], estudam a evolução da eficiência de mercados emergentes investigando a existência de memória de longo prazo para retornos de ativos. Em [18], joga-se luz sobre a relação entre as flutuações do índice de mercado com a morfologia de sua rede de investidores; lá, por meio de autômatos celulares, simulam-se alguns cenários levando-se em conta diferentes perfis comportamentais e calculando-se, em alguns casos, o expoente de Hurst.

O modelo aqui proposto, construído para dinâmica de preços de um ativo em mercado financeiro, consiste de um sistema de equações diferenciais, que foi, particularmente, inspirado no modelo SIR (Suscetíveis – Infectados – Recuperados) . O modelo SIR surgiu no contexto de buscas por respostas relacionadas às doenças infectocontagiosas, com o intuito de conseguir prever surtos ou até mesmo traçar estratégias para controlá-las. Essas buscas alcançaram um interessante resultado em 1927, através de Kermack e McKendrick, pela publicação de *A Contribution to the mathematical theory of epidemics* [16], considerada um marco na história da modelagem de doenças transmissíveis. Nesse trabalho, propuseram o modelo epidêmico SIR, um modelo compartimentado conforme os três estágios da doença, dentro de uma população fechada, desconsiderando nascimentos ou mortes, que é representado por três equações diferenciais ordinárias não lineares. Os autores buscavam explicações causais, como o porquê da doença ter um fim repentino, por exemplo, e, através da modelagem matemática, puderam demonstrar que este fator estava relacionado à população de suscetíveis. A partir daí tiraram outras conclusões, como o limiar de suscetíveis que determina até onde o parasita pode causar uma epidemia [19]. Com isso, o modelo SIR tornou-se um esboço para outros modelos epidêmicos, além de inspirar trabalhos em outras áreas de pesquisa, como este.

Este modelo tem por objetivo contribuir para o melhor entendimento do mercado financeiro, através do estudo comportamental de seus agentes financeiros, que é realizado com a ajuda de ferramentas matemáticas da área de Sistemas Dinâmicos e com o auxílio

do software Matlab para realização de simulações e outros cálculos, além de ferramentas estatísticas para investigações do modelo e de dados de ativos reais. As investigações estatísticas têm a intenção de validar o modelo a partir de comparações realizadas entre curvas reais e curvas sintéticas produzidas pelo mesmo.

Este trabalho consiste de cinco capítulos. Depois desta introdução segue o segundo capítulo com uma revisão de ferramentas conceituais necessárias à construção e estudo do modelo produto deste trabalho. O terceiro capítulo fornece um estudo detalhado do modelo a partir de sua descrição, apresentando-o primeiramente sem qualquer aleatoriedade. O modelo então sofre mudanças, recebendo impactos aleatórios que, obviamente, alteram sua dinâmica inicial, o que é mostrado no quarto capítulo. O quinto contém uma comparação estatística de dados provenientes de mercados reais, de um caminhante aleatório puro e do próprio modelo. O sexto capítulo fecha este trabalho com nossas conclusões.

2 Ferramentas Conceituais

2.1 Modelo SIR

O modelo epidêmico SIR surgiu da necessidade de se combater doenças infectocontagiosas, ou, ao menos, conter os surtos por elas provocados. Conhecendo o mecanismo de tais doenças, seria possível prever suas manifestações ou traçar estratégias para minimizar seus efeitos, como, por exemplo, a produção de vacinas. Esta busca rendeu muitos estudos, e em 1927 Kermack e McKendrick publicaram *A contribution to the mathematical theory of epidemics*, um trabalho muito importante, considerado um marco na história da modelagem de doenças transmissíveis. Para os autores, a maior dificuldade era encontrar um fator causal, que levasse a entender a frequência e disseminação de tais doenças e esta teria sido a maior motivação para o referido trabalho. Conquistaram bons resultados através da modelagem matemática. Puderam concluir, por exemplo, que o fim repentino de uma doença teria relação com sua população de suscetíveis, que o limiar de suscetíveis determinaria até onde o parasita poderia causar uma epidemia [19] e, então, propuseram o modelo SIR, cuja sigla faz menção a *Suscetíveis, Infectados e Recuperados*.

Este trabalho foi inspirado na primeira modalidade do SIR, que desconsidera nascimentos ou mortes, tendo uma população fechada (N) como referência, onde $S(t) + I(t) + R(t) = N$. O modelo SIR é um modelo determinístico e compartimental, que descreve os três estágios da doença, através de três equações diferenciais não lineares e de três incógnitas, cada uma representando uma população:

$S(t)$ é a população de suscetíveis, indivíduos não infectados, porém propensos à infecção, e $s = S/N$ é a fração de suscetíveis;

$I(t)$ relaciona-se aos infectados, aqueles já contaminados, cuja fração é $i = I/N$;

$R(t)$ dá o número de recuperados, aqueles curados da infecção. Sua fração é $r = R/N$.

De acordo com o ciclo da doença, Kermack e McKendrick interpretaram dois processos: “formação de novos casos” e “remoção de casos”, e atribuíram tais fatos à força de infecção a e à taxa de recuperação k . A força de infecção daria a um suscetível um novo status, o de infectado, após a contaminação, e a taxa de recuperação seria constatada ao término da doença manifestada em um infectado, obviamente. Tal fluxo se daria da seguinte maneira: $S \rightarrow I \rightarrow R$. Estes processos foram embutidos na modelagem.

O indivíduo suscetível pode contrair a doença somente quando em contato com um indivíduo infectado, mas, uma vez recuperado, esta situação lhe confere imunidade total,

lembrando que não existem órbitos por conta da contaminação, ou seja, o número total da população permanece constante durante toda a dinâmica. Esse encontro de indivíduos suscetíveis com indivíduos infectados, que implica em contaminação, faz diminuir a parcela de suscetíveis e é assim representado:

$$\frac{dS}{dt} = -a \frac{S}{N} I, \quad (1)$$

onde S/N é a parcela de indivíduos suscetíveis na população, I representa o número de indivíduos infectados, $a > 0$ é a força de infecção já mencionada, t é o tempo e o sinal negativo dá conta do decréscimo da população de suscetíveis. Naturalmente, durante a contaminação, ao passo que a população de suscetíveis diminui, a população de infectados aumenta. Porém, essa mesma população de infectados diminui sempre que um indivíduo se cura da infecção:

$$\frac{dI}{dt} = a \frac{S}{N} I - kI, \quad (2)$$

onde $k > 0$ é a taxa de recuperação. Por fim, se a população de recuperados aumenta à medida que algum indivíduo se cura, tem-se

$$\frac{dR}{dt} = kI. \quad (3)$$

2.1.1 Análise do plano de fase das equações

Note que as duas primeiras equações (1) e (2) não contém R , logo, não dependem da equação (3), o que nos permite fazer uma análise de seu plano de fase (um exemplo de tal plano é encontrado na figura (1)). Curiosamente, estas equações se assemelham às equações do modelo Predador-presa quando a taxa de nascimento de presas é igual a zero. Trabalharemos com as frações das populações de suscetíveis e infectados, bastando para isso dividir suas respectivas equações por N :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -asi, \\ \frac{di}{dt} &= asi - ki. \end{aligned} \quad (4)$$

Feito isso, partimos para o cálculo de seus pontos críticos. Na equação

$$-asi = 0, \quad (5)$$

encontramos $s = 0$ ou $i = 0$. Já na equação

$$(as - k)i = 0, \quad (6)$$

encontramos $i = 0$ ou $s = k/a$. Temos então o conjunto de pontos críticos:

$$(s,i) = (s,0). \tag{7}$$

Em $(s,i) = (s,0)$, tem-se s como um valor irrestrito, porém é possível saber pela equação (4) que s não pode se tornar negativo e também que diminui monotonicamente, logo s possui um valor limite $s(\infty)$ não negativo. Para saber se $i(t)$ também possui um valor limite é preciso analisar novamente as equações (4), cuja solução pode ser obtida aplicando-se a regra da cadeia,

$$\frac{di}{dt} = \frac{di}{ds} \frac{ds}{dt}, \tag{8}$$

onde supõe-se $i(s(t))$. Logo

$$\frac{di}{ds} = \frac{\left(\frac{di}{dt}\right)}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \frac{asi - ki}{-asi} - 1 + \frac{k}{a} \frac{1}{s}, \tag{9}$$

cujas soluções são:

$$i = -s + \frac{k}{a} \ln s + c. \tag{10}$$

De acordo com este resultado, se $s(\infty)$ for zero o lado direito de (10) será negativo e resultará em $i(t)$ negativo, o que contradiz $i(0) > 0$. Sendo assim, $i(t)$ também tem um valor limite $i(\infty) = -s(\infty) + \frac{k}{a} \ln s(\infty) + c$, que, conforme já visto, deve se zero.

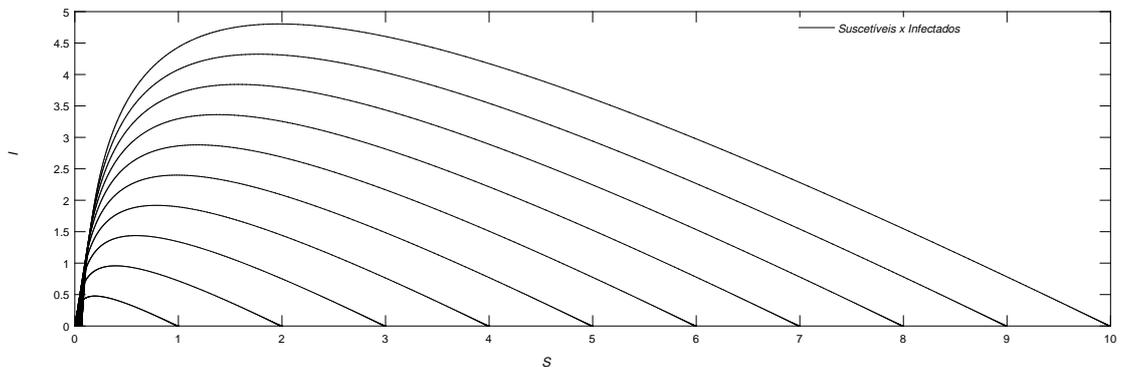


Figura 1 – Plano de fase do modelo SIR, dado pela população de suscetíveis versus a população de infectados.

Outra conclusão que podemos tirar deste plano de fase é que, se $s(0) > k/a$, ou seja, se $s(0)$ ultrapassar o valor limiar, a fração de infectados aumentará ($di/dt > 0$ em $t = 0$) para depois desaparecer. O valor de pico de $i(t)$ será quando $s(t)$ passar por k/a ($di/dt = 0 = a[s - (k/a)]i$). Este fator implica uma epidemia (ver figura 2). Porém se $s(0) \leq k/a$, a população de infectados diminuirá monotonicamente sem ocorrer epidemia (3).

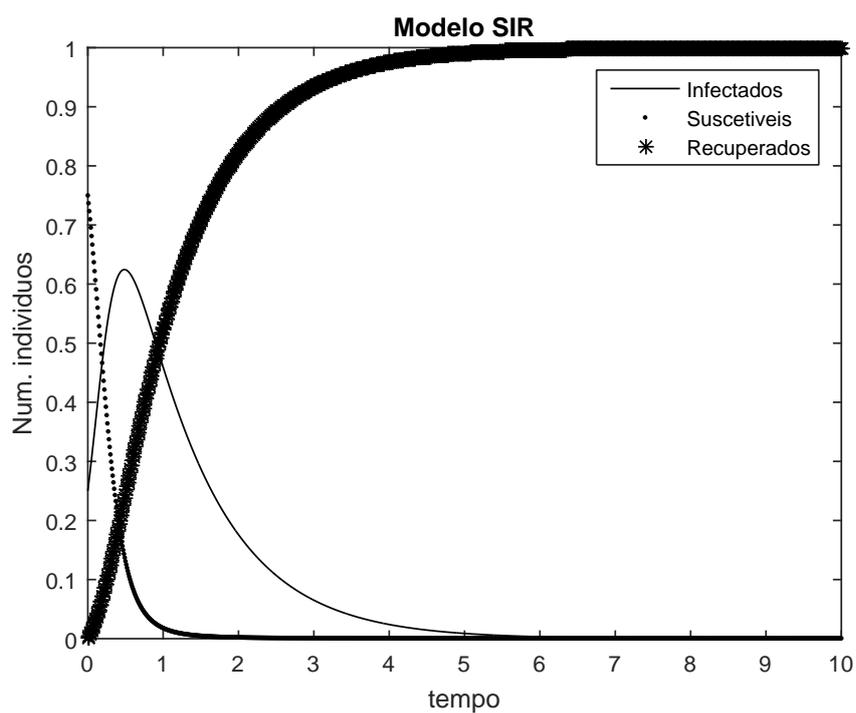


Figura 2 – Representação de epidemia, com $s(0) = 0,75$, $i(0) = 0,25$, $k/a = 0,143$.

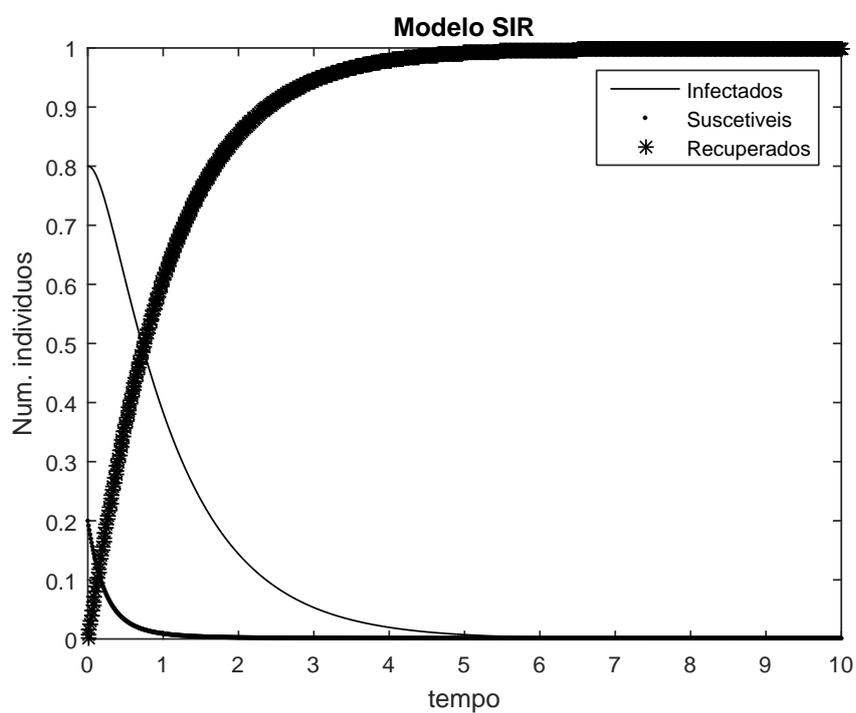


Figura 3 – Representação de ausência de epidemia, com $s(0) = 0,2$, $i(0) = 0,8$, $r(0) = 0$, $k/a = 0,2$.

2.2 Expoente de Hurst

Um problema aberto na área de finanças é a completa caracterização estatística das séries financeiras [5]. Diversos modelos estatísticos têm sido explorados, buscando-se reproduzir séries com as mesmas propriedades das séries financeiras empíricas. Tais modelos são importantes para cálculos de relação risco versus retorno de investimentos, cálculos estes fundamentais na prática diária de agentes financeiros.

A complexidade do mercado financeiro leva a uma divergência de opiniões e o que se discute atualmente é a eficiência ou não deste mercado. Alguns defendem a Hipótese de Mercado Eficiente, onde todo movimento de preços resulta de informações externas que chegam ao mercado e tais informações são imediatamente refletidas no preço do ativo (como se seus investidores fossem completamente racionais e incorporassem prontamente essas informações). Desta forma, as séries temporais seriam completamente aleatórias [5]. Por outro lado, estudos mostram que o comportamento dos investidores pode desviar de padrões racionais. Fatores psicológicos podem afetar decisões, levando a outras consequências que não as esperadas [20]. De fato, há estudos que mostram que as séries temporais guardam alguma memória [7].

O expoente de Hurst é usado como uma medida da eficiência de mercado. É uma ferramenta que analisa séries temporais para determinar se existe ou não correlação ao longo delas. Um expoente de Hurst maior que 0,5 significa que há persistência na série temporal, ou seja, se o último movimento foi ascendente (descendente) há maior probabilidade de que o próximo movimento seja igualmente ascendente (descendente). Já valores menores que 0,5 implicam anti-persistência, e valores iguais a 0,5 ocorrem quando não há tendência (figura 4). O expoente de Hurst surgiu de um estudo desenvolvido inicialmente em Hidrologia, da necessidade de se conhecer o fluxo das águas do Rio Nilo. A ideia era usar o conhecimento sobre esse fluxo no projeto de reservatórios de água. O biólogo Harold E. Hurst percebeu que as chuvas não chegavam aleatoriamente, tinham certa tendência (viés) ao longo do tempo. Então, foi possível perceber que outros fenômenos naturais se comportavam de maneira semelhante. A partir daí, outros aproveitaram sua linha de raciocínio, estabelecendo uma relação entre esse expoente e séries temporais financeiras, com o objetivo de investigar se estas também se comportavam com viés, isto é, se apresentavam memória de longo prazo [21]. Verificou-se que mercados de países desenvolvidos tendem a ser mais eficientes que os de países emergentes, ou seja, apresentam expoentes mais próximos de 0,5 [7].

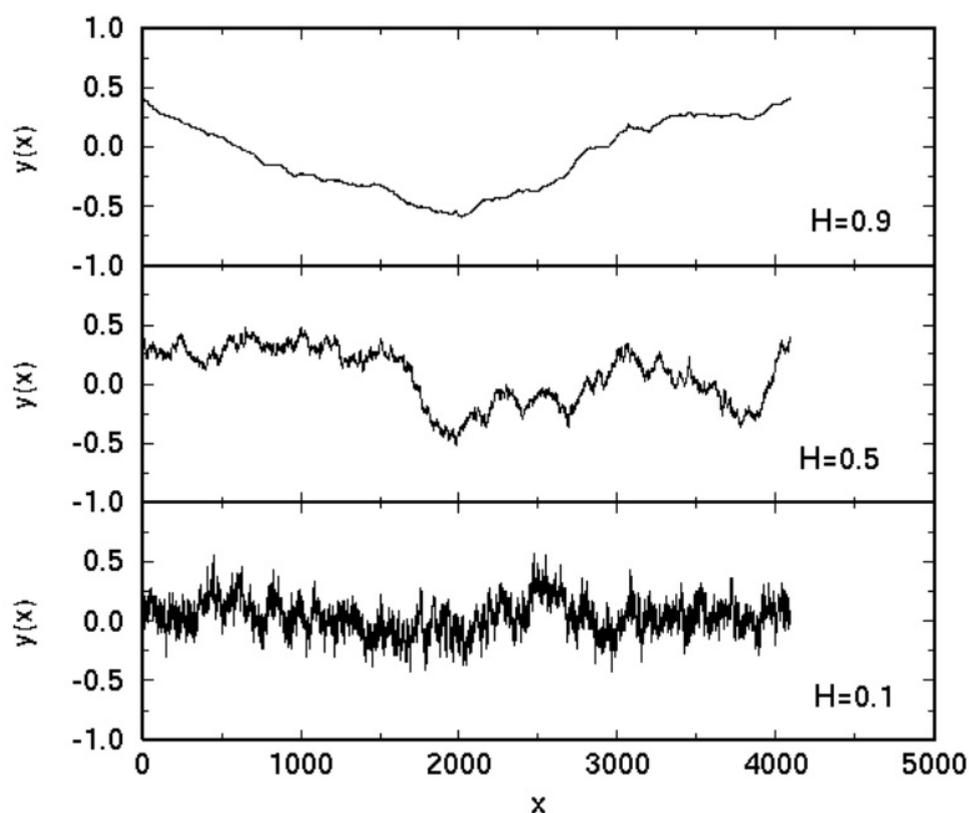


Figura 4 – Curvas com diferentes expoentes de Hurst. Figura referenciada em http://laplace.ucv.cl/Patterns/coopphen_book97/boxes/selfAffineFractals.html.

2.2.1 Cálculo do Expoente de Hurst

Existem alguns métodos para o cálculo deste expoente, um deles é o método da rugosidade, que consiste da análise de variação da rugosidade (desvio padrão) em diferentes escalas. Na figura (5), mostramos duas curvas com diferentes rugosidades: na curva escura os pontos estão, em média, mais afastados da média do que os pontos da curva clara, apresentando assim maior desvio padrão (rugosidade).

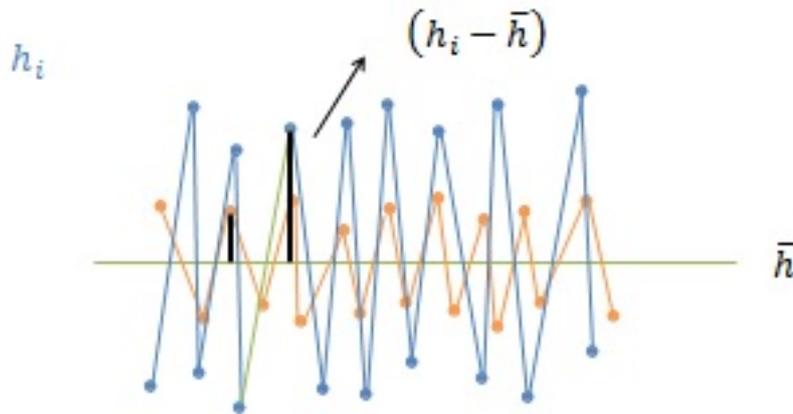


Figura 5 – Exemplo de curvas com diferentes rugosidades.

A rugosidade para uma curva definida por n pontos $(i; h_i)$, onde i varia de 1 a n , com \bar{h} igual à média dos h_i , é dada por

$$w = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}. \quad (11)$$

O expoente de Hurst será calculado dividindo-se a série em janelas e analisando a variação da rugosidade média das janelas com o seu tamanho. Para cálculos estatísticos, é interessante que se obtenha um número significativo de dados para uma melhor análise e, por esse motivo, a série frequentemente é dividida em janelas deslizantes (ver figura 6) e o cálculo é feito sobre estas muitas janelas de tempo. A fórmula da rugosidade será então aplicada para cada janela k de tamanho ε ,

$$w_{\varepsilon,k} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\varepsilon} (h_i - \bar{h}_{\varepsilon,k})^2}, \quad (12)$$

onde os h_i são os pontos da janela e $\bar{h}_{\varepsilon,k}$ é a altura média calculada na mesma. Feito isso, é possível então calcular a rugosidade média na escala ε :

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} w_{\varepsilon,k}. \quad (13)$$

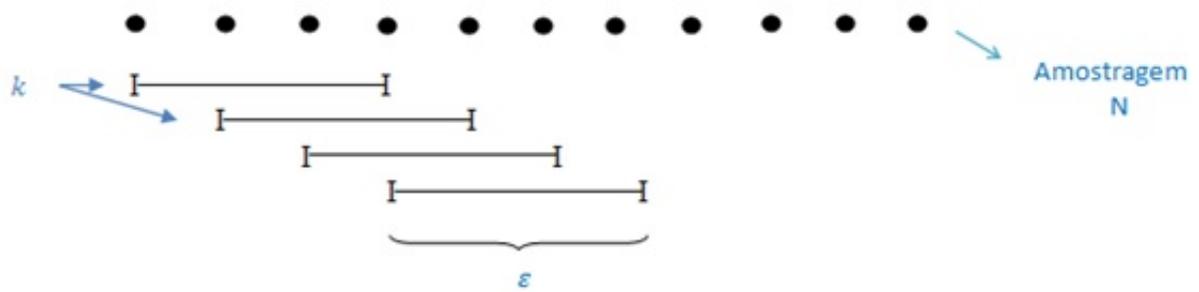


Figura 6 – Exemplo de janelas deslizantes.

Por último, temos que o expoente de Hurst é dado pelo coeficiente angular da reta que melhor aproxima os pontos do gráfico de $\ln W(\varepsilon)$ em função de $\ln \varepsilon$, como exemplificado na figura (7).

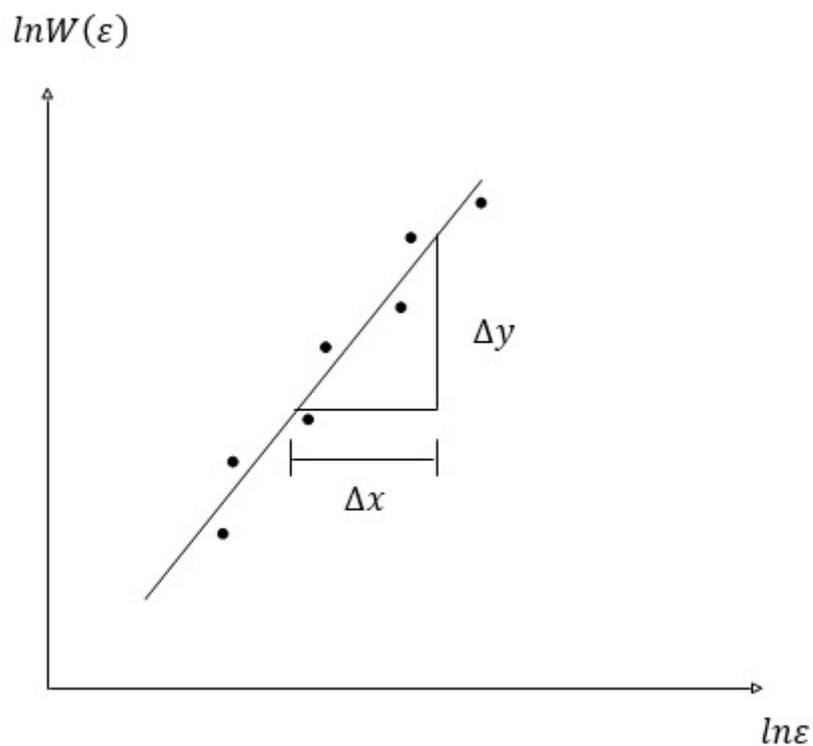


Figura 7 – Cálculo do expoente de Hurst dado por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

O método DFA (Detrended Fluctuation Analysis) é parecido com o método da rugosidade, com a única diferença de que ao invés das medidas de distância serem feitas a partir da média calculada no intervalo (que corresponde a uma reta horizontal), serão feitas a partir da reta que melhor se ajusta aos pontos do intervalo, como exemplificado na figura (8). Observe que as distâncias são calculadas sobre uma linha vertical.



Figura 8 – Exemplo de funcionamento do método DFA, onde este escolhe a melhor reta que se aplica ao intervalo.

A interpretação do expoente de Hurst deve ser levada a termo da seguinte forma: se $H = 1/2$ significa que os pontos da série são independentes, não possuem correlação entre eles, o que estaria de acordo com a Hipótese de Mercado Eficiente ou esta série não teria memória longa. Se H afasta-se de $1/2$, significa que há correlação, podendo apresentar persistência ou anti-persistência, o que demonstraria a ineficiência do mercado. Para $H > 1/2$, tem-se persistência. Isso quer dizer que movimentos anteriormente crescentes se manterão, com probabilidade maior que $1/2$, crescentes atualmente, ou o contrário, movimentos decrescentes se manterão, com probabilidade maior que $1/2$, decrescentes. Para $H < 1/2$, tem-se anti-persistência, ou seja, movimentos anteriormente crescentes levariam agora a movimentos decrescentes, com maior probabilidade, e vice-versa.

Segundo a Hipótese de Mercado Eficiente, não há informação nas séries temporais de mercados financeiros que permitam a previsão de preços que levem a auferir-se lucro consistentemente. Por outro lado, há um enorme número de negociações realizadas nas bolsas do mundo inteiro que se baseiam na análise de tais séries. Desta forma, há uma divergência entre a economia ortodoxa e boa parte da prática de mercado. O expoente de Hurst é uma das ferramentas estatísticas que podem contribuir nesta discussão.

2.3 Curtose

Uma distribuição de probabilidades, é caracterizada como uma distribuição normal, ou distribuição Gaussiana, quando a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X é dada pela seguinte fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (14)$$

onde σ é o desvio padrão da amostra e μ a média. Se X segue essa distribuição dizemos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ temos uma distribuição normal padrão e essa tem a forma de um sino (figura 9).

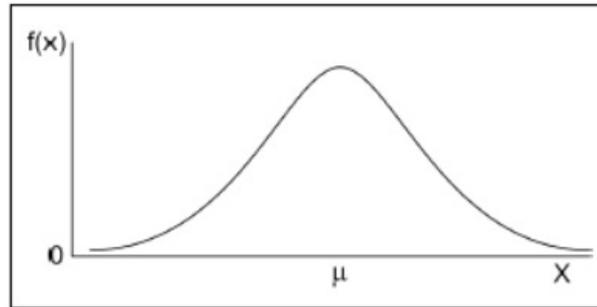


Figura 9 – Exemplo de uma curva de distribuição normal, onde μ é a média e σ o desvio padrão. Figura referenciada em <http://www.portaaction.com.br/estatistica-basica/26-curtose>.

Curtose é uma medida estatística de dispersão que diz respeito ao grau de achatamento de uma curva de distribuição de probabilidades, quando comparada à curva de distribuição normal (distribuição Gaussiana) [22].

De forma específica, temos que a curtose pode ser definida por:

$$\kappa = \frac{m_4(\mu)}{\sigma^4} + (-3), \quad (15)$$

onde $m_4(\mu)$ é o quarto momento central e σ o desvio padrão. Na literatura encontramos também a curtose definida como a razão entre o quarto momento central e o quadrado do segundo momento central, tal como:

$$\frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{E\{(X - E(X))^4\}}{[E\{(X - E(X))^2\}]^2} = \frac{m_4(\mu)}{\sigma^4} \quad (16)$$

Neste caso a curtose da normal é igual a 3.

Uma curva de distribuição de frequências pode então ser classificada como:

- Mesocúrtica - quando a curtose de determinada distribuição é igual à curtose da distribuição normal, ou seja, quando o valor da curtose é igual a 0 pela primeira definição, ou igual a 3 pela segunda definição;
- Platicúrtica - quando a curtose desta curva é menor que a curtose da distribuição normal (curtose menor que 0 ou menor que 3);
- Leptocúrtica - quando a curtose de tal curva é maior que a da distribuição normal (curtose maior que 0 ou maior que 3).

Quando a curva é tida como Leptocúrtica dizemos que essa curva possui caudas pesadas. A figura (10) possui exemplos destes três tipos de curvas de probabilidades.

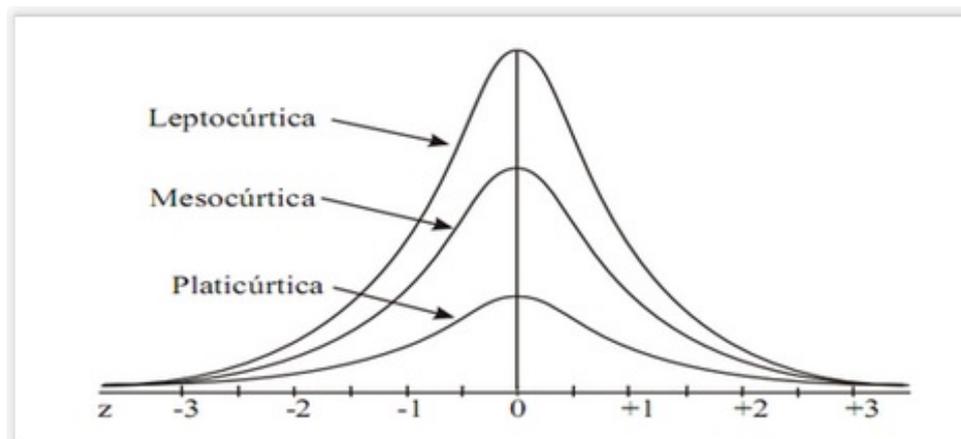


Figura 10 – Exemplos de curvas Mesocúrtica, Platicúrtica e Leptocúrtica. Figura referenciada em <http://exerciciosparaiba.blogspot.com.br/2016/03/probabilidade-e-estatistica-aula-5.html>.

2.4 Conceitos de Economia e Finanças

Esta seção é destinada a elucidar alguns termos técnicos utilizados na área de economia e finanças, que são mencionados ao longo deste trabalho.

2.4.1 Ativo

Ativo é o termo usado para designar bens, ações ou direitos relativos a uma empresa, comercializados no mercado financeiro. Um ativo é avaliado através de seu custo [23].

2.4.2 Ações

Títulos de propriedade negociados no mercado financeiro referentes à uma pequena fração do capital social de uma empresa. Mais precisamente, valores mobiliários emitidos por sociedades anônimas [24].

2.4.3 Análise Técnica

A análise técnica [25] é utilizada por investidores profissionais ou até mesmo investidores amadores, interessados em obter lucros em suas negociações. Estes buscam conhecer mais sobre os ativos, com relação à movimentação dos preços, levando em conta tendências. O objetivo é tentar identificar o melhor momento de negociá-los.

A análise técnica dispõe de gráficos que reproduzem as transações, oferecendo uma melhor visualização de componentes emocionais presentes no mercado e futuras tendências de precificação.

2.4.4 Análise Fundamentalista

A análise fundamentalista [26], com o mesmo propósito de obter lucros, busca conhecer o ativo e seu valor de mercado através da situação financeira da empresa e de suas perspectivas com relação ao segmento a que pertence. Analisa até mesmo como tal empresa está sendo gerida. Acredita-se que o preço reflita tais aspectos.

A reputação da empresa conta muito para o agente investidor.

2.4.5 Hipótese de Mercado Eficiente

A Hipótese de Mercado Eficiente (HME) [27], como o próprio nome sugere, discute a eficiência do mercado financeiro com relação à negociação de preços de ativos neste mercado. Foi difundida por Eugene Fama, em 1965, e, desde então, tornou-se um dos temas de maior importância neste contexto. Tal hipótese possui três versões conhecidas:

- Uma versão dita fraca, que considera que os preços negociados para os ativos refletem toda a informação histórica conhecida.
- Uma versão semi-forte, que diz que os preços negociados refletem a informação conhecida e mudam instantaneamente por meio de novas informações disponíveis.
- E, por último, uma versão forte que afirma que tais preços refletem instantaneamente até mesmo informações não conhecidas ou privilegiadas, ou seja, ninguém consegue obter retornos excessivos.

2.4.6 Candlesticks

Candlesticks são representações gráficas de preços negociados para um ativo num determinado período, que denotam quatro diferentes momentos desta negociação [28]. No início do período é cotado um preço inicial para o ativo, que recebe o nome de *preço de abertura*. Ao longo do período é determinado o maior preço cotado para tal ativo, o qual recebe o nome de *preço de alta* ou *preço máximo*. Ainda durante o período é estipulado também o menor preço desta negociação, conhecido como *preço de baixa* ou *preço mínimo*. E, por fim, ao término do período, é anunciado o último preço negociado, sinalizado como o *preço de fechamento* daquele ativo (11). O candlestick é formado por estes quatro preços: preço de abertura, preço de fechamento, preço de alta e preço de baixa.

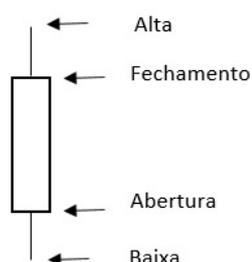


Figura 11 – Exemplo de um candle com os quatro preços definidos: preço de abertura, de alta, de baixa e de fechamento.

O candlestick é também chamado de candle e tem este nome devido a sua semelhança com uma vela. O candle pode ser considerado um candle de alta ou um candle de baixa, conforme a situação. O candle é de alta se o preço de fechamento é maior que o preço de abertura, e de baixa se a condição é contrária, se o preço de abertura é maior que o preço de fechamento. Este último recebe um preenchimento de cor para distingui-los (12).

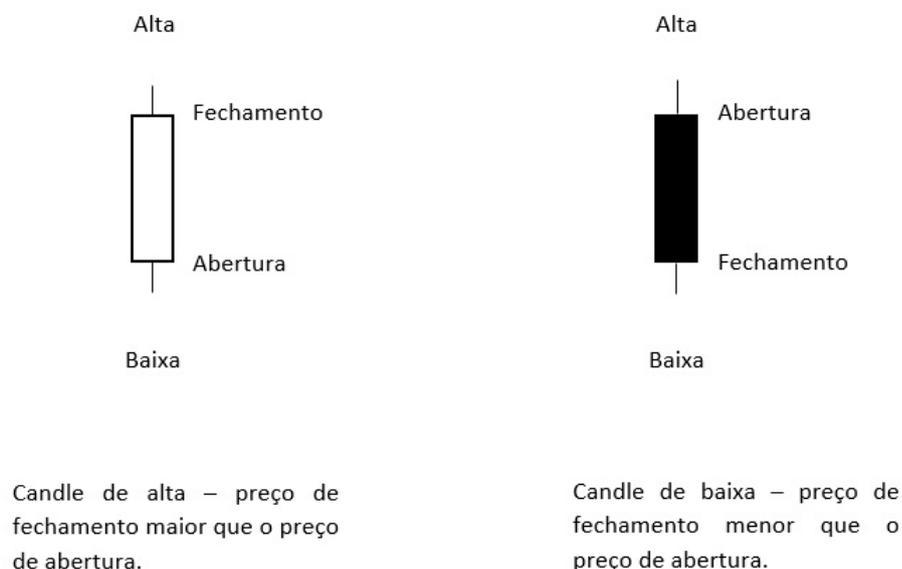


Figura 12 – Exemplos de candles de alta e de baixa.

2.4.7 Liquidez

Liquidez está relacionada à velocidade de negociação de um ativo, ou seja, a facilidade de revertê-lo em dinheiro sem perda considerável de valor [27]. Também é possível pensar em liquidez como a quantidade de dinheiro em circulação no mercado financeiro em relação à quantidade de ativos.

2.5 Critério de Routh-Hurwitz

O critério de estabilidade de Routh Hurwitz é um método simples e direto, que impõe condições necessárias e suficientes para a estabilidade de um polinômio, sem necessariamente resolvê-lo ([29],[30]). Para isso, o teste determina se as raízes do polinômio têm ou não partes reais negativas. Tais condições variam conforme o grau do polinômio. Nos casos mais simples temos:

- Para um polinômio de segunda ordem, $P(s) = s^2 + a_1s + a_0$, suas raízes são negativas e o sistema é considerado estável, conforme este critério, se e somente se, ambos os coeficientes satisfazem a condição $a_i > 0$.
- Para um polinômio de terceira ordem, $P(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$, a condição é que a_2 e a_0 sejam positivos e $a_2a_1 > a_0$.
- Para um polinômio de quarta ordem, $P(s) = a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$, o critério determina que todos os coeficientes satisfaçam $a_n > 0$, e $a_3a_2 > a_4a_1$ e $a_3a_2a_1 > a_4a_1^2 + a_3^2a_0$.

Mas, no geral, o critério apenas verifica em qual semi-plano do plano complexo estão localizadas as raízes do denominador da função de transferência de um sistema; para então determinar se este sistema é estável ou não. Se o sistema tiver parte real positiva é considerado instável.

3 Modelo sem aleatoriedade

O modelo aqui proposto é voltado para o comportamento de um universo de investidores dentro do mercado financeiro, diante de notícias externas e aleatórias. Tais notícias podem acarretar posições de compra ou de venda desses investidores. A intenção é realizar a mediação entre a chegada de notícias e o movimento dos preços. Nesta seção, estudaremos o modelo sem a introdução de aleatoriedades, durante a evolução, visando conhecer melhor as possibilidades de dinâmicas por ele introduzidas.

3.1 Pensando em uma notícia separadamente

Temos um número limitado de investidores, nossa população total (N). Assim que chega uma notícia, uma parcela desses investidores reage imediatamente tomando uma decisão. Estes são os infectados, que optam por comprar ou vender. Suas ofertas de compra ou de venda é que levam à variação nos preços: como veremos adiante, o número de infectados está diretamente relacionado à dinâmica de preços. As notícias poderão ser favoráveis ou desfavoráveis ao ativo negociado: notícias favoráveis (desfavoráveis) levam ao incremento (declínio) no número de infectados. Nesta seção, consideraremos o caso em que há apenas uma notícia, levando ao aparecimento de infectados de compra ou de venda. Além dos infectados, há os suscetíveis: tais investidores não estão realizando ofertas (não estão diretamente relacionados à evolução dos preços), mas podem vir a tornar-se infectados (realizar ofertas) a partir do contato com estes últimos. Passemos agora a uma descrição detalhada da dinâmica. Se a notícia for favorável ao ativo, temos os infectados de compra (I_c). Os mesmos deixam a condição de infectados de compra logo que realizada a operação. Sendo assim, com a obtenção do novo bem, podem negociar uma venda e passam então à condição de suscetíveis de venda. Por outro lado, se a notícia for desfavorável ao ativo, temos os infectados de venda (I_v) e, da mesma forma, estes mudam sua condição depois de realizada a ação. Com a posse do dinheiro da venda, podem negociar uma nova compra, ou seja, tornam-se suscetíveis de compra. A parcela da população de investidores que não reagiu de pronto à notícia, mas que posteriormente pode vir a tomar uma decisão, por imitação dos infectados, é chamada de suscetíveis. Como mencionado acima, também são suscetíveis aqueles que eram infectados mas que já realizaram a transação desejada. De forma análoga, temos os suscetíveis de compra (S_c) e os suscetíveis de venda (S_v), dependendo da situação, como já dito, se de demanda ou de oferta. Se os suscetíveis de compra tomam uma decisão de compra, eles assumem a condição de infectados de compra, e se suscetíveis de venda optam por vender, passam à condição de infectados de venda.

De acordo com o descrito acima, a variação da população dos infectados de compra pode ser modelada usando os processos já mencionados: a recuperação dos infectados de compra, depois da compra, que diminui essa população; o encontro dos já infectados de compra com os suscetíveis de compra, que aumenta essa população. Tais processos resultam na seguinte equação:

$$\frac{dI_c}{dt} = a \frac{S_c}{N} I_c - b I_c, \quad (17)$$

onde $a > 0$ é uma constante proporcional à probabilidade do encontro entre um infectado e um suscetível de compra, $b > 0$ a taxa de recuperação e o sinal negativo descreve a recuperação dos anteriormente infectados assim que efetuada a compra.

Se a decisão for de venda, temos os infectados de venda e a situação é semelhante. A variação da população dos infectados de venda será modelada pelas seguintes situações: a recuperação dos infectados de venda, depois da venda, que diminui essa população; o encontro dos já infectados de venda com os suscetíveis de venda, que aumenta essa população. Isso nos leva à equação abaixo:

$$\frac{dI_v}{dt} = \alpha \frac{S_v}{N} I_v - \beta I_v, \quad (18)$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante proporcional à taxa com que infectados e suscetíveis de venda encontram-se, $\beta > 0$ é a taxa de recuperação e o sinal negativo representa esta recuperação dos infectados de venda.

Para a população dos suscetíveis de compra, temos também duas situações a considerar: os suscetíveis de compra deixam de ser suscetíveis assim que imitam os infectados de compra; a mudança de condição dos infectados de venda para suscetíveis de compra (detendo o dinheiro de alguma venda, podem agora comprar). Assim, temos a equação

$$\frac{dS_c}{dt} = -a \frac{S_c}{N} I_c + \beta I_v, \quad (19)$$

onde o sinal negativo demonstra que a população de suscetíveis de compra diminui à medida que imitam a população de infectados de compra, ao passo que os recuperados de venda se tornam suscetíveis de compra e alimentam essa parcela da população.

A situação é análoga para os suscetíveis de venda. Também temos dois processos: os suscetíveis de venda imitando os infectados de venda, ou seja, tornando-se infectados de venda, o que diminui essa população; os infectados de compra, depois de recuperados, tornando-se suscetíveis de venda. Logo, temos a seguinte equação:

$$\frac{dS_v}{dt} = -\alpha \frac{S_v}{N} I_v + b I_c, \quad (20)$$

onde o sinal negativo representa os suscetíveis de venda deixando esta condição para tornarem-se infectados de venda, quando do encontro com os mesmos. O termo positivo

representa a chegada de novos suscetíveis de venda que são os infectados de compra recuperados.

O sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{dI_c}{dt} &= a \frac{S_c}{N} I_c - b I_c, \\ \frac{dI_v}{dt} &= \alpha \frac{S_v}{N} I_v - \beta I_v, \\ \frac{dS_c}{dt} &= -a \frac{S_c}{N} I_c + \beta I_v, \\ \frac{dS_v}{dt} &= -\alpha \frac{S_v}{N} I_v + b I_c, \end{aligned} \quad (21)$$

resume nosso modelo. Essa dinâmica está representada na figura (13), que pode ser descrita na forma a seguir.

Os suscetíveis de compra alimentam a população dos infectados de compra ao ocorrer o encontro entre os mesmos, enquanto os infectados de compra podem tornar-se suscetíveis de venda quando recuperados da compra, ou seja, ao adquirirem ativos. A população de suscetíveis de venda é então alimentada por estes últimos e decrementada pelo encontro com os infectados de venda, já que estes deixam de ser apenas suscetíveis para tornarem-se infectados. Consequentemente, a população dos infectados de venda é alimentada pelo encontro com os suscetíveis de venda e decrementada pela taxa de recuperação dos próprios infectados de venda. Por sua vez, os antigos infectados de venda, que agora detém o dinheiro dos ativos, alimentam a população dos suscetíveis de compra.

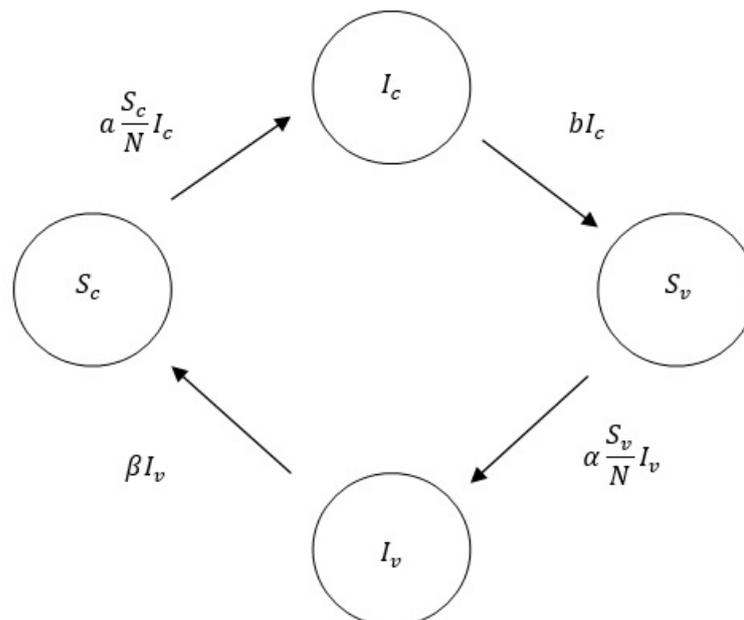


Figura 13 – Representação da dinâmica do modelo.

Outra maneira de descrever o modelo é através de uma máquina de estados (figura 14), onde são representados os estados dos agentes financeiros e as transições entre estes, como se segue. Os suscetíveis de compra são os agentes financeiros que possuem dinheiro, mas estão aguardando a melhor hora de comprar ações, logo, não estão no livro de ofertas (LO) ¹. Assim que tomam a decisão de comprar e colocam uma oferta de compra no LO, configuram outros agentes, os infectados de compra. Desta forma, infectados de compra são agentes financeiros que já estão no LO com uma ordem de execução de compra de alguma ação. Note que houve uma transição de estados. Depois de realizada a operação de compra, os infectados de compra também mudam de estado, tornando-se suscetíveis de venda, que caracterizam aqueles agentes que detém ações mas esperam pelo melhor momento de vendê-las (não estão no LO). Quando os suscetíveis de venda decidem vender as ações e vão para o LO, já mudaram de condição (estado) e agora recebem outra denominação, infectados de venda. Assim, infectados de venda representam os agentes que estão no LO com ordem de execução de venda de ações. Ao completar a ação de venda, aqueles infectados de venda deixam sua condição e passam à condição de suscetíveis de compra, já descritos acima.

¹ Nome dado à ferramenta utilizada por investidores para negociação de ativos no mercado, com grandes quantidades de informações. São duas telas lado a lado que lembram um livro. Em inglês, chama-se Order book.

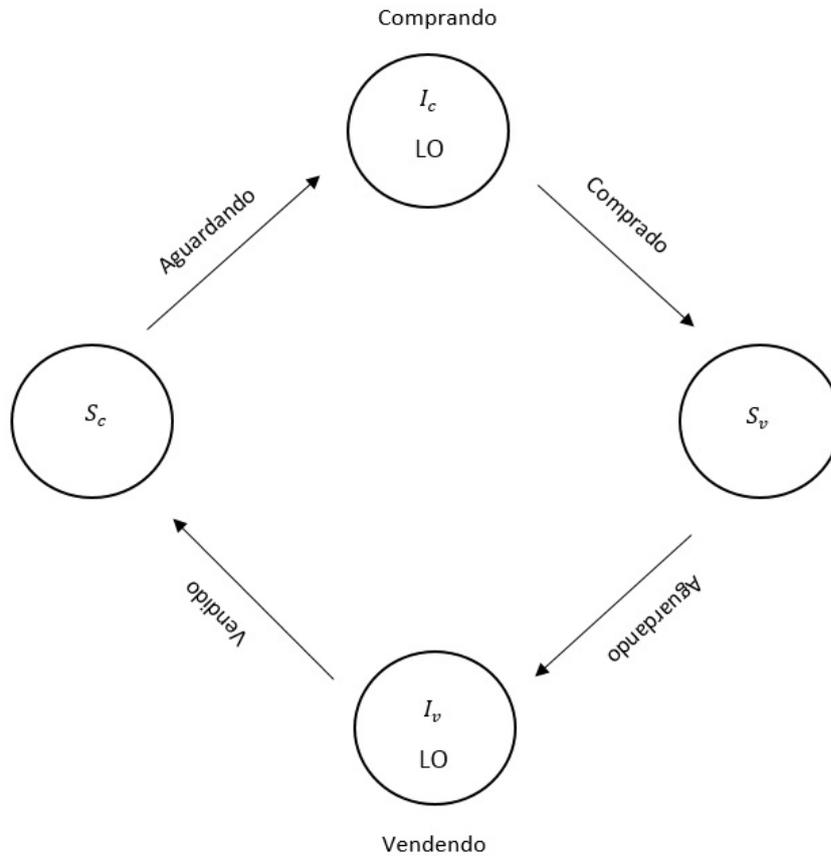


Figura 14 – Representação da dinâmica do modelo através de uma máquina de estados.

Às equações (21) devemos adicionar aquela que descreve a dinâmica do preço do ativo:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \gamma (I_c - I_v), \quad (22)$$

que relaciona o excesso de demanda, assumido aqui como proporcional à diferença entre as populações de infectados de compra e de venda, à variação relativa do preço, como usual [31].

Para melhor trabalharmos com o modelo, chamemos de i_c a parcela de infectados de compra na população total ($i_c = I_c/N$), i_v a parcela de infectados de venda na população total ($i_v = I_v/N$), s_c a parcela de suscetíveis de compra na população total ($s_c = S_c/N$), e s_v a parcela de suscetíveis de venda na população total ($s_v = S_v/N$). Após uma mudança

de variáveis, nosso modelo é representado pelas equações

$$\begin{aligned}\frac{di_c}{dt} &= i_c(as_c - b), \\ \frac{di_v}{dt} &= i_v(\alpha s_v - \beta), \\ \frac{ds_c}{dt} &= -as_c i_c + \beta i_v, \\ \frac{ds_v}{dt} &= -\alpha s_v i_v + bi_c.\end{aligned}\tag{23}$$

Notemos que

$$i_c + i_v + s_c + s_v = 1.\tag{24}$$

3.1.1 Pontos críticos

Para melhor entendimento do modelo construído, buscamos conhecer seus pontos de equilíbrio, igualando todas as equações a zero:

$$\begin{aligned}i_c(as_c - b) &= 0, \\ i_v(\alpha s_v - \beta) &= 0, \\ -as_c i_c + \beta i_v &= 0, \\ -\alpha s_v i_v + bi_c &= 0.\end{aligned}\tag{25}$$

Na resolução dessas equações apresentaram-se duas situações distintas. As duas primeiras equações chegaram a valores fixos depois de uma fatoração, a primeira apresentando $i_c = 0$ ou $s_c = b/a$ e a segunda $i_v = 0$ ou $s_v = \beta/\alpha$. As duas últimas apresentaram somente uma relação entre suas variáveis. A terceira equação resultou em $i_v = as_c i_c / \beta$ e a última em $i_c = \alpha s_v i_v / b$. Sendo assim, tem-se quatro condições possíveis referentes às duas primeiras equações :

Primeira Condição – $\{ i_c = 0 \text{ e } i_v = 0 \}$

Substituindo estes valores na terceira e quarta equações, verificamos que são verdadeiras para quaisquer valores de s_c e s_v . O que nos leva ao primeiro conjunto de pontos críticos, $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, s_c, s_v)$.

Segunda Condição – $\{ i_c = 0 \text{ e } s_v = \beta/\alpha \}$

Da mesma forma, verificando estes valores na terceira e quarta equações, encontramos o conjunto de pontos $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, s_c, \beta/\alpha)$, subconjunto do conjunto encontrado na primeira condição.

Terceira Condição – $\{ i_v = 0 \text{ e } s_c = b/a \}$

Mais uma vez, depois da verificação de tais valores na terceira e quarta equações, encontramos o conjunto de pontos $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, b/a, s_v)$. Este também está contido no primeiro conjunto encontrado na primeira condição.

Quarta condição – $\{s_c = b/a \text{ e } s_v = \beta/\alpha\}$

Esta última condição apresenta um novo ponto, não contido na primeira, sendo ele $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (i_c, i_c b/\beta, b/a, \beta/\alpha)$.

Considerando a interpretação das variáveis no modelo e sujeitando os conjuntos encontrados à restrição (24), temos que estes se transformam em conjuntos mais limitados. O primeiro conjunto, antes definido como $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, s_c, s_v)$, torna-se $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, s_c, 1 - s_c)$, tal que $0 \leq s_c \leq 1$. O segundo conjunto $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, s_c, \beta/\alpha)$, pela mesma sujeição, fica definido como $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, 1 - \beta/\alpha, \beta/\alpha)$, onde β/α deve ser menor ou igual a 1. O terceiro conjunto $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, b/a, s_v)$, dado na terceira condição, quando sujeito à mudança torna-se o ponto $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, b/a, 1 - b/a)$, com $b/a \leq 1$. Nota-se que o segundo e terceiro conjuntos continuam sendo subconjuntos do primeiro. Por último, aplicando esta restrição ao quarto conjunto, temos que i_c é igual a

$$i_c = \frac{1 - \frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha}}{1 + \frac{b}{\beta}}. \quad (26)$$

Em resumo, são pontos críticos do sistema:

$$(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, s_c, 1 - s_c), \quad (27)$$

com $0 \leq s_c \leq 1$, e

$$(i_c, i_v, s_c, s_v) = (i_c, i_c b/\beta, b/a, \beta/\alpha), \quad (28)$$

com i_c dado pela equação (26). O primeiro conjunto de pontos críticos é de fácil entendimento. Sem os infectados não temos nenhuma operação de compra ou venda, ou seja, não existe uma dinâmica. O segundo ponto crítico é o que nos parece mais interessante, que foge do óbvio.

3.1.2 Análise dos pontos críticos

Uma vez que os pontos críticos não são isolados, o estudo a seguir não é conclusivo, mas dá indícios sobre o comportamento esperado para o sistema em estudo. Este comportamento foi confirmado para os casos simulados.

Partimos para o cálculo da jacobiana, lembrando que esta matriz é formada pelas derivadas parciais das funções que representam o modelo simplificado. A partir das funções

$$\begin{aligned} \frac{di_c}{dt} &= F_1(i_c, i_v, s_c, s_v), \\ \frac{di_v}{dt} &= F_2(i_c, i_v, s_c, s_v), \\ \frac{ds_c}{dt} &= F_3(i_c, i_v, s_c, s_v), \\ \frac{ds_v}{dt} &= F_4(i_c, i_v, s_c, s_v), \end{aligned} \quad (29)$$

onde

$$\begin{aligned} F_1 &= i_c(as_c - b), \\ F_2 &= i_v(\alpha s_v - \beta), \\ F_3 &= -as_c i_c + \beta i_v, \\ F_4 &= -\alpha s_v i_v + b i_c. \end{aligned} \quad (30)$$

temos a seguinte matriz:

$$J(i_c, i_v, s_c, s_v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial i_c} & \frac{\partial F_1}{\partial i_v} & \frac{\partial F_1}{\partial s_c} & \frac{\partial F_1}{\partial s_v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial i_c} & \frac{\partial F_2}{\partial i_v} & \frac{\partial F_2}{\partial s_c} & \frac{\partial F_2}{\partial s_v} \\ \frac{\partial F_3}{\partial i_c} & \frac{\partial F_3}{\partial i_v} & \frac{\partial F_3}{\partial s_c} & \frac{\partial F_3}{\partial s_v} \\ \frac{\partial F_4}{\partial i_c} & \frac{\partial F_4}{\partial i_v} & \frac{\partial F_4}{\partial s_c} & \frac{\partial F_4}{\partial s_v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as_c - b & 0 & a i_c & 0 \\ 0 & \alpha s_v - \beta & 0 & \alpha i_v \\ -as_c & \beta & -a i_c & 0 \\ b & -\alpha s_v & 0 & -\alpha i_v \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Substituindo a condição $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, s_c, s_v)$, que corresponde a um conjunto de pontos críticos encontrado, temos

$$J(0, 0, s_c, s_v) = \begin{pmatrix} as_c - b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha s_v - \beta & 0 & 0 \\ -as_c & \beta & 0 & 0 \\ b & -\alpha s_v & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Desta matriz extraímos os autovalores e correspondentes autovetores:

$$\begin{aligned} \alpha s_v - \beta \text{ com autovetor } & \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha s_v} (\beta - \alpha s_v) \\ -\frac{1}{\alpha} \frac{\beta}{s_v} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ as_c - b \text{ com autovetor } & \begin{pmatrix} -\frac{1}{b} (b - as_c) \\ 0 \\ -\frac{a}{b} s_c \\ 1 \end{pmatrix}, \\ 0 \text{ com autovetores } & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (33)$$

onde, de acordo com o já estabelecido, $s_v = 1 - s_c$. Observemos, nas equações deste modelo (23), que há uma disputa entre os processos de imitação e de realização de negócio, o primeiro responsável por alimentar a população de infectados e o segundo por diminuí-la. Notemos que as_c e αs_v estão relacionados aos processos de imitação e b e β aos processos

de realização de negócios. Esta disputa também está visível em alguns dos autovalores da jacobiana, especificamente, a disputa entre os termos αs_v e β , e entre os termos $a s_c$ e b , ou seja, as relações entre estes parâmetros tem relação com a estabilidade de pontos críticos. Se b (β) ganha de $a s_c$ (αs_v) temos o autovalor $a s_c - b$ ($\alpha s_v - \beta$) negativo, o que aponta para a estabilidade deste ponto. Do contrário, temos os respectivos autovalores positivos, e as dinâmicas se afastarão do ponto crítico, sugerindo instabilidade. A instabilidade, aqui, significa afastarem-se de zero. Esse processo pode ser visto como análogo ao processo de epidemia descrito na seção 2.1.1.

Substituindo o segundo ponto crítico na jacobiana, temos

$$J(i_c, i_c b/\beta, b/a, \beta/\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a i_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha i_c b/\beta \\ -b & \beta & -a i_c & 0 \\ b & -\beta & 0 & -\alpha i_c b/\beta \end{pmatrix}, \quad (34)$$

onde i_c é dado pela equação (26). Este ponto crítico, não trivial, produz autovalores e autovetores dados por uma expressão muito extensa, difícil de interpretar, ou seja, é complicado prosseguir com as análises relativas a este ponto crítico da mesma forma que tratamos os anteriores. Porém, mesmo com limitações, podemos analisar sua estabilidade, amparados pelo critério de Routh Hurwitz.

3.1.2.1 Utilizando o critério Routh-Hurwitz

Este critério de Routh-Hurwitz é capaz de verificar a estabilidade de um polinômio através de um teste simples e direto, com condições necessárias e suficientes para tanto ([30]).

A jacobiana (34), dada neste ponto crítico, nos fornece o polinômio característico de quarto grau

$$P_4(X) = X^4 + \left(a i_c + b \frac{\alpha}{\beta} i_c \right) X^3 + \left(a b i_c + b \alpha i_c + a b \frac{\alpha}{\beta} i_c^2 \right) X^2 + \left(a b \alpha i_c^2 + a b^2 \frac{\alpha}{\beta} i_c^2 \right) X. \quad (35)$$

É evidente que $X = 0$ é uma de suas raízes. As outras serão buscadas em

$$P_3(X) = X^3 + \left(a i_c + b \frac{\alpha}{\beta} i_c \right) X^2 + \left(a b i_c + b \alpha i_c + a b \frac{\alpha}{\beta} i_c^2 \right) X + \left(a b \alpha i_c^2 + a b^2 \frac{\alpha}{\beta} i_c^2 \right) X^0. \quad (36)$$

De acordo com o critério, para que as raízes de $P_3(X)$ tenham parte real negativa, a_2 e a_0 devem ser positivos e ainda:

$$a_2 a_1 > a_0. \quad (37)$$

A primeira condição se verifica, já que

$$a_2 = a i_c + b \frac{\alpha}{\beta} i_c, \quad (38)$$

que é maior que zero, e

$$a_0 = ab\alpha i_c^2 + ab^2 \frac{\alpha}{\beta} i_c^2 \quad (39)$$

também maior que zero. Lembremos que aqui todos os parâmetros são positivos e que $i_c > 0$. A segunda condição também é válida, como demonstrado a seguir:

$$\begin{aligned} \left(ai_c + b \frac{\alpha}{\beta} i_c \right) \left(abi_c + b\alpha i_c + ab \frac{\alpha}{\beta} i_c^2 \right) &> ab\alpha i_c^2 + ab^2 \frac{\alpha}{\beta} i_c^2, \quad (40) \\ a^2 b i_c^2 + ab\alpha i_c^2 + a^2 b \frac{\alpha}{\beta} i_c^3 + ab^2 \frac{\alpha}{\beta} i_c^2 + b^2 \frac{\alpha^2}{\beta} i_c^2 + ab^2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} i_c^3 &> ab\alpha i_c^2 + ab^2 \frac{\alpha}{\beta} i_c^2, \\ a^2 b i_c^2 + a^2 b \frac{\alpha}{\beta} i_c^3 + b^2 \frac{\alpha^2}{\beta} i_c^2 + ab^2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} i_c^3 &> 0. \end{aligned}$$

Note que os dois termos do lado direito da equação acima se cancelam com dois dos termos do lado esquerdo. Desta forma, podemos concluir que os autovalores da matriz jacobiana calculada neste ponto crítico não tem parte real positiva.

3.1.2.2 Particularizando o sistema

Dando continuidade à análise do segundo ponto crítico $(i_c, i_c b/\beta, b/a, \beta/\alpha)$, com $(i_c = \frac{1 - \frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha}}{1 + \frac{b}{\beta}})$, buscando uma melhor compreensão, particularizamos o sistema, a fim de obter um modelo mais tratável. Desta vez, foi considerada uma simetria entre as equações, partindo do pressuposto de que as taxas de infecção de todos os suscetíveis (a e α), são as mesmas, para ambas as operações de compra e venda, o mesmo ocorrendo com as taxas de recuperação de todos os infectados (b e β). Assim, ficamos com apenas dois parâmetros (a e b) em nosso sistema, resultando na jacobiana

$$J(i_c, i_c, b/a, b/a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ai_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ai_c \\ -b & b & -ai_c & 0 \\ b & -b & 0 & -ai_c \end{pmatrix}, \quad (41)$$

com

$$i_c = \frac{1}{2} - \frac{b}{a}. \quad (42)$$

Desta jacobiana foram calculados os autovalores e respectivos autovetores:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\sqrt{ai_c(ai_c - 8b)} - \frac{1}{2}ai_c \text{ com autovetor } \begin{pmatrix} 2a\frac{i_c}{ai_c - \sqrt{a^2i_c^2 - 8abi_c}} \\ -2a\frac{i_c}{ai_c - \sqrt{a^2i_c^2 - 8abi_c}} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
& -\frac{1}{2}\sqrt{ai_c(ai_c - 8b)} - \frac{1}{2}ai_c \text{ com autovetor } \begin{pmatrix} 2a\frac{i_c}{ai_c + \sqrt{a^2i_c^2 - 8abi_c}} \\ -2a\frac{i_c}{ai_c + \sqrt{a^2i_c^2 - 8abi_c}} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
& -ai_c \text{ com autovetor } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
& 0 \text{ com autovetor } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Observemos que os dois primeiros autovalores serão reais se e somente se $a \geq 18b$. Observemos também que não há a possibilidade de ocorrerem autovalores com parte real positiva, uma vez que $|\sqrt{(ai_c)^2 - 8abi_c}|$ é menor que ai_c para a, b e i_c positivos. Sendo assim, estes autovalores são sempre negativos.

3.1.3 Simulações

O software Matlab foi utilizado para realizar simulações com o modelo particularizado ($a = \alpha$ e $b = \beta$). Primeiramente, consideramos condições iniciais próximas ao conjunto de pontos críticos $(i_c, i_v, s_c, s_v) = (0, 0, s_c, s_v)$. A figura (15) mostra que, para as populações iniciais minimamente desviadas deste ponto de equilíbrio $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (0, 0, 0, 0)$, estas retornam ao mesmo, dada a condição dos autovalores negativos da jacobiana neste ponto de equilíbrio ($as_c < b$ e $as_v < b$), uma vez que assumimos a e $b = 1$. Este ponto é assintoticamente estável, em conformidade com o descrito anteriormente. Mantendo as condições iniciais das populações de infectados e suscetíveis, bem como o parâmetro de recuperação e alterando o parâmetro de infecção (imitação) para $a = 3$, de modo que haja autovalores positivos ($as_c > b$ e $as_v > b$), obtemos um comportamento esperado, porém de trajetórias diferentes: neste caso, quando minimamente afastados de seu ponto de equilíbrio, os infectados e suscetíveis se afastam ainda mais do mesmo, de acordo com o que se espera de um ponto instável. Porém, através da figura (16) é

possível observar que não se afastam indefinidamente, elas tendem ao outro ponto crítico $(i_c, i_c, b/a, b/a)$, sendo possível comprovar esta afirmação através da equação (26), com $b/a = 1/3$ e $i_c = 1/6$. Notemos que a curva de preço, com $P(0) = 10$, permanece constante nas duas simulações. Isso ocorre devido às condições iniciais simétricas ($i_c(0) = i_v(0)$) que empregamos, o que nos leva a um excesso de demanda nulo durante toda a dinâmica e, portanto, à constância do preço conforme a equação (22).

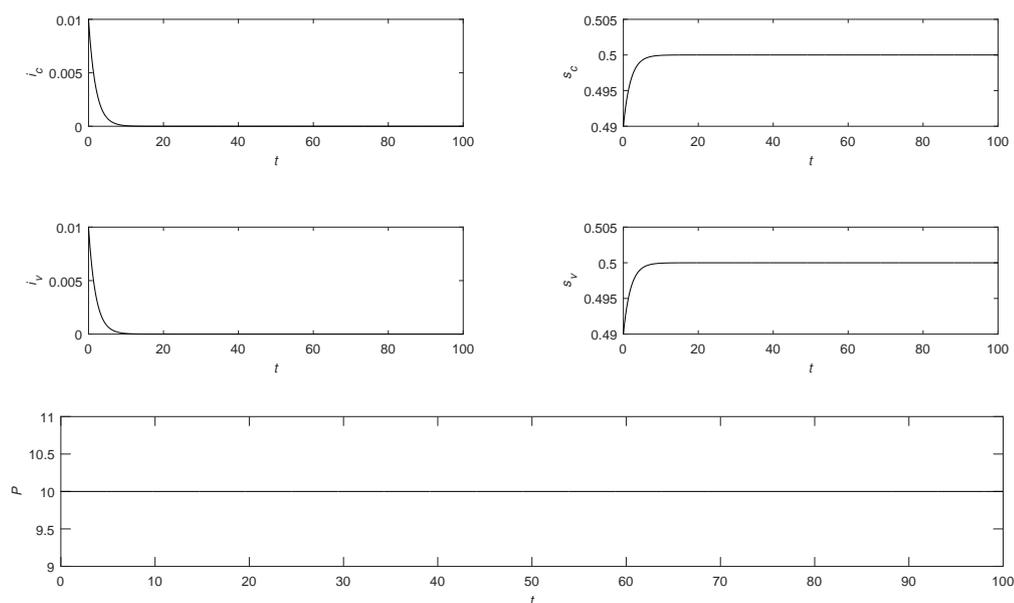


Figura 15 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 0,01$, $s_c(0) = s_v(0) = 0,49$, $P(0) = 10$, com $a = b = 1$.

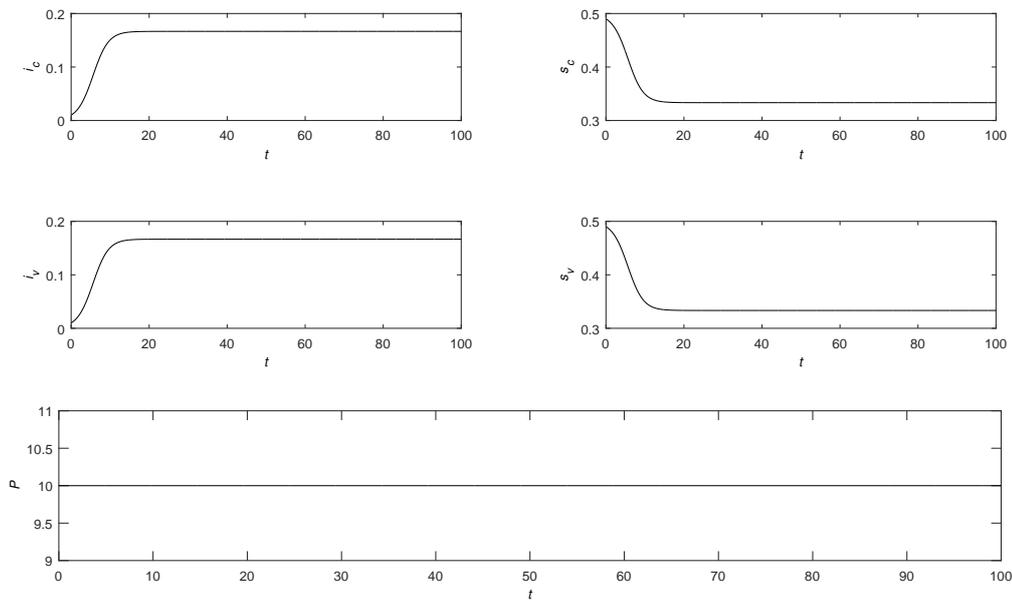


Figura 16 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 0,01$, $s_c(0) = s_v(0) = 0,49$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$.

Condições iniciais próximas ao ponto crítico $(i_c, i_c, b/a, b/a)$, com $i_c = \frac{1}{2} - \frac{b}{a}$, também foram simuladas e as populações retornaram ao seu ponto de equilíbrio, dada a condição negativa dos autovalores da jacobiana neste ponto de equilíbrio, demonstrando estabilidade. Porém, ocorreram situações distintas devido à natureza complexa dos autovalores. Na figura (17), onde considera-se um sistema simétrico, com condições iniciais idênticas para infectados ($i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$) e suscetíveis ($s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$), com $a = 3$ e $b = 1$, obtivemos um comportamento não oscilatório das populações, e na figura (18), onde as condições iniciais são alteradas, fugindo um pouco dessa simetria ($i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0) = (1/6 + 0,1, 1/6 + 0,3, 1/3 - 0,1, 1/3 - 0,3)$), obtivemos um comportamento oscilatório das mesmas populações. A curva de preço, com $P(0) = 10$, continua constante na figura (17), pela condição de simetria e deixa de ser constante na figura (18), pela condição de não simetria ($i_c(0) \neq i_v(0)$), demonstrando algum excesso de demanda.

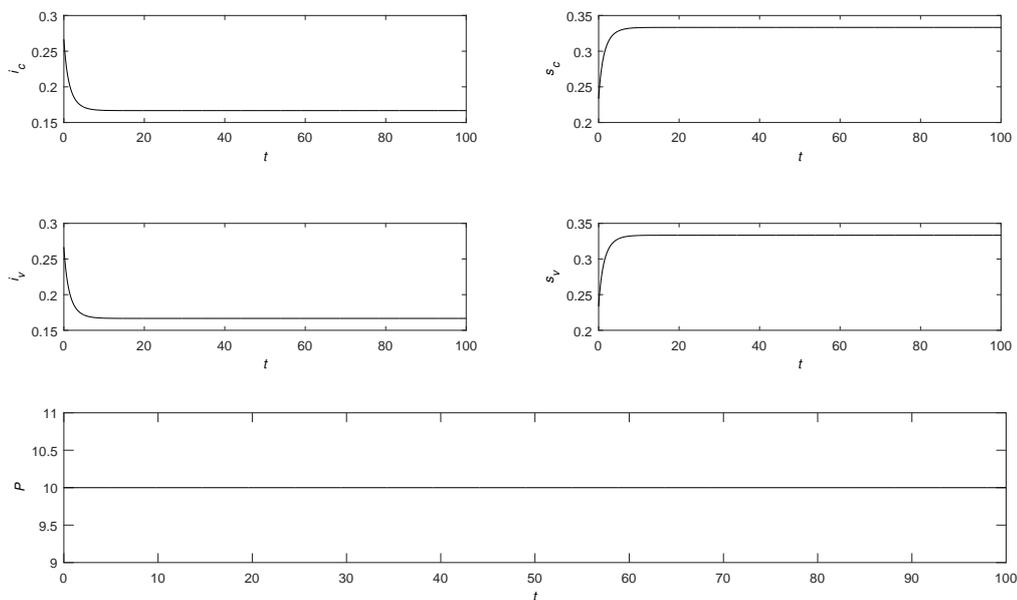


Figura 17 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$.

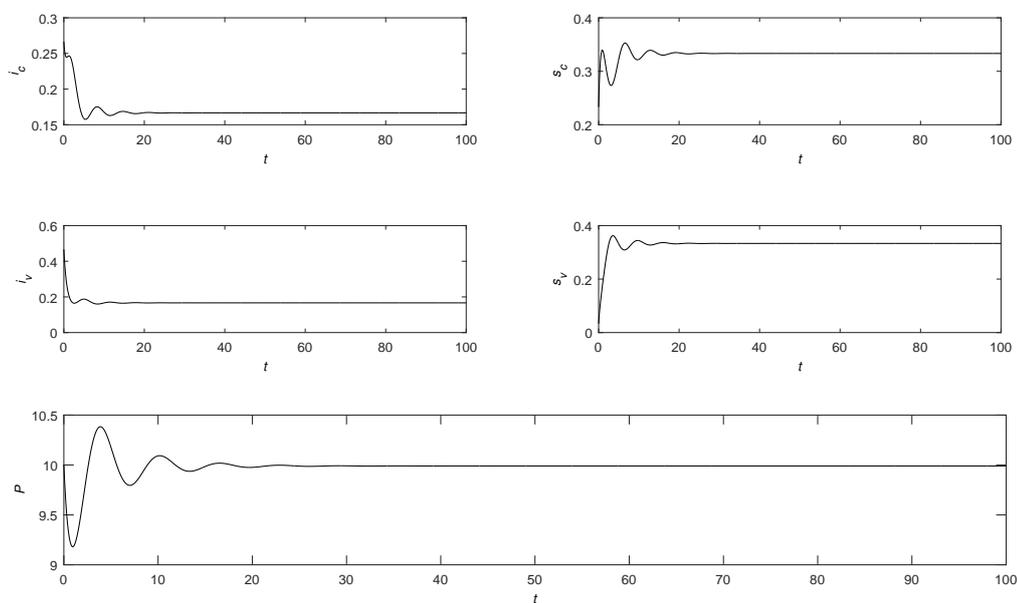


Figura 18 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais assimétricas, $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 + 0,1, 1/6 + 0,3, 1/3 - 0,1, 1/3 - 0,3)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$.

Para entender o fato de que mesmo com autovalores com parte imaginária diferente de zero obtivemos comportamento não oscilatório, consideremos a solução do sistema linear que aproxima o modelo matemático aqui proposto em torno do ponto crítico $(z, z, b/a, b/a)$, com $z = \frac{1}{2} - \frac{b}{a}$:

$$\begin{pmatrix} i_c(t) \\ i_v(t) \\ s_c(t) \\ s_v(t) \end{pmatrix} = PE(t)P^{-1} \begin{pmatrix} i_c(0) \\ i_v(0) \\ s_c(0) \\ s_v(0) \end{pmatrix}, \quad (44)$$

onde P é a matriz dos autovetores de $J(z, z, \frac{b}{a}, \frac{b}{a})$, e

$$E(t) = \begin{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}\sqrt{az(az-8b)}-\frac{1}{2}az)t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(\frac{1}{2}\sqrt{az(az-8b)}-\frac{1}{2}az)t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-azt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

De forma explícita:

$$\begin{aligned} i_c(t) &= \left(\phi \frac{4a^2z^2}{\Omega^2} + \zeta \frac{4a^2z^2}{\Psi^2} + \sigma + 1 \right) i_c(0) + \left(-\phi \frac{4a^2z^2}{\Omega^2} - \zeta \frac{4a^2z^2}{\Psi^2} + \sigma \right) i_v(0) \\ &\quad + \left(\phi \frac{2az}{\Omega} - \zeta \frac{2az}{\Psi} - \sigma \right) s_c(0) + \left(-\phi \frac{2az}{\Omega} + \zeta \frac{2az}{\Psi} - \sigma \right) s_v(0), \\ i_v(t) &= \left(-\phi \frac{4a^2z^2}{\Omega^2} - \zeta \frac{4a^2z^2}{\Psi^2} + \sigma \right) i_c(0) + \left(\phi \frac{4a^2z^2}{\Omega^2} + \zeta \frac{4a^2z^2}{\Psi^2} + \sigma + 1 \right) i_v(0) \\ &\quad + \left(-\phi \frac{2az}{\Omega} + \zeta \frac{2az}{\Psi} - \sigma \right) s_c(0) + \left(\phi \frac{2az}{\Omega} - \zeta \frac{2az}{\Psi} - \sigma \right) s_v(0), \\ s_c(t) &= \left(\phi \frac{2az}{\Omega} - \zeta \frac{2az}{\Psi} - \sigma \right) i_c(0) + \left(-\phi \frac{2az}{\Omega} + \zeta \frac{2az}{\Psi} - \sigma \right) i_v(0) \\ &\quad + (\phi + \zeta + \sigma + 1) s_c(0) + (-\phi - \zeta + \sigma) s_v(0), \\ s_v(t) &= \left(-\phi \frac{2az}{\Omega} + \zeta \frac{2az}{\Psi} - \sigma \right) i_c(0) + \left(\phi \frac{2az}{\Omega} - \zeta \frac{2az}{\Psi} - \sigma \right) i_v(0) \\ &\quad + (-\phi - \zeta + \sigma) s_c(0) + (\phi + \zeta + \sigma + 1) s_v(0), \end{aligned} \quad (46)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi &= e^{(-\frac{1}{2}\sqrt{az(az-8b)}-\frac{1}{2}az)t}, \\ \zeta &= e^{(\frac{1}{2}\sqrt{az(az-8b)}-\frac{1}{2}az)t}, \\ \sigma &= e^{-azt}, \\ \Omega &= \sqrt{a^2z^2 - 8baz} - az, \\ \Psi &= \sqrt{a^2z^2 - 8baz} + az. \end{aligned} \quad (47)$$

Este é o caso mais geral, onde as condições iniciais podem ser não simétricas, onde podemos ter dinâmica oscilatória. Para o caso de valores simétricos entre as populações

de infectados e as populações de suscetíveis ($i_c(0) = i_v(0)$ e $s_c(0) = s_v(0)$), temos uma particularidade, alguns termos se cancelam e por isso não ocorrem tais oscilações. Os termos complexos abandonam tais expressões:

$$\begin{aligned}
 i_c(t) &= (2e^{-azt} + 1)w - 2e^{-azt}k, \\
 i_v(t) &= (2e^{-azt} + 1)w - 2e^{-azt}k, \\
 s_c(t) &= -2e^{-azt}w + (2e^{-azt} + 1)k, \\
 s_v(t) &= -2e^{-azt}w + (2e^{-azt} + 1)k,
 \end{aligned} \tag{48}$$

onde $w = i_c(0) = i_v(0)$ e $k = s_c(0) = s_v(0)$.

Até este ponto, trabalhamos com condições iniciais em que $i_c(0) + s_c(0) = i_v(0) + s_v(0)$. Isto é concernente à igualdade entre o dinheiro total e o valor das ações disponíveis. Lembremos que i_c corresponde à população de investidores que estão demandando ações, ao passo que s_c corresponde àqueles que detém dinheiro, mas não estão demandando ações. Por sua vez, i_v corresponde à população de investidores que estão ofertando ações e s_v à população de investidores que detém ações, mas não as estão ofertando. Nesses casos, nossos exemplos mostram que o preço, embora possa variar, tende assintoticamente ao seu valor inicial. Consideremos agora situações em que este equilíbrio não existe. Na figura (19) é possível observar que o preço não tende mais ao seu valor inicial, isso porque a quantidade inicial de dinheiro ($i_c(0) + s_c(0)$) é superior à quantidade inicial de ações disponíveis ($i_v(0) + s_v(0)$), o que representa um excesso de liquidez no mercado. As condições iniciais escolhidas foram $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 + 0,1, 1/6 - 0,1, 1/3 + 0,1, 1/3 - 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$. Já na figura (20), observa-se uma falta de liquidez do mercado, indicando que, neste caso, a quantidade inicial de ações supera a quantidade inicial de dinheiro ($i_v(0) + s_v(0) > i_c(0) + s_c(0)$), levando o preço a cair. As condições iniciais escolhidas foram $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 - 0,1, 1/6 + 0,1, 1/3 - 0,1, 1/3 + 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$.

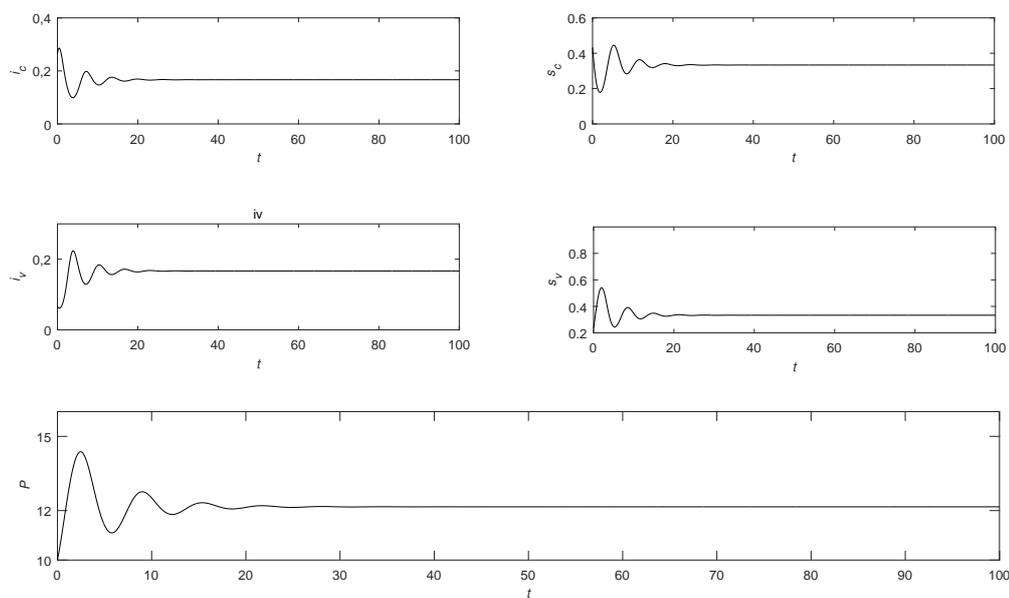


Figura 19 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 + 0,1, 1/6 - 0,1, 1/3 + 0,1, 1/3 - 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$. Aqui $i_c(0) + s_c(0) > i_v(0) + s_v(0)$ representando excesso de liquidez.

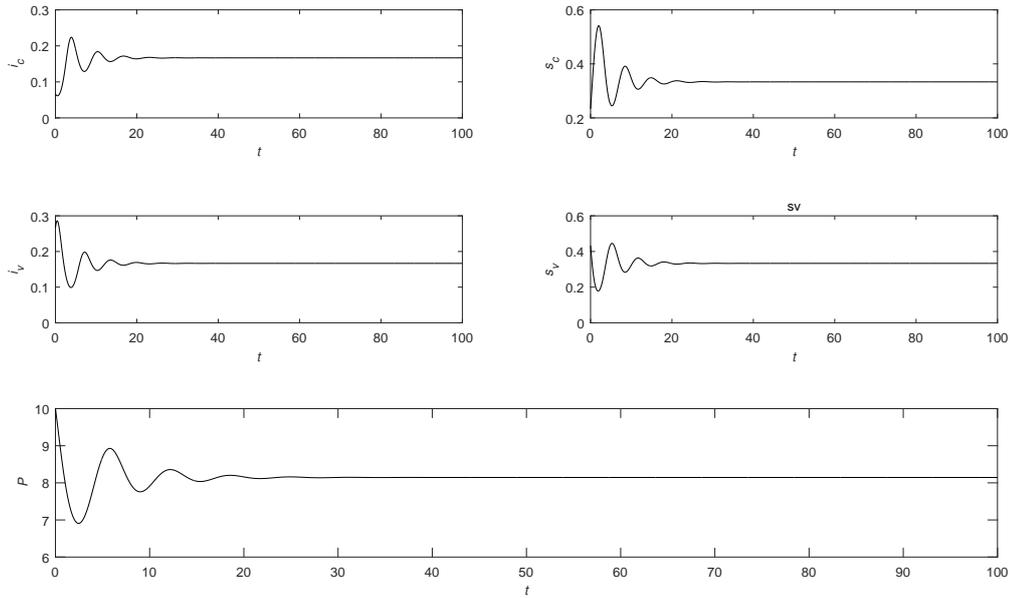


Figura 20 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 - 0,1, 1/6 + 0,1, 1/3 - 0,1, 1/3 + 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$. Aqui $i_v(0) + s_v(0) > i_c(0) + s_c(0)$ representando falta de liquidez.

Continuando a análise do ponto crítico $(i_c, i_c, b/a, b/a)$ com $i_c = \frac{1}{2} - \frac{b}{a}$, consideremos um caso diferente dos anteriores, agora com autovalores da jacobiana reais, ou seja, $ai_c > 8b$ (veja equação 43), o que nos leva a $a > 18b$. Lembremos que a parte real dos autovalores é sempre negativa, já que $|\sqrt{(ai_c)^2 - 8bai_c}|$ é menor que ai_c para a, b e i_c positivos. Pois bem, é possível observar a dinâmica sob tais condições na figura (21), onde $a = 20$ e $b = 1$, e as condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/2 - 1/20 + 0,01, 1/2 - 1/20 - 0,01, 1/20 + 0,01, 1/20 - 0,01)$ foram assim escolhidas para que se mantivessem próximas ao ponto de equilíbrio em questão. Todas as populações tenderam a este ponto de equilíbrio e sua estabilidade foi confirmada. Quanto à curva de preço, esta subiu, dado que $i_c(0) + s_c(0) > i_v(0) + s_v(0)$, ou seja, devido ao excesso de liquidez.

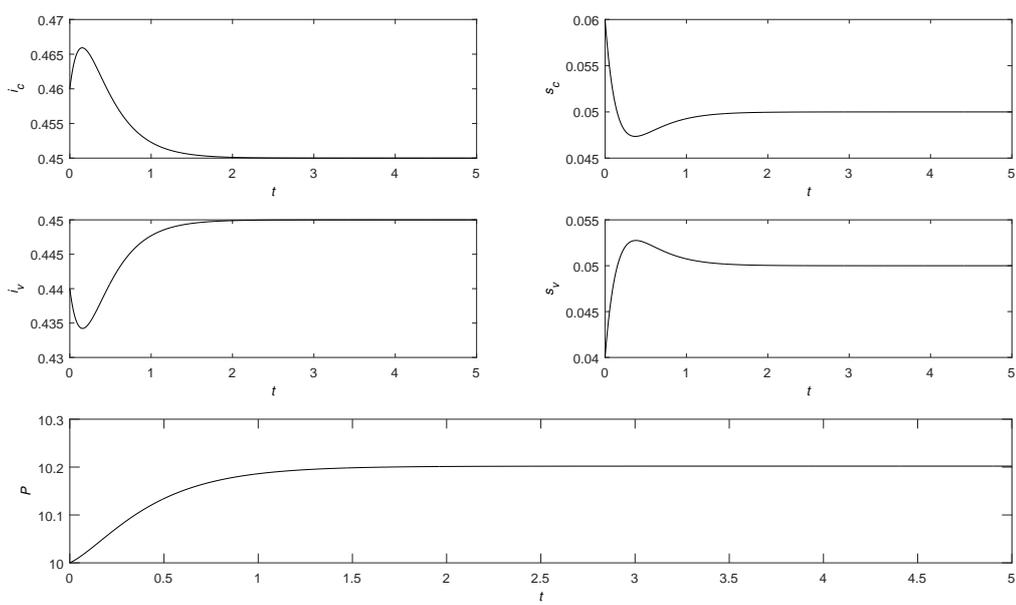


Figura 21 – Evolução das populações e do preço com autovalores reais para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/2 - 1/20 + 0,01, 1/2 - 1/20 - 0,01, 1/20 + 0,01, 1/20 - 0,01)$, com $a = 20$ e $b = 1$. A curva do preço está de acordo com o excesso de liquidez do mercado simulado $(i_c(0) + s_c(0) > i_v(0) + s_v(0))$.

4 Modelo com aleatoriedade

Até agora o modelo representa uma dinâmica de movimentação suave, um pouco distante da que ocorre num mercado real. Para que se aproxime de uma dinâmica realista é preciso impactá-lo com novas notícias, e isso é feito de forma aleatória. O preço sofre oscilações devido a impactos externos, que configuram notícias imprevisíveis.

4.1 Mantendo a liquidez inalterada

Buscaremos agora entender o impacto da chegada de novas notícias com teores aleatórios, dependendo de sua natureza, em tempos também aleatórios.

4.1.1 Simulações

As chegadas de notícias foram implementadas nas simulações da seguinte forma: a cada passo de tempo de tamanho Δt em que a dinâmica é calculada, há probabilidade η de chegar uma notícia boa ou ruim. Se a notícia é boa, o número de infectados de compra (i_c) é aumentado e se a notícia é ruim o número de infectados de venda (i_v) é aumentado. Ao aumento de i_c (i_v) por uma dada quantidade corresponde uma diminuição de s_c (s_v) pela mesma quantidade, ou seja, modelamos desta forma a transformação de suscetíveis em infectados, mantendo a liquidez do mercado invariada. O grau em que a notícia é boa ou ruim também varia aleatoriamente. Assim, o aumento de i_c será dado por μs_c , onde μ é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre 0 e 1:

$$i_c \leftarrow i_c + \mu s_c, \quad (49)$$

$$s_c \leftarrow s_c - \mu s_c,$$

e analogamente para i_v :

$$i_v \leftarrow i_v + \mu s_v, \quad (50)$$

$$s_v \leftarrow s_v - \mu s_v.$$

Observe que desta forma i_c , i_v , s_c e s_v mantêm-se entre 0 e 1, como deve ocorrer.

Foram feitas novas simulações, com as condições iniciais próximas ao ponto crítico ($i_c, i_c, b/a, b/a$) com $i_c = \frac{1}{2} - \frac{b}{a}$, desta vez introduzindo aleatoriedade à dinâmica. A figura (22) representa uma dinâmica com liquidez balanceada ($i_c(0) + s_c(0) = i_v(0) + s_v(0)$) que é impactada de tempos em tempos por uma aleatoriedade. As condições iniciais escolhidas já foram usadas anteriormente, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$. Note que o preço, embora reflita os impactos aleatórios,

continua próximo ao seu valor inicial, como na figura (17), que apresenta as mesmas condições iniciais e parâmetros. A figura (23) representa uma dinâmica com excesso de liquidez, onde a quantidade total de dinheiro é maior que a quantidade de ações disponíveis ($i_c(0) + s_c(0) > i_v(0) + s_v(0)$) para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 + 0,1, 1/6 - 0,1, 1/3 + 0,1, 1/3 - 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$. Aqui o preço sobe devido a esse excesso, mas continua mantendo um equilíbrio em torno de um valor mais alto que o valor inicial, ($P \approx 12$) como na figura (19). A figura (24) representa uma falta de liquidez ($i_v(0) + s_v(0) > i_c(0) + s_c(0)$), ou seja, o número de ações é superior à quantidade total de dinheiro, para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 - 0,1, 1/6 + 0,1, 1/3 - 0,1, 1/3 + 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$. O preço continua tendendo a um equilíbrio, embora seu valor tenha diminuído em consequência da falta de liquidez, como na figura (20). Também é possível observar nas figuras (22), (23) e (24) que, quando temos uma notícia boa, a população de infectados de compra aumenta, ao passo que a população dos suscetíveis de compra diminui da mesma quantidade, e, quando a notícia é ruim, a população de infectados de venda aumenta, ao mesmo tempo que a população dos suscetíveis de venda diminui. Esses aumentos são demonstrados por picos e as baixas por vales na mesma proporção.

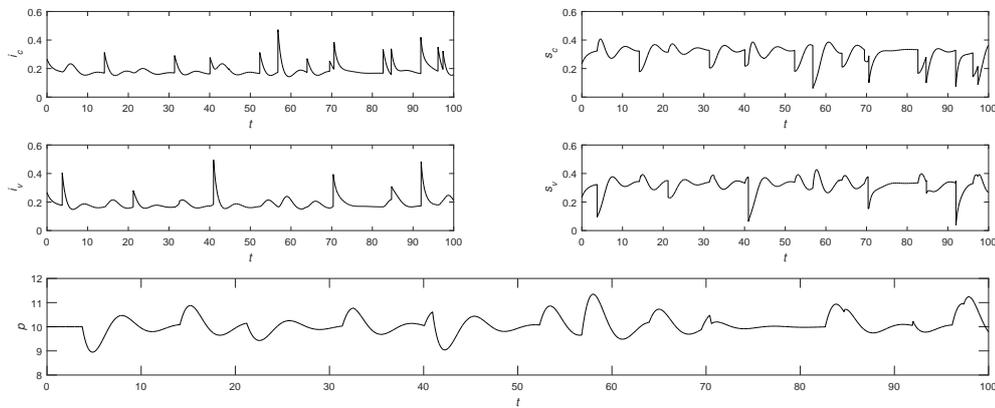


Figura 22 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,01$ e $\eta = 0,002$.

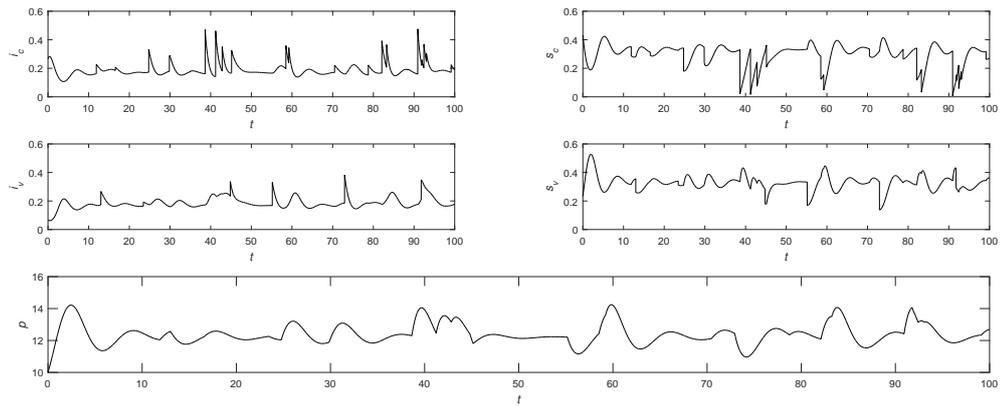


Figura 23 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 + 0, 1, 1/6 - 0, 1, 1/3 + 0, 1, 1/3 - 0, 1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$, $\Delta t = 0,01$ e $\eta = 0,002$.

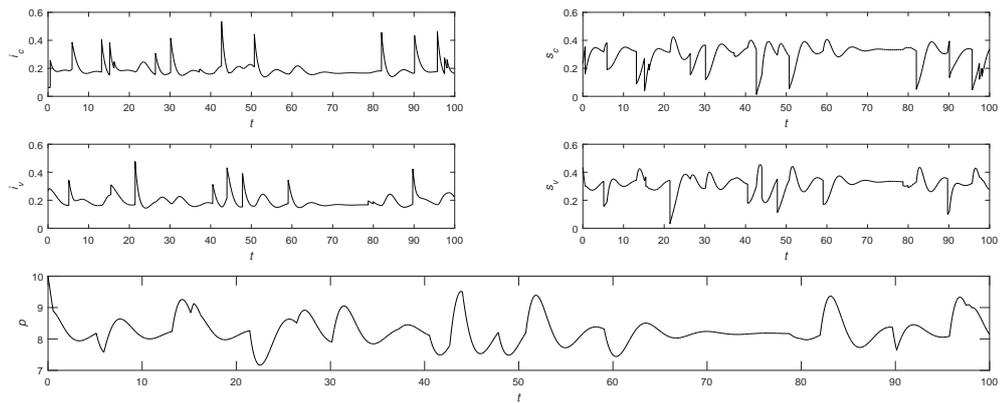


Figura 24 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 - 0, 1, 1/6 + 0, 1, 1/3 - 0, 1, 1/3 + 0, 1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,01$ e $\eta = 0,002$.

4.2 Variando a liquidez

O modelo foi inicialmente construído como um modelo no equilíbrio, no que se refere à população de investidores. Dependendo do impacto causado pela chegada de notícias externas e aleatórias, a condição de alguns investidores mudava, alterando o número de infectados e suscetíveis. Contudo essa mudança acontecia de forma balanceada, e a liquidez mantinha-se inalterada (a relação entre a quantidade total de dinheiro e de ações

não variava¹). Se a notícia fosse boa, aumentava o número de interessados em comprar, ou seja, aumentava o número de infectados de compra, mas ao mesmo tempo diminuía o número de suscetíveis de compra, porque esse fator caracterizava somente a transição de um estado (suscetível) para outro (infectado). O mesmo acontecia se a notícia fosse ruim, porque aumentava o número de interessados em vender, tratados aqui como infectados de venda, ao passo que diminuía o número de suscetíveis de venda, pelo mesmo motivo, mantendo-se o mesmo grupo inicial de investidores. Assim, embora houvesse oscilações condizentes com os impactos causados pelas notícias, o preço continuava tendendo a um mesmo equilíbrio (ver figuras 22, 23 e 24).

Para investigar variações de liquidez, mudamos a forma como o impacto de notícias externas é considerado: a chegada de notícias tem o efeito de chamar a atenção de outros investidores, aumentando descontinuamente o número de suscetíveis. A partir dessa nova aleatoriedade, se a notícia for considerada boa, teremos mais investidores, à espreita, prontos para fazer uma oferta de compra, ou seja, aumentará o número de suscetíveis de compra pela entrada de novos agentes nessa condição. Uma notícia boa também tem o efeito de reduzir o número de suscetíveis de venda, o que, neste modelo, ocorre na mesma proporção do aumento dos suscetíveis de compra, mantendo o número total de agentes constante. No caso de uma notícia ruim, a situação simétrica ocorre, com o aumento do número de suscetíveis de venda e a correspondente diminuição do número de suscetíveis de compra. Desta forma, a liquidez é variada.

De forma específica, o impacto foi modelado da seguinte maneira: a cada passo de tempo de tamanho Δt ocorrido durante a dinâmica, existe uma probabilidade η de chegarem notícias impactantes, e estas podem variar em sua natureza. Se boa, a notícia faz com que a proporção de suscetíveis de compra (s_c) aumente. Se ruim, a notícia faz com que a proporção de suscetíveis de venda (s_v) aumente. Temos então:

$$\begin{aligned} s_{cnovo} &\leftarrow s_{cantigo} + \xi\mu, \\ s_{vnovo} &\leftarrow s_{vantigo} + \xi\mu, \end{aligned} \tag{51}$$

onde ξ é um coeficiente, e μ é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[-0,5, 0,5]$. Se $\mu > 0$ a notícia é boa. Se $\mu < 0$ a notícia é ruim. Isso se, de acordo com a fórmula acima, s_{cnovo} e s_{vnovo} forem maiores que zero. Se, de acordo com a fórmula (51), algum deles (s_c ou s_v) tornar-se menor que zero, o decréscimo a ser efetuado deve levá-lo a zero, com o correspondente acréscimo na outra variável.

¹ Consideramos aqui que a quantidade de dinheiro e de ações no mercado é sempre proporcional à quantidade de agentes em cada compartimento.

4.2.1 Simulações

Diante desta alteração no modelo, foram realizadas novas simulações. Dinâmica análoga à demonstrada na figura (22) foi calculada com a nova aleatoriedade (figura 25). Mantivemos as condições iniciais e parâmetros utilizados na figura (22), $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$, cujo cenário representava uma liquidez inicialmente balanceada ($i_c(0) + s_c(0) = i_v(0) + s_v(0)$) e introduzimos o novo impacto aleatório. Note que o preço não tendeu sempre ao mesmo equilíbrio.

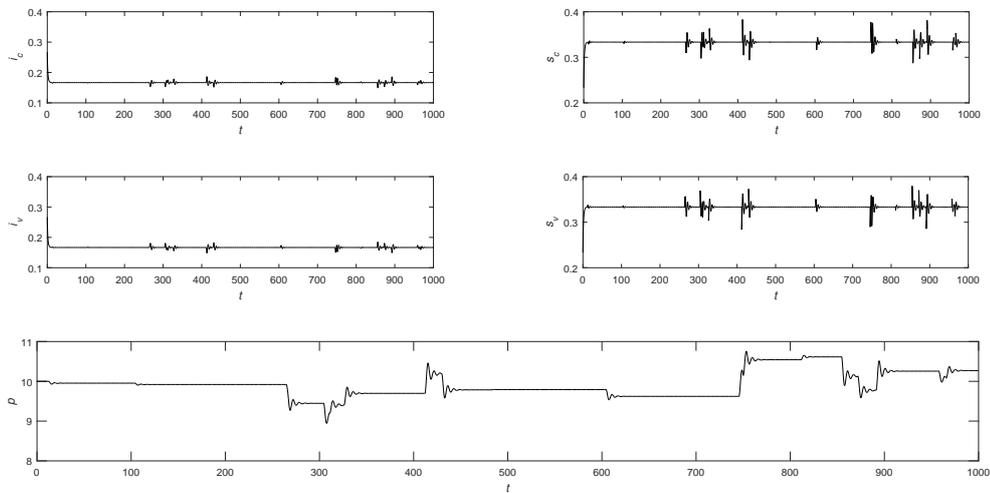


Figura 25 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,1$, $\eta = 0,002$ e $\xi = 0,1$.

Também foi reproduzida a dinâmica análoga à da figura (23), cujas condições iniciais e parâmetros $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6+0,1, 1/6-0,1, 1/3+0,1, 1/3-0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$ e $b = 1$ representavam um excesso de liquidez ($i_c(0) + s_c(0) > i_v(0) + s_v(0)$). Mais uma vez, diferentes patamares são encontrados quando o preço busca o equilíbrio após cada notícia externa (figura 26).

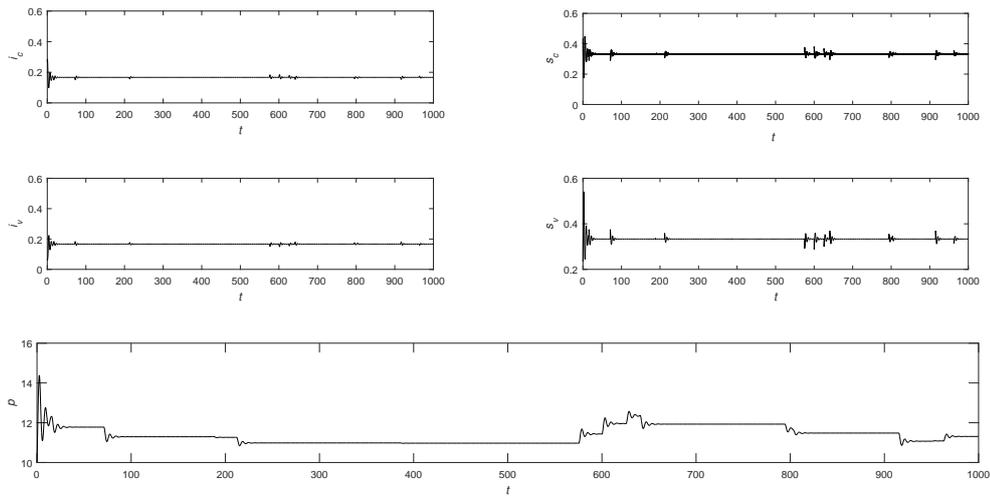


Figura 26 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 + 0,1, 1/6 - 0,1, 1/3 + 0,1, 1/3 - 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,1$, $\eta = 0,002$ e $\xi = 0,1$.

Por último, foi construída, também com a nova aleatoriedade, figura com parâmetros semelhantes aos da figura (24), que representava falta de liquidez pela antiga aleatoriedade, e o resultado pode ser visto na figura (27). Estes cenários correspondem de forma mais aproximada ao que é observado em curvas de preços reais.

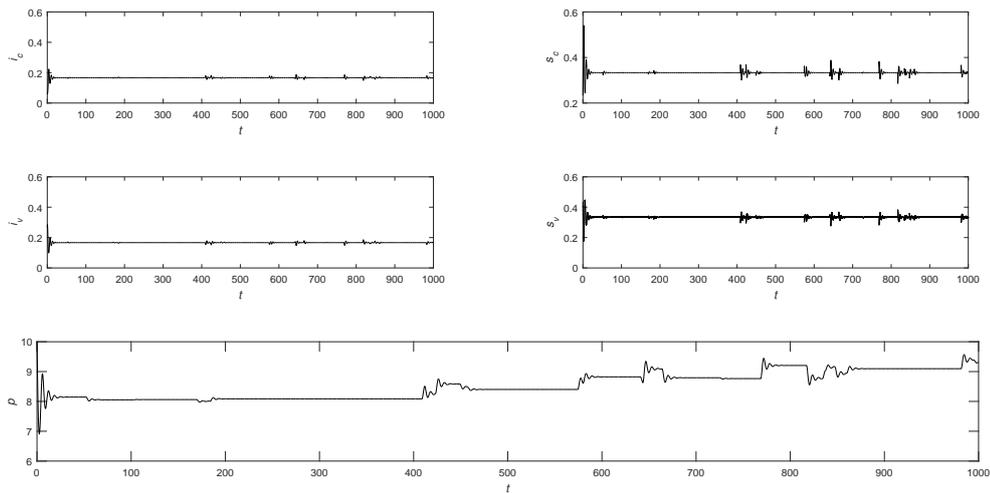


Figura 27 – Evolução das populações e do preço para condições iniciais $(i_c(0), i_v(0), s_c(0), s_v(0)) = (1/6 - 0,1, 1/6 + 0,1, 1/3 - 0,1, 1/3 + 0,1)$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,1$, $\eta = 0,002$ e $\xi = 0,1$.

5 Análises estatísticas

Este capítulo visa comparar dados estatísticos de séries sintéticas, simuladas através do modelo, com dados estatísticos de séries reais, provenientes do mercado real. Utilizaremos ferramentas estatísticas para este fim. A ideia é que estas nos auxiliem no entendimento do modelo e possibilitem ajustes no mesmo. A princípio, utilizaremos o expoente de Hurst, uma ferramenta estatística que serve como medida de eficiência do mercado financeiro. Na sequência, faremos uso da curtose, outra ferramenta estatística útil, que tem relação com o aparecimento de caudas pesadas nas distribuições de frequências.

5.1 Expoentes de Hurst

O expoente de Hurst pode detectar a presença de correlações de longo alcance em séries temporais, no caso deste estudo, em séries de preços de ativos.

5.1.1 Dados empíricos

Os dados coletados foram obtidos através da Plataforma Bloomberg, uma ferramenta voltada para gestores de recursos, que disponibiliza dados econômicos próprios do mercado financeiro. Foram escolhidos dados diários de ativos que compuseram o Índice Bovespa no período de janeiro do ano de 2000 até abril do ano de 2016. São ações bastante distintas, pertencentes a empresas de diversos setores, como financeiro, varejista, de alimentos, de construção, de energia elétrica, de telecomunicação, de educação, entre outros. A amostra é composta de 59 ativos: ABEV3, SANB11, ITUB4, BBAS3, BBDC3 e BBDC4, BBSE3, BVMF3, CTIP3, CIEL3, JBSS3, BRFS3, MRFG3, BRKM5, PETR3 e PETR4, CMIG4, CPLE6, TBLE3, CESP6, ENBR3, EQTL3, CPFE3, TIMP3, VIVT4, CSNA3, GGBR4 e GOAU4, VALE3 e VALE5, USIM5, EMBR3, LAME4, LREN3, HYPE3, ITSA4, UGPA3, PCAR4, SBSP3, BRAP4, BRML3, MULT3, CCRO3, ECOR3, CSAN3, CYRE3, MRVE3, ESTC3, KROT3, SUZB5, FIBR3, KLBN11, QUAL3, NATU3, RADL3, RENT3, RUMO3, SMLE3, WEGE3. No apêndice (A), descrevemos a natureza das empresas relacionadas a esses ativos.

Em nossos arquivos, grande parte destes ativos possui, no período considerado, séries de aproximadamente 4000 pontos (seriam as maiores séries da amostra), porém alguns variam este número. Em toda a amostra encontram-se ativos com séries na casa dos 3000 pontos, ativos com séries na casa dos 2000 pontos, e ativos com séries menores, na casa dos 1000 pontos. Isso porque alguns não estiveram o tempo todo presentes no índice Bovespa, ao longo desses dezesseis anos. Alguns ativos ou entraram depois da data inicial ou mantiveram-se lá por menos tempo. O que interessa aqui é que quase todos

foram considerados para o cálculo do expoente de Hurst, excetuando-se quatro: BBSE3, KLBN11, RUMO3 e SMLE3, por possuírem séries muito pequenas, abaixo dos 800 pontos. O critério para eliminação desses 4 ativos foi usar séries de tamanhos, no mínimo, próximos dos utilizados em [7].

Outra característica desta amostra é que as séries são dadas em candlesticks, representações das variações do preço em formato de vela, ou seja, informações de preços de abertura, preços de alta, preços de baixa e preços de fechamento referentes a cada intervalo considerado. O nosso estudo levou em conta todas essas informações e o cálculo do expoente de Hurst foi feito para cada uma das quatro séries de cada ativo, através de um programa específico, construído no software Matlab, que usa o método DFA (*Detrended Fluctuation Analysis*¹). Até onde sabemos, esta é uma abordagem original no caso do expoente de Hurst, usualmente são feitos cálculos somente em torno do preço de fechamento.

Para nossa surpresa, encontramos um fenômeno que se repetiu a cada ativo e do qual não encontramos registro na literatura. O expoente referente às séries de preços de alta e de preços de baixa mostrou-se, para a grande maioria dos ativos, superior ao expoente relativo às séries de preços de abertura e de preços de fechamento (figura 28). As tabelas com os valores dos expoentes dos dados empíricos constam do apêndice (B e C).

¹ Análise de flutuação sem tendência.

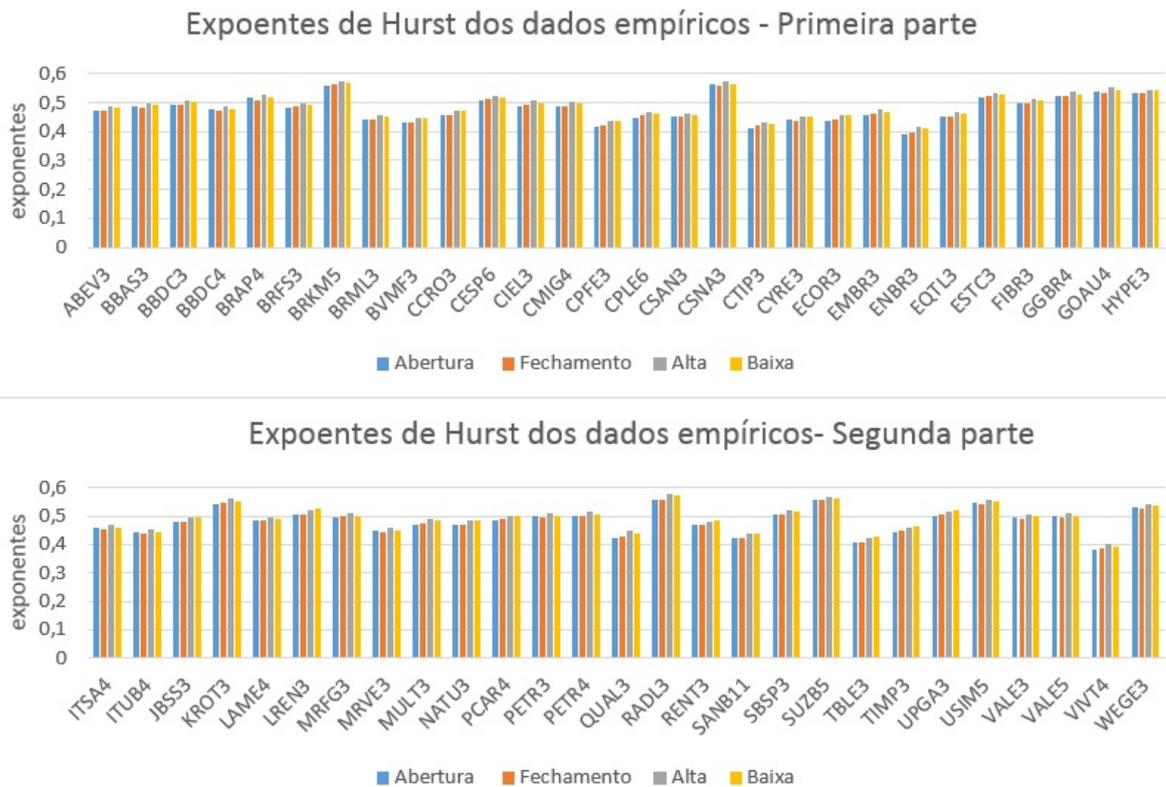


Figura 28 – Expoentes de Hurst das séries de abertura, fechamento, alta e baixa referentes a candlesticks diários de ações da BOVESPA. O período considerado é janeiro de 2000 a abril de 2016. Podemos observar que os valores dos expoentes das séries de alta e baixa são, na grande maioria das vezes, superiores aos expoentes das séries de abertura e fechamento.

Calculamos as diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e as médias de tais expoentes das séries de abertura e fechamento,

$$D_H = \frac{H_{alta} + H_{baixa}}{2} - \frac{H_{abertura} + H_{fechamento}}{2}, \quad (52)$$

onde H_{alta} é o expoente de Hurst da série de alta, H_{baixa} é o expoente de Hurst da série de baixa, $H_{abertura}$ o expoente de Hurst da série de abertura e $H_{fechamento}$ o expoente de Hurst da série de fechamento.

Na figura (29) temos os resultados das diferenças dos ativos reais.

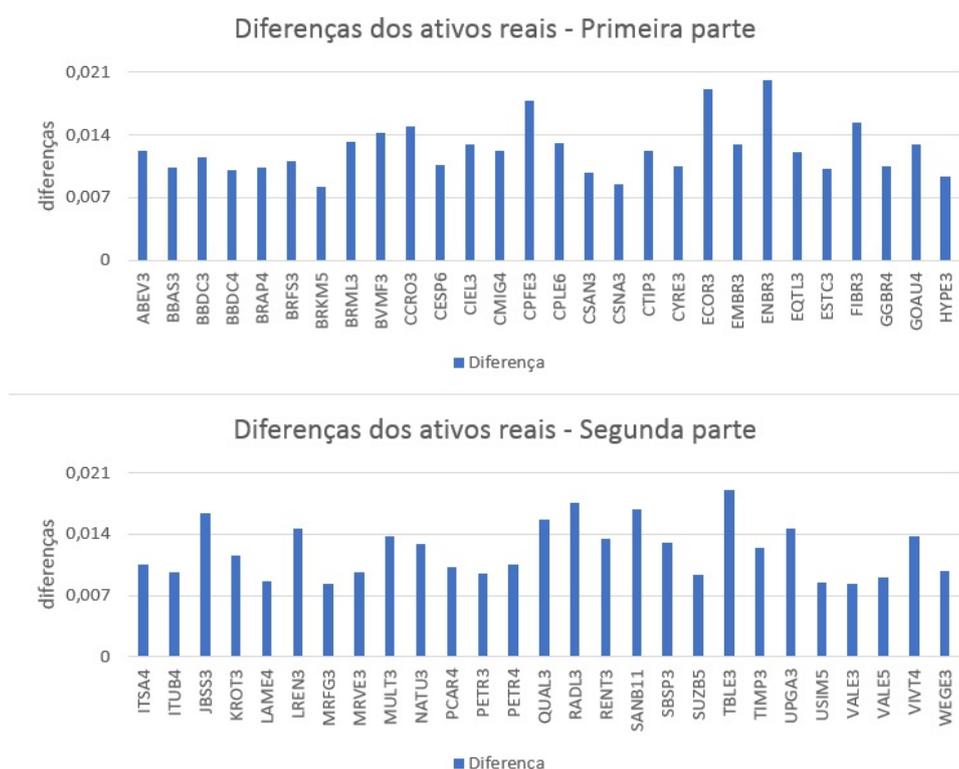


Figura 29 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento para os mesmos dados da figura (28).

Observamos que D_H é sempre maior que 0,007, sendo na maior parte das vezes menor que 0,014. Assim, temos uma ordem de grandeza típica para tal quantidade: 10^{-2} . É possível verificar tais valores na tabela de diferenças do apêndice (D).

Diante do ocorrido, buscamos saber se esta seria uma característica própria das séries financeiras. Para responder a tal questão, partimos para o cálculo dos expoentes de Hurst de um caminhante aleatório.

5.1.2 Caminhante Aleatório

Para investigarmos se o fenômeno encontrado tem relação com as características especiais de séries financeiras, ou se é um fenômeno mais geral em séries temporais, construímos séries de posições de um caminhante aleatório definido da seguinte forma: a cada passo de tempo, ele dá um passo de tamanho 1 para frente ou para trás com igual probabilidade. Tais séries foram consideradas como análogas a séries de preços.

Para fazer a comparação, simulamos candles para o caminhante aleatório, de modo que ele também possuísse séries de abertura, fechamento, alta e baixa (ver figuras 30 e 31). Foi criado um programa, no software Matlab, que divide as séries temporais em intervalos de tamanhos pré-determinados, e atribui ao primeiro ponto desse intervalo o

preço de abertura, ao último ponto o preço de fechamento, ao ponto máximo (incluídos preços de abertura e fechamento já calculados) o preço de alta e ao ponto mínimo (também considerando o intervalo todo) o preço de baixa. Esse intervalo dita o tamanho do candle escolhido.

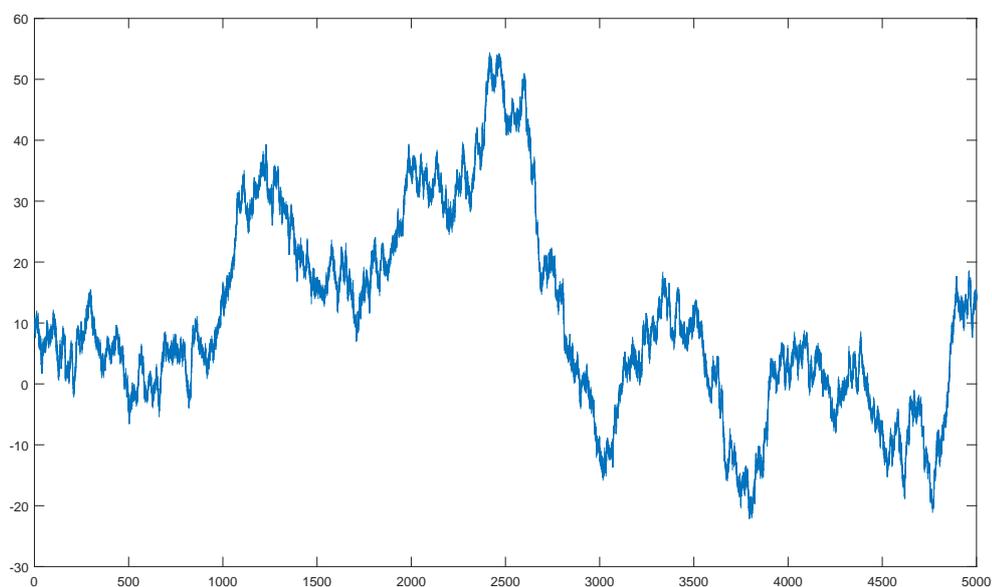


Figura 30 – Simulação de curva de preços por um caminhante aleatório, dada por candles de tamanho 5, com $P(0) = 10$ e $\Delta t = 0,1$. Cada passo do caminhante dá-se de acordo com uma distribuição uniforme entre $-2,5\sqrt{\Delta t}$ e $2,5\sqrt{\Delta t}$.

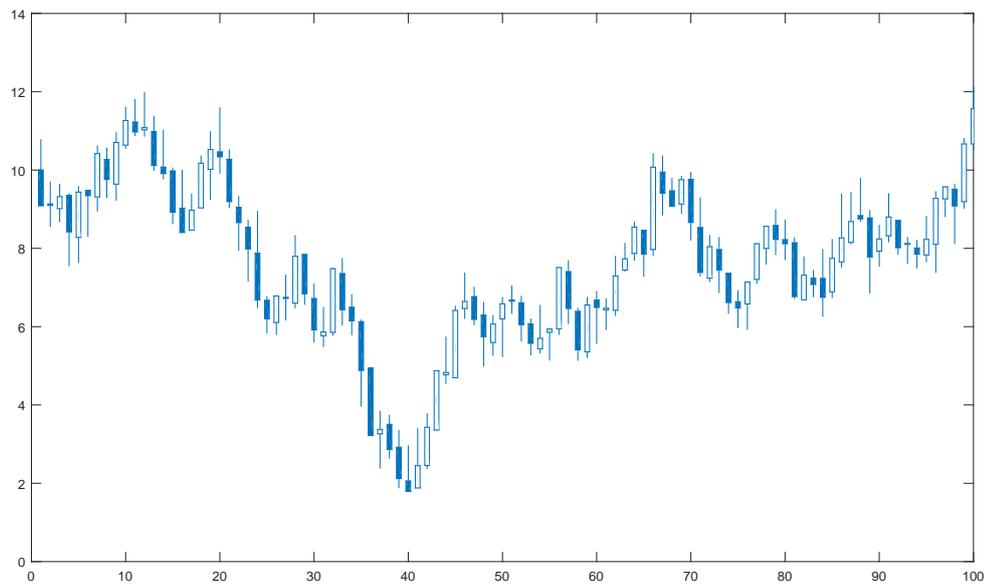


Figura 31 – Detalhe da curva representada na figura 30. É possível visualizar nitidamente os candles formados.

Os tamanhos de candles trabalhados foram 5, 10, 15, 20 e 25. Para cada tamanho de candle foram simuladas 100 (cem) amostras de 5000 (cinco mil) pontos em cada série (abertura, fechamento, alta e baixa). No final, foi extraída a média e desvio padrão dos expoentes calculados nas cem amostras de cada série. A tabela com tais valores pode ser encontrada no apêndice (E).

Constatou-se que o fenômeno apresentado nos dados financeiros empíricos não era privilégio daquelas séries, o fato se repetiu nas séries conduzidas pelo caminhante aleatório (figura 32).

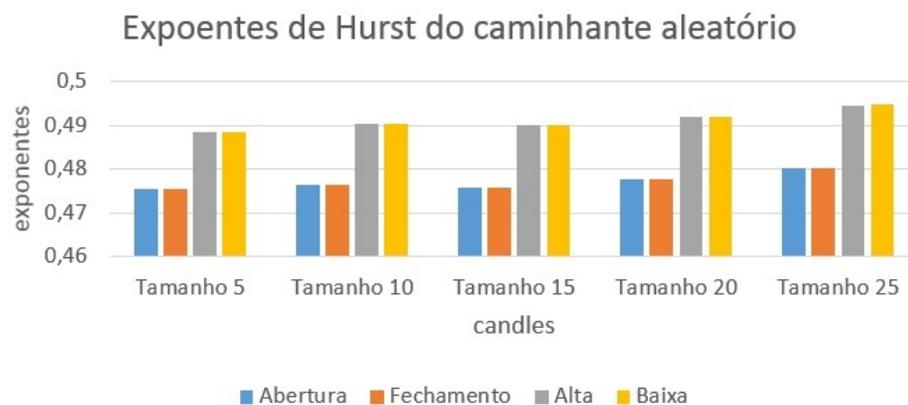


Figura 32 – Média dos expoentes de Hurst das séries do caminhante aleatório, em diferentes tamanhos de candle.

Observamos que quando o tamanho do candle aumenta, tanto os valores médios dos expoentes quanto das diferenças (D_H) aumentam (ver figuras 32 e 33). A ordem de grandeza aqui também é de 10^{-2} . Os valores das diferenças também constam do apêndice (E).

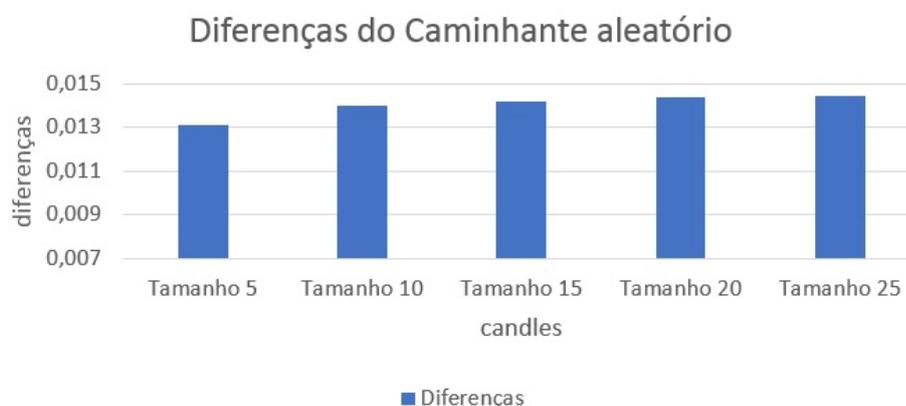


Figura 33 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, dadas pelo caminhante aleatório em tamanhos diferentes de candle.

Podemos concluir que, embora os expoentes de alta e baixa sejam superiores aos expoentes de abertura e fechamento em ambos os casos (dados empíricos e caminhante aleatório), as diferenças não aparecem sob a mesma forma, mostrando que o comportamento de séries financeiras reais se distancia do caminhante aleatório puro. O mercado financeiro mostra-se mais complexo, não se resumindo a uma simples e total aleatoriedade.

E quanto ao modelo? Será que suas séries também apresentam um comportamento semelhante ao das séries já analisadas? Vejamos na seção a seguir.

5.1.3 Modelo

Pensando no modelo, todos os seus parâmetros são interpretáveis do ponto de vista financeiro, logo, o parâmetro que precisasse ser alterado, poderia fornecer informação quanto ao funcionamento do mercado, no que diz respeito às ações de seus agentes. Lembremos que o modelo em questão não é um modelo de previsão, e sim de simulação, que considera aspectos comportamentais dos agentes financeiros. No que segue, empregamos sempre o modelo com aleatoriedade que provoca variação de liquidez, descrito na seção 4.2.

Para calcularmos os expoentes do modelo, suas curvas foram formatadas até estarem em conformidade com as curvas dos dados que servem de comparação (dados reais e dados do caminhante aleatório), no que diz respeito à apresentação de candles completos, gerando quatro séries temporais distintas, que novamente simulam preços de

abertura, de fechamento, de alta e de baixa. Foram então gerados candlesticks também no modelo, pelo mesmo programa utilizado para o caminhante aleatório, com a devida adaptação. As séries sintéticas foram divididas em intervalos de acordo com o tamanho de candle escolhido. Foram utilizados candles dos mesmos tamanhos calculados para o caminhante aleatório (5, 10, 15, 20 e 25). Na figura (34) temos um exemplo de curva com candles de tamanho 15, produzida com o uso do modelo, e, em seguida, temos a mesma curva em detalhe (35), onde é possível observar tais candles com maior nitidez. O mesmo programa para cálculo de expoentes de Hurst, construído no software Matlab®, foi readaptado para cada objeto de estudo.

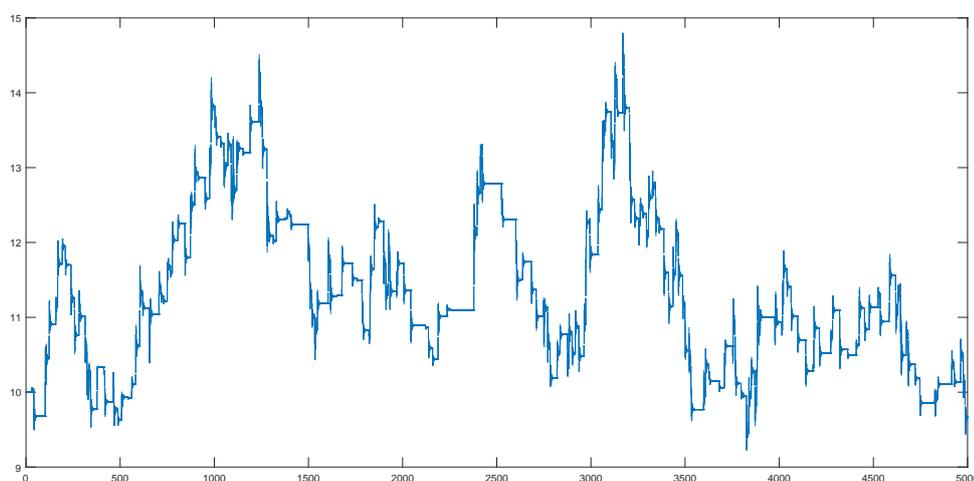


Figura 34 – Exemplo de uma curva produzida pelo modelo, definida por candles de tamanho 15. Condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$, com $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,1$ e $\eta = 0,004$.

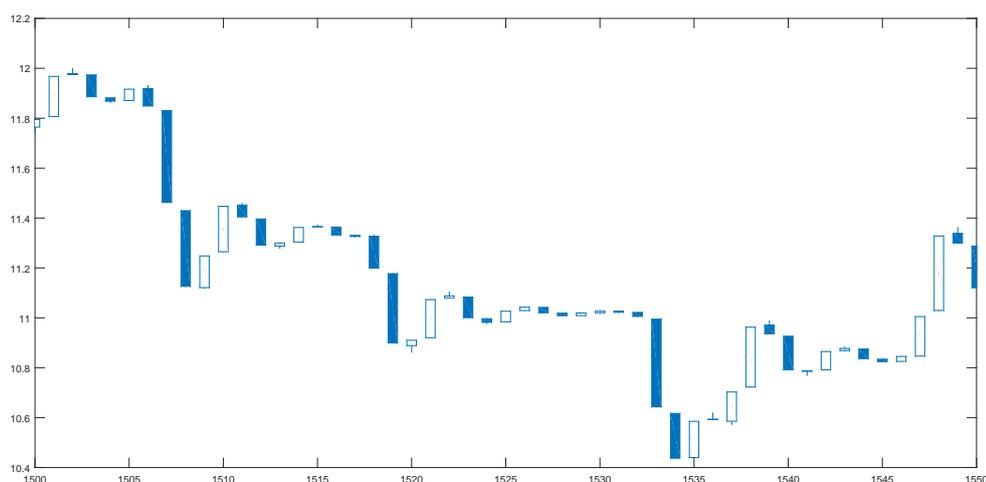


Figura 35 – Figura 34, em detalhe.

Como a amostra apresenta uma grande diversidade de ativos, concentramo-nos nos resultados apresentados pela maioria deles, no caso a diferença (D_H , dada pela equação 52) em torno de 0,010 e o expoente de Hurst próximo de 0,5, para efetuarmos os ajustes no modelo.

Foram feitas 100 simulações de 5000 pontos para cada conjunto de parâmetros testados. Os parâmetros alterados foram os referentes à aleatoriedade, que é dada por novas notícias imprevisíveis que alteram descontinuamente o número de agentes suscetíveis.

É digno de nota que o fenômeno detectado inicialmente nos dados empíricos e posteriormente confirmado no caminhante aleatório, referente à superioridade dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa em relação aos expoentes de Hurst das séries de abertura e fechamento, continua presente no modelo (figura 36). Também podemos observar que, à medida que a probabilidade da chegada de notícias imprevisíveis diminui, maiores se tornam os respectivos expoentes de Hurst, em outras palavras, mais persistentes se tornam suas séries. No candle de tamanho 5, os expoentes de Hurst possuem um valor aproximado de 0,4 quando a probabilidade da chegada de notícias imprevisíveis é 10%, chegam a 0,5 quando essa mesma probabilidade cai para 0,6% e então passam de 0,5 quando a probabilidade chega a 0,2%.

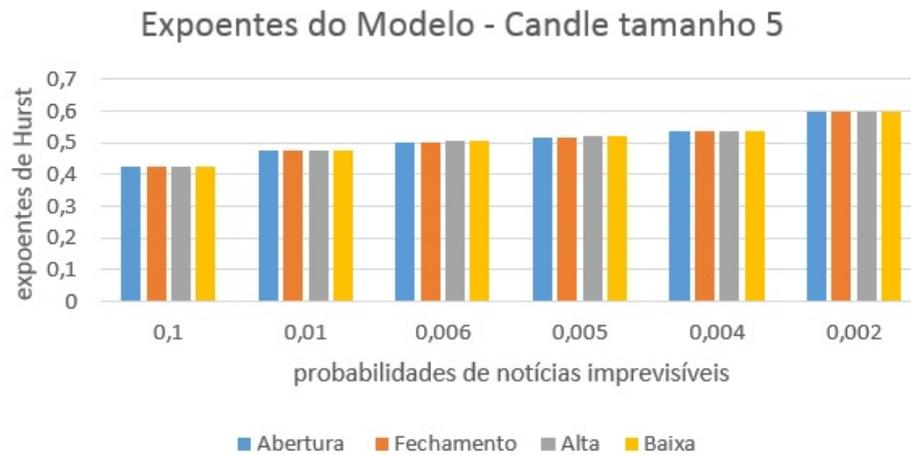


Figura 36 – Média dos expoentes de Hurst para cada série de preços simuladas pelo modelo, no tamanho de candle 5. Condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$ e parâmetros $a = 3$, $b = 1$ e $\Delta t = 0,1$. São representadas seis aleatoriedades diferentes $\eta = 0,1$, $\eta = 0,01$, $\eta = 0,006$, $\eta = 0,005$, $\eta = 0,004$ e $\eta = 0,002$.

Quanto às diferenças do modelo no tamanho de candle 5, estas diminuem ao passo que as probabilidades de novas notícias diminuem e a queda visivelmente mais brusca é também a maior em relação ao percentual de diminuição da referida probabilidade (figura 37). Essa diferença apresenta valor igual a 0,0021 quando a probabilidade é igual a 10% e este valor cai para 0,0019 quando a probabilidade diminui para 1%, e finalmente para 0,0018 quando tal probabilidade atinge 0,2%. A tabela com os valores deste candle está presente no apêndice (F).

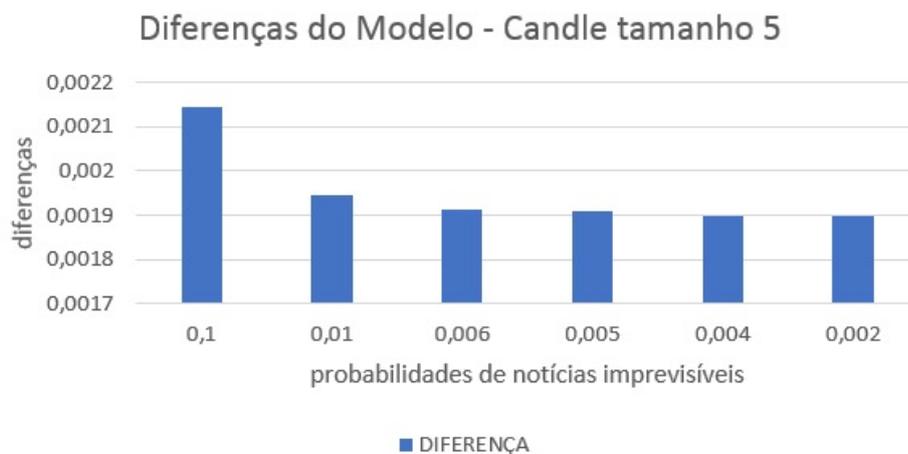


Figura 37 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, dadas pelo modelo, em candles de tamanho 5. Os parâmetros de simulação são os mesmos da figura (36).

Na figura (38), temos exemplos de curvas produzidas pelo modelo no candle de tamanho 5, apresentando seis diferentes probabilidades.

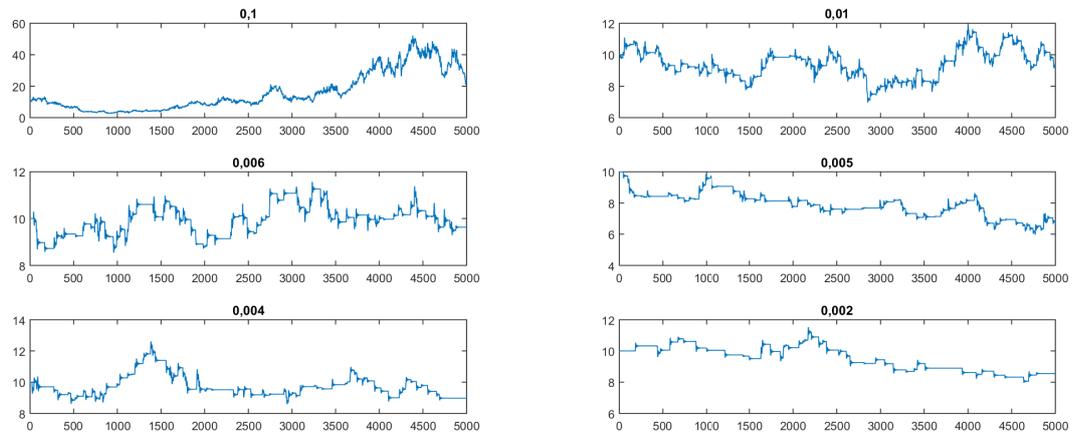


Figura 38 – Exemplos de dinâmicas simuladas com candle de tamanho 5, em condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$ e parâmetros $a = 3$, $b = 1$ e $\Delta t = 0,1$. São representadas seis aleatoriedades diferentes $\eta = 0,1$, $\eta = 0,01$, $\eta = 0,006$, $\eta = 0,005$, $\eta = 0,004$ e $\eta = 0,002$.

No candle de tamanho 10, o fenômeno se mantém, ou seja, os expoentes de Hurst das séries de alta e baixa continuam superiores aos expoentes das séries de abertura e fechamento, e os expoentes também se tornam maiores à medida que probabilidades η diminuem (figura 39). Quando a probabilidade de tais notícias chegarem for igual a 10%, temos expoentes próximos de 0,41, estes só se aproximam de 0,5 quando o percentual diminui para 0,4% e então superam este valor (0,5) quando a probabilidade chega a 0,2%.

Essa diferença (D_H) inicia com um valor de 0,0078 e chega a 0,0065 quando a probabilidade é quase 10 vezes menor que a inicial. Todos os valores mencionados podem ser encontrados na tabela referente ao apêndice (G).

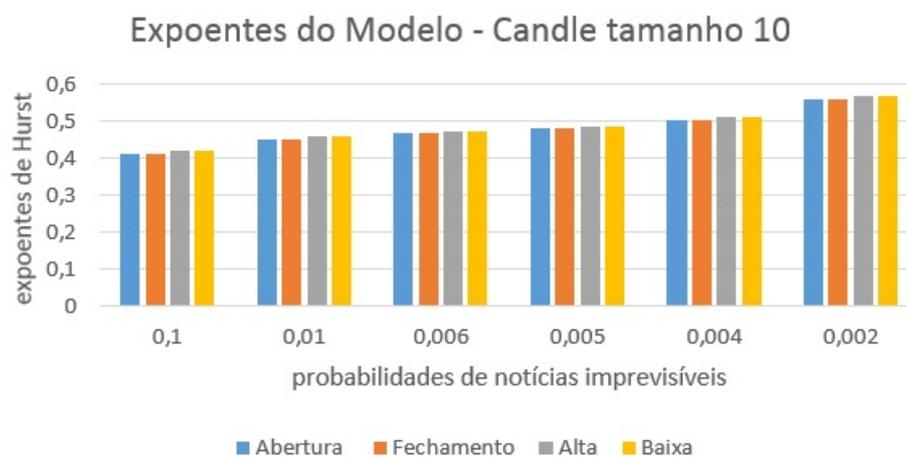


Figura 39 – Média dos expoentes de Hurst para cada série de preços simuladas pelo modelo, no tamanho de candle 10. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (36).

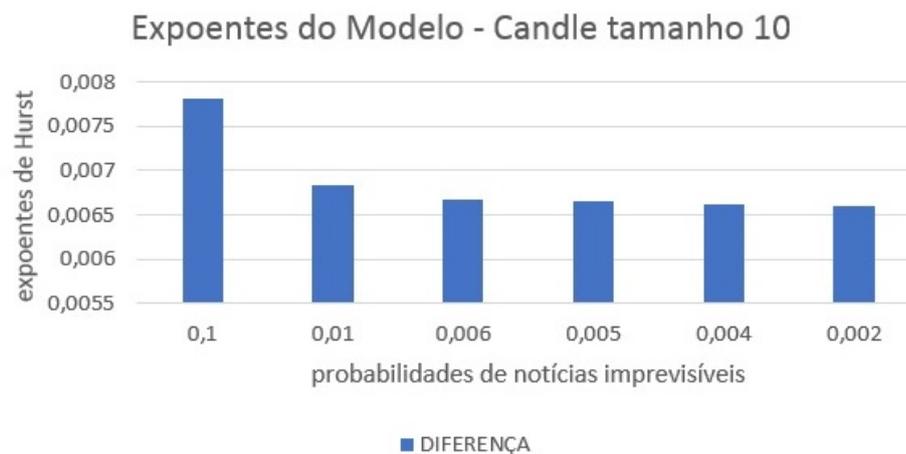


Figura 40 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, dadas pelo modelo, em candles de tamanho 10. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (36).

A figura (41) possui exemplos de dinâmicas simuladas com candles de tamanho 10, para as seis probabilidades testadas. Essas probabilidades são referentes à chegada de novas notícias imprevisíveis, ou seja, o volume médio com que chegam tais notícias.

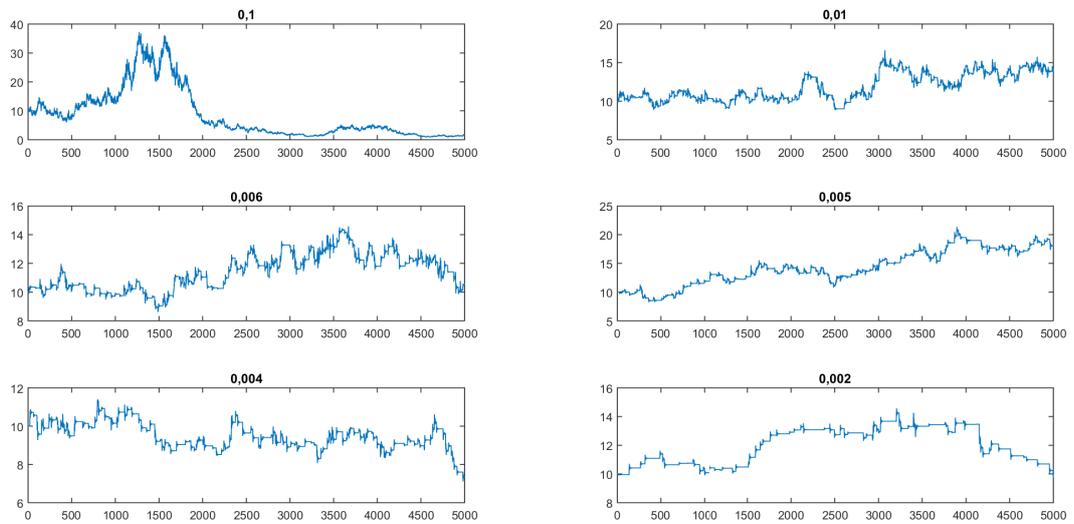


Figura 41 – Exemplos de dinâmicas simuladas com candles de tamanho 10, com condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$ e parâmetros $a = 3$, $b = 1$ e $\Delta t = 0,1$. São representadas seis formas diferentes para a aleatoriedade: $\eta = 0,1$, $\eta = 0,01$, $\eta = 0,006$, $\eta = 0,005$, $\eta = 0,004$ e $\eta = 0,002$.

Mudando para o candle de tamanho 15, temos comportamentos semelhantes para os expoentes de Hurst, porém valores um pouco maiores. Também aqui (figura 42) os expoentes de Hurst aumentam à medida que a probabilidade de chegarem notícias imprevisíveis diminui, a persistência das séries é ascendente.

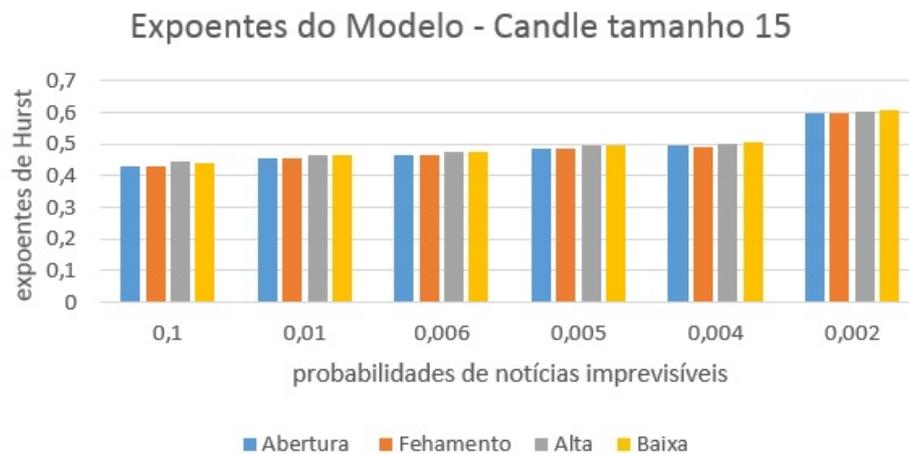


Figura 42 – Média dos expoentes de Hurst para as séries de abertura, fechamento, alta e baixa simuladas pelo modelo, no tamanho de candle 15. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (36).

Os expoentes de Hurst iniciam em torno de 0,43 (probabilidade 10%), chegam a 0,5 na probabilidade 0,4% e então aumentam para 0,6 quando da probabilidade de 0,2%. O aumento dos valores dos expoentes é ainda mais ameno para este tamanho de candle (15), excetuando-se a última probabilidade (0,2%), onde o aumento se torna mais intenso. Em contrapartida, a diferença (D_H) oscila um pouco, tende a diminuir até um certo ponto, da probabilidade de 10% até a probabilidade de 0,6%, se mantém quase inalterada até a probabilidade 0,5%, aumentando novamente em 0,4%, para em seguida voltar a cair em 0,2% (figura 43).

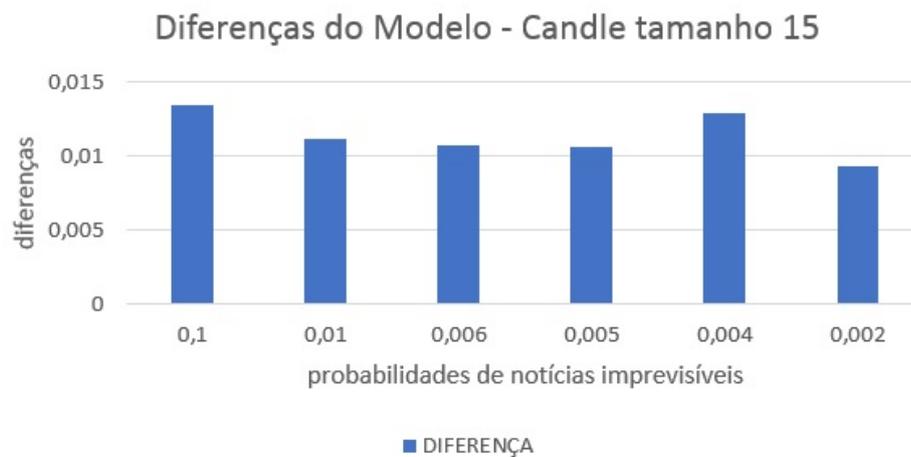


Figura 43 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, simuladas pelo modelo, em candles de tamanho 15. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (36).

Com este comportamento, a diferença apresentada pelo modelo (neste tamanho de candle 15) se mostra mais parecida com diferença apresentada pelos dados reais, no que se refere aos seus valores. Isso para a quantidade de simulações realizadas até o momento. Todos esses resultados para o candle 15 são encontrados no apêndice (H).

A figura (44) é referente a seis dinâmicas simuladas com candles de tamanho 15, em diferentes situações, ou seja, com diferentes probabilidades, que dizem respeito à intensidade da chegada de notícias imprevisíveis.

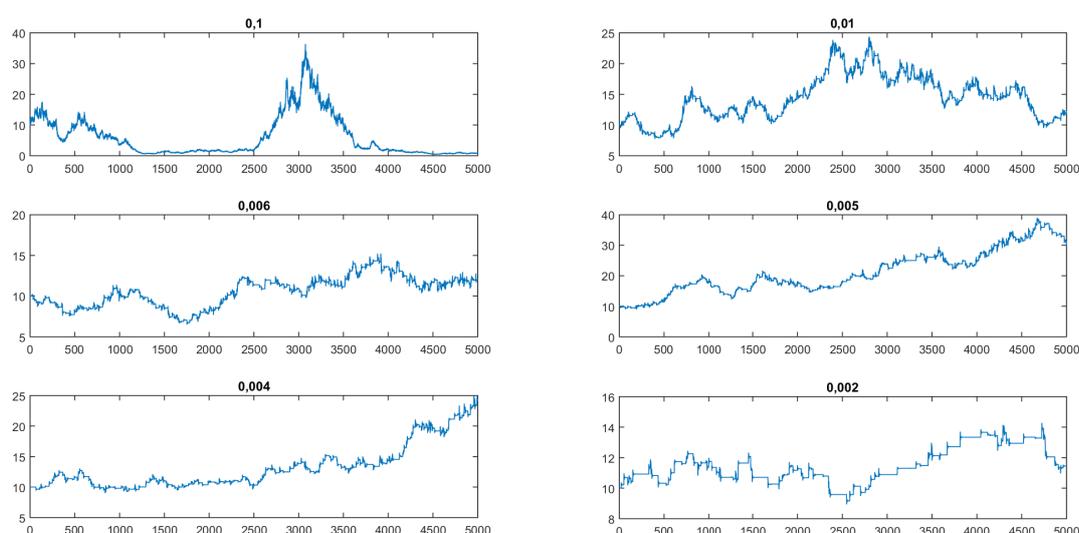


Figura 44 – Exemplos de dinâmicas simuladas com candle de tamanho 15, em condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$ e parâmetros $a = 3$, $b = 1$ e $\Delta t = 0,1$. São representadas seis diferentes formas para a aleatoriedade: $\eta = 0,1$, $\eta = 0,01$, $\eta = 0,006$, $\eta = 0,005$, $\eta = 0,004$ e $\eta = 0,002$.

No candle de tamanho 20, o comportamento dos expoentes de Hurst se mantém parecido com os já apresentados (candles de tamanhos 5, 10 e 15), crescendo à medida que a probabilidade da chegada de novas notícias diminui (figura 45). Quando tal probabilidade é 10% o valor do expoente de Hurst é próximo de 0,43 e se aproxima de 0,49 quando essa probabilidade diminui para 0,4%, porém ultrapassa os 0,5 na última probabilidade calculada (0,2%).

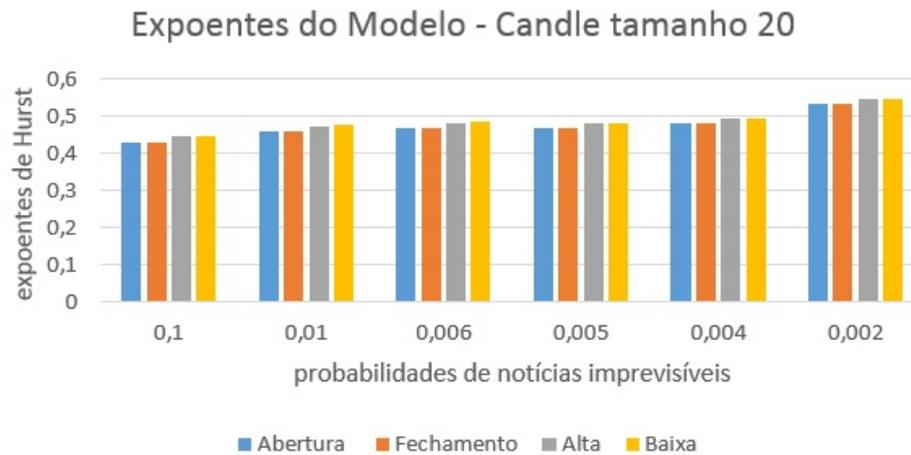


Figura 45 – Média dos expoentes de Hurst para as séries de abertura, fechamento, alta e baixa simuladas pelo modelo, no tamanho de candle 20. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (36).

Continua presente também o fenômeno descoberto, de superioridade dos expoentes de alta e baixa em relação aos de abertura e fechamento, em todos os candles estudados até agora. As diferenças (D_H) voltam a decrescer juntamente com as probabilidades, ainda que suavemente nos quatro últimos valores. Note (figura 46) que a probabilidade 0,6% apresenta D_H de 0,0137, a probabilidade 0,5% apresenta D_H de 0,0135, a probabilidade 0,4% D_H de 0,0133, e por fim, a probabilidade de 0,2% D_H de 0,0130.

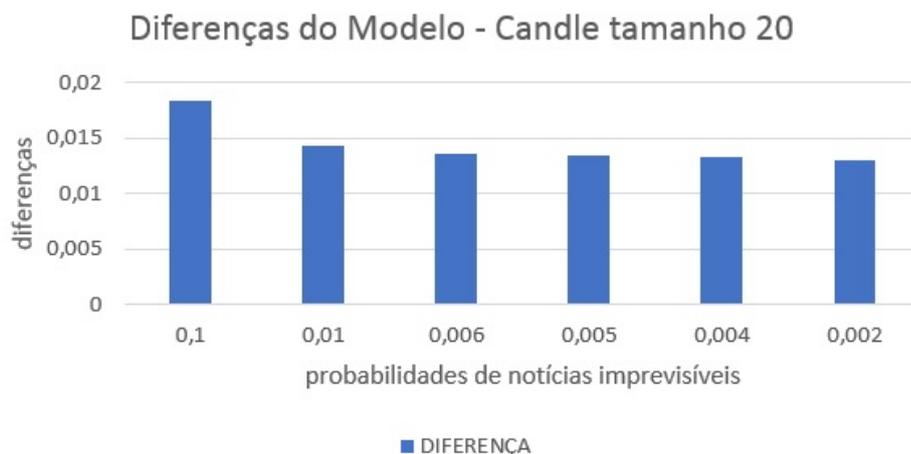


Figura 46 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, simuladas pelo modelo, em candles de tamanho 20. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (36).

De qualquer modo, os resultados obtidos neste tamanho de candle voltam a ficar mais distantes dos buscados, para efeito de ajustes, ou seja, não atingem valores melhores

que os apresentados pelo candle de tamanho 15. Estes resultados podem ser verificados no apêndice (I).

Temos exemplos de dinâmicas na figura (47), produzidas pelo candle de tamanho 20, com as seis probabilidades estudadas.

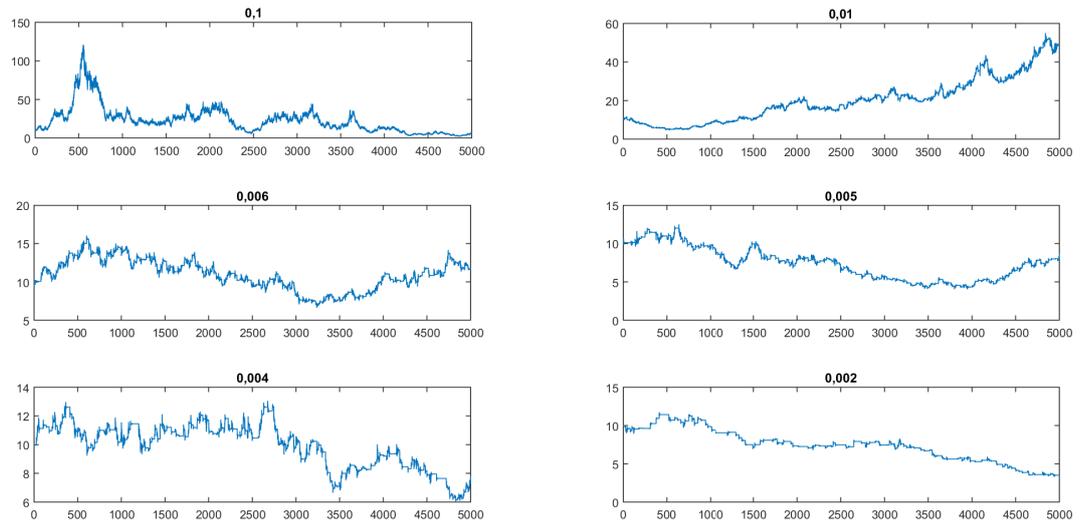


Figura 47 – Exemplos de dinâmicas simuladas com candle de tamanho 20, em condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$ e parâmetros $a = 3$, $b = 1$ e $\Delta t = 0,1$. São representadas seis aleatoriedades diferentes $\eta = 0,1$, $\eta = 0,01$, $\eta = 0,006$, $\eta = 0,005$, $\eta = 0,004$ e $\eta = 0,002$.

Por fim, temos os resultados do candle de tamanho 25, cujo comportamento não foge ao descrito anteriormente, para outros candles. Os expoentes também aumentam à medida que a chegada de novas notícias diminui. Os expoentes começam com valores próximos de 0,44 no primeiro caso (probabilidade 10%), aproximam-se de 0,5 na penúltima probabilidade testada (0,4%) e ultrapassam os 0,5 na última probabilidade (0,2%). E as diferenças também decrescem com essa queda de probabilidades. A tabela com os resultados do candle 25 pode ser vista no apêndice (J).

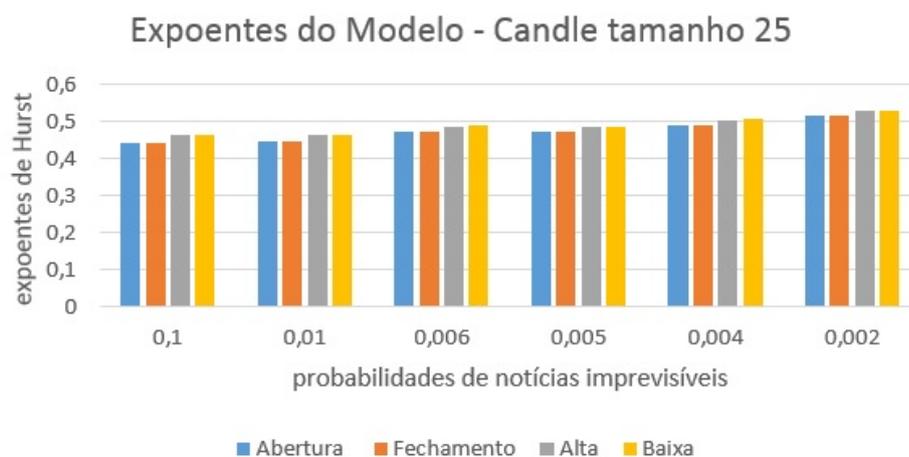


Figura 48 – Média dos expoentes de Hurst para cada série de preços simuladas pelo modelo, no tamanho de candle 25. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (36).

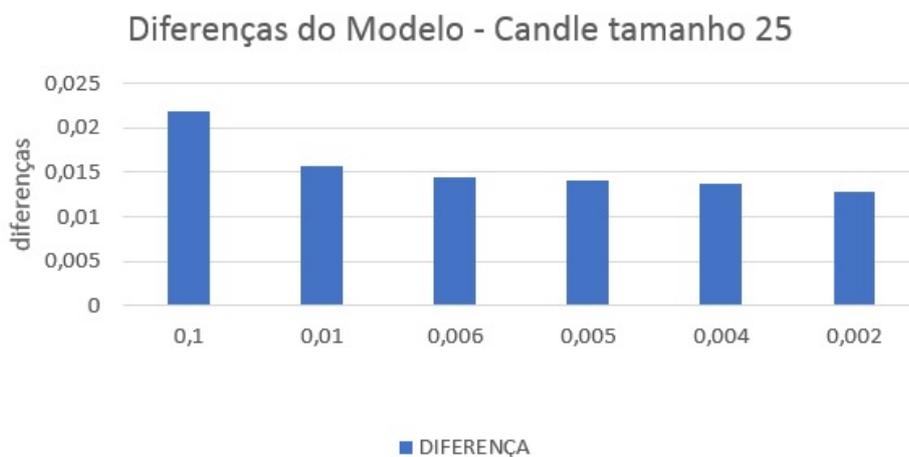


Figura 49 – Diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento, dadas pelo modelo, em candles de tamanho 25. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (36).

A figura (50) possui exemplos de curvas produzidas pelo modelo no candle de tamanho 25, com diferentes probabilidades de notícias imprevisíveis chegarem.

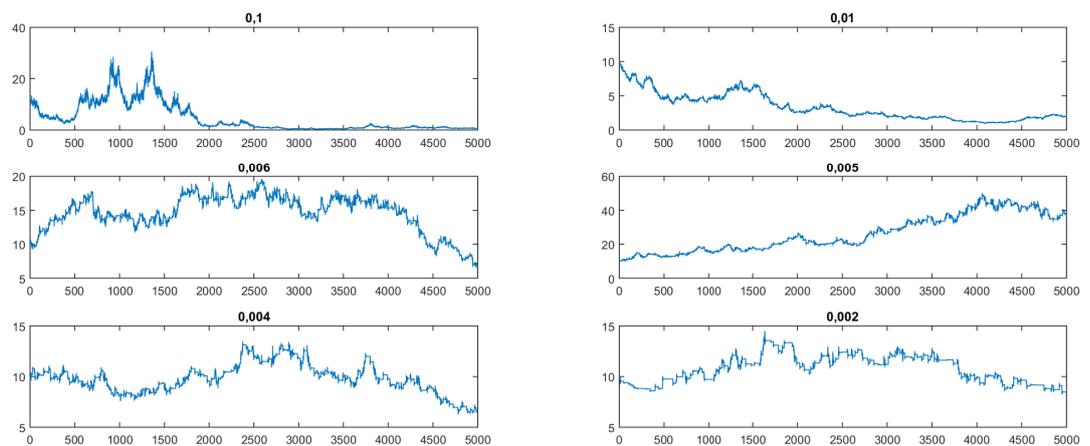


Figura 50 – Exemplos de dinâmicas simuladas com candle de tamanho 25, em condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$ e parâmetros $a = 3$, $b = 1$ e $\Delta t = 0,1$. São representadas seis aleatoriedades diferentes $\eta = 0,1$, $\eta = 0,01$, $\eta = 0,006$, $\eta = 0,005$, $\eta = 0,004$ e $\eta = 0,002$.

5.2 Curtose

A curtose é uma medida estatística capaz de fornecer maiores detalhes das curvas estudadas, com respeito à concentração dos valores de suas distribuições de probabilidades, ou seja, com respeito ao desenho de suas caudas. Ainda com o auxílio do software Matlab®, apresentaremos esta estatística para enriquecer nossas análises.

5.2.1 Dados empíricos

Passemos ao cálculo da curtose, novamente iniciado pelos dados empíricos, os mesmos utilizados para o cálculo do expoente de Hurst. A fórmula da curtose utilizada (16) apresenta valor da normal igual a 3.

Os resultados, desta vez, foram divididos em três gráficos, o primeiro contendo a primeira metade dos resultados das curtoses dos ativos reais (figura 51), o segundo contendo parte da outra metade destes resultados (figura 52), e o terceiro com apenas três dos resultados destes ativos da segunda parte (figura 53), que foram separados por conta dos altos valores de suas curtoses, para questão de efeito visual, devido à diferença de escala. O resultado, em geral, apresentou valores de curtoses bastante variados.

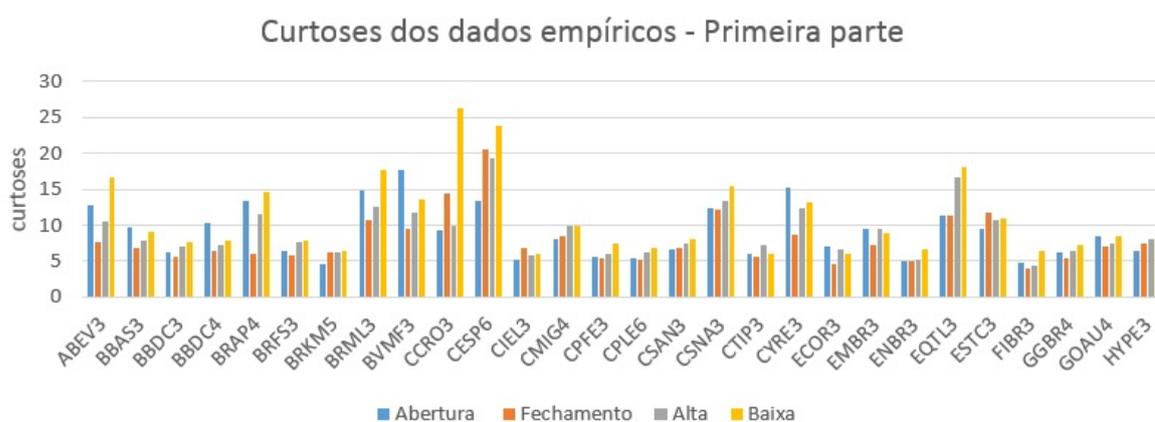


Figura 51 – Primeira parte dos resultados das curtoses calculadas para as séries de preço de abertura, de fechamento, de alta e de baixa dos dados empíricos. Estes dados são referentes aos primeiros 28 ativos do índice Bovespa.

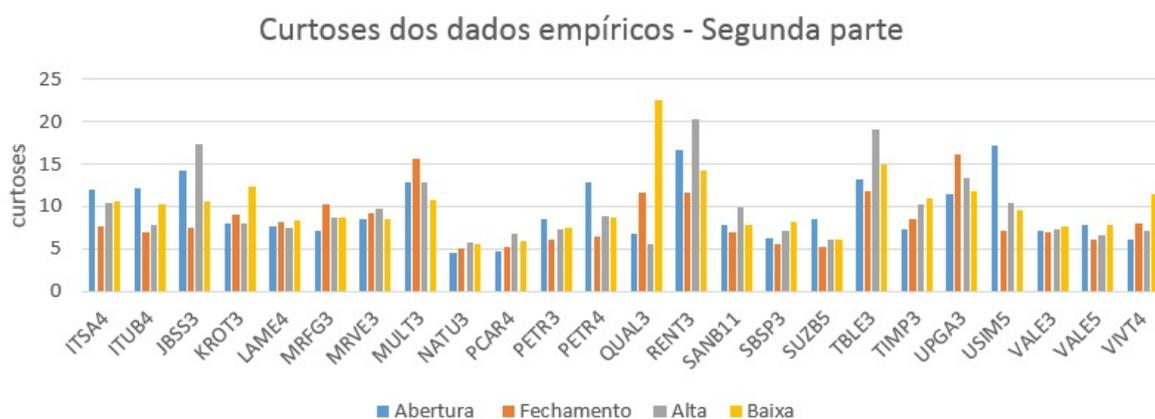


Figura 52 – Segunda parte dos resultados das curtoses calculadas para as quatro séries de preços dos dados empíricos (série de abertura, de fechamento, de alta e de baixa). Estes resultados são referentes à segunda metade dos ativos reais, excetuando-se 3 ativos que são apresentados no próximo gráfico.

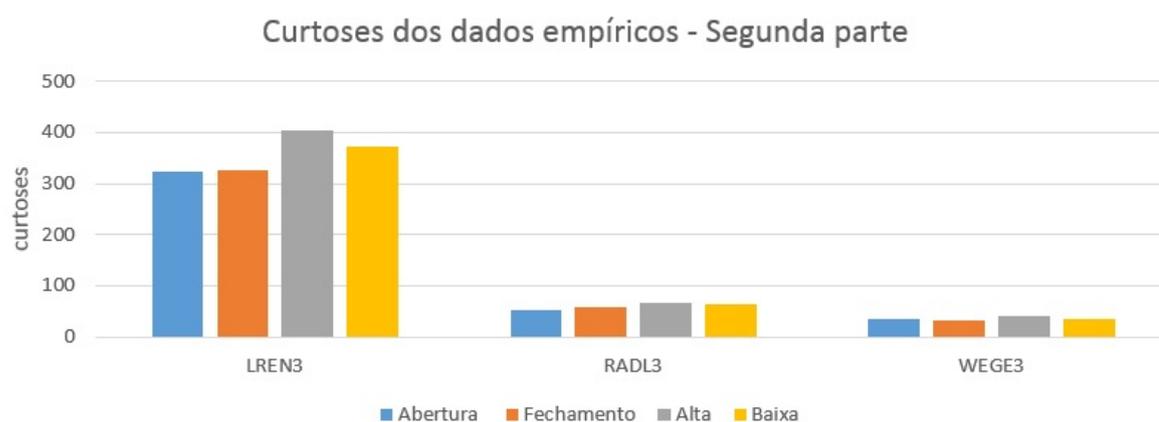


Figura 53 – Resultados das curtoses de três ativos que fazem parte da segunda metade do índice Bovespa. Estes ativos foram separados por questão visual, para que não atrapalhassem a percepção dos demais, dada a significativa diferença de escala.

Todos os ativos apresentaram valores de curtoses maiores que 3. A menor curtose encontrada, com valor 4,5, foi a da série de preços de abertura do NATU3, ativo da empresa Natura, e a maior, com valor 403,9 foi a da série de preços de alta do LREN3, ativo das Lojas Renner. Logo, todos os ativos apresentaram caudas pesadas em todas as suas quatro séries. Os resultados das curtoses dos dados empíricos estão presentes nos apêndices (K e L).

5.2.2 Caminhante Aleatório

Para o estudo das curtoses do caminhante aleatório, utilizamos 500.000 (quinhentos mil) pontos, correspondendo a séries de 500.000 preços, e condizente com o tamanho das séries utilizadas anteriormente para o cálculo do expoente de Hurst (lá utilizamos 100 séries de 5.000 pontos). Utilizamos também os mesmos 5 tamanhos de candles (5, 10, 15, 20 e 25) já trabalhados.

As curtoses do caminhante aleatório apresentaram um determinado padrão, coincidindo com o fenômeno apresentado pelos expoentes de Hurst, ou seja, as curtoses das séries de alta e de baixa foram superiores às curtoses das séries de abertura e de fechamento (figura 54). Outro fato curioso é que essas curtoses das séries de abertura e fechamento tiveram valores próximos a 3, mas não ultrapassaram este número. Em geral, estas séries se mostraram mais próximas de séries com distribuição normal, enquanto as curtoses das séries de alta e baixa, com valores um pouco acima de 3, são tidas como séries de caudas pesadas, segundo a definição.

Na grande maioria dos casos, os valores das curtoses do caminhante aleatório

aumentaram ao passo que os tamanhos de candle aumentaram (figura 54). A tabela com os valores das curtoses do caminhante aleatório se encontra no apêndice M.

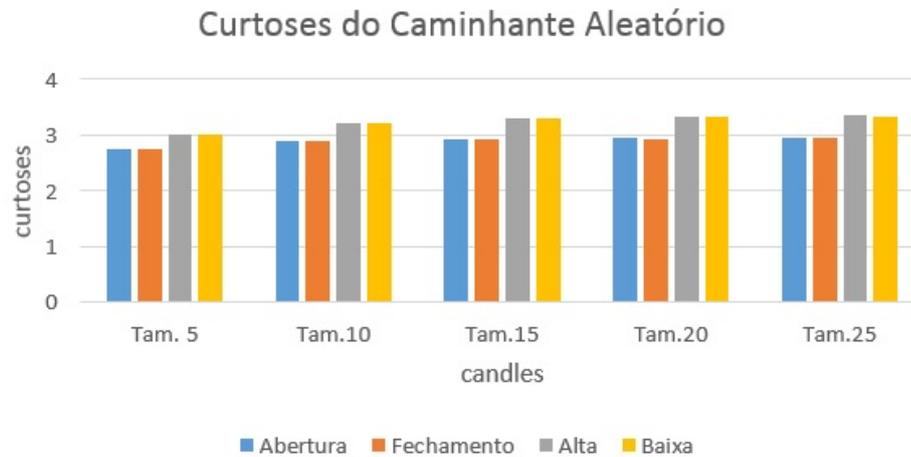


Figura 54 – Curtoses calculadas para um caminhante aleatório, para séries de abertura, de fechamento, de alta e de baixa em diferentes tamanhos de candles.

5.2.3 Modelo

Para o estudo das curtoses do modelo, foram utilizadas também séries de 500.000 (quinhentos mil) pontos, correspondentes à quantidade de simulações realizadas para o cálculo dos expoentes de Hurst, assim como os mesmos cinco tamanhos de candles (5, 10, 15, 20 e 25).

Os resultados do modelo, em geral, mantiveram um padrão, assim como o caminhante aleatório. Os valores das curtoses das séries de alta e de baixa foram, quase sempre, superiores aos valores das curtoses das séries de abertura e de fechamento. Neste ponto, nosso modelo se distanciou dos dados reais e se aproximou do caminhante. Porém, com relação às curtoses propriamente ditas, nosso modelo apresentou valores maiores que 3, isso fez com que se aproximasse dos dados reais e se distanciasse do caminhante. Os valores foram os mais variados, também como nos dados empíricos, e todas as séries apresentaram caudas pesadas.

No candle de tamanho 5 (figura 55) temos curtoses próximas de 3,4, em todas as quatro séries, quando a probabilidade de novas notícias chegarem, em cada passo, é igual a 10%, curtoses próximas de 8, novamente para as quatro séries, quando esta probabilidade diminui para 1%, chegando a valores próximos de 28 quando a probabilidade das notícias chegarem atinge 0,2%. Neste candle as quatro séries possuem valores muito próximos, em todas as probabilidades. Os valores das curtoses do modelo, no candle de tamanho 5, constam da tabela do apêndice (N).

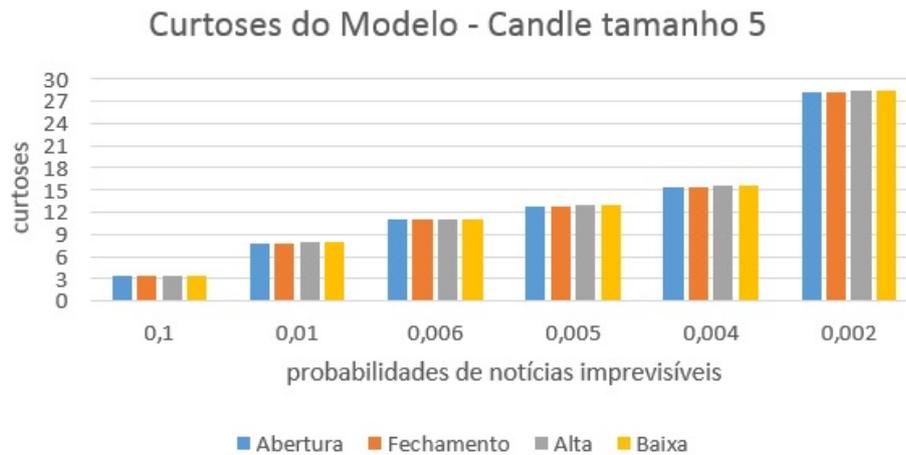


Figura 55 – Curtoses calculadas para o modelo no tamanho de candle 5. Condições iniciais simétricas, $i_c(0) = i_v(0) = 1/6 + 0,1$, $s_c(0) = s_v(0) = 1/3 - 0,1$, $P(0) = 10$ e parâmetros $a = 3$, $b = 1$, $\Delta t = 0,1$.

No candle de tamanho 10 (figura 56) os resultados são parecidos aos resultados do candle anterior, porém com uma certa diferença entre as duas primeiras séries (abertura e fechamento) e as duas últimas (alta e baixa). Na probabilidade 10% temos curtoses variando de 3,4 a 3,7, na probabilidade 1% temos curtoses variando de 7,7 a 8,2 e estas vão aumentando à medida que tal probabilidade diminui, chegando a valores entre 26,9 e 28,7 quando da última probabilidade (0,2%). Estes valores de curtose são apresentados na tabela do apêndice (O).

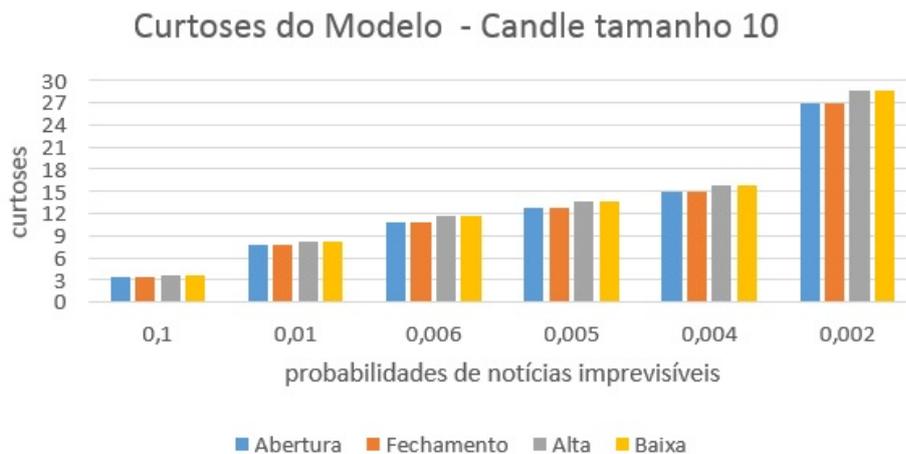


Figura 56 – Curtoses calculadas para o modelo no tamanho de candle 10. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (55).

No candle de tamanho 15 (figura 57) o resultado, com relação aos valores das curtoses, é parecido com os resultados já apresentados, e, como no candle de tamanho 10,

começa a apresentar uma determinada diferença entre as duas primeiras e as duas últimas séries. Esta pode ser melhor vista a partir da probabilidade 1%. Os valores das curtoses do candle de tamanho 15 podem ser encontrados no apêndice (P).

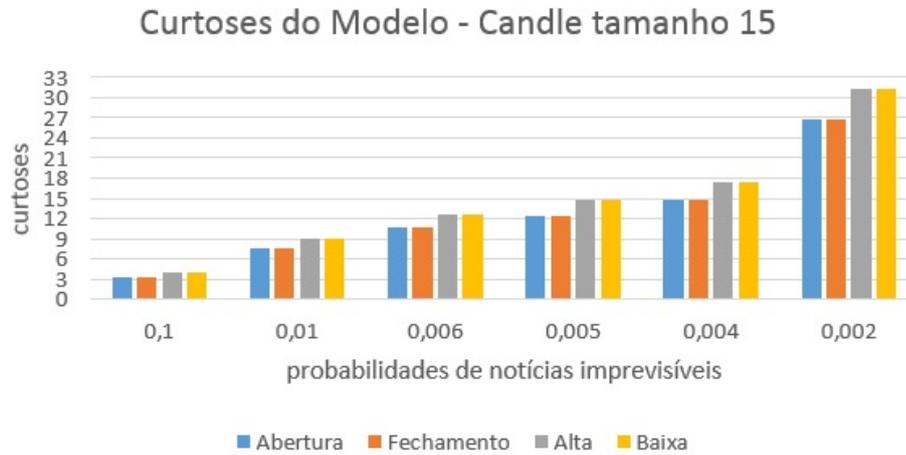


Figura 57 – Curtoses calculadas para o modelo no tamanho de candle 15. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (55).

Os resultados do candle de tamanho 20 (figura 58), também apresentam valores parecidos com valores de séries anteriores, a diferença é que as séries de alta e de baixa se distanciam um pouco mais das séries de abertura e de fechamento, neste caso. Na primeira probabilidade (10%) temos valores de curtoses variando de 3,4 a 4,4, e essa diferença continua até a última probabilidade (0,2%), quando temos valores de curtoses variando de 25,7 a 32,8. Resultados presentes no apêndice (Q).

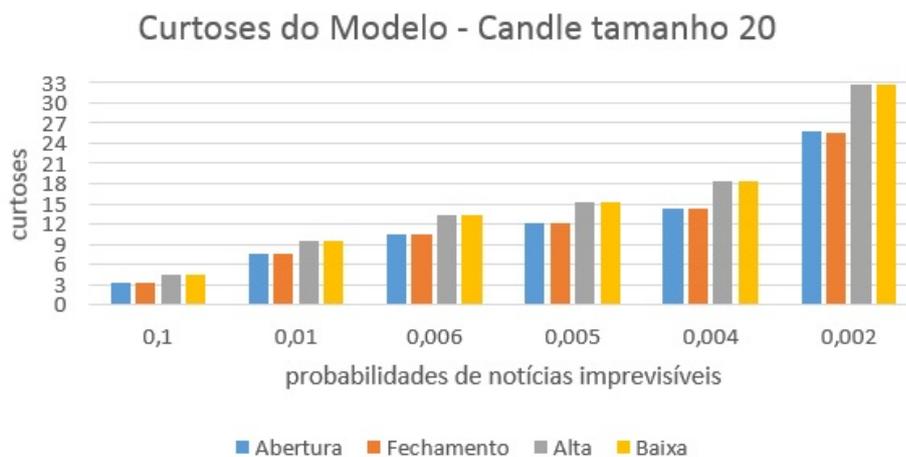


Figura 58 – Curtoses calculadas para o modelo no tamanho de candle 20. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (55).

Finalmente, no candle de tamanho 25 (figura 59), temos curtoses aumentando à

medida que as probabilidades aumentam, como aconteceu em quase todos os tamanhos de candle, e temos ainda uma maior distinção entre as duas primeiras e as duas últimas séries. Na última probabilidade, de 0,2%, temos valores de curtose que começam em 24,9 e chegam a 33,9. Todos os valores, de todas as probabilidades deste candle, estão no apêndice (R).

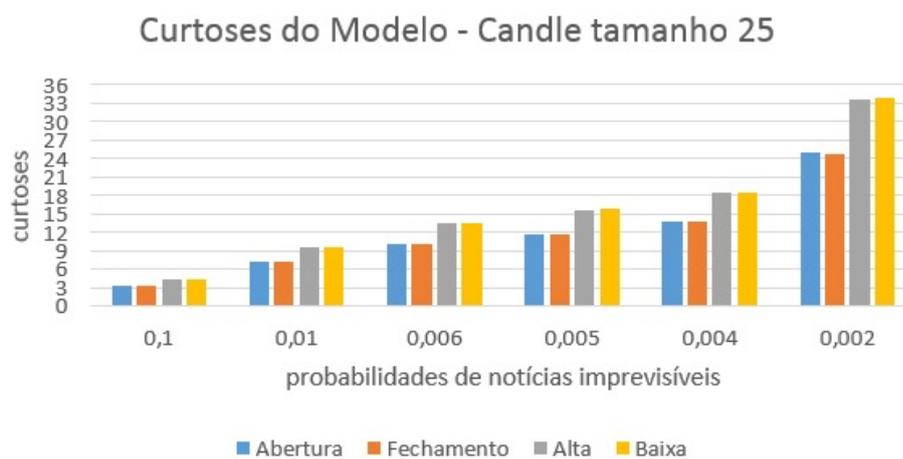


Figura 59 – Curtoses calculadas para o modelo no tamanho de candle 25. Os parâmetros da simulação são os mesmos da figura (55).

6 Conclusão

O objetivo de criar um modelo de mercado baseado em um modelo epidêmico foi alcançado. Conseguimos modelar a dinâmica de quatro tipos de agentes financeiros (infectado de compra, infectado de venda, suscetível de compra e suscetível de venda), através de quatro equações diferenciais inspiradas no modelo SIR. O modelo também contou com a ajuda de uma quinta equação, para o preço, relacionada com a interação de dois destes grupos de agentes (Infectado de compra e Infectado de venda), responsáveis pela movimentação do mesmo.

Fizemos uso de ferramentas matemáticas da área de Sistemas Dinâmicos para análise do modelo, começando pelo estudo dos autovalores de sua matriz jacobiana calculada em seus pontos críticos. Estudamos estes pontos críticos e investigamos sua estabilidade. Em um dos casos lançamos mão do critério de Routh-Hurwitz. Realizamos simulações, analisando o comportamento do modelo para diversos casos em que a dinâmica tende para a estabilidade do preço, algumas vezes de forma oscilatória. Dinâmicas que tendem para estabilidade são um bom ponto de partida para simulação do Mercado Financeiro.

Como o modelo determinístico não apresentou curvas parecidas com curvas reais, introduzimos aleatoriedade no modelo de duas formas diferentes. Em uma delas, a liquidez varia, na outra, não. Em ambos os casos, o mercado foi tratado como um sistema aberto, uma vez que há influência de notícias externas, mas apenas em um deles a quantidade de agentes muda com o tempo.

Para as análises estatísticas foram produzidos candlesticks a partir das curvas sintéticas, uma vez que os dados empíricos a que tivemos acesso vieram neste formato (candles com séries de preços de abertura, de fechamento, de alta e de baixa). Assim, pudemos fazer uma melhor comparação estatística. Expoentes de Hurst calculados sobre séries produzidas pelo modelo foram comparados a expoentes de Hurst provenientes de ações do Índice Bovespa, e, ainda, a expoentes de um caminhante aleatório. Os primeiros resultados analisados foram os resultados dos dados empíricos, que trouxeram à tona um fato que, até onde sabemos, não foi ainda descrito na literatura: os expoentes de Hurst das séries de alta e de baixa apresentaram valores superiores aos expoentes de Hurst das séries de abertura e de fechamento, para a grande maioria dos ativos. Testes de expoentes de Hurst como este são mais comumente feitos para séries de preço de fechamento apenas, o que explica a ausência de um estudo semelhante ao nosso na literatura. Dada a importância dessa nova descoberta, fizemos testes também com um caminhante aleatório e descobrimos a mesma ocorrência, mas de forma bem mais uniforme. Assim, pudemos explicitar a complexidade do mercado financeiro, e demonstrar que, neste

sentido, dados empíricos se distanciam bastante de um caminhante puro. Nosso modelo, por sua vez, também apresentou tal comportamento (expoentes de hurst das séries de alta e de baixa superiores aos expoentes de hurst das séries de abertura e fechamento). Observamos que um parâmetro importante na dinâmica do modelo neste ponto está ligado à aleatoriedade inserida, mais especificamente, à probabilidade de chegada de novas notícias imprevisíveis, que impactam o número de agentes suscetíveis. Simulamos então, seis diferentes probabilidades de chegada destas notícias a cada passo de tempo (10%, 1%, 0,6%, 0,5%, 0,4% e 0,2%), e concluímos que as séries se tornam mais persistentes à medida que o volume de chegada dessas notícias diminui.

Também nos concentramos sobre as *diferenças* entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e as médias de tais expoentes das séries de abertura e fechamento. Estas se mantiveram entre 0,007 e 0,014 para os dados reais, entre 0,002 e 0,022 para o modelo e entre 0,013 e 0,014 para o caminhante aleatório. Quando buscamos a combinação destes dados, resultados dos expoentes e de suas diferenças, conseguimos encontrar séries produzidas pelo modelo que se assemelharam a resultados apresentados pela maioria das ações estudadas (expoentes próximos de 0,5 e diferença próxima de 0,010). Desta forma, o modelo se mostrou mais próximo de um cenário real.

Expandimos nosso estudo estatístico através da ferramenta curtose, aplicando os testes para a mesma amostra de dados empíricos e uma quantidade de simulações equivalente à das realizadas anteriormente com o expoente de Hurst. Todas as séries de todos os ativos apresentaram caudas pesadas e o mesmo aconteceu com nosso modelo. Também aqui, conseguimos resultados próximos aos resultados dos dados reais. Surgiu então outro fato novo: a superioridade dos valores das curtoses das séries de alta e de baixa, em relação às séries de abertura e fechamento, para o caminhante aleatório, como aconteceu nos resultados dos expoentes. O modelo seguiu esse comportamento em quase todas as simulações. Já os resultados das curtoses dos dados reais, de um modo geral, não apresentaram este fenômeno. Ainda assim, nosso modelo foi capaz de reproduzir algumas das estatísticas provenientes dos dados reais.

Possíveis futuros passos desta pesquisa correspondem ao tratamento estatístico sobre amostras maiores e à investigação de como a variação de outros parâmetros do modelo influencia os fenômenos estatísticos observados. Mudanças no modelo por meio da supressão ou acréscimo de termos nas equações diferenciais também podem vir a constituir interessantes novas ramificações deste assunto.

Referências

- [1] PORTAL DO INVESTIDOR. **Mercado Financeiro**. 2017. Disponível em: <http://www.portaldoinvestidor.gov.br/menu/primeiros{_}passos/Entendendo{_}mercado{_}val>. Citado na página 1.
- [2] MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E.; CHRISS, N. A. **An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance**. [s.n.], 2000. v. 53. 70 p. ISSN 00319228. ISBN 0521620082. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/magazine/physicstoday/article/53/12/10.1063/1.1341926http://link.aip.org/link/PHTOAD/v53/i12/p70/s1{&}Agg=>>>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.
- [3] PORTAL DO GOVERNO BRASILEIRO. **Comissão de Valores Mobiliários**. 2017. Disponível em: <http://www.cvm.gov.br/menu/acesso{_}informacao/institucional/sobre/cvm.h>. Citado na página 1.
- [4] BUCHANAN, M. What has econophysics ever done for us? **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 9, n. 6, p. 317–317, 2013. ISSN 1745-2473. Disponível em: <<http://www.nature.com/doifinder/10.1038/nphys2648>>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.
- [5] MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. **Scaling behaviour in the dynamics of an economic index**. 1995. 46–49 p. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 9.
- [6] GABAIX, X. et al. A theory of power-law distributions in financial market fluctuations. **Nature**, v. 423, n. May, p. 267—270, 2003. ISSN 0028-0836. Citado na página 2.
- [7] CAJUEIRO, D. O.; TABAK, B. M. The Hurst exponent over time: Testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 336, n. 3-4, p. 521–537, 2004. ISSN 03784371. Citado 4 vezes nas páginas 2, 3, 9 e 45.
- [8] ATMAN, A. P. F.; GONÇALVES, B. A. Influence of the Investor's Behavior on the Complexity of the Stock Market. **Brazilian Journal of Physics**, v. 42, n. 1-2, p. 137–145, 2012. ISSN 01039733. Citado na página 2.
- [9] BAKKER, L. et al. A social network model of investment behaviour in the stock market. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier B.V., v. 389, n. 6, p. 1223–1229, 2010. ISSN 03784371. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2009.11.013>>. Citado na página 2.
- [10] CAGINALP, G.; ERMENTROUT, G. B. A kinetic thermodynamics approach to the psychology of fluctuations in financial markets. **Applied Mathematics Letters**, v. 3, n. 4, p. 17–19, 1990. ISSN 08939659. Citado na página 2.
- [11] CAGINALP, G.; MERDAN, H. Asset price dynamics with heterogeneous groups. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 225, n. 1, p. 43–54, 2007. ISSN 01672789. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- [12] WEI, Y.-m. et al. The cellular automaton model of investment behavior in the stock market. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 325, n. 3, p. 507–516, 2003. ISSN 03784371. Citado na página 2.

- [13] LOTKA, A. J. *Elements of Physical Biology*. **Williams and Wilkins Company**, p. 435, 1925. ISSN 0271-4353. Citado na página 2.
- [14] VOLTERRA, V. *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. **Memorie della R. Accademia dei Lincei**, v. 6, n. 2, p. 31–113, 1926. ISSN 10543139. Disponível em: <<http://www.liberliber.it/biblioteca/v/volterra/variazioni{ }e{ }fluttuazioni/pdf/volterra{ }variazioni{ }e{ }f>>. Citado na página 2.
- [15] VERHULST, P. *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*. **Quetelet**, v. 10, p. 113–121, 1838. Citado na página 2.
- [16] KERMAK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. **A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics**. 1927. 700–721 p. Disponível em: <<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/royprsa/115/772/700.full.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- [17] CAGINALP, G.; PORTER, D.; SMITH, V. *Momentum and overreaction in experimental asset markets*. **International Journal of Industrial Organization**, v. 18, n. 1, p. 187–204, 2000. ISSN 01677187. Citado na página 3.
- [18] STEFAN, F. M.; ATMAN, A. P. F. *Is there any connection between the network morphology and the fluctuations of the stock market index?* **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier B.V., v. 419, p. 630–641, 2015. ISSN 03784371. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2014.10.026>>. Citado na página 3.
- [19] CODEÇO, C. T.; COELHO, F. C. *Modelagem de doenças transmissíveis*. **Oecologia Australis**, v. 16, n. 1, p. 110–116, 2012. ISSN 21776199. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 5.
- [20] KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*. **The Econometric Society**, v. 47, p. 263–292, 1979. Citado na página 9.
- [21] CARBONE, A.; CASTELLI, G.; STANLEY, H. E. *Time-dependent Hurst exponent in financial time series*. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, p. 267–271, 2004. Citado na página 9.
- [22] WIKIPÉDIA. **Curtose**. Wikimedia, 2017. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Curtose>>. Citado na página 14.
- [23] WIKIPÉDIA. **Ativo**. Wikimedia, 2017. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Ativo>>. Citado na página 15.
- [24] BM&FBOVESPA. **Ações**. 2017. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/pt{ }br/produtos/listados-a-vista-e-derivativos/renda-variavel/acoes>>. Citado na página 15.
- [25] INVESTOPEDIA. **Basics Of Technical Analysis**. 2017. Disponível em: <<http://www.investopedia.com/university/technical/>>. Citado na página 15.
- [26] WIKIPÉDIA. **Análise Fundamentalista**. Wikimedia, 2017. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/An{ }lise{ }fundam>>. Citado na página 16.
- [27] WIKIPÉDIA. **Hipótese de Mercado Eficiente**. Wikimedia, 2017. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Hip{ }tese{ }do{ }merca>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- [28] INVESTOPEDIA. **Candlesticks**. 2017. Disponível em: <<http://www.investopedia.com/terms/c/candlestick.asp>>. Citado na página 16.

- [29] WIKIPEDIA. **Routh–Hurwitz stability criterion**. 2016. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Routh–Hurwitz_stability_criterion>. Citado na página 18.
- [30] DORF, R. C. B. R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. [S.l.: s.n.], 2013. 838 p. ISBN ISBN-10: 8521619952 ISBN-13: 978-8521619956. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 27.
- [31] CAGINALP, G.; BALENOVICH, D. Asset flow and momentum: deterministic and stochastic equations. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 357, n. 1758, p. 2119–2133, 1999. ISSN 1364-503X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1999.0421>>. Citado na página 23.

Apêndices

APÊNDICE A – Amostra de ativos do Índice BOVESPA

* Amostra coletada através da Plataforma Bloomberg

ABEV3 - Ação da Ambev (Companhia de Bebidas das Américas), uma indústria brasileira de bebidas.

SANB11 - Ação do Banco Santander, uma instituição financeira brasileira.

ITUB4 - Ação do Itaú Unibanco, uma instituição financeira brasileira.

BBAS3 - Ação do Banco do Brasil, uma instituição financeira brasileira.

BBDC3 e BBDC4 - Ações do Banco Bradesco, um banco privado do Brasil.

BBSE3 - Ação da BB Seguridade, uma indústria de seguros brasileira, que pertence ao Banco do Brasil.

BVMF3 - Ação da BM&FBOVESPA (Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo).

CTIP3 - Ação da CETIP (Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos).

CIEL3 - Ação da Cielo, uma indústria de serviços financeiros brasileira.

JBSS3 - Ação da JVBS, uma indústria alimentícia brasileira.

BRFS3 - Ação da BRF, uma indústria alimentícia do Brasil.

MRF3 - Ação da Marfrig, uma indústria alimentícia brasileira.

BRKM5 - Ação da Braskem, uma indústria química e petroquímica brasileira.

PETR3 e PETR4 - Ações da Petrobras, uma indústria de Petróleo, Gás, Energia e Biocombustível.

CMIG4 - Ação da Cemig (Companhia Energética de Minas Gerais), uma indústria brasileira de energia elétrica.

CPLE6 - Ação da Copel (Companhia Paranaense de Energia), uma indústria brasileira do estado do Paraná, de energia elétrica e telecomunicações.

TBLE3 - Ação da Tractebel Energia, uma indústria de energia elétrica brasileira.

CESP6 - Ação da CESP (Companhia Energética de São Paulo), uma indústria de energia.

ENBR3 - Ação da EDP (Energias do Brasil), uma indústria brasileira de energia.

- EQTL3 - Ação da Equatorial Energia, uma indústria energia elétrica.
- CPFE3 - Ação da CPFL Energia (Companhia Paulista de Força e Luz), uma indústria de energia.
- TIMP3 - Ação da TIM Brasil (TIM Participações), uma indústria de telefonia móvel e banda Larga.
- VIVT4 - Ação da Telefônica Vivo (Telefônica Brasil), uma indústria de telecomunicações.
- CSNA3 - Ação da CSN (Companhia Siderúrgica Nacional), uma indústria siderúrgica brasileira.
- GGBR4 e GOAU4 - Ações da Gerdau, uma indústria siderúrgica brasileira.
- VALE3 e VALE5 - Ações da Vale, uma indústria brasileira de mineração, logística, energia e siderurgia.
- USIM5 - Ação da Usiminas (Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais S.A), uma indústria brasileira de mineração e siderurgia.
- EMBR3 - Ação da Embraer, uma indústria aeronáutica e de defesa.
- HYPE3 - Ação da Hypermarchas, uma indústria brasileira de conglomerado.
- ITSA4 - Ação da Itaúsa, uma indústria de conglomerado.
- UGPA3 - Ação da Ultrapar (Grupo Ultra), uma indústria de conglomerado.
- BRAP4 - Ação da Bradespar, uma indústria brasileira de holding.
- LAME4 - Ação das Lojas Americanas, uma indústria varejista brasileira.
- LREN3 - Ação das Lojas Renner, uma indústria varejista brasileira.
- PCAR4 - Ação da GPA (Companhia Brasileira de Distribuição), uma indústria brasileira alimentícia, atacadista, varejista e de e-commerce.
- SBSP3 - Ação da SABESP (Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo), uma indústria brasileira de saneamento básico.
- BRML3 - Ação da BRMalls, uma indústria brasileira do setor imobiliário, composta por shopping centers.
- MULT3 - Ação da Multiplan, uma indústria do setor imobiliário, composta por shopping centers.
- CCRO3 - Ação do Grupo CCR, uma indústria brasileira de infraestrutura e transporte.
- ECOR3 - Ação da EcoRodovias, uma indústria brasileira de infraestrutura e transporte.
- CSAN3 - Ação da Cosan, uma indústria brasileira de energia, logística e infra-

estrutura.

CYRE3 - Ação da Cyrela Brazil Realty, uma indústria brasileira incorporadora e construtora de imóveis residenciais.

MRVE3 - Ação da MRV Engenharia, uma indústria brasileira de construção civil.

ESTC3 - Ação da Estácio Participações, uma indústria no setor da educação.

KROT3 - Ação da Kroton Educacional, uma indústria brasileira no setor da educação.

SUZB5 - Ação da Suzano Papel e Celulose, uma indústria de celulose.

FIBR3 - Ação da Fibria, uma indústria de celulose.

KLBN11 - Ação da Klabin, uma indústria brasileira de papel e celulose.

QUAL3 - Ação da Qualicorp, uma indústria brasileira de planos de saúde.

NATU3 - Ação da Natura, uma indústria de cosméticos brasileira.

RADL3 - Ação da RaiaDrogasil, uma indústria farmacêutica varejista brasileira.

RENT3 - Ação da Localiza, uma indústria brasileira de locação de veículos.

RUMO3 - Ação da Rumo Logística, uma indústria brasileira de transporte ferroviário e logística.

SMLE3 - Ação da Smiles, uma indústria que administra programas de fidelidade para milhas aéreas.

WEGE3 - Ação da WEG, uma indústria no ramo de engenharia industrial.

APÊNDICE B – Tabela de expoentes de Hurst dos ativos do Índice BOVESPA

Expoentes de Hurst das séries de abertura, fechamento, alta e baixa referentes a candlesticks diários de ações da BOVESPA. O período considerado é janeiro de 2000 a abril de 2016. Podemos observar que os valores dos expoentes das séries de alta e baixa são na maioria das vezes superiores aos expoentes das séries de abertura e fechamento.

A tabela foi dividida em duas, primeira parte e segunda parte, para uma melhor visualização, dada a grande quantidade de ativos.

Tabela 1 – Primeira parte do resultado dos expoentes de Hurst calculados para os ativos reais.

Primeira parte				
Ativos	Preços de abertura	Preços de fechamento	Preços de alta	Preços de baixa
ABEV3	0,471	0,4732	0,4863	0,4822
BBAS3	0,4872	0,4803	0,4977	0,4906
BBDC3	0,4945	0,4909	0,5078	0,5005
BBDC4	0,4771	0,471	0,4887	0,4794
BRAP4	0,5177	0,5096	0,5302	0,5178
BRFS3	0,4826	0,487	0,4993	0,4924
BRKM5	0,5609	0,5617	0,572	0,5669
BRML3	0,4402	0,4406	0,4559	0,4514
BVMF3	0,4336	0,4322	0,4492	0,4451
CCRO3	0,4566	0,4584	0,4736	0,4712
CESP6	0,508	0,5141	0,5243	0,5192
CIEL3	0,4869	0,4915	0,5055	0,4988
CMIG4	0,4889	0,4864	0,5044	0,4952
CPFE3	0,4177	0,4199	0,4378	0,4353
CPLE6	0,4472	0,4545	0,4679	0,46
CSAN3	0,4502	0,45	0,4627	0,4569
CSNA3	0,5621	0,5586	0,5727	0,565
CTIP3	0,4119	0,4194	0,4292	0,4266
CYRE3	0,4419	0,4391	0,4521	0,4499
ECOR3	0,4384	0,4394	0,4586	0,4573
EMBR3	0,4557	0,461	0,4755	0,4672
ENBR3	0,392	0,3944	0,415	0,4117
EQTL3	0,4503	0,4543	0,4651	0,4637
ESTC3	0,5177	0,525	0,5337	0,5295
FIBR3	0,4962	0,495	0,5147	0,5073
GGBR4	0,5251	0,5208	0,5393	0,5277
GOAU4	0,539	0,5341	0,5555	0,5434
HYPE3	0,5355	0,5345	0,5447	0,544

APÊNDICE C – Tabela de expoentes de Hurst dos ativos do Índice BOVESPA

Tabela 2 – Segunda parte do resultado dos expoentes de Hurst calculados para os ativos reais.

Segunda parte				
Ativos	Preços de abertura	Preços de fechamento	Preços de alta	Preços de baixa
ITSA4	0,4576	0,4529	0,4702	0,4614
ITUB4	0,4415	0,4366	0,4525	0,4449
JBSS3	0,4796	0,479	0,4964	0,4949
KROT3	0,5423	0,5498	0,5613	0,5539
LAME4	0,4856	0,4857	0,497	0,4916
LREN3	0,5077	0,5083	0,5211	0,5242
MRFG3	0,4977	0,4986	0,5129	0,5001
MRVE3	0,4479	0,4427	0,4597	0,4501
MULT3	0,4715	0,4758	0,4882	0,4866
NATU3	0,4695	0,4712	0,4838	0,4826
PCAR4	0,4872	0,4923	0,5004	0,4997
PETR3	0,4988	0,4963	0,5119	0,5022
PETR4	0,5004	0,4993	0,5162	0,5046
QUAL3	0,4245	0,4282	0,4478	0,4362
RADL3	0,5592	0,5585	0,5774	0,5756
RENT3	0,4686	0,4683	0,4797	0,4841
SANB11	0,4216	0,4216	0,4374	0,4395
SBSP3	0,5034	0,5056	0,5204	0,5148
SUZB5	0,5567	0,5561	0,5683	0,5632
TBLE3	0,407	0,4058	0,4218	0,429
TIMP3	0,4455	0,4499	0,4584	0,4618
UPGA3	0,4992	0,5072	0,5152	0,5205
USIM5	0,5491	0,5433	0,5567	0,5527
VALE3	0,4977	0,4916	0,5074	0,4986
VALE5	0,5	0,4934	0,5122	0,4994
VIVT4	0,3825	0,387	0,4042	0,3928
WEGE3	0,5303	0,5284	0,5409	0,5375

APÊNDICE D – Tabela das diferenças dos expoentes de Hurst dos ativos do Índice BOVESPA

Tal diferença é dada pela fórmula:

$$D_H = \frac{H_{alta} + H_{baixa}}{2} - \frac{H_{abertura} + H_{fechamento}}{2}. \quad (53)$$

São diferenças entre as médias dos expoentes de Hurst das séries de alta e baixa e das séries de abertura e fechamento para os mesmos dados da figura (28).

Tabela 3 – Resultado das diferenças calculadas para os ativos reais.

Ativos	Diferenças	Ativos	Diferenças
ABEV3	0,01215	ITSA4	0,01055
BBAS3	0,0104	ITUB4	0,00965
BBDC3	0,01145	JBSS3	0,01635
BBDC4	0,01	KROT3	0,01155
BRAP4	0,01035	LAME4	0,00865
BRFS3	0,01105	LREN3	0,01465
BRKM5	0,00815	MRFG3	0,00835
BRML3	0,01325	MRVE3	0,0096
BVMF3	0,01425	MULT3	0,01375
CCRO3	0,0149	NATU3	0,01285
CESP6	0,0107	PCAR4	0,0103
CIEL3	0,01295	PETR3	0,0095
CMIG4	0,01215	PETR4	0,01055
CPFE3	0,01775	QUAL3	0,01565
CPLE6	0,0131	RADL3	0,01765
CSAN3	0,0097	RENT3	0,01345
CSNA3	0,0085	SANB11	0,01685
CTIP3	0,01225	SBSP3	0,0131
CYRE3	0,0105	SUZB5	0,00935
ECOR3	0,01905	TBLE3	0,019
EMBR3	0,013	TIMP3	0,0124
ENBR3	0,02015	UPGA3	0,01465
EQTL3	0,0121	USIM5	0,0085
ESTC3	0,01025	VALE3	0,00835
FIBR3	0,0154	VALE5	0,0091
GGBR4	0,0105	VIVT4	0,01375
GOAU4	0,0129	WEGE3	0,00985
HYPE3	0,00935		

APÊNDICE E – Tabela de expoentes de Hurst do Caminhante Aleatório

Tabela 4 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Caminhante Aleatório.

CANDLE: TAMANHO 5					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4755	0,4755	0,4886	0,4886	0,0131
DESVIO PADRÃO	0,0275	0,0274	0,0275	0,0275	
CANDLE: TAMANHO 10					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4764	0,4763	0,4904	0,4905	0,0140
DESVIO PADRÃO	0,0241	0,0239	0,0241	0,0241	
CANDLE: TAMANHO 15					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4758	0,4758	0,4899	0,4901	0,0142
DESVIO PADRÃO	0,0282	0,0281	0,0283	0,0283	
CANDLE: TAMANHO 20					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4775	0,4775	0,4919	0,4919	0,0144
DESVIO PADRÃO	0,0280	0,0280	0,0281	0,0277	
CANDLE: TAMANHO 25					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4801	0,4802	0,4945	0,4947	0,0145
DESVIO PADRÃO	0,0245	0,0244	0,0245	0,0242	

APÊNDICE F – Tabela de expoentes de Hurst do Modelo - Candle de tamanho 5

Tabela 5 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 5).

CANDLE: TAMANHO 5					
Probabilidade 0,1					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4234	0,4234	0,4260	0,4251	0,002144
DESVIO PADRÃO	0,0406	0,0406	0,0406	0,0406	
Probabilidade 0,01					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4740	0,4740	0,4761	0,4759	0,001945
DESVIO PADRÃO	0,0256	0,0256	0,0255	0,0257	
Probabilidade 0,006					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,5028	0,5028	0,5047	0,5047	0,001914
DESVIO PADRÃO	0,0281	0,0281	0,0281	0,0281	
Probabilidade 0,005					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,5175	0,5175	0,5192	0,5195	0,001911
DESVIO PADRÃO	0,0288	0,0288	0,0287	0,0289	
Probabilidade 0,004					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,5345	0,5345	0,5364	0,5364	0,001900
DESVIO PADRÃO	0,0296	0,0296	0,0295	0,0296	
Probabilidade 0,002					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,5973	0,5973	0,5991	0,5993	0,001897
DESVIO PADRÃO	0,0242	0,0242	0,0239	0,0246	

*As probabilidades referidas acima dizem respeito à chegada de notícias imprevisíveis.

APÊNDICE G – Tabela de expoentes de Hurst do Modelo - Candle de tamanho 10

Tabela 6 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 10).

CANDLE: TAMANHO 10					
Probabilidade 0,1					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4122	0,4122	0,4205	0,4196	0,0078
DESVIO PADRÃO	0,0569	0,0569	0,0568	0,057	
Probabilidade 0,01					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4517	0,4517	0,4583	0,4588	0,0068
DESVIO PADRÃO	0,0282	0,0281	0,0283	0,0283	
Probabilidade 0,006					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4672	0,4672	0,4737	0,4741	0,0067
DESVIO PADRÃO	0,0307	0,0307	0,0301	0,0315	
Probabilidade 0,005					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4801	0,4801	0,4867	0,4867	0,0067
DESVIO PADRÃO	0,0287	0,0288	0,0282	0,0294	
Probabilidade 0,004					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,5044	0,5044	0,5106	0,5115	0,0066
DESVIO PADRÃO	0,0309	0,0309	0,0307	0,0313	
Probabilidade 0,002					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,5617	0,5617	0,5675	0,5691	0,0066
DESVIO PADRÃO	0,0242	0,0242	0,0239	0,0246	

As probabilidades referidas acima dizem respeito à chegada de notícias imprevisíveis.

APÊNDICE H – Tabela de expoentes de Hurst do Modelo - Candle de tamanho 15

Tabela 7 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 15).

CANDLE: TAMANHO 15					
Probabilidade 0,1					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4293	0,4293	0,4432	0,4423	0,0135
DESVIO PADRÃO	0,0611	0,0611	0,0612	0,0609	
Probabilidade 0,01					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4560	0,4560	0,4667	0,4676	0,0111
DESVIO PADRÃO	0,0334	0,0334	0,0333	0,0337	
Probabilidade 0,006					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4640	0,4640	0,4746	0,4751	0,0108
DESVIO PADRÃO	0,0290	0,0290	0,0287	0,0296	
Probabilidade 0,005					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4848	0,4849	0,4949	0,4961	0,0107
DESVIO PADRÃO	0,0275	0,0275	0,0268	0,0286	
Probabilidade 0,004					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4935	0,4887	0,5032	0,5048	0,0129
DESVIO PADRÃO	0,0306	0,0534	0,0298	0,0314	
Probabilidade 0,002					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,5955	0,5955	0,6024	0,6071	0,0093
DESVIO PADRÃO	0,0272	0,0273	0,0264	0,0285	

As probabilidades referidas acima dizem respeito à chegada de notícias imprevisíveis.

APÊNDICE I – Tabela de expoentes de Hurst do Modelo - Candle de tamanho 20

Tabela 8 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 20).

CANDLE: TAMANHO 20					
Probabilidade 0,1					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4296	0,4296	0,4482	0,4478	0,0184
DESVIO PADRÃO	0,0725	0,0726	0,0724	0,0727	
Probabilidade 0,01					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4605	0,4605	0,4741	0,4756	0,0144
DESVIO PADRÃO	0,0342	0,0342	0,0342	0,0344	
Probabilidade 0,006					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4701	0,4701	0,4833	0,4842	0,0137
DESVIO PADRÃO	0,0283	0,0283	0,0279	0,0292	
Probabilidade 0,005					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4695	0,4695	0,4829	0,4834	0,0134
DESVIO PADRÃO	0,0323	0,0323	0,0317	0,0332	
Probabilidade 0,004					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4824	0,4824	0,4953	0,4961	0,0133
DESVIO PADRÃO	0,0305	0,0305	0,0297	0,0317	
Probabilidade 0,002					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,5337	0,5337	0,5453	0,5480	0,0142
DESVIO PADRÃO	0,0308	0,0308	0,0302	0,0320	

As probabilidades referidas acima dizem respeito à chegada de notícias imprevisíveis.

APÊNDICE J – Tabela de expoentes de Hurst do Modelo - Candle de tamanho 25

Tabela 9 – Resultados dos expoentes de Hurst calculados para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 25).

CANDLE: TAMANHO 25					
Probabilidade 0,1					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4406	0,4406	0,4625	0,4625	0,0219
DESVIO PADRÃO	0,0674	0,0674	0,0669	0,0679	
Probabilidade 0,01					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4484	0,4484	0,4637	0,4646	0,0158
DESVIO PADRÃO	0,0348	0,0348	0,0345	0,0354	
Probabilidade 0,006					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4736	0,4736	0,4871	0,4892	0,0145
DESVIO PADRÃO	0,0313	0,0313	0,0311	0,0318	
Probabilidade 0,005					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4709	0,4709	0,4844	0,4855	0,0140
DESVIO PADRÃO	0,0323	0,0323	0,0317	0,0332	
Probabilidade 0,004					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,4904	0,4904	0,5026	0,5057	0,0138
DESVIO PADRÃO	0,0306	0,0305	0,0299	0,0314	
Probabilidade 0,002					
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa	Diferença
EXPOENTE	0,5164	0,5164	0,5285	0,5299	0,0129
DESVIO PADRÃO	0,0282	0,0282	0,0273	0,0299	

As probabilidades referidas acima dizem respeito à chegada de notícias imprevisíveis.

APÊNDICE K – Tabela de curtoses dos ativos do Índice BOVESPA

*** Mesma amostra utilizada para cálculo dos expoentes de Hurst.**

O resultado das curtoses dos ativos reais também foi dividido em duas tabelas, primeira parte e segunda parte, por se tratar de um número muito extenso de ativos.

Tabela 10 – Primeira parte do resultado das curtoses calculadas para os ativos reais.

Primeira parte				
Ativos	Preços de abertura	Preços de fechamento	Preços de alta	Preços de baixa
ABEV3	12,7649	7,6283	10,431	16,5826
BBAS3	9,7002	6,7996	7,8411	8,9895
BBDC3	6,2873	5,6515	7,0326	7,62
BBDC4	10,4058	6,3891	7,2235	7,7819
BRAP4	13,44	6,0336	11,6314	14,6888
BRFS3	6,473	5,8412	7,6076	7,765
BRKM5	4,5361	6,2777	6,2274	6,5186
BRML3	14,7581	10,7383	12,5098	17,7149
BVMF3	17,7149	9,4662	11,7839	13,5936
CCRO3	9,3353	14,3775	9,9283	26,313
CESP6	13,3463	20,4486	19,2579	23,873
CIEL3	5,1683	6,8828	5,8613	5,9841
CMIG4	8,1254	8,3963	9,8982	9,8681
CPFE3	5,5297	5,4878	5,9187	7,5425
CPLE6	5,3956	5,2854	6,1784	6,9023
CSAN3	6,5582	6,7282	7,4616	8,0231
CSNA3	12,2547	12,1611	13,3783	15,3742
CTIP3	6,0701	5,5097	7,2705	5,9235
CYRE3	15,2927	8,6221	12,3	13,1561
ECOR3	6,9626	4,6229	6,6279	6,0628
EMBR3	9,3914	7,2456	9,5743	8,8387
ENBR3	4,9908	4,9605	5,2141	6,7043
EQTL3	11,4269	11,2639	16,6356	18,0169
ESTC3	9,403	11,7995	10,8186	10,9511
FIBR3	4,7602	3,8923	4,2825	6,4728
GGBR4	6,2673	5,4299	6,341	7,2809
GOAU4	8,4566	7,0807	7,3987	8,3913
HYPE3	6,4258	7,3612	8,0674	7,5582

APÊNDICE L – Tabela de curtoses dos ativos do Índice BOVESPA

Tabela 11 – Segunda parte do resultado das curtoses calculadas para os ativos reais.

Segunda parte				
Ativos	Preços de abertura	Preços de fechamento	Preços de alta	Preços de baixa
ITSA4	11,9537	7,6438	10,3405	10,5629
ITUB4	12,2171	6,8798	7,8478	10,1891
JBSS3	14,1773	7,4177	17,3678	10,5037
KROT3	7,9787	8,989	7,9889	12,2599
LAME4	7,5581	8,2194	7,4742	8,3728
LREN3	324,5164	326,5316	403,9925	373,8124
MRFG3	7,1458	10,1741	8,6717	8,6717
MRVE3	8,4295	9,1356	9,7654	8,5718
MULT3	12,8602	15,6053	12,824	10,726
NATU3	4,5224	5,0531	5,7211	5,5092
PCAR4	4,7511	5,2722	6,7255	5,8468
PETR3	8,5067	6,0446	7,3616	7,4001
PETR4	12,8345	6,3379	8,7815	8,654
QUAL3	6,8061	11,6392	5,5556	22,5447
RADL3	52,2719	58,8137	66,3492	63,9781
RENT3	16,6241	11,6804	20,2752	14,1778
SANB11	7,7398	6,9014	9,8809	7,8745
SBSP3	6,2528	5,6282	7,1028	8,1961
SUZB5	8,4109	5,2139	6,1487	6,0213
TBLE3	13,2439	11,825	19,0443	14,8394
TIMP3	7,3485	8,55	10,2726	10,9952
UPGA3	11,5118	16,0992	13,3012	11,8415
USIM5	17,1417	7,0565	10,4891	9,4842
VALE3	7,1876	6,9587	7,2321	7,7153
VALE5	7,7934	5,9992	6,6358	7,8564
VIVT4	6,0189	8,0205	7,0813	11,4243
WEGE3	34,1863	32,7148	40,6625	34,8386

APÊNDICE M – Tabela de Curtoses do Caminhante Aleatório

Tabela 12 – Resultados das curtoses calculadas para o Caminhante Aleatório.

CANDLE: TAMANHO 5				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	2,7556	2,7602	3,0195	3,0087
CANDLE: TAMANHO 10				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	2,8829	2,8845	3,2212	3,2235
CANDLE: TAMANHO 15				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	2,9213	2,9251	3,2945	3,2896
CANDLE: TAMANHO 20				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	2,9363	2,9305	3,3205	3,3181
CANDLE: TAMANHO 25				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	2,9498	2,948	3,346	3,3355

APÊNDICE N – Tabela de Curtoses do Modelo - Candle de tamanho 5

Tabela 13 – Resultados das curtoses calculadas para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 5).

Probabilidade 0,1				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	3,3764	3,3764	3,4198	3,42
Probabilidade 0,01				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	7,8631	7,8628	7,9456	7,9422
Probabilidade 0,006				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	11,0059	11,0051	11,1055	11,1104
Probabilidade 0,005				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	12,7763	12,7767	12,8925	12,8902
Probabilidade 0,004				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	15,3575	15,3574	15,4922	15,4924
Probabilidade 0,002				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	28,2839	28,2826	28,514	28,5172

*As probabilidades acima dizem respeito à chegada de novas notícias imprevisíveis.

APÊNDICE O – Tabela de Curtoses do Modelo - Candle de tamanho 10

Tabela 14 – Resultados das curtoses calculadas para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 10).

Probabilidade 0,1				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	3,3776	3,3773	3,6791	3,6792
Probabilidade 0,01				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	7,6612	7,661	8,2156	8,2221
Probabilidade 0,006				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	10,8531	10,8569	11,6159	11,6176
Probabilidade 0,005				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	12,7248	12,7184	13,5862	13,6111
Probabilidade 0,004				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	14,8492	14,8525	15,8689	15,8423
Probabilidade 0,002				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	26,9211	26,9255	28,6625	28,7058

*As probabilidades acima dizem respeito à chegada de novas notícias imprevisíveis.

APÊNDICE P – Tabela de Curtoses do Modelo - Candle de tamanho 15

Tabela 15 – Resultados das curtoses calculadas para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 15).

Probabilidade 0,1				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	3,3721	3,3747	4,0644	4,0647
Probabilidade 0,01				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	7,67	7,6763	9,0499	9,0612
Probabilidade 0,006				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	10,6258	10,6217	12,4915	12,536
Probabilidade 0,005				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	12,4799	12,4848	14,6985	14,6825
Probabilidade 0,004				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	14,7567	14,7417	17,3743	17,33
Probabilidade 0,002				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	26,6955	26,6798	31,2542	31,3685

*As probabilidades acima dizem respeito à chegada de novas notícias imprevisíveis.

APÊNDICE Q – Tabela de Curtoses do Modelo - Candle de tamanho 20

Tabela 16 – Resultados das curtoses calculadas para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 20).

Probabilidade 0,1				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	3,3662	3,3663	4,3742	4,3641
Probabilidade 0,01				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	7,4857	7,483	9,5571	9,5811
Probabilidade 0,006				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	10,4079	10,4072	13,2926	13,2842
Probabilidade 0,005				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	12,028	12,0273	15,2671	15,3075
Probabilidade 0,004				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	14,3411	14,3305	18,3075	18,393
Probabilidade 0,002				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	25,6622	25,6263	32,7695	32,8216

*As probabilidades acima dizem respeito à chegada de novas notícias imprevisíveis.

APÊNDICE R – Tabela de Curtoses do Modelo - Candle de tamanho 25

Tabela 17 – Resultados das curtoses calculadas para o Modelo (CANDLE: TAMANHO 25).

Probabilidade 0,1				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	3,3366	3,3368	4,4588	4,454
Probabilidade 0,01				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	7,2663	7,2737	9,6111	9,6853
Probabilidade 0,006				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	10,0264	10,0385	13,4238	13,4627
Probabilidade 0,005				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	11,7253	11,7095	15,6134	15,8547
Probabilidade 0,004				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	13,8716	13,8719	18,4088	18,5859
Probabilidade 0,002				
SÉRIE	Abertura	Fechamento	Alta	Baixa
CURTOSE	24,8588	24,8246	33,6145	33,974

*As probabilidades acima dizem respeito à chegada de novas notícias imprevisíveis.