CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

ANÁLISE ESTATÍSTICA DA RELEVÂNCIA DE DIFERENÇAS ENTRE AS COMPONENTES DO CANDLESTICK EM ECONOFÍSICA

CARLA LILIANE GUEDES FONSECA

Orientador: Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
CEFET-MG

Coorientador: Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso
CEFET-MG

BELO HORIZONTE
AGOSTO DE 2022

CARLA LILIANE GUEDES FONSECA

ANÁLISE ESTATÍSTICA DA RELEVÂNCIA DE DIFERENÇAS ENTRE AS COMPONENTES DO CANDLESTICK EM ECONOFÍSICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

BELO HORIZONTE
AGOSTO DE 2022

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

"ANÁLISE ESTATÍSTICA DA RELEVÂNCIA DE DIFERENÇAS ENTRE AS COMPONENTES DO CANDLESTICK EM ECONOFÍSICA".

Tese de Doutorado apresentada por **Carla Liliane Guedes Fonseca**, em 12 de agosto de 2022, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso (Coorientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira
Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Luis Alberto D'Afonseca
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Alibens Atman Picardi Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Adriano César Machado Pereira
Universidade Federal de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Profª. Drª. Elizabeth Fialho Wanner
Presidenta do Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

Dedico este trabalho aos meus amados pais. Em especial a Clélia Marina Tameirão Guedes que sempre esteve ao meu lado e permanece presente em meu coração e em minhas lembranças.

Agradecimentos

A Deus por todas as bênçãos a mim concedidas e pela condução dos meus passos.

Aos meus pais pelo amor e suporte de uma vida inteira. Pelo exemplo de família e honradez. Pelas inúmeras oportunidades. Por todos os ensinamentos que me transmitiram e posso passar adiante.

Ao meu marido e filho pelo abrigo de sempre. Pela cumplicidade, tolerância e torcida.

Ao Professor Arthur pelo permanente acompanhamento e valorosa instrução. Pelo grande incentivo nos momentos de insegurança.

Ao Professor Rodrigo pelo apoio e importante contribuição nesse estudo.

Ao CEFET pela ajuda financeira e toda estrutura necessária.

“A cultura está acima da diferença da condição social.” (Confúcio)

Resumo

Cotações de preços de ações são frequentemente armazenadas em séries de *candlesticks*, que apresentam quatro instâncias relacionadas às negociações que ocorreram em um dado intervalo de tempo: preços de abertura, máximo, mínimo e fechamento. Contudo, o trabalho de grande parte dos pesquisadores em Econofísica limita-se aos dados de abertura e fechamento, negligenciando as duas outras componentes. Nesta contribuição, fatos estilizados (*stylized facts*) são computados para todas as séries do candlestick ('candelabro' em inglês), e testes estatísticos são realizados para revelar diferenças significativas. Caudas de distribuições de retornos, comportamento multifractal e expoentes de Hurst são investigados, assim como acurácias de um modelo de previsão baseado em equações diferenciais. Todas as análises são aplicadas separadamente a ativos que compõem dois índices financeiros, um pertencente a um mercado desenvolvido (o índice americano *Dow Jones Industrial Average* - DJIA) e outro de um mercado emergente (o índice brasileiro Ibovespa). O presente estudo compreende três diferentes experimentos. No primeiro, buscamos conhecer as variações de cada estatística quando mudamos a componente do candlestick usando dados brutos, ou seja, o conjunto de estatísticas sem tratamento. A partir de tais resultados, observou-se que as diferenças devidas à variação do ativo em geral mascaram as que buscamos explicitar, aquelas referentes à variação da componente do candlestick. Daí a necessidade de atenuar as variações existentes entre os ativos, o que foi realizado na segunda abordagem por meio de um processo de tratamento dos dados. Os resultados decorrentes dos dados tratados foram comparados aos primeiros e mostraram-se, então, mais expressivos: algumas ferramentas revelaram diferenças entre as componentes do candlestick, ao mesmo tempo em que indicaram semelhanças entre resultados concernentes a máximo e mínimo, bem como a abertura e fechamento. Assim, no terceiro experimento, os dados de abertura e fechamento foram agrupados em um conjunto, e os de máximo e mínimo em outro, para novos testes. Essa nova forma de junção dos dados também é justificada pela natureza dos mesmos. Máximo e mínimo assemelham-se quanto à origem, porque decorrem da comparação de todos os preços pelos quais o ativo passou durante um determinado intervalo de tempo, enquanto abertura e fechamento têm em comum a questão de serem definidos por apenas uma instância de negociação, a primeira, para abertura, e a última, para fechamento. Aqui, para todos os fatos estilizados investigados, explicitamos diferenças estatisticamente relevantes entre resultados provenientes de dados de máximo e mínimo, em comparação com aqueles oriundos de séries de abertura e fechamento. Tais diferenças não mudam qualitativamente os fatos estilizados analisados, mas sua observação pode ser útil na construção de estratégias de operação em mercado financeiro.

Palavras-chave: Expoente de Hurst, multifractalidade, distribuição de retornos, modelo de previsão, candestick, coeficiente de correlação, mercado financeiro.

Abstract

Stock price quotes are often stored in candlestick series, which feature four instances related to trading that occur within a given time frame: open, maximum, minimum and close prices. However, the work of most researchers in econophysics is limited to opening and closing data, neglecting the other two components. In this contribution, stylized facts are computed for all candlestick series, and statistical tests are performed to reveal significant differences. Return distribution tails, multifractal behavior and Hurst exponents are investigated, as well as the accuracy of a forecast model based on differential equations. All analyzes are applied separately to assets that make up two indices, one belonging to a developed market (the american Dow Jones Industrial Average index) and another from an emerging market (the Brazilian Ibovespa index). The present study comprises three different experiments. In the first, we seek to know the variations of each statistic when we change the candlestick component using raw data, or i.e. the set of untreated statistics. Based on these results, it was observed that the differences due to the variation of the asset in general mask those that we seek to explain, those related to the variation of the candlestick component. Hence the need to mitigate the variations between assets, which was accomplished in the second approach through a process of data processing. The results resulting from the data treated were compared to the first and then showed more eloquent: some tools revealed differences between the candlestick components, while in which they indicated similarities between results concerning the maximum and minimum, as well as the opening and closing. Thus, in the third experiment, the opening and closing data were grouped into one set, and the maximum and minimum data in another, for new tests. This new form of data joining is also justified by the nature of the data. Maximum and minimum are similar in terms of origin, because they result from the comparison of all prices at which the asset has passed during a certain time interval, while opening and closing have in common the question of being defined by only one trading instance, the first, for opening, and the last, for closing. Here, for all stylized facts investigated, we explained statistically relevant differences between results from maximum and minimum data, compared to those from opening and closing series. Such differences do not qualitatively change the stylized facts analyzed, but their observation can be useful in the construction of operations strategies in the financial market.

Keywords: Hurst exponent, multifractality, return distribution, forecast model, candlestick chart, correlation coefficient, financial market.

Lista de Figuras

Figura 1 – Exemplo de um candlestick com os quatro preços definidos: abertura, máximo, mínimo e fechamento. 8
Figura 2 – Exemplos de candles de alta e de baixa. 9
Figura 3 – Curvas com diferentes expoentes de Hurst. 10
Figura 4 – Distribuição normal padrão (μ é a média e σ o desvio padrão). 11
Figura 5 – Distribuição acumulada complementar da normal padrão. 11
Figura 6 – A curva azul corresponde a distribuição gaussiana. Os pontos pretos representam a distribuição inversa acumulada dos retornos da série de fechamento da PETR4 do Ibovespa. A reta vermelha mostra um ajuste linear feito numa região da cauda. 12
Figura 7 – Exemplo de estudo do caráter multifractal de uma série de preços. Os dados utilizados são preços de fechamento de candles de 5 minutos de PETR4, correspondentes ao período de 02/01/2017 a 31/08/2017. (a) Funções de flutuação $Fq(s)$ para diferentes valores de q (s correspondente ao número de pontos no intervalo considerado no cálculo de $Fq(s)$). Foram considerados valores de q variando de -3 a 3, com passo $0{,}2$. (b) Expoentes de Hurst generalizados $h(q)$ calculados a partir dos coeficientes angulares referentes aos ajustes lineares realizados sobre as curvas da figura (a). (c) Espectro de singularidade resultante dos expoentes de Hurst generalizados calculados. 20
Figura 8 – Modelo de histograma criado. 22
Figura 9 – Exemplo de um ajuste linear para obter o coeficiente de decaimento de lei de potência de um ativo do Ibovespa. Foram usados preços de fechamento de candles de 5 minutos de PETR4, correspondentes ao período de 2/01/2017 a 31/08/2017 (14.900 pontos). 24
Figura 10 – Exemplo de um boxplot e suas estatísticas. 26
Figura 11 – Ilustração para grau de correlação. 29
Figura 12 – Diferenças entre expoentes médios e suas respectivas médias gerais (Ibovespa) (vide Equações 44 e 45). 34
Figura 13 – Boxplot das acurácias do modelo do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 35
Figura 14 – Gráfico de dispersão das AM de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 36
Figura 15 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às AM de 57 ativos do índice Ibovespa. 37

Figura 16 – Intervalos de confiança relativos às acurácias do modelo para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Ibovespa). 38
Figura 17 – Boxplot dos coeficientes de decaimento do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 39
Figura 18 – Gráfico de dispersão dos CD do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 39
Figura 19 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos CD de 57 ativos do índice Ibovespa. 40
Figura 20 – Intervalos de confiança relativos aos coeficientes de decaimento para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Ibovespa). 41
Figura 21 – Boxplot das larguras do espectro de singularidade do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 42
Figura 22 – Gráfico de dispersão das LES do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 42
Figura 23 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às LES de 57 ativos do índice Ibovespa. 43
Figura 24 – Intervalos de confiança relativos às larguras do espectro de singularidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Ibovespa). 44
Figura 25 – Boxplot dos expoentes de Hurst com $q = 2$ do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 45
Figura 26 – Gráfico de dispersão dos EH(2) do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 45
Figura 27 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(2) de 57 ativos do índice Ibovespa. 46
Figura 28 – Intervalos de confiança relativos a EH(2) para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Ibovespa). 47
Figura 29 – Boxplot dos expoentes de Hurst com $q = -3$ do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 48
Figura 30 – Gráfico de dispersão dos EH(-3) do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 48
Figura 31 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(-3) de 57 ativos do índice Ibovespa. 49
Figura 32 – Intervalos de confiança relativos a EH(-3) para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Ibovespa). 50
Figura 33 – Diferenças entre expoentes médios e suas respectivas médias gerais (Dow Jones) (vide Equações 44 e 45). 51
Figura 34 – Boxplot das acurácias do modelo do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 53

Figura 35 – Gráfico de dispersão das AM do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 54
Figura 36 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às AM de 29 ativos do índice Dow Jones. 54
Figura 37 – Intervalos de confiança relativos às AM para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Dow Jones). 55
Figura 38 – Boxplot dos coeficientes de decaimento do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 56
Figura 39 – Gráfico de dispersão dos CD do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 56
Figura 40 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos CD de 29 ativos do índice Dow Jones. 57
Figura 41 – Intervalos de confiança relativos aos CD para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Dow Jones). 58
Figura 42 – Boxplot das larguras do espectro de singularidade do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 58
Figura 43 – Gráfico de dispersão das LES do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 59
Figura 44 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às LES de 29 ativos do índice Dow Jones. 59
Figura 45 – Intervalos de confiança relativos às LES para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Dow Jones). 60
Figura 46 – Boxplot dos expoentes de Hurst com $q = 2$ do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 61
Figura 47 – Gráfico de dispersão dos EH(2) do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 61
Figura 48 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(2) de 29 ativos do índice Dow Jones. 62
Figura 49 – Intervalos de confiança relativos a EH(2) para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Dow Jones). 63
Figura 50 – Boxplot dos expoentes de Hurst com $q = -3$ do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 64
Figura 51 – Gráfico de dispersão dos EH(-3) do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento. 64
Figura 52 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(-3) de 29 ativos do índice Dow Jones. 65
Figura 53 – Intervalos de confiança relativos a EH(-3) para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Dow Jones). 66

Figura 54 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson de AM X CD, índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação. 67
Figura 55 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson de AM X LES, índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação. 68
Figura 56 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson de LES X CD, índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação. 69
Figura 57 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson de AM X EH(2), índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação. 70
Figura 58 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson de AM X EH(-3), índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação. . . . 71
Figura 59 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson dos dados agregados, índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação. . . . 73
Figura 60 – Boxplot das acurácias do modelo para o índice Ibovespa. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46. 76
Figura 61 – Gráfico de dispersão das AM de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46. . . . 76
Figura 62 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às AM de 57 ativos do índice Ibovespa. Neste segundo experimento os dados foram tratados. 77
Figura 63 – Intervalos de confiança das acurácias do modelo, relativos ao índice Ibovespa, para os dados tratados. 78
Figura 64 – Boxplot dos coeficientes de decaimento para o índice Ibovespa. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46. 79
Figura 65 – Gráfico de dispersão dos CD de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46. . . . 79
Figura 66 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos CD de 57 ativos do índice Ibovespa. Neste segundo experimento os dados foram tratados. 80
Figura 67 – Intervalos de confiança dos coeficientes de decaimento, relativos ao índice Ibovespa, para os dados tratados. 81
Figura 68 – Boxplot das larguras do espectro de singularidade para o índice Ibovespa. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46. . . 81
Figura 69 – Gráfico de dispersão das LES de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46. 82
Figura 70 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às LES de 57 ativos do índice Ibovespa. Neste segundo experimento os dados foram tratados. 82
Figura 71 – Intervalos de confiança das larguras do espectro de singularidade, relativos ao índice Ibovespa, para os dados tratados. 83

Figura 72 – Boxplot dos expoentes canônicos para o índice Ibovespa. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46. 84
Figura 73 – Gráfico de dispersão dos EH(2) de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46. 84
Figura 74 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(2) de 57 ativos do índice Ibovespa. Neste segundo experimento os dados foram tratados. 85
Figura 75 – Intervalos de confiança dos expoentes de Hurst canônicos ($q = 2$), relativos ao índice Ibovespa para os dados tratados. 86
Figura 76 – Boxplot dos expoentes generalizados para o índice Ibovespa. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46. 86
Figura 77 – Gráfico de dispersão dos EH(-3) de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46. 87
Figura 78 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(-3) de 57 ativos do índice Ibovespa. Neste segundo experimento os dados foram tratados. 87
Figura 79 – Intervalos de confiança dos expoentes de Hurst generalizados ($q = -3$), relativos ao índice Ibovespa, para dados tratados. 88
Figura 80 – Boxplot das acurácias do modelo para o índice Dow Jones. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46. 89
Figura 81 – Gráfico de dispersão das AM de 29 ações do índice DJIA para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46. 90
Figura 82 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às AM de 29 ativos do índice DJIA. Neste segundo experimento os dados foram tratados. 90
Figura 83 – Intervalos de confiança das acurácias do modelo, relativos ao índice Dow Jones, para os dados tratados. 91
Figura 84 – Boxplot dos coeficientes de decaimento para o índice Dow Jones. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46. 92
Figura 85 – Gráfico de dispersão dos CD de 29 ações do índice DJIA para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46. 92
Figura 86 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos CD de 29 ativos do índice DJIA. Neste segundo experimento os dados foram tratados. 93
Figura 87 – Intervalos de confiança dos coeficientes de decaimento, relativos ao índice Dow Jones, para os dados tratados. 94
Figura 88 – Boxplot das larguras do espectro de singularidade, para o índice Dow Jones. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46. 94

Figura 89 – Gráficos de dispersão das LES de 29 ações do índice DJIA para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46. 95
Figura 90 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às LES de 29 ativos do índice DJIA. Neste segundo experimento os dados foram tratados. 95
Figura 91 – Intervalos de confiança das larguras do espectro de singularidade, relativos ao índice Dow Jones, para os dados tratados. 96
Figura 92 – Boxplot dos expoentes canônicos, para o índice Dow Jones. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46. 97
Figura 93 – Gráficos de dispersão dos EH(2) de 29 ações do índice DJIA para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46. . . . 97
Figura 94 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(2) de 29 ativos do índice DJIA. Neste segundo experimento os dados foram tratados. 98
Figura 95 – Intervalos de confiança dos expoentes de Hurst canônicos, relativos ao índice Dow Jones, para os dados tratados. 99
Figura 96 – Boxplot dos expoentes generalizados, para o índice Dow Jones. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46. 99
Figura 97 – Gráficos de dispersão dos EH(-3) de 29 ações do índice DJIA para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46. 100
Figura 98 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(-3) de 29 ativos do índice DJIA. Neste segundo experimento os dados foram tratados. 100
Figura 99 – Intervalos de confiança dos expoentes de Hurst generalizados, relativos ao índice Dow Jones, para os dados tratados. 101
Figura 100–Boxplots concernentes às acurácias dos índices Ibovespa e Dow Jones para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo. 103
Figura 101–Gráficos de dispersão dos grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo para os índices Ibovespa e DJIA, relativos às acurácias do modelo (AM). 104
Figura 102–Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes às AM do índice Ibovespa (114 ativos). 104
Figura 103–Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes às AM do índice DJIA (58 ativos). 104
Figura 104–Intervalos de confiança relativos às acurácias para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo dos índices Ibovespa e Dow Jones. . 105
Figura 105–Boxplots concernentes aos coeficientes de decaimento dos índices Ibovespa e Dow Jones para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo.105

Figura 106–Gráficos de dispersão dos grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo para os índices Ibovespa e DJIA, relativos aos coeficientes de decaimento do modelo (CD). 106
Figura 107–Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos CD do índice Ibovespa (114 ativos). 106
Figura 108–Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos CD do índice DJIA (58 ativos). 106
Figura 109–Intervalos de confiança relativos aos coeficientes de decaimento para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo dos índices Ibovespa e Dow Jones. 107
Figura 110–Boxplots concernentes às larguras do espectro de singularidade dos índices Ibovespa e Dow Jones para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo. 107
Figura 111–Gráficos de dispersão dos grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo para os índices Ibovespa e DJIA, relativos às larguras do espectro de singularidade (LES). 108
Figura 112–Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes às LES do índice Ibovespa (114 ativos). 108
Figura 113–Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes às LES do índice DJIA (58 ativos). 108
Figura 114–Intervalos de confiança relativos às larguras do espectro de singularidade para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo dos índices Ibovespa e Dow Jones. 109
Figura 115–Boxplots concernentes aos expoentes de Hurst canônicos (EH(2)) dos índices Ibovespa e Dow Jones para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo. 109
Figura 116–Gráficos de dispersão dos grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo para os índices Ibovespa e DJIA, relativos aos expoentes canônicos (EH(2)).110
Figura 117–Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos EH(2) do índice Ibovespa (114 ativos). 110
Figura 118–Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos EH(2) do índice DJIA (58 ativos). 110
Figura 119–Intervalos de confiança relativos aos expoentes de Hurst (EH(2)) para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo dos índices Ibovespa e Dow Jones. 111
Figura 120–Boxplots concernentes aos expoentes de Hurst generalizados (EH(-3)) dos índices Ibovespa e Dow Jones para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo. 111

Figura 121–Gráficos de dispersão dos grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo para os índices Ibovespa e DJIA, relativos aos expoentes generalizados (EH(-3)). 112
Figura 122–Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos EH(-3) do índice Ibovespa (114 ativos). 112
Figura 123–Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos EH(-3) do índice DJIA (58 ativos). 112
Figura 124–Intervalos de confiança relativos aos expoentes de Hurst generalizados (EH(-3)) para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo dos índices Ibovespa e Dow Jones. 113
Figura 125–Variação dos conjuntos de abertura/fechamento (linhas sólidas) e máximo/mínimo (linhas pontilhadas) de $h(q)$ para q no intervalo $[-3,3]$, para as ações do Ibovespa e DJIA. Para cada conjunto, a curva inferior (superior) corresponde ao primeiro (terceiro) quartil, e a curva entre eles exibe a mediana. 113

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Médias e desvios-padrões dos expoentes de Hurst generalizados de 57 ações do índice Ibovespa. 33
Tabela 2 – Médias e desvios-padrões das acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), larguras do espectro de singuralidade (LES) e expoentes de Hurst (EH) com $q = 2$ e $q = -3$, das quatro séries de 57 ações do índice Ibovespa. 34
Tabela 3 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (AM do Ibovespa). . . 37
Tabela 4 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (CD do Ibovespa). . . 40
Tabela 5 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (LES do Ibovespa). . . 43
Tabela 6 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (EH(2) do Ibovespa). . 46
Tabela 7 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (EH(-3) do Ibovespa). 49
Tabela 8 – Médias e desvios-padrões dos expoentes generalizados de 29 ações do índice Dow Jones. 52
Tabela 9 – Médias e desvios-padrões das acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), larguras do espectro de singularidade (LES) e expoentes de Hurst (EH) com $q = 2$ e $q = -3$ das quatro séries de 29 ações do índice Dow Jones. 53
Tabela 10 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (AM do Dow Jones). . 55
Tabela 11 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (CD do Dow Jones). . 57
Tabela 12 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (LES do Dow Jones). 60
Tabela 13 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (EH(2) do Dow Jones). 62
Tabela 14 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (EH(-3) do Dow Jones) 65
Tabela 15 – CP Ibovespa - AM X CD 67
Tabela 16 – CP Dow Jones - AM X CD 67
Tabela 17 – CP Ibovespa - AM X LES 68
Tabela 18 – CP Dow Jones - AM X LES 68
Tabela 19 – CP Ibovespa - LES X CD 69
Tabela 20 – CP Dow Jones - LES X CD 69
Tabela 21 – CP Ibovespa - AM X EH(2) 70
Tabela 22 – CP Dow Jones - AM X EH(2) 70
Tabela 23 – CP Ibovespa - AM X EH(-3) 71
Tabela 24 – CP Dow Jones - AM X EH(-3) 71
Tabela 25 – CP Ibovespa - AGREGADOS 72
Tabela 26 – CP Dow Jones - AGREGADOS 72

Tabela 27 – Médias e desvios-padrões referentes às acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), larguras do espectro de singuralidade (LES) e expoentes de Hurst (EH) com $q = 2$ (canônicos) e $q = -3$ (generalizados) das quatro séries de 57 ações do índice Ibovespa, computados de acordo com a definição de $\Delta\Phi(s,c)$. 75
Tabela 28 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - AM Ibovespa (exp.II) . . 77
Tabela 29 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - CD Ibovespa (exp.II) . . 80
Tabela 30 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - LES Ibovespa (exp.II) . 83
Tabela 31 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - EH(2) Ibovespa (exp.II) 85
Tabela 32 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - EH(-3) Ibovespa (exp.II) 88
Tabela 33 – Médias e desvios-padrões das acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), larguras do espectro de singuralidade (LES) e expoentes de Hurst (EH) com $q = 2$ (canônicos) e $q = -3$ (generalizados) das quatro séries de 29 ações do índice DJIA, extraídas a partir dos novos cálculos com a média. 89
Tabela 34 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - AM DJIA (exp.II) 91
Tabela 35 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - CD DJIA (exp.II) 93
Tabela 36 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - LES DJIA (exp.II) 96
Tabela 37 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - EH(2) DJIA (exp.II) . . . 98
Tabela 38 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - EH(-3) DJIA (exp.II) . . 101
Tabela 39 – Médias e desvios-padrões das acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), larguras do espectro de singuralidade (LES) e expoentes de Hurst (EH) com $q = 2$ (canônicos) e $q = -3$ (generalizados) das séries agregadas em dois conjuntos: abertura/fechamento e máximo/mínimo, dos índices Ibovespa e DJIA. 102

Lista de Abreviaturas e Siglas

HME	Hipótese de Mercado Eficiente
HMA	Hipótese de Mercado Adaptativo
DFA	Detrended Fluctuation Analysis
MF-DFA	Multfractal Detrended Fluctuation Analysis
EH	Expoente de Hurst
EHG	Expoente de Hurst Generalizado
AM	Acurácia do Modelo
CD	Coeficiente de Decaimento
LES	Largura do Espectro de Singularidade
CP	Coeficiente de Pearson
Q-Q	Quantis da distribuição empírica versus Quantis da distribuição teórica

Sumário

1 – Introdução **1**
1.1 Justificativa 2
1.2 Motivação 2
1.3 Organização do trabalho 2

2 – Trabalhos relacionados **4**

3 – Fundamentação teórica **7**
3.1 Hipótese de Mercado Eficiente 7
3.2 Candlesticks 8
3.3 Expoente de Hurst 9
3.4 Distribuição Normal 10
3.5 Caudas Pesadas 12

4 – Modelo de previsão de tendência **13**
4.1 Acurácia do modelo de previsão 16

5 – Expoente de Hurst generalizado - Largura do espectro de singularidade **18**

6 – Coeficiente de decaimento das caudas das distribuições **22**

7 – Testes estatísticos **25**
7.1 Boxplot 25
7.2 Teste ANOVA 27
7.3 Teste Tukey 28
7.4 Teste Kruskal-Wallis 28
7.5 Coeficiente de Pearson 28

8 – Metodologia **30**
8.1 Dados empíricos 30
8.2 Experimentos utilizados na comparação dos resultados referentes a abertura, máximo, mínimo e fechamento 30

9 – Análise e discussão dos resultados - Experimento I **32**
9.1 Índice Ibovespa 32
9.1.1 Análise estatística dos resultados 35
9.1.1.1 Acurácias do modelo (AM) 35

9.1.1.2 Coeficientes de decaimento (CD) . . . 38
9.1.1.3 Larguras do espectro de singularidade (LES) . . . 41
9.1.1.4 Expoentes de Hurst canônicos (EH(2)) . . . 44
9.1.1.5 Expoentes de Hurst generalizados (EH(−3)) . . . 47
9.2 Índice DJIA . . . 50
9.2.1 Análise estatística dos resultados . . . 52
9.2.1.1 Acurácias do modelo (AM) . . . 53
9.2.1.2 Coeficientes de decaimento (CD) . . . 55
9.2.1.3 Larguras do espectro de singularidade (LES) . . . 58
9.2.1.4 Expoentes de Hurst canônicos (EH(2)) . . . 60
9.2.1.5 Expoentes de Hurst generalizados (EH(−3)) . . . 63
9.3 Análise de correlação linear: índices Ibovespa e DJIA . . . 66
9.3.1 Análise por componente . . . 66
9.3.1.1 Acurácias do modelo X Coeficientes de decaimento . . . 66
9.3.1.2 Acurácias do modelo X Larguras do espectro de singularidade 68
9.3.1.3 Larguras do espectro de singularidade X Coeficientes de decaimento . . . 68
9.3.1.4 Acurácias do modelo X Expoentes de Hurst canônicos . . . 70
9.3.1.5 Acurácias do modelo X Expoentes de Hurst generalizados 71
9.3.2 Análise para dados agregados . . . 72

10–Análise e discussão dos resultados - Experimento II . . . 74
10.1 Índice Ibovespa . . . 74
10.1.1 Análise estatística dos resultados . . . 75
10.1.1.1 Acurácias do modelo (AM) . . . 75
10.1.1.2 Coeficientes de decaimento (CD) . . . 78
10.1.1.3 Larguras do espectro de singularidade (LES) . . . 81
10.1.1.4 Expoentes de Hurst canônicos (EH(2)) . . . 83
10.1.1.5 Expoentes de Hurst generalizados (EH(−3)) . . . 86
10.2 Índice DJIA . . . 88
10.2.1 Análise estatística dos resultados . . . 89
10.2.1.1 Acurácias do modelo (AM) . . . 89
10.2.1.2 Coeficientes de decaimento (CD) . . . 91
10.2.1.3 Larguras do espectro de singularidade (LES) . . . 94
10.2.1.4 Expoentes de Hurst canônicos (EH(2)) . . . 96
10.2.1.5 Expoentes de Hurst generalizados (EH(−3)) . . . 99

11–Análise e discussão dos resultados - Experimento III . . . 102
11.1 Índice Ibovespa x Índice DJIA . . . 102
11.1.1 Análise estatística dos resultados . . . 103

11.1.1.1 Acurácias do modelo (AM) 103
11.1.1.2 Coeficientes de decaimento (CD) 105
11.1.1.3 Larguras do espectro de singularidade (LES) 107
11.1.1.4 Expoentes de Hurst canônicos (EH(2)) 109
11.1.1.5 Expoentes de Hurst generalizados (EH(-3)) 111

12–Considerações finais 114

Referências 118

Apêndices 121

APÊNDICE A – Os 57 ativos analisados do índice Ibovespa 122

APÊNDICE B – Os 29 ativos analisados do índice Dow Jones 125

1 Introdução

O mercado financeiro continua sendo um tema atraente para muitos pesquisadores. Por ser um sistema complexo, de descrição desafiadora, envolve muitos fatores que resultam em diferentes trabalhos ancorados em múltiplas teorias. Muitos acreditam se tratar de um sistema dinâmico não-linear [1], usualmente descrito com o emprego de termos estocásticos, capaz de movimentar a economia de um país e a vida de muitas pessoas. O que não se tem certeza é da sua total aleatoriedade, ou seja, que suas séries financeiras não possuem qualquer dependência de longo prazo [2]. Estudos mostram que não podemos tomar como verdade absoluta a *Hipótese de Mercado Eficiente* (HME) em sua forma mais forte, quando se afirma que os preços refletem instantaneamente todas as informações pertinentes, até mesmo as privilegiadas [3, 4, 5, 6]. É fato que questões externas, tais como fatores políticos, crises financeiras, intervenções de bancos centrais, entre outros, podem mudar esse quadro e trazer novas perspectivas. Diante de tais circunstâncias, podem haver casos em que seja possível prever movimentações. A *Hipótese de Mercado Adaptativo* (HMA) descreve tal possibilidade [7]. Esta considera que a eficiência muda de acordo com as condições do mercado. Todas essas questões têm despertado ainda mais a atenção de estudiosos.

Quando falamos de mercado financeiro, também precisamos considerar comportamentos sociais. Estes são, sem dúvida, fatores que ajudam a compor a natureza complexa desse sistema. Fazem parte daqueles fatores externos que fogem ao controle dos agentes de mercado e tanto afetam as negociações. Não podemos esquecer do poder das redes sociais, que acelera, em muito, esta interação entre indíviduos ou grupos de indivíduos do mundo inteiro [8].

Não muito distante disso, os aspectos comportamentais são igualmente influentes no cenário financeiro. Estudos demonstram que fatores psicológicos conseguem influenciar as decisões de investidores [9, 10]. Tais fatores podem, inclusive, ser perigosos para a estabilidade do mercado se apresentados por uma grande massa da população. A racionalidade dos agentes, que é um dos alicerces para a HME, pode ser considerada uma aproximação nem sempre satisfatória.

A disponibilidade das informações sobre o mercado financeiro é outro ponto que fomenta esse interesse. Com o aumento do volume de informações, cresceu também o interesse dos físicos, cujas abordagens culminaram no surgimento da Econofísica [11]. Essa ciência, em constante desenvolvimento, já traz significativa contribuição para a compreensão desse tema tão rico, e faz uso de importantes ferramentas para realizar esse trabalho [12, 13, 14]. Citando algumas, temos expoentes de Hurst, análise multifractal, análise de caudas de distribuições de retornos, morfologias de rede, etc, todo um arsenal capaz de

explorar diferentes parâmetros envolvidos.

1.1 Justificativa

O interesse pelo mercado financeiro não é somente de cunho científico. Os agentes envolvidos buscam obter lucros, obviamente. Com esse intuito, os aspectos sociais e comportamentais tendem a influenciar suas decisões. O problema é que grandes movimentações no mercado financeiro podem provocar grandes impactos em finanças pessoais, levando pessoas ao desespero. O contrário também é verdade, uma conduta massificada pode converter-se em crise, afetando a eficiência do mercado.

Logo, é importante tentar compreender tais dinâmicas, e a intenção é explorar diferentes ferramentas da modelagem matemática e computacional para esse fim.

1.2 Motivação

Com relação às séries financeiras, é comum que suas informações sejam fornecidas através de candles, que são representações gráficas em formato de velas. Um candle é composto por quatro preços de cotação: preço de abertura, preço máximo, preço mínimo e preço de fechamento. Contudo, usualmente pesquisadores utilizam somente dados de fechamento e/ou abertura para suas análises. Não é comum o emprego dos outros dois dados do candle, que se referem ao menor e maior preço negociados.

Como não encontramos trabalhos que analisassem o candle completo, nos indagamos sobre o porquê disso. Quais seriam as consequências de usar os dados de máximo e mínimo para os resultados encontrados? Buscamos responder a esta pergunta analisando as caudas das distribuições e, ainda, examinando expoentes de Hurst e a possibilidade de multifractalidade nas séries financeiras. Além disso, seguimos com investigações por meio das acurácias de um modelo de equações diferenciais lineares. Por fim, examinamos a relação entre as estatísticas investigadas.

1.3 Organização do trabalho

Este trabalho consiste de doze Capítulos. Depois desta breve introdução, temos o segundo Capítulo onde destacamos alguns trabalhos recentes relacionados ao nosso estudo. O Capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica, sendo abordada a hipótese de mercado eficiente, descrito o conceito de candlestick, de expoente de Hurt e também um pouco sobre distribuição normal e caudas pesadas. O Capítulo 4 aborda um modelo de previsão de tendência e suas acurácias, que correspondem a uma de nossas ferramentas estatísticas. O Capítulo 5 discorre sobre expoentes de Hurst generalizados e larguras do espectro de

singularidade, que também são ferramentas utilizadas em toda análise. O Capítulo 6, tal qual os dois Capítulos anteriores, também fala de uma ferramenta estatística, o coeficiente de decaimento das caudas das distribuições. E então, o Capítulo 7, traz informações sobre os testes estatísticos empregados nesta contribuição para investigar os resultados de tais ferramentas. Dando sequência, o oitavo Capítulo apresenta os dados empíricos utilizados e uma breve explicação dos experimentos executados. Nos Capítulos que se seguem, o nono, décimo e décimo primeiro, é fornecido um estudo detalhado de nossas análises, através de diferentes experimentos, e consequentes resultados. No Capítulo 9, buscamos evidenciar as variações entre as estatísticas advindas das séries de diferentes componentes do candle agrupando, para cada grandeza e cada mercado, os resultados em conjuntos referentes a abertura, máximo, mínimo e fechamento (quatro conjuntos para cada grandeza e cada mercado). Uma vez que a variação nas grandezas calculadas mostrou-se muito maior quando mudamos o ativo analisado do que quando alteramos a componente do candle, tornou-se necessário, para que o fenômeno que investigamos fosse explicitado, extrair, ou pelo menos atenuar, a dependência dos dados em relação ao ativo escolhido. Uma abordagem nesse sentido é descrita no Capítulo 10, que apresenta conclusões bem mais interessantes do que as do Capítulo 9. No Capítulo 11, empregamos o mesmo tratamento de dados que no Capítulo 10, contudo os agregamos em conjuntos que reúnem resultados de abertura e fechamento em um grupo, e máximo e mínimo em outro (dois conjuntos para cada grandeza e cada mercado). O motivo de realizarmos o estudo também nesta forma vem da natureza dos dados. Cada valor numa série de máximo ou de mínimo depende do que aconteceu em todo o intervalo do candle a que se refere, uma vez que um preço de máximo ou de mínimo é encontrado através da comparação de todos os preços que ocorreram no período em questão. Um preço de abertura, por sua vez, depende de apenas uma transação, a primeira que foi efetivada no intervalo daquele candle. Analogamente, um preço de fechamento depende apenas do último negócio realizado no período. Sendo assim, podemos imaginar uma proximidade estrutural entre as séries de máximo e mínimo, bem como entre as de abertura e fechamento. Também pudemos identificar diferenças relevantes entre esses dois grupos. Os resultados referentes a este Capítulo compoem o artigo publicado [15]. O último Capítulo fecha este trabalho com nossas considerações finais e trabalhos futuros. São apresentadas também as referências bibliográficas.

2 Trabalhos relacionados

A eficiência dos mercados financeiros sempre foi uma questão importantíssima para pesquisadores e investidores. Alguns trabalhos relacionam tal eficiência ao grau de desenvolvimento de um mercado. Um mercado desenvolvido geralmente não apresenta evidência significativa de memória longa em suas séries temporais de preços, aproximando-se do preconizado pela Hipótese de Mercado Eficiente (HME), tornando mais difícil qualquer tentativa de arbitragem por parte dos agentes de mercado. Por outro lado, mercados emergentes, que oscilam entre períodos de eficiência e ineficiência, podem vir a ser alvos mais interessantes para especulação nesse sentido.

Em [16] e [17], os autores verificam se os mercados emergentes têm aumentado sua eficiência ao longo dos anos. Eles utilizam, como principal ferramenta, o expoente de Hurst variável no tempo, e constatam que o aumento da eficiência é uma tendência, devido a alguns fatores, como a variação na velocidade da informação, por exemplo. Mas alguns países ainda ficam fora desse esquadro.

Em [18], Khazali e outros verificam o comportamento de sete moedas asiáticas emergentes e também do dólar australiano em relação ao dólar norte-americano, o iene e o euro, após um período de crise. Eles utilizam o teste de razão de variância de Kim para a hipótese de random walk e o teste de Kuan e Lee para a hipótese de martingale [1] em diferenças (que são úteis em séries pequenas e com variância heteroscedástica). Os testes concluem que, das oito moedas analisadas, somente o dólar australiano e o won coreano apresentam comportamento de caminhante aleatório e diferença de martingale desde a crise asiática. As demais apresentaram pouca melhoria em relação à eficiência de mercado em sua forma fraca.

Mesmo sendo difícil detectar memória em retornos de mercados desenvolvidos, a busca por brechas no sistema eficiente destes mercados é incessante. Grech e Mazur [19], utilizam expoentes de Hurst para investigar séries temporais do índice Dow Jones em tempos de instabilidade. Tenta-se identificar em qual modo (persistente, anti-persistente ou neutro) está um mercado em determinado momento. O expoente de Hurst pode ajudar a prever tendências nas séries, mas é preciso ter cuidado com fatores fortes externos, que não são previstos pelo comportamento local e não são controlados pelos investidores, podendo desacelerar ou acelerar a atividade prevista.

Um modelo de previsão de tendência de preços baseado no oscilador harmônico amortecido é desenvolvido em [20]. Os resultados financeiros associados à sua aplicação

[1] Martingale é um modelo de apostas baseado somente no tempo presente, onde eventos passados não ajudam a prever eventos futuros, ou seja, a probabilidade de acerto é de 50%.

em um modelo de operação em ativos do mercado brasileiro mostraram-se superiores aos de um modelo de previsão completamente aleatório, o que aponta no sentido da ineficiência desse mercado. Correlação linear significativa entre o desempenho do modelo e o expoente de Hurst da série de preços foi encontrada, indicando que tal expoente pode ser útil na escolha de ativos para a aplicação do modelo.

Em [2], os autores testam, através do método de regressão espectral, evidências de memória longa nas séries temporais de ações americanas (índices agregados, setoriais e ações de empresas individuais). Eles consideram que a estrutura fractral pode ser mascarada nos índices, devido à agregação. Para eles, dados agregados ou desagregados não apresentam evidências contra o modelo martingale.

Em [7], Charles e outros analisam possíveis previsibilidades de retornos em diferentes moedas estrangeiras, através da Hipótese de Mercado Adaptativo (HMA). Confirmam que mudanças nas condições de mercado, tais como intervenções bancárias ou crises financeiras, podem afetar a eficiência de alguns mercados de tempos em tempos. São utizados testes alternativos para dependência linear e não-linear contra a hipótese de martingale em diferenças: o teste de razão de variancia Bootstrap, teste espectral generalizado e testes consistentes de Dominguez-Lobato.

Já em [21], os autores investigam, através do teste espectral generalizado [22], os efeitos da crise global na eficiência de diversos mercados da Europa Central. Observa-se um comportamento esporádico de oportunidades de lucro, condizente com a HMA. Fatores como pânico e ambiente caótico podem reduzir o grau de eficiência.

Em [23], os autores examinam os efeitos de boas e más notícias em 5 bancos do Reino Unido e 6 dos Estados Unidos, durante períodos bons e ruins. Eles utilizam o modelo bivariado BEKK GARCH e regressões lineares como ferramentas. O período analisado comporta inclusive a crise que se iniciou em 2007. A maioria dos bancos está de acordo com a HME, mas tal eficiência diminui com a aproximação da crise.

A liquidez nestes mercados também é considerada buscando-se uma relação com a eficiência. Ao analisar retornos, fluxos de pedidos e dados de liquidez para ações da Bolsa de Nova York, através de testes de variância, Chordia e Roll [3] observaram que mercados mais líquidos levam a menores probabilidades de prever retornos. Mostram ainda que o aumento de atividades de arbitragem durante esses períodos de liquidez pode aumentar a eficiência do mercado.

Dada a complexidade dos mercados financeiros, são muitos os aspectos que devemos considerar quando o assunto é eficiência. Correlações entre ações é um deles, principalmente quando buscamos minimizar riscos em meio a períodos turbulentos. Alguns movimentos de mercado levam a mudanças repentinas de tendências, que podem afetar um certo número de ações simultaneamente, ou apenas algumas de forma não sincroni-

zada. Sabendo que o propósito de minimização de risco de diversificar ações pode não se concretizar em momentos de crise, exatamente quando é mais necessário, Preis e outros autores [24] buscam compreender como essas correlações variam no tempo, para tentar antecipar as quebras de diversificação e orientar no sentido de proteger uma carteira. Eles estudam coeficientes de correlação versus retornos normalizados.

Em [25], os autores mostram que as correlações condicionais são altamente persistentes em períodos de crise, e tendem a aumentar. Eles verificam ainda efeitos de contágio e comportamento de manada em meio à população de negociadores de mercado, através da volatilidade e co-volatilidade dos mercados. Trabalham com 8 índices de ações.

Bastante interessantes, também, são os estudos que relacionam informações consequentes de interações via internet com comportamentos de agentes econômicos em períodos de grande movimentação dos mercados. Preis e outros [26] sugerem que alterações no volume de pesquisas do Google Trends podem estar relacionadas a alterações em preços de ações. De acordo com sua pesquisa, com essa ferramenta é possível explorar aspectos econômicos atuais e ainda antecipar uma tendência nos comportamentos de agentes do mercado.

Também em [8], os autores avaliam se a internet tem um papel considerável na tomada de decisões comerciais. Eles mostram que dados históricos provenientes do uso da Wikipedia poderiam ter fornecido *insights* sobre o comportamento futuro dos atores de mercado.

Em [27], Botta e outros discutem a importância de quantificar as grandes variações de preços nas bolsas, para compreender melhor o efeito que as crises financeiras têm sobre o mundo inteiro. Eles o fazem através do estudo de distribuições acumuladas inversas com caudas em leis de potência. Os coeficientes de tais caudas são estudados para diferentes intervalos de amostragem e para mercados com variados níveis de estresse.

Em [28], os autores examinam a correlação e co-movimentação de moedas, por meio de estruturas de redes complexas. Este estudo é capaz de identificar quais moedas têm influência preponderante na flutuação das taxas de câmbio de outras moedas.

3 Fundamentação teórica

Este capítulo é destinado a algumas definições pertinentes ao trabalho, que podem ajudar no entendimento do mesmo.

3.1 Hipótese de Mercado Eficiente

Mercados financeiros são sistemas sofisticados, que envolvem inúmeras negociações de diferentes bens, oriundos de diversos setores, manipulados por um número cada vez maior de agentes econômicos. Tudo isso, vinculado a um enorme volume de informações, contribui para o caráter aleatório das séries temporais de preços. Ainda assim, o desafio de desvendar estes cenários na tentativa de obter lucros motiva muitos operadores de mercado, sempre atentos a oportunidades de arbitragem.

Um exemplo de arbitragem seria a negociação de um produto através de dois diferentes mercados: pela discrepância de preços, o produto poderia ser obtido (comprado) no mercado cujo preço fosse menor, numa quantidade que, descontados os custos desta transação, viesse a dar lucro ao ser vendido no mercado cujo preço fosse maior. Outro exemplo seria a negociação do mesmo produto por diferentes moedas, consideradas as devidas taxas de câmbio. O interessante é que estas manobras de arbitragem resultam numa nova adaptação do mercado, que, por conseguinte, levam à racionalização do preço, dificultando novas tentativas de arbitragem [11].

A *Hipótese de Mercado Eficiente* (HME), formulada originalmente em 1965, por Samuelson, diz que um mercado é eficiente quando o preço do ativo é o mais racional possível; quando as informações disponíveis para esse ativo são absorvidas instantaneamente, assim que conhecidas, e refletidas num novo preço, de forma que suas séries sejam completamente aleatórias e não existam brechas para possíveis arbitragens.

A HME possui três versões [29]:

- Uma versão fraca, que considera que os preços negociados para os ativos refletem todas as informações disponíveis publicamente.
- Uma versão semi-forte, que diz que os preços negociados refletem todas as informações conhecidas, e ainda, que os preços mudam instantaneamente para refletir novas informações disponíveis.
- Uma versão forte, que afirma que tais preços refletem instantaneamente até mesmo informações não conhecidas ou privilegiadas.

3.2 Candlesticks

Os *candlesticks* ('candelabros' em inglês), desenvolvidos no século XVIII no Japão pelo comerciante de arroz Munehisa Homma, são hoje, provavelmente, a mais utilizada forma de guardar e transmitir dados financeiros. Eles são representações gráficas de preços negociados de um ativo num determinado período, que denotam quatro diferentes instâncias desta negociação [30]. É cotado um preço que recebe o nome de *preço de abertura*: este é o preço em que foi realizado o primeiro negócio no intervalo de tempo a que se refere o candlestick. É determinado o maior preço em que uma transação foi efetuada para esse ativo, que é chamado de *preço de alta* ou *preço máximo*. É estipulado também o menor preço desta negociação, conhecido como *preço de baixa* ou *preço mínimo*. Por fim, referente ao término do período, é registrado o último preço negociado, sinalizado como o *preço de fechamento* daquele ativo. O candlestick é formado por estes quatro preços: preço de abertura, preço máximo, preço mínimo, e preço de fechamento (Figura 1). Informação sobre a evolução do preço de um ativo comumente é dada como uma série de candlesticks referentes a intervalos sequenciais de tamanho fixo.

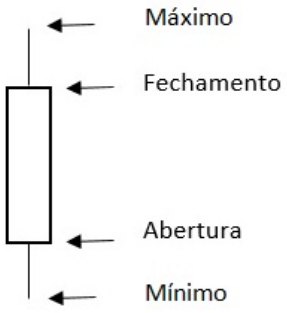

Figura 1 – Exemplo de um candlestick com os quatro preços definidos: abertura, máximo, mínimo e fechamento.

O nome candlestick (ou simplesmente candle) provém de sua semelhança com uma vela. O candle pode ser considerado de alta ou de baixa, conforme a situação. O candle é de alta se o preço de fechamento é maior que o preço de abertura, e de baixa se a condição é contrária, se o preço de abertura é maior que o preço de fechamento. Costumeiramente, este último recebe um preenchimento de cor para distingui-los (Figura 2).

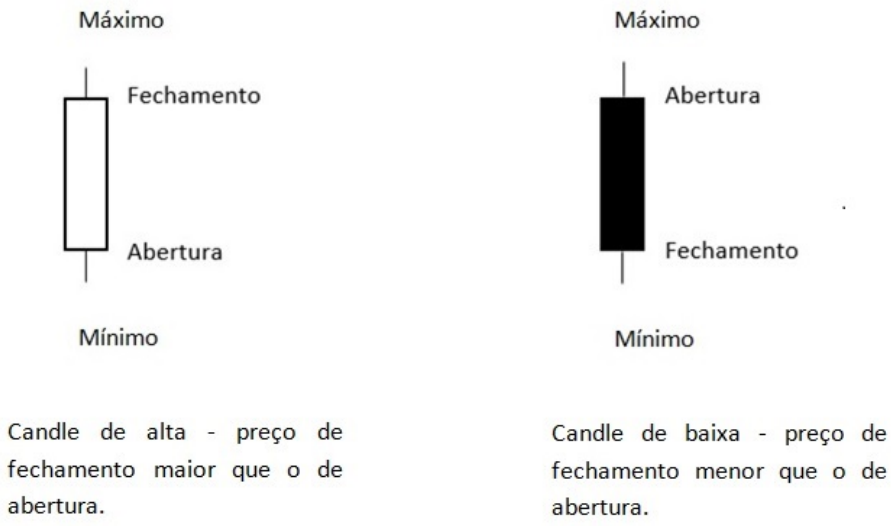

Figura 2 – Exemplos de candles de alta e de baixa.

3.3 Expoente de Hurst

O *expoente de Hurst* (EH) foi inicialmente desenvolvido para um estudo de Hidrologia. O contexto era a necessidade de se conhecer o fluxo das águas do Rio Nilo, e depois aproveitar este estudo em projetos de reservatórios de água. O biólogo Harold E. Hurst observou que as chuvas não chegavam de forma completamente aleatória, elas seguiam um comportamento com tendências ao longo do tempo. Posteriormente, foi possível ligar este conceito a outros fenômenos naturais, e finalmente relacioná-lo a séries temporais financeiras [31].

O EH é uma ferramenta estatística usada para detectar correlações de longo alcance em séries. Dependendo de seu valor, podemos dizer se existe persistência ou não na distribuição dos dados. Um valor maior que $0{,}5$ indica persistência na série temporal, e um valor menor que $0{,}5$ indica anti-persistência, ambas as situações são igualmente significativas para oportunidades de arbitragem. O valor igual a $0{,}5$ condiz com uma série completamente aleatória, sem qualquer tendência, exatamente como séries de preços de mercados perfeitamente eficientes (Figura 3).

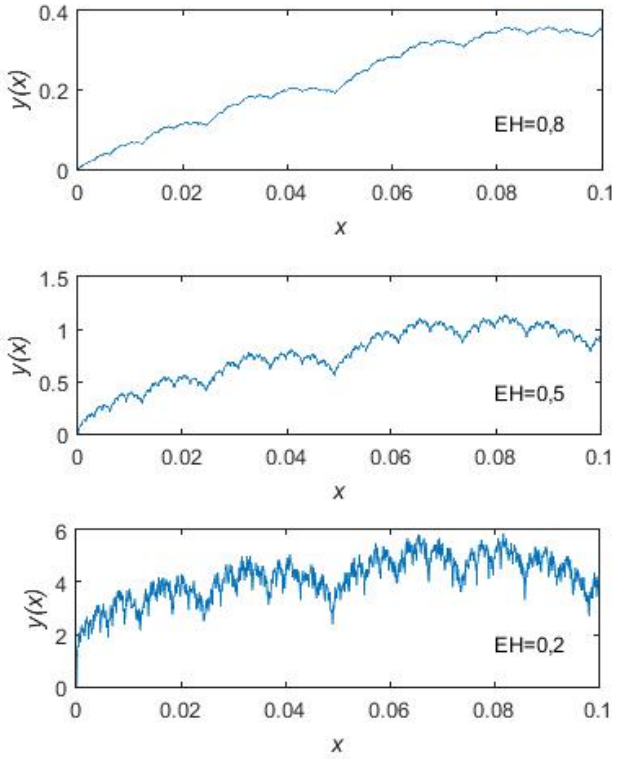

Figura 3 – Exemplos de curvas com diferentes expoentes de Hurst.

Existem várias propostas para o cálculo do EH. As mais conhecidas são a análise de escala reescalonada (*Rescaled Range Analysis* (R/S)) e a análise de flutuação sem tendência (*Detrended Fluctuation Analysis* (DFA), ambas fractais. Neste trabalho, utilizaremos uma generalização do método DFA, o MF-DFA (*Multfractal Detrended Fluctuation Analysis*) que proporciona uma análise multifractal, resultando em um conjunto de expoentes de Hurst generalizados.

3.4 Distribuição Normal

A distribuição normal é um dos mais importantes tipos de distribuições disponíveis para caracterização de fenômenos naturais. Muito utilizada em modelagem de sistemas, pode auxiliar, através de abordagens analíticas ou simulações, no estudo do comportamento aleatório de tais fenômenos. É conhecida também por distribuição de Gauss ou Gaussiana, em homenagem a Karl Friedrich Gauss.

Uma distribuição de probabilidades Gaussiana é descrita pela fórmula

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2], \ x \in (-\infty,\infty), \tag{1}$$

onde μ é a média

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} xp\,(x)\,dx \tag{2}$$

e σ é o correspondente desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2\,p\,(x)\,dx}. \tag{3}$$

Se a variável aleatória X é caracterizada por essa distribuição, dizemos $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, temos uma distribuição normal padrão. Distribuições normais têm forma de um sino (Figura 4).

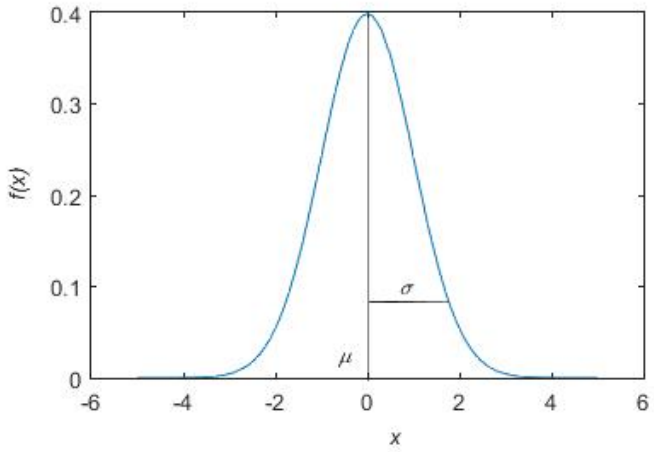

Figura 4 – Distribuição normal padrão (μ é a média e σ o desvio padrão).

Na Figura 5 , é apresentada a distribuição acumulada complementar da normal padrão. Para cada ponto do gráfico, a ordenada corresponde à probabilidade da variável aleatória X assumir maior valor que o da abscissa.

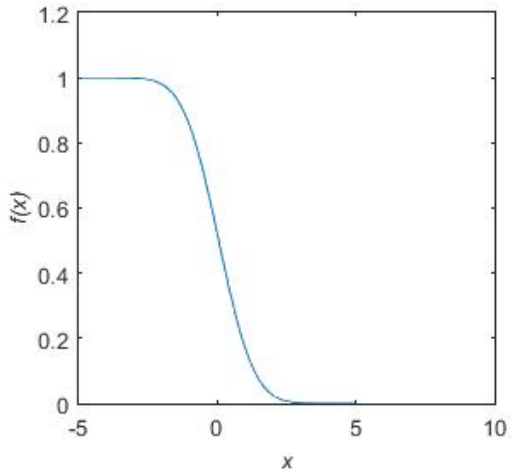

Figura 5 – Distribuição acumulada complementar da normal padrão.

3.5 Caudas Pesadas

Cauda pesada é um termo estatístico usado para caracterizar distribuições de probabilidade com decaimento lento. Uma distribuição com essa característica tem uma concentração maior de dados ao longo de suas caudas, ou seja, mais distantes da média e com uma maior variabilidade. Distribuições estatísticas tais como leis de potência são conhecidas por apresentarem caudas pesadas, e algumas das séries financeiras que investigamos possuem caudas que decaem em lei de potência, como é o caso da série de preços de fechamento de um ativo do Ibovespa, a PETR4 (Figura 6).

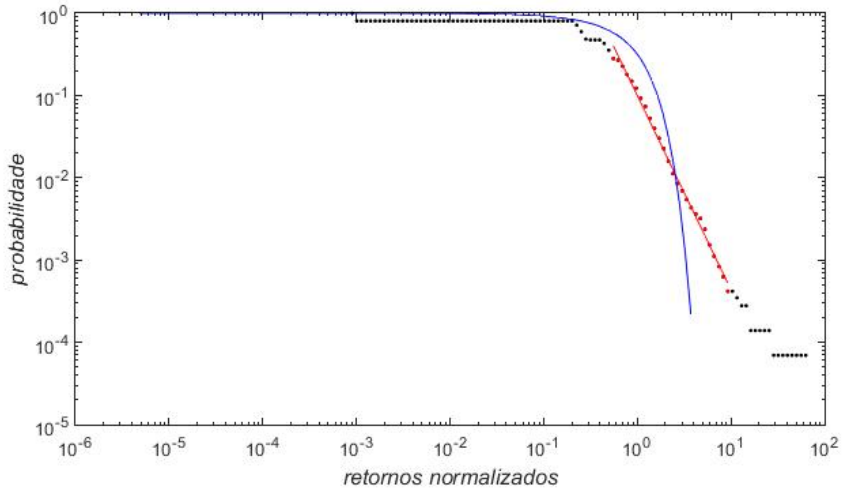

Figura 6 – A curva azul corresponde a distribuição gaussiana. Os pontos pretos representam a distribuição inversa acumulada dos retornos da série de fechamento da PETR4 do Ibovespa. A reta vermelha mostra um ajuste linear feito numa região da cauda.

4 Modelo de previsão de tendência

O modelo aqui descrito é inspirado em sistemas de equações diferenciais lineares. Usa como dados de entrada séries históricas de preços de diferentes ativos e dá como resposta uma previsão de tendência para cada ativo referente às séries de entrada: busca prever se o preço no próximo passo de tempo será maior ou menor do que o atual. As ideias principais que levam ao modelo são as mesmas que a do utilizado em [32], mas a forma de encontrar a matriz de coeficientes (matriz A definida abaixo) difere. Em [32], foi utilizado o método do gradiente de otimização não linear; aqui, empregou-se o método de mínimos quadrados, que mostrou-se bem mais simples e eficiente. A definição do preço de referência, definido logo a seguir, também diverge: lá, era uma média móvel simples; aqui, visando dar mais peso aos candles próximos do momento do cálculo, uma média exponencial foi empregada.

Considere $x_k(t)$ o preço do ativo k no tempo t ($k = 1,2,\ldots,N$, onde N é o número de ativos escolhidos para aplicação do modelo). Para cada ativo k e tempo t, o *desvio do preço de referência*, $X_k(t)$, é calculado como a diferença logarítmica entre o preço $x_k(t)$ e um preço de referência, $\bar{x}_k(t)$, computado como média móvel exponencial:

$$X_k(t) = \ln x_k(t) - \ln \bar{x}_k(t), \tag{4}$$

onde

$$\bar{x}_k(t) = \frac{2(x_k(t) - \bar{x}_k(t-1))}{S+1} + \bar{x}_k(t-1), \tag{5}$$

S é um parâmetro que regula a velocidade com que $\bar{x}_k(t)$ é atualizado e $\bar{x}_k(1)$ é definido como a média móvel comum calculada na janela imediatamente anterior, com tamanho S.

A equação diferencial proposta a seguir (Equação 6) refere-se ao conjunto $X_k(t)$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{B}\mathbf{X}(t), \tag{6}$$

onde

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_N(t) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NN} \end{pmatrix} \tag{8}$$

é uma matriz de coeficientes $N \times N$.

A partir da discretização dessa equação, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) &= \mathbf{X}(t-1) + \Delta t \mathbf{B}\mathbf{X}(t-1) \\ &= (I_N + \Delta t \mathbf{B})\mathbf{X}(t-1) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t-1),\end{aligned} \tag{9}$$

onde

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

é a matriz identidade de ordem N, Δt é o intervalo de tempo entre candles sucessivos, definido como 1 no que segue, e

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_N + \Delta t \mathbf{B}. \tag{11}$$

Em cada tempo t_0 buscamos a matriz $\mathbf{A}(t_0)$, através dos dados passados mais recentes, para N passos de tempo,

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ \vdots \\ X_N(t-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ \vdots \\ X_N(t-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-2) \\ \vdots \\ X_N(t-2) \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} X_1(t-N+1) \\ \vdots \\ X_N(t-N+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-N) \\ \vdots \\ X_N(t-N) \end{pmatrix}.$$

Temos, assim, N^2 equações para encontrarmos as N^2 componentes da matriz $\mathbf{A}$. O que é descrito em (12) equivale a:

$$\begin{pmatrix} X_1(t-N+1) & \cdots & X_1(t-1) & X_1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_N(t-N+1) & \cdots & X_N(t-1) & X_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,N-1} & A_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-N) & \cdots & X_1(t-2) & X_1(t-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_N(t-N) & \cdots & X_N(t-2) & X_N(t-1) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Multiplicando-se os dois lados da igualdade da Equação 13, pela direita, pela Equação 14

$$\begin{pmatrix} X_1(t-N) & \cdots & X_1(t-2) & X_1(t-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_N(t-N) & \cdots & X_N(t-2) & X_N(t-1) \end{pmatrix}^{-1}, \tag{14}$$

encontramos a matriz $\mathbf{A}$ estimada:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,N-1} & A_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(t-N+1) & \cdots & X_1(t-1) & X_1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_N(t-N+1) & \cdots & X_N(t-1) & X_N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-N) & \cdots & X_1(t-2) & X_1(t-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_N(t-N) & \cdots & X_N(t-2) & X_N(t-1) \end{pmatrix}^{-1}. \tag{15}$$

A matriz $\mathbf{A}$ varia a cada passo de tempo. Nesta contribuição, a calculamos com o objetivo de utilizá-la para prever tendências de preços relativas ao passo de tempo seguinte. A matriz computada por meio da Equação 15 não mostrou acurácias satisfatórias em tais previsões. Por isso, uma nova matriz $\mathbf{A}$ foi ajustada para $R > N$ passos de tempo (para t de $t_0 - R + 1$ a t_0), como em [33], por meio da relação

$$\begin{pmatrix} X_1(t-R+1) & \cdots & X_1(t-1) & X_1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_N(t-R+1) & \cdots & X_N(t-1) & X_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,N-1} & A_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-R) & \cdots & X_1(t-2) & X_1(t-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_N(t-R) & \cdots & X_N(t-2) & X_N(t-1) \end{pmatrix} \tag{16}$$

análoga à Equação (15), que pode ser escrita como

$$\mathbf{X}_R(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}_R(t-1), \tag{17}$$

onde

$$\mathbf{X}_R(t) = (\mathbf{X}(t-R+1)...\mathbf{X}(t)) \tag{18}$$

é uma matriz de dimensão $N \times R$ que contém os preços de N ativos em R passos de tempo ($\mathbf{X}(t)$ é definido na Equação 7. Para explicitarmos $\mathbf{A}$, primeiro multipliquemos a matriz $\mathbf{X}_R(t-1)$ por sua transposta:

$$\mathbf{X}_R(t)\,\mathbf{X}_R^T(t-1) = \mathbf{A}X_R(t-1)\,\mathbf{X}_R^T(t-1). \tag{19}$$

A matriz $\mathbf{X}_R\,(t-1)\,\mathbf{X}_R^T\,(t-1)$ é de dimensão $N \times N$; podemos, portanto, multiplicar os dois lados da Equação 19 por sua inversa, o que leva a

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_R\,(t)\,\mathbf{X}_R^T\,(t-1)\left(\mathbf{X}_R\,(t-1)\,\mathbf{X}_R^T\,(t-1)\right)^{-1}. \tag{20}$$

É possível mostrar que esta matriz é a que minimiza as diferenças quadráticas entre os valores estimados e os dados [33]. Notemos que $\mathbf{A}$ varia a cada passo de tempo. A matriz $\mathbf{A}$ estimada em t_0 será denotada por $\hat{\mathbf{A}}\,(t_0)$, sendo calculada através de

$$\hat{\mathbf{A}}\,(t_0) = \mathbf{X}_R\,(t_0)\,\mathbf{X}_R^T\,(t_0-1)\left(\mathbf{X}_R\,(t_0-1)\,\mathbf{X}_R^T\,(t_0-1)\right)^{-1}. \tag{21}$$

Essa matriz é empregada para calcular os desvios $\hat{X}_k\,(t_0+1)$ previstos para o tempo t_0+1 de acordo com

$$\hat{\mathbf{X}}(t_0+1) = \hat{\mathbf{A}}\,(t_0)\,\mathbf{X}(t_0),$$

onde

$$\hat{\mathbf{X}}\,(t+1) = \begin{pmatrix} \hat{X}_1(t+1) \\ \vdots \\ \hat{X}_N(t+1) \end{pmatrix} \tag{22}$$

é o vetor com os valores estimados para os desvios $X_k(t+1)$.

As previsões de desvio são convertidas em previsões de preço que, por sua vez, nos levam a previsões de tendência.

Partindo da Equação 4 e considerando que o preço de referência para o tempo $t+1$ é o mesmo que para o tempo t, temos

$$\hat{X}_k\,(t+1) = \ln \hat{x}_k\,(t+1) - \ln \bar{x}_k\,(t) = \ln \frac{\hat{x}_k\,(t+1)}{\bar{x}_k\,(t)}. \tag{23}$$

Logo

$$e^{\hat{X}_k(t+1)} = \frac{\hat{x}_k\,(t+1)}{\bar{x}_k\,(t)}, \tag{24}$$

o que leva a

$$\hat{x}_k\,(t+1) = \bar{x}_k\,(t)\,e^{\hat{X}_k(t+1)}. \tag{25}$$

Se $\hat{x}_k\,(t+1) > x_k\,(t)$, é prevista tendência de alta do preço. Se $\hat{x}_k\,(t+1) < x_k\,(t)$, é prevista tendência de baixa do preço. Se $\hat{x}_k\,(t+1) = x_k\,(t)$, é prevista estabilidade do preço.

4.1 Acurácia do modelo de previsão

A acurácia é definida como a razão entre o total de previsões corretas e o total de previsões realizadas.

O modelo de previsão descrito neste Capítulo terá sua acurácia comparada à de um preditor análogo a uma moeda justa, que gera previsões de alta ou baixa de forma aleatória, sem viés, e que nunca produz previsões de estabilidade. Para que tal comparação seja possível, para cada ação devemos retirar do universo U de previsões do modelo aquelas relativas a intervalos onde não houve variação de preço, uma vez que a moeda justa não é capaz de prever estabilidade. O conjunto que obtemos então será chamado de $\bar{U}$. Observemos também que a chance de nosso modelo prever estabilidade é insignificante, dada sua natureza em princípio contínua (desprezando-se limitações computacionais). Observemos que o preditor completamente aleatório terá, em $\bar{U}$, acurácia média de $0{,}5$. Desvios deste valor, da acurácia do modelo baseado em equações diferenciais, estatisticamente significativos, indicam informação sobre preços futuros. Por outro lado, desconsiderando-se taxas de negociação, a acurácia calculada em $\bar{U}$ é a relevante para fins de negociação em mercado financeiro, pois operações em intervalos em que não há variação de preço não produzem lucro nem prejuízo. Se as taxas não puderem ser desconsideradas, nosso modelo só será útil para negociação caso os intervalos com retorno nulo sejam raros, o que, para os ativos de maior liquidez, se verifica.

Em [32], constata-se que previsões de tendência oriundas de previsões de retornos com maiores valores absolutos tendem a ter maior acurácia. Para utilizar tal incremento na acurácia, podemos escolher as previsões de tendência relacionadas aos maiores módulos de retorno previsto. Definimos, assim, o conjunto U_p como o conjunto de previsões cujo módulo do retorno associado está acima de um dado percentil calculado a cada passo no conjunto das 100 previsões imediatamente anteriores. A partir de U_p, definimos $\bar{U_p}$ como o subconjunto de U_p associado aos passos de tempo em que o retorno verificado é não nulo. No que segue, o percentil escolhido é o de 75%.

Ainda para melhorar a acurácia obtida, aplicamos o modelo com dez valores diferentes do parâmetro R ($R = 1.000, 1.100, 1.200, 1.300, 1.400, 1.500, 1.600, 1.700, 1.800$ e 1.900) e realizamos votações a cada passo de tempo (o parâmetro $S = 12$ foi escolhido para todos os casos). Para cada escolha de R é definido um conjunto $\bar{U_p}$. Somente participam da votação as previsões em $\bar{U_p}$. Assim, nem sempre haverá dez votantes. Pode acontecer de não haver nenhum votante, ou ocorrer empate. Nesses casos, não há previsão. As acurácias analisadas nos Capítulos 9, 10 e 11 são aquelas relativas aos passos de tempo em que houve previsão e em que o retorno efetivamente verificado foi não nulo.

5 Expoente de Hurst generalizado - Largura do espectro de singularidade

Expoentes de Hurst generalizados são expoentes de Hurst resultantes de uma análise multifractal, que são obtidos através do cálculo de diversas funções de flutuação em diferentes escalas. Esse cálculo é feito a partir de uma generalização do método DFA (*Detrended Fluctuation Analysis)*, o método MF-DFA (*Multfractal Detrended Fluctuation Analysis*).

Extraimos a descrição deste método do artigo *Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series* [34], que consiste nos seguintes passos.

Inicialmente é preciso definir a série

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^{i} [x_k - \langle x \rangle], i = 1,...,N, \tag{26}$$

onde os x_k compõem uma série de tamanho N e $\langle x \rangle$ representa a média dos x_k.

Depois a série $Y(i)$ deve ser dividida em segmentos não sobrepostos de comprimento igual a s. O número destes segmentos é $N_s \equiv int(N/s)$. Como o comprimento N da série geralmente não é um múltiplo de s, pode sobrar uma parte curta no final da série. Desta forma, é necessário repetir o processo a partir do final da série, ou seja, de trás para frente, obtendo assim $2Ns$ segmentos.

Em seguida, deve ser empregado o método dos mínimos quadrados em cada um dos segmentos $2Ns$ para o ajuste de polinômios, que serão utilizados para retirar a tendência local (o grau do polinômio pode variar, é um parâmetro a ser escolhido para aplicação do método). Em cada segmento v, de tamanho s, é calculada a função

$$F^2(v,s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{k} (Y(k) - y_v(k)), \tag{27}$$

onde k varia do ínicio ao fim do segmento e $y_v(k)$ é o valor correspondente a $Y(k)$ calculado sobre o polinômio ajustado para o segmento v.

Continuando, é computada a média sobre todos os segmentos para obter a função de flutuação de ordem q:

$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \left[F^2(v,s) \right]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, q \neq 0. \tag{28}$$

Para $q = 0$,

$$F_0(s) \equiv \exp\left\{\frac{1}{4N_s}\sum_{v=1}^{2N_s}\ln\left[F^2\left(v,s\right)\right]\right\}. \tag{29}$$

Tais funções devem ser calculadas para diversos valores de s.

Então, é determinado o comportamento de escala das funções de flutuação analisando gráficos log-log de $F_q(s)$ versus s para cada valor de q, como é visto na Figura 7a. O coeficiente angular da reta que melhor ajusta tais gráficos corresponde ao valor do expoente de Hurst generalizado $h(q)$ (Figura 7b). Para $q = 2$, temos o expoente de Hurst canônico calculado pelo método DFA.

Uma ferramenta para caracterizar uma série multifractal é o espectro de singularidade. A partir das definições

$$\alpha = h(q) + qh'(q) \qquad e \qquad f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1, \tag{30}$$

constrói-se um grafico como o exemplificado na Figura 7c.

Dado o espectro de singularidade, a diferença entre a menor e a maior abscissa determina a largura do espectro de singularidade (LES), que evidencia comportamento multifractal. As LES estão relacionadas a correlações não lineares nas séries de preços e a distribuições de retornos com caudas pesadas. De fato, para séries finitas, alguma largura deve persistir mesmo para séries monofractais.

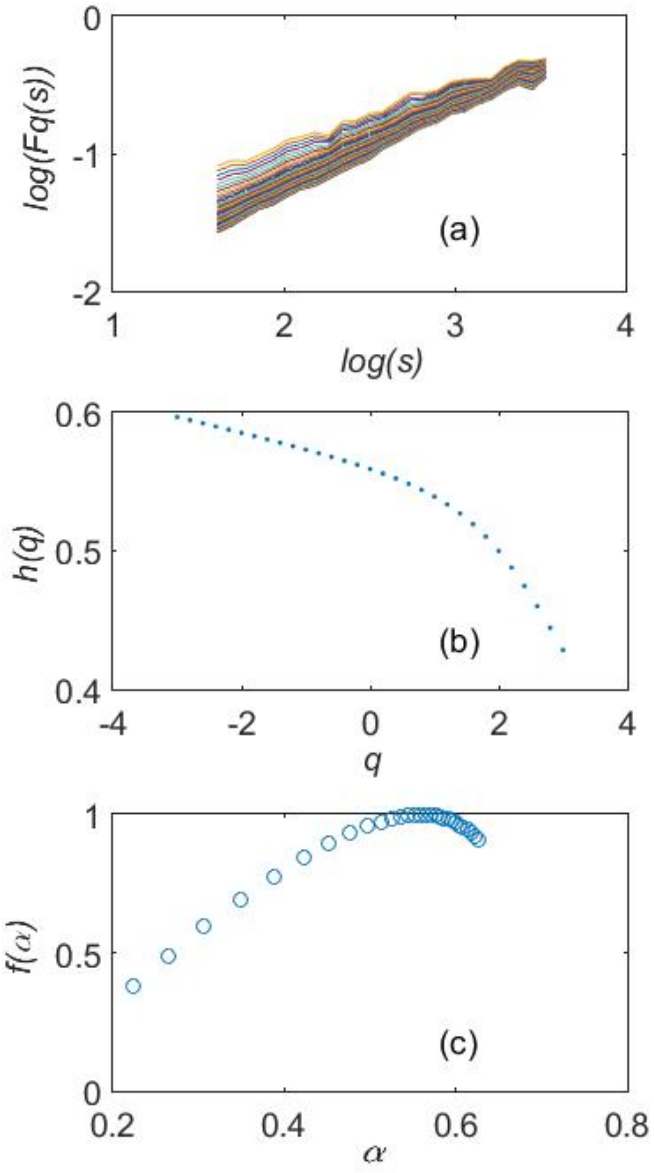

Figura 7 – Exemplo de estudo do caráter multifractal de uma série de preços. Os dados utilizados são preços de fechamento de candles de 5 minutos de PETR4, correspondentes ao período de 02/01/2017 a 31/08/2017. (a) Funções de flutuação $Fq(s)$ para diferentes valores de q (s correspondente ao número de pontos no intervalo considerado no cálculo de $Fq(s)$). Foram considerados valores de q variando de -3 a 3, com passo $0{,}2$. (b) Expoentes de Hurst generalizados $h(q)$ calculados a partir dos coeficientes angulares referentes aos ajustes lineares realizados sobre as curvas da figura (a). (c) Espectro de singularidade resultante dos expoentes de Hurst generalizados calculados.

Neste trabalho contamos com a ajuda do software Matlab para o cálculo dos expoentes de Hurst generalizados (EHG), seguindo o método descrito acima. O programa construído utilizou valores de q variando de -3 a 3, com um intervalo de $0{,}2$ entre eles,

totalizando um espectro de singularidade com 31 diferentes valores de q. A partir desse programa também foram obtidas as larguras dos espectros de singularidade.

6 Coeficiente de decaimento das caudas das distribuições

A partir das séries de preços, retornos logarítmicos normalizados foram calculados:

$$g_t = \frac{G_t - \langle G \rangle}{\sigma_G}, \tag{31}$$

sendo G_t o retorno logarítmico,

$$G_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}), \tag{32}$$

onde p_t é o preço no tempo t e p_{t-1} é o preço no tempo $t-1$, $\langle G \rangle$ é a média correspondente sobre toda a série e σ_G o respectivo desvio padrão. Distribuições de probabilidade acumuladas complementares de retornos logarítmicos normalizados foram construídas a partir das séries de abertura, máximo, mínimo e fechamento de cada ativo estudado do DJIA e Ibovespa. Tais distribuições foram calculadas da forma descrita a seguir:

- A partir de cada série empírica de valores de g_t, foram calculados os correspondentes $\log_{10} g_t$.

- Um histograma foi construído a partir do conjunto dos $\log_{10} g_t$.

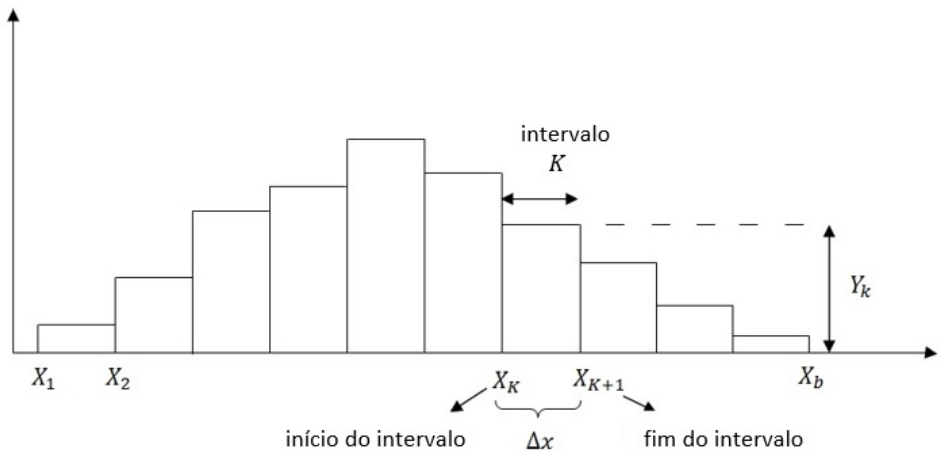

Figura 8 – Modelo de histograma criado.

- Dividindo-se o número de elementos Y_k de cada intervalo k pelo número total N de elementos da série analisada, obtem-se uma estimativa da probabilidade de que um valor de $\log_{10} g$ caia em cada intervalo k:

$$P_k = \frac{Y_k}{N}. \tag{33}$$

- Consideremos que os intervalos do histograma são definidos pelo conjunto de números

$$\{X_1,X_2,\cdots,X_b\}\,, \tag{34}$$

sendo

$$X_{k+1} - X_k = \Delta x, \qquad \text{para} \qquad k = 1,2,\cdots b-1 \tag{35}$$

(ver Figura 8). Observemos que o limite esquerdo do primeiro intervalo é X_1 e o limite direito do último, X_b. O k-ézimo intervalo, com Y_k elementos, começa em X_k e termina em X_{k+1}. O número de intervalos é $b-1$.

- A probabilidade de que um valor de $\log_{10} g$ seja maior que X_k é igual à soma das probabilidades associadas a todos os intervalos à direita de X_k, ou seja:

$$P\left(\log_{10} g > X_k\right) = \sum_{j=k}^{b-1} P_k = \sum_{j=k}^{b-1} \frac{Y_k}{N}. \tag{36}$$

- Observando que as funções exponencial e logarítmica são crescentes em toda a reta real, podemos concluir que a probabilidade de encontrar um valor de g maior que 10^{X_k} é dada pela mesma expressão:

$$P\left(g > 10^{X_k}\right) = P\left(\log_{10} g > X_k\right) = \sum_{j=k}^{b-1} \frac{Y_k}{N}. \tag{37}$$

- Assim, para cada valor

$$x = 10^{X_k}, \tag{38}$$

computamos o valor referente à distribuição acumulada complementar por meio da fórmula

$$P\left(g > x\right) = \sum_{j=k}^{b-1} \frac{Y_k}{N}. \tag{39}$$

Dada uma distribuição, é necessário escolher qual região será considerada para o cálculo do coeficiente de decaimento da cauda. De fato, o resultado é sensível ao intervalo em que os pontos são considerados para o ajuste linear. Para comparar as caudas desses conjuntos de distribuições, buscamos um intervalo de valores de g em que as caudas decaem aproximadamente como lei de potência para praticamente todos os ativos analisados. A região encontrada inclui valores de g de 1 a 10. Neste intervalo, o ajuste linear de $\log\left(P\left(g > x\right)\right)$ versus $\log\left(x\right)$, onde $P\left(g > x\right)$ é a probabilidade de encontrar um valor de g maior que x, foi efetuado para cada distribuição, o que nos permitiu obter os coeficientes de decaimento de lei de potência β. A Figura 9 exemplifica esse processo.

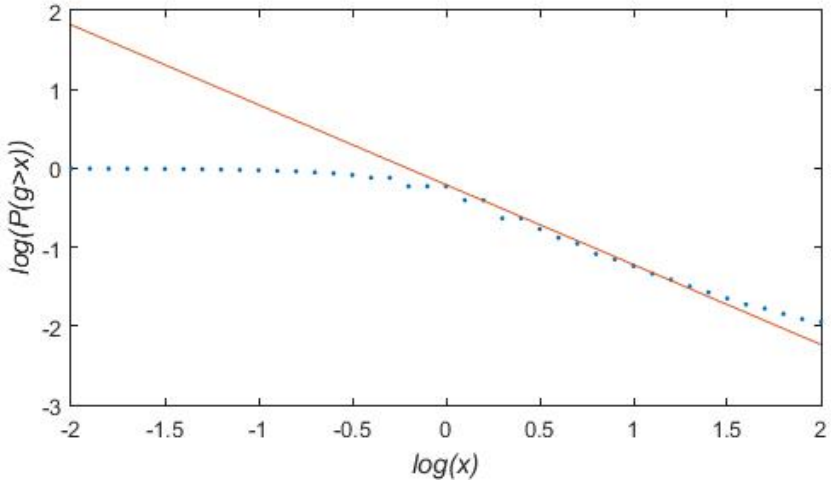

Figura 9 – Exemplo de um ajuste linear para obter o coeficiente de decaimento de lei de potência de um ativo do Ibovespa. Foram usados preços de fechamento de candles de 5 minutos de PETR4, correspondentes ao período de 2/01/2017 a 31/08/2017 (14.900 pontos).

Os coeficientes de determinação correspondentes variaram de $0{,}9731$ a $0{,}9995$, com média $0{,}9943$ e desvio padrão $0{,}0040$ para o Ibovespa. Para os ativos do índice Dow Jones, esses coeficientes variaram de $0{,}7685$ a $0{,}9995$, com média $0{,}9919$ e desvio padrão $0{,}0278$. O valor $0{,}7685$ foi encontrado para DIS UN Equity; o menor coeficiente de determinação computado para o restante dos ativos do Dow Jones é $0{,}9652$. Portanto, assumimos que o modelo de decaimento em lei de potência é satisfatório para a região analisada para ações do Ibovespa e Dow Jones, exceto para DIS UN Equity, que foi retirada do estudo.

7 Testes estatísticos

Testes estatísticos são testes utilizados para determinar diferenças estatisticamente significativas entre duas ou mais amostras (populações). Tais testes muitas vezes utilizam o conceito de teste de hipóteses. A partir de um determinado 'p-valor', são consideradas duas suposições: a hipótese nula ou a hipótese alternativa. A primeira normalmente afirma não haver diferenças entre as amostras comparadas. Já a segunda é aceita quando conseguimos rejeitar a primeira.

7.1 Boxplot

Boxplot é um diagrama de caixas capaz de representar algumas medidas estatísticas como valores mínimo e máximo de uma amostra, seus quartis e até mesmo dados que sejam atípicos. Tais medidas carregam informações importantes sobre vários aspectos de um conjunto de dados: centro, dispersão, assimetria, caudas e *outliers*.

Quartil é qualquer valor que divide a amostra em quatro partes iguais. O segundo quartil (Q2), também chamado de mediana, é o valor que corresponde a 50% da amostra. O primeiro quartil (Q1), que é a base da caixa, equivale à metade da primeira metade, ou seja, a 25% da amostra, e o terceiro quartil (Q3), o topo da caixa, é o valor equivalente à metade da segunda metade, que é 75% da amostra.

A partir dos quartis, em cada extremidade da caixa, partem duas linhas, também conhecidas como *whiskers* (que significa 'bigodes' em inglês) que delimitam os pontos mínimo e máximo da distribuição, respeitando um certo limite. Isso porque podem existir pontos discrepantes, ainda menores ou maiores, que são definidos como outliers (veja Figura 10).

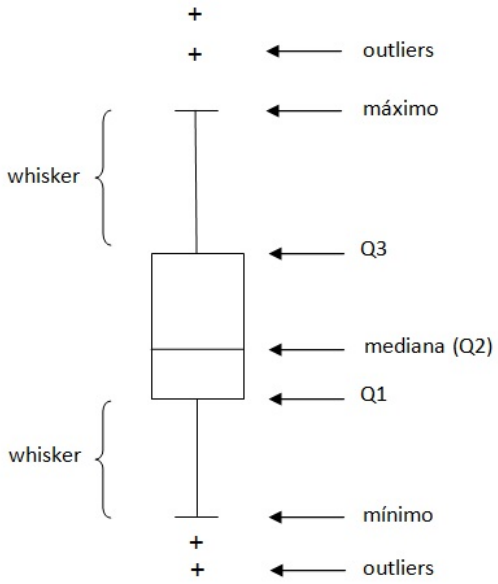

Figura 10 – Exemplo de um boxplot e suas estatísticas.

Diagramas como este são muito utilizados para comparar diversos conjuntos de dados, justamente porque são fáceis de interpretar. Do valor máximo até o valor mínimo está definida a amplitude dos dados, que tem relação com a dispersão. Quanto maior a amplitude, maior a variabilidade dos dados . A mediana constitui o centro da distribuição e, ainda, informa sobre o desvio de simetria. Se a mediana estiver centralizada na caixa, significa que os dados são simétricos, do contrário, se mais próxima de $Q1$ ou $Q3$, significa que os dados são assimétricos. As linhas ou whiskers têm relação com as caudas da distribuição, e fora das linhas estão representados os outliers desta.

Outlier é qualquer valor que ultrapasse a faixa interquartílica em mais de 1,5 vezes, seja na parte superior ou inferior da caixa. Então, para detectar os outliers é preciso conhecer o intervalo interquartílico (IQR - abreviatura para *Interquartile Range*), ou seja, a diferença entre o terceiro e o primeiro quartil ($IQR = Q3 - Q1$).

Lembrando que os dados sempre estiveram ordenados, depois de determinados os quartis ($Q2 = 50\%$, $Q1 = 25\%$ e $Q3 = 75\%$) da amostra são encontrados os pontos máximo e mínimo a partir dos cálculos:

- Para o valor máximo: $Q3 + 1{,}5 * IQR$
- Para o valor mínimo: $Q1 - 1{,}5 * IQR$

Os valores acima do valor máximo e abaixo do valor mínimo são chamados de valores atípicos ou outliers.

7.2 Teste ANOVA

O *ANOVA* é um teste paramétrico de variância, que compara diferentes grupos amostrais, para verificar se existem diferenças significativas entre suas médias. A hipótese nula é de que as médias populacionais sejam iguais, e a hipótese alternativa é de que pelo menos uma das médias comparadas seja diferente das outras.

Embora o teste ANOVA tenha como exigências, em princípio, independência das amostras, homogeneidade de suas variâncias e normalidade de distribuições, na prática basta que estas sejam aproximadamente normais e possuam variâncias próximas (não muito assimétricas), para que os resultados sejam considerados empiricamente verdadeiros [35].

O que o teste ANOVA faz é basicamente verificar o quão distante a média de cada grupo está da média global, com relação a sua variância, através do Teste F (nome dado por George W. Snedecor em homenagem a Ronald Fisher, famoso estatístico inglês). O Teste F ou Estatística F consiste na razão da variação entre os grupos amostrais pela variação dentro de cada grupo:

$$F = \frac{\text{variabilidade entre os grupos amostrais}}{\text{variabilidade dentro de cada grupo}}$$

A variabilidade entre os grupos amostrais é dada por:

$$\sum_{i=1}^{K} n_i(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2/(K-1) \tag{40}$$

onde n é o número de elementos em cada i-ésimo grupo, $\bar{Y}_i$ a média de cada i-ésimo grupo, $\bar{Y}$ a média global dessas amostras e K o número de amostras.

A variabilidade de cada grupo é dada por:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right) / (N-K) \tag{41}$$

onde Y_{ij} é a j-ésima posição do i-ésimo dos grupos e N é o tamanho global da amostra. Esta estatística F segue a distribuição F com graus de liberdade $d_1 = K-1$ e $d_2 = N-K$ sob a hipótese nula. A estatística será grande se a variabilidade entre grupos for grande em relação à variabilidade dentro do grupo, o que é improvável de acontecer se as médias populacionais dos grupos tiverem o mesmo valor.

O software Matlab, usado para realizar este teste, retorna um gráfico de caixa para cada amostra, e uma tabela com dados, dentre eles o p-valor, que costuma ser analisado conforme o nível de significância $\alpha = 0{,}05$.

Ainda que este teste comprove a diferença entre distribuições comparadas, ele não mostra onde essas diferenças ocorrem exatamente: em quais grupos. Para isso é preciso

que outros testes, de comparação múltipla, sejam aplicados. O teste *Tukey*, descrito na próxima seção, é um destes testes que faz a comparação por pares, indicando em que grupos tal diferença é significativa.

7.3 Teste Tukey

Desenvolvido por John Wilder Tukey, em 1949, é também conhecido como Teste de Tukey da diferença honestamente significativa. Isso se deve ao fato do teste ser exato para amostras de tamanhos iguais. Este teste apresenta, como resultado, p-valores para comparações dois a dois das amostras disponíveis, referentes à hipótese nula de que as amostras possuem a mesma média. Tais valores devem ser analisados pelo nível de significância ou taxa de erro escolhida, dada por α (o software utilizado, Matlab, tem por default $\alpha = 0{,}05$), e o intervalo de confiança, dado por $1 - \alpha$. Desta forma todos os possíveis grupos estatisticamente diferentes são conhecidos.

Se as amostras não tiverem tamanhos iguais, ainda é possível utilizar este teste, porém seu resultado não é exato, mas sim aproximado, e recebe uma adaptação, passando ao nome de Tukey Kramer.

7.4 Teste Kruskal-Wallis

O *Kruskal-Wallis*, assim como o ANOVA, testa diferentes grupos para identificar diferenças estatisticamente significativas entre eles, porém, por ser uma versão não paramétrica, não impõe restrições às amostras. Aqui a hipótese nula é de que as amostras venham da mesma distribuição, e a hipótese alternativa é de que, pelo menos uma, não venha desta distribuição. No Matlab, este teste também retorna um gráfico de caixa para cada amostra comparada, e o p-valor, que é avaliado segundo o nível de significância estabelecido, no caso $\alpha = 0{,}05$.

7.5 Coeficiente de Pearson

Introduzido na estatística matemática por Karl Pearson, o *coeficiente de correlação de Pearson* (CP) mede o grau de correlação linear entre duas populações amostrais quantitativas. No Matlab, este teste é representado por p-valores e coeficientes de correlação. No caso dos p-valores, a hipótese nula é de que não há relação, e o nível de significância costuma ser escolhido como $\alpha = 0{,}05$. Quanto aos coeficientes, estes exibem valores entre -1 e 1, que indicam se há ou não associação, e, caso haja, se essa associação é negativa (valores próximos de -1) ou positiva (valores próximos de 1). Na correlação negativa o valor de uma variável aumenta quando o valor da outra diminui, e na correlação positiva

a variabilidade de uma vai ao encontro da variabilidade da outra. Valores próximos de 0 apontam para ausência de correlação (Figura 11).

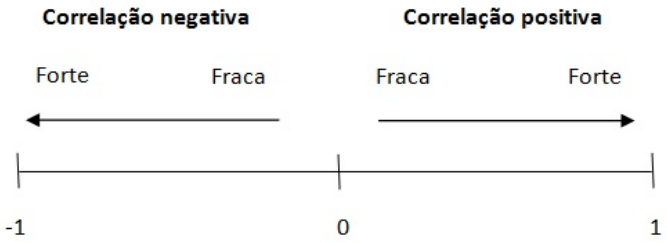

Figura 11 – Ilustração para grau de correlação.

8 Metodologia

Neste capítulo são apresentados os dados empíricos utilizados ao longo de todo trabalho e são descritos, brevemente, os três experimentos que compreendem toda análise realizada.

8.1 Dados empíricos

Os dados utilizados para análise são referentes a 57 ativos do índice Ibovespa (vide Apêndice A) e 29 do índice DJIA (vide Apêndice B), coletados através da Plataforma Bloomberg. Tais dados compreendem os oito primeiros meses de negociação do preço de cada ação em 2017. Nesses dois quadrimestres os preços foram computados a cada cinco minutos, e então dispostos no formato de candles completos, totalizando 14.900 candles para o índice Ibovespa, e 13.104 para o índice Dow Jones. Cada um dos ativos que compõem os índices contém assim quatro séries temporais de preços: preços de abertura, de máximo, de mínimo e de fechamento. Dos 59 ativos que compunham o índice Ibovespa no período analisado, dois foram descartados neste estudo: a ELET6 foi desconsiderada por não fazer parte da carteira teórica do Ibovespa no primeiro quadrimestre, e a CPFE3 por conter um número excessivo de retornos nulos, o que impede o cálculo de expoentes de Hurst com q negativo para os menores tamanhos de régua (Capítulo 5). Já do conjunto de 30 ativos do DJIA, excluímos DIS UN, por não apresentar distribuição de retornos com decaimento em lei de potência no intervalo escolhido para investigação (ver Capítulo 6 para maiores detalhes).

8.2 Experimentos utilizados na comparação dos resultados referentes a abertura, máximo, mínimo e fechamento

Nesta contribuição, *stylized facts* são computados para um conjunto de ações do mercado acionário americano e outro do mercado acionário brasileiro. São eles: largura do espectro de singularidade, expoente de Hurst, coeficiente de decaimento em lei de potência de distribuições de retornos, e acurácia de um modelo de previsão baseado em equações diferenciais. Em cada caso, o cálculo é realizado para cada série (abertura, máximo, mínimo e fechamento) de cada ação. A comparação entre as estatísticas referentes a diferentes componentes do candlestick é feita agregando-se os resultados de cada conjunto de ações (provenientes do Dow Jones ou provenientes do Ibovespa), separadamente. Assim, médias e desvios padrões são calculados, e testes estatísticos são aplicados, usando-se como amostras os resultados de cada grupo, sem mistura de dados oriundos do mercado

americano com aqueles provenientes do mercado brasileiro. Diferentes formas de agregar os resultados e de investigar os conjuntos assim obtidos correspondem aos Capítulos 9, 10 e 11 desta tese. No Capítulo 9, para cada grandeza investigada e para cada mercado, os dados referentes a abertura são agregados em um grupo, a máximo em outro grupo, a mínimo em um terceiro e a fechamento em um quarto grupo. No Capítulo 10, a forma de agregar é a mesma, mas os resultados são tratados de maneira a extrair a sua variação devida à mudança de ativo, o que permite o foco na dependência concernente à componente do candle. Isto é feito da forma descrita a seguir. Consideremos que $\Phi(s,c)$ representa uma estatística calculada para o ativo s e a componente de candle c. Calcula-se, para cada s, a média de $\Phi(s,c)$ sobre as quatro instâncias de c:

$$\Delta\Phi\left(s,c\right) = \Phi(s,c) - \overline{\Phi}\left(s\right), \tag{42}$$

Esta média, que é função de s, é então subtraída de cada $\Phi(s,c)$ referente ao mesmo s, de forma que são obtidos

$$\overline{\Phi}(s) = \frac{1}{4}\sum_{c}\Phi\left(s,c\right) \tag{43}$$

As grandezas $\Delta\Phi(s,c)$ tornam mais clara a dependência das estatísticas em relação a c. No Capítulo 11, o tratamento dos resultados é similar ao do Capítulo 10, mas a forma de agregar muda: os conjuntos são formados por dados de abertura e fechamento reunidos no mesmo grupo, e dados de máximo e mínimo formando outro grupo, para cada grandeza e cada mercado.

9 Análise e discussão dos resultados - Experimento I

Este primeiro experimento é realizado com os dados brutos, ou seja, o conjunto de estatisticas sem tratamento. Iniciamos nossa análise pelo mercado brasileiro e então repetimos toda investigação para o mercado americano.

9.1 Índice Ibovespa

A Tabela 1 exibe as médias e desvios padrões dos expoentes de Hurst generalizados referentes ao conjunto de ações do índice Ibovespa, computados pelo método MF-DFA (análise multifractal de flutuações sem tendência), para cada uma das quatro séries: abertura, máximo, mínimo e fechamento. Para o cálculo dos expoentes de Hurst generalizados, utilizamos valores de q que vão de -3 a 3, com um intervalo de $0{,}2$ entre um q e outro, totalizando um espectro de singularidade com 31 diferentes valores de q (vide Capítulo 5). Notamos que as séries de máximo e de mínimo apresentam, para cada valor de q, expoentes maiores que as de abertura e de fechamento até o valor de $q = 1{,}8$ (os valores estão em negrito), sendo que para os valores negativos de q essa ocorrência é ainda mais perceptível, mesmo diminuindo ao longo do espectro.

Para melhor visualização destes resultados, construímos a Figura 12 da forma descrita a seguir. A cada valor de q computamos a média dos expoentes relativos às quatro séries:

$$\left\langle \bar{H}\left(q\right)\right\rangle = (\bar{H}_a\left(q\right) + \bar{H}_M\left(q\right) + \bar{H}_m\left(q\right) + \bar{H}_f\left(q\right))/4, \tag{44}$$

onde $\bar{H}_a\left(q\right)$ é a média dos expoentes calculados sobre as séries de abertura das 57 ações do índice Ibovespa; de forma correspondente, $\bar{H}_M\left(q\right)$ refere-se às séries de máximo, $\bar{H}_m\left(q\right)$ às de mínimo e $\bar{H}_f\left(q\right)$ às de fechamento. A Figura 12 mostra as diferenças entre tais expoentes médios e suas respectivas médias gerais:

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{H}_a\left(q\right) &= \bar{H}_a\left(q\right) - \left\langle \bar{H}\left(q\right)\right\rangle, \\
\Delta\bar{H}_M\left(q\right) &= \bar{H}_M\left(q\right) - \left\langle \bar{H}\left(q\right)\right\rangle, \\
\Delta\bar{H}_m\left(q\right) &= \bar{H}_m\left(q\right) - \left\langle \bar{H}\left(q\right)\right\rangle, \\
\Delta\bar{H}_f\left(q\right) &= \bar{H}_f\left(q\right) - \left\langle \bar{H}\left(q\right)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{45}$$

Tabela 1 – Médias e desvios-padrões dos expoentes de Hurst generalizados de 57 ações do índice Ibovespa.

Ibovespa				
q	ABERTURA	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
-3	$0{,}5609(0{,}0477)$	$\mathbf{0{,}5733(0{,}0512)}$	$\mathbf{0{,}5733(0{,}0501)}$	$0{,}5620(0{,}0482)$
$-2{,}8$	$0{,}5658(0{,}0410)$	$\mathbf{0{,}5769(0{,}0442)}$	$\mathbf{0{,}5773(0{,}0416)}$	$0{,}5669(0{,}0417)$
$-2{,}6$	$0{,}5622(0{,}0405)$	$\mathbf{0{,}5726(0{,}0433)}$	$\mathbf{0{,}5728(0{,}0405)}$	$0{,}5632(0{,}0411)$
$-2{,}4$	$0{,}5586(0{,}0401)$	$\mathbf{0{,}5683(0{,}0425)}$	$\mathbf{0{,}5685(0{,}0395)}$	$0{,}5596(0{,}0405)$
$-2{,}2$	$0{,}5552(0{,}0398)$	$\mathbf{0{,}5642(0{,}0418)}$	$\mathbf{0{,}5642(0{,}0387)}$	$0{,}5560(0{,}0401)$
-2	$0{,}5518(0{,}0394)$	$\mathbf{0{,}5601(0{,}0411)}$	$\mathbf{0{,}5600(0{,}0382)}$	$0{,}5525(0{,}0397)$
$-1{,}8$	$0{,}5485(0{,}0392)$	$\mathbf{0{,}5562(0{,}0405)}$	$\mathbf{0{,}5560(0{,}0378)}$	$0{,}5492(0{,}0394)$
$-1{,}6$	$0{,}5452(0{,}0389)$	$\mathbf{0{,}5523(0{,}0400)}$	$\mathbf{0{,}5522(0{,}0377)}$	$0{,}5459(0{,}0391)$
$-1{,}4$	$0{,}5421(0{,}0387)$	$\mathbf{0{,}5486(0{,}0396)}$	$\mathbf{0{,}5485(0{,}0375)}$	$0{,}5426(0{,}0389)$
$-1{,}2$	$0{,}5390(0{,}0386)$	$\mathbf{0{,}5450(0{,}0393)}$	$\mathbf{0{,}5449(0{,}0375)}$	$0{,}5395(0{,}0388)$
-1	$0{,}5359(0{,}0384)$	$\mathbf{0{,}5415(0{,}0391)}$	$\mathbf{0{,}5415(0{,}0374)}$	$0{,}5364(0{,}0386)$
$-0{,}8$	$0{,}5329(0{,}0383)$	$\mathbf{0{,}5381(0{,}0389)}$	$\mathbf{0{,}5382(0{,}0374)}$	$0{,}5334(0{,}0386)$
$-0{,}6$	$0{,}5299(0{,}0383)$	$\mathbf{0{,}5347(0{,}0388)}$	$\mathbf{0{,}5349(0{,}0374)}$	$0{,}5304(0{,}0385)$
$-0{,}4$	$0{,}5270(0{,}0383)$	$\mathbf{0{,}5313(0{,}0388)}$	$\mathbf{0{,}5316(0{,}0374)}$	$0{,}5273(0{,}0385)$
$-0{,}2$	$0{,}5240(0{,}0383)$	$\mathbf{0{,}5280(0{,}0388)}$	$\mathbf{0{,}5283(0{,}0374)}$	$0{,}5243(0{,}0385)$
0	$0{,}5209(0{,}0383)$	$\mathbf{0{,}5246(0{,}0388)}$	$\mathbf{0{,}5250(0{,}0375)}$	$0{,}5212(0{,}0385)$
$0{,}2$	$0{,}5178(0{,}0384)$	$\mathbf{0{,}5211(0{,}0389)}$	$\mathbf{0{,}5216(0{,}0376)}$	$0{,}5180(0{,}0386)$
$0{,}4$	$0{,}5144(0{,}0385)$	$\mathbf{0{,}5174(0{,}0390)}$	$\mathbf{0{,}5180(0{,}0377)}$	$0{,}5146(0{,}0387)$
$0{,}6$	$0{,}5108(0{,}0387)$	$\mathbf{0{,}5135(0{,}0392)}$	$\mathbf{0{,}5141(0{,}0378)}$	$0{,}5110(0{,}0388)$
$0{,}8$	$0{,}5068(0{,}0388)$	$\mathbf{0{,}5092(0{,}0393)}$	$\mathbf{0{,}5098(0{,}0380)}$	$0{,}5069(0{,}0390)$
1	$0{,}5023(0{,}0389)$	$\mathbf{0{,}5045(0{,}0394)}$	$\mathbf{0{,}5050(0{,}0381)}$	$0{,}5025(0{,}0390)$
$1{,}2$	$0{,}4972(0{,}0390)$	$\mathbf{0{,}4992(0{,}0395)}$	$\mathbf{0{,}4995(0{,}0381)}$	$0{,}4973(0{,}0391)$
$1{,}4$	$0{,}4911(0{,}0390)$	$\mathbf{0{,}4931(0{,}0396)}$	$\mathbf{0{,}4931(0{,}0381)}$	$0{,}4914(0{,}0391)$
$1{,}6$	$0{,}4840(0{,}0390)$	$\mathbf{0{,}4861(0{,}0396)}$	$\mathbf{0{,}4855(0{,}0381)}$	$0{,}4844(0{,}0390)$
$1{,}8$	$0{,}4757(0{,}0390)$	$\mathbf{0{,}4780(0{,}0396)}$	$\mathbf{0{,}4767(0{,}0382)}$	$0{,}4763(0{,}0390)$
2	$0{,}4624(0{,}0390)$	$0{,}4652(0{,}0396)$	$0{,}4629(0{,}0383)$	$0{,}4633(0{,}0390)$
$2{,}2$	$0{,}4550(0{,}0398)$	$0{,}4581(0{,}0403)$	$0{,}4547(0{,}0393)$	$0{,}4563(0{,}0396)$
$2{,}4$	$0{,}4427(0{,}0410)$	$0{,}4465(0{,}0412)$	$0{,}4418(0{,}0401)$	$0{,}4445(0{,}0410)$
$2{,}6$	$0{,}4295(0{,}0427)$	$0{,}4340(0{,}0427)$	$0{,}4279(0{,}0427)$	$0{,}4318(0{,}0423)$
$2{,}8$	$0{,}4156(0{,}0451)$	$0{,}4209(0{,}0448)$	$0{,}4134(0{,}0454)$	$0{,}4185(0{,}0444)$
3	$0{,}3988(0{,}0478)$	$0{,}4051(0{,}0472)$	$0{,}3961(0{,}0484)$	$0{,}4022(0{,}0470)$

Na Figura 12, os valores referentes a máximo e mínimo começam maiores que os de relativos a abertura e fechamento. No entanto, a partir de $q = 1{,}8$, a curva de mínimo decai, rumando para menores valores que todas as demais, e a de máximo apresenta uma curva crescente, tornando-se ainda mais alta que as outras. A série de abertura começa com valores médios menores, assim como a de fechamento, mas vai aumentando até $q = 1{,}8$, quando começa a decrescer levemente, ou seja, começa a apresentar uma queda com relação aos valores médios de seus expoentes. Já a série de fechamento mostra um consistente aumento.

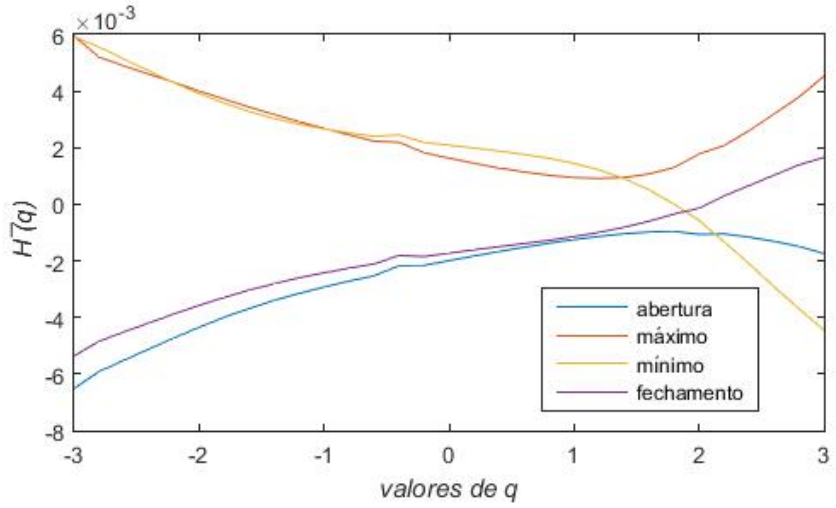

Figura 12 – Diferenças entre expoentes médios e suas respectivas médias gerais (Ibovespa) (vide Equações 44 e 45).

Além do expoente de Hurst generalizado (EHG), contamos com outras ferramentas para análise dos dados empíricos. São elas: a acurácia (AM) resultante da aplicação do modelo de previsão descrito no Capítulo 4 e o coeficiente de decaimento (CD) em lei de potência da cauda da distribuição de retornos acumulada complementar. Também, a partir dos resultados da Tabela 1, investigamos em detalhe o expoente de Hurst (EH) clássico e um generalizado, referentes a $q = 2$ e $q = -3$, respectivamente, bem como a largura do espectro de singularidade (LES). De posse desses resultados, seguimos tentando relacioná-los. A Tabela 2 contém os resultados de tais análises. Nota-se que os valores de AM são maiores nas séries de abertura e fechamento. O mesmo comportamento é percebido em relação a CD (em módulo). Já os valores de LES apresentam comportamento oposto, valores maiores para as séries de máximo e mínimo. Isto pode ser entendido a partir da maior variação de $H(q)$, com q, que ocorre para máximo e mínimo (vide Tabela 1 e Figura 12). Para o expoente de Hurst com $q = 2$ não vemos essa diferenciação de comportamento entre abertura/fechamento e máximo/mínimo, mas para $q = -3$ já notamos novamente valores maiores para máximo e mínimo.

Tabela 2 – Médias e desvios-padrões das acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), larguras do espectro de singuralidade (LES) e expoentes de Hurst (EH) com $q = 2$ e $q = -3$, das quatro séries de 57 ações do índice Ibovespa.

Ibovespa				
	ABERTURA	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
AM	$0{,}5241(0{,}0177)$	$0{,}5141(0{,}0133)$	$0{,}5159(0{,}0125)$	$0{,}5250(0{,}0160)$
CD	$-2{,}7724(0{,}2293)$	$-2{,}5319(0{,}2089)$	$-2{,}6209(0{,}2161)$	$-2{,}6414(0{,}2135)$
LES	$0{,}3982(0{,}0978)$	$0{,}4025(0{,}1041)$	$0{,}4312(0{,}1040)$	$0{,}3899(0{,}0987)$
EH(2)	$0{,}4624(0{,}0390)$	$0{,}4652(0{,}0396)$	$0{,}4629(0{,}0383)$	$0{,}4633(0{,}0390)$
EH(-3)	$0{,}5654(0{,}0477)$	$0{,}5770(0{,}0512)$	$0{,}5774(0{,}0501)$	$0{,}5666(0{,}082)$

Apesar de termos notado algumas semelhanças entre abertura e fechamento, bem como entre máximo e mínimo, temos como objetivo verificar todas as componentes do candlestick para conhecer todas as possíveis diferenças entre elas.

9.1.1 Análise estatística dos resultados

Nossa investigação começa por uma comparação das estatísticas aplicadas a cada dimensão do candle.

9.1.1.1 Acurácias do modelo (AM)

Começamos a análise dos resultados, referentes às acurácias, pelo gráfico Boxplot. Aqui, comparamos a variação dos dados das quatro distribuições: abertura, máximo, mínimo e fechamento, através de suas respectivas caixas (Figura 13). Podemos notar que as caixas têm tamanhos próximos, todas com valores acima de $0{,}5$, e todas com outilers. Os outliers (valores atípicos) estão representados pelas cruzes vermelhas. Abertura e fechamento, no entanto, são mais parecidas entre si: as medianas (linhas vermelhas no interior das caixas) quase coincidem, e as amplitudes, as linhas que se projetam a partir das caixas, também são próximas. Lembrando que as amplitudes estão relacionadas às caudas das distribuições (ver Capítulo 7, Secão 7.1). Máximo e mínimo são um pouco diferentes. Máximo possui uma amplitude menor e mínimo tem sua mediana centralizada. Contudo, o boxplot é apenas uma análise preliminar e não sabemos se estas são diferenças relevantes.

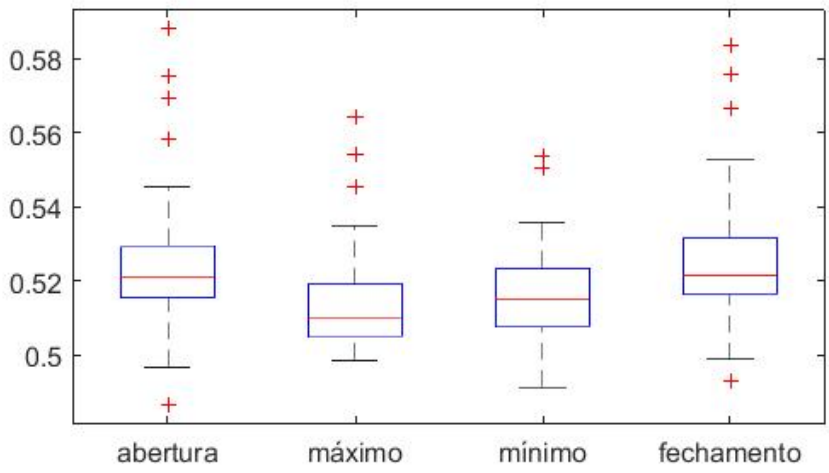

Figura 13 – Boxplot das acurácias do modelo do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Para fundamentar uma conclusão mais definitiva, aplicamos o ANOVA, um teste paramétrico de variância, cujo p-valor muito baixo, $5{,}1294 \times 10^{-5}$, pôde rejeitar a hipótese nula de que as distribuições têm a mesma média. Isto significa que pelo menos uma delas é diferente estatisticamente.

O teste ANOVA tem como exigência que as amostras comparadas sejam independentes, que haja homogeneidade das variâncias entre todas as amostras, e, ainda, que estas sigam uma distribuição normal. Porém, estes pressupostos não precisam ser rigorosamente satisfeitos na prática. Segundo [35], basta que as amostras não sejam muito assimétricas e tenham variâncias próximas. Também, de acordo com a referência [36], a partir do teorema central do limite, essas suposições sobre normalidade podem ser desconsideradas para uma amostra grande, $N \geqslant 40$.

Dada a origem da amostra, consideramos que os dados são independentes. Trata-se de ações de um índice financeiro, relacionadas a diferentes setores da economia, cuja ordem de amostragem pode ser mudada, alterando o resultado do teste sem prejuízo da autenticidade dos dados. O gráfico de dispersão (Figura 14) sugere não haver um padrão entre as amostras.

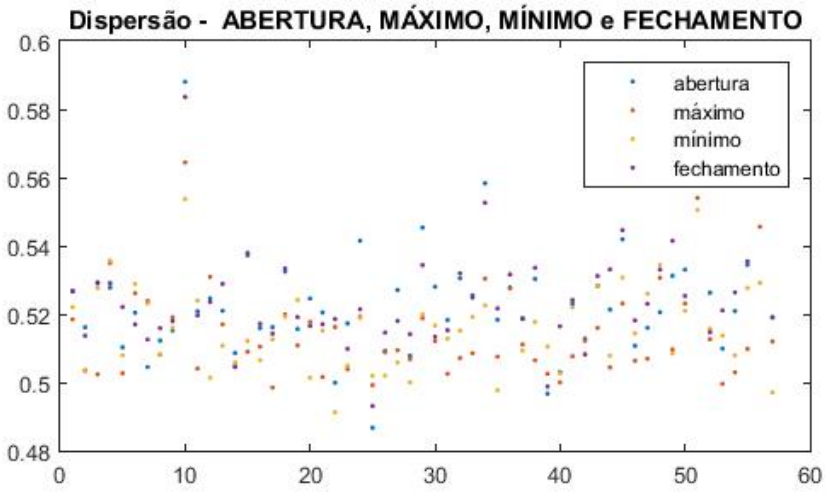

Figura 14 – Gráfico de dispersão das AM de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Quanto à normalidade, temos os gráficos Q-Q, que comparam duas distribuições através de seus quantis, cotejando a amostra que desejamos verificar com uma distribuição gaussiana (Figura 15). Os QQ-plots das amostras mostram que, no que diz respeito à maior parte dos pontos, as distribuições não são muito assimétricas, e sim aproximadamente normais (estão coincidindo com a reta vermelha, tracejada para a normal). Além disso, cada amostra possui 57 dados, que excede o tamanho mínimo para considerarmos normalidade, como especificado acima. Sendo assim, assumimos como válido o resultado do teste ANOVA, de rejeição da hipótese de que as distribuições têm a mesma média.

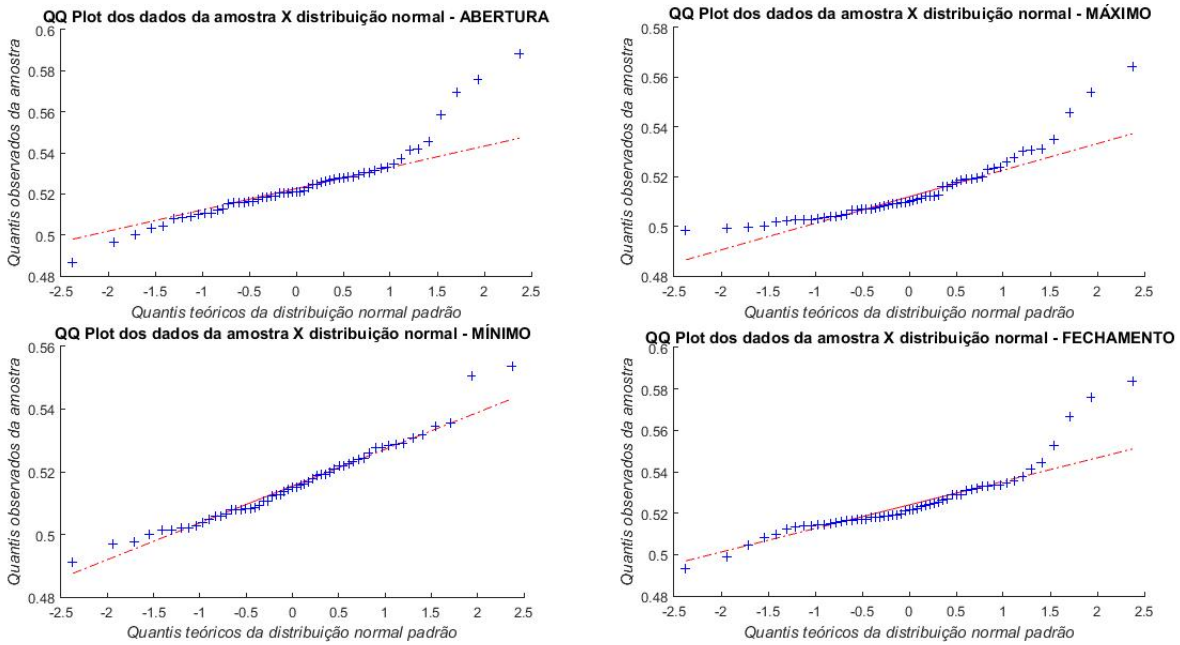

Figura 15 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às AM de 57 ativos do índice Ibovespa.

Apesar do teste ANOVA identificar alguma diferença entre as amostras comparadas, ele não identifica onde se encontra tal diferença, em qual grupo exatamente, ou se em mais de um. Para isso, utilizamos o teste Tukey, que faz uma comparação múltipla em toda amostra.

A Tabela 3 apresenta os p-valores do teste Tukey par a par. Considerando a significância de $0{,}05$, as diferenças estatísticas prevalecem. Todos os p-valores que estão abaixo do valor de referência, em negrito, sinalizam tais diferenças. Somente dois pares são considerados estatisticamente iguais: abertura e fechamento, e máximo e mínimo. Apesar disso, de acordo com seus intervalos de confiança, estes pares formam dois grupos diferentes (ver Figura 16). De um lado da figura máximo e mínimo se mantem próximos, enquanto o mesmo acontece com abertura e fechamento na outra ponta, e os dois grupos não possuem pontos em comum.

Tabela 3 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (AM do Ibovespa).

	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
ABERTURA	$\mathbf{0{,}0021}$	$\mathbf{0{,}0179}$	$0{,}9890$
MÁXIMO	-	$0{,}9234$	$\mathbf{0{,}0006}$
MÍNIMO	-	-	$\mathbf{0{,}0064}$

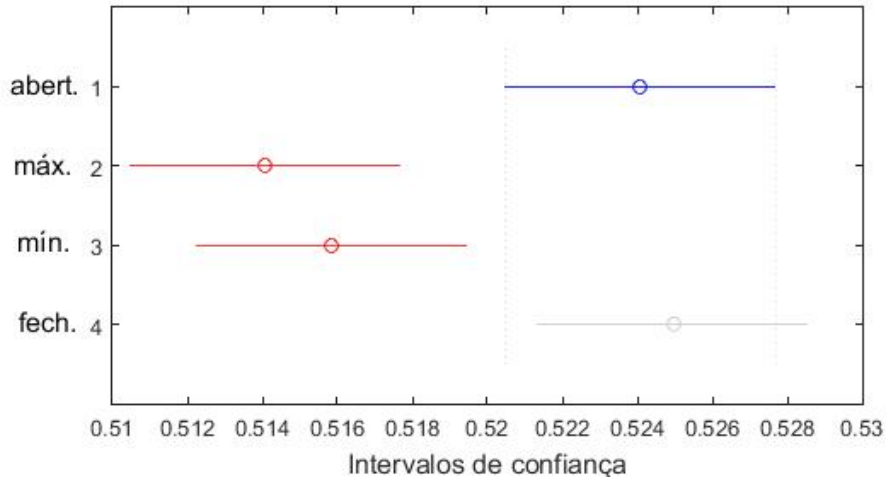

Figura 16 – Intervalos de confiança relativos às acurácias do modelo para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Ibovespa).

Optamos por aplicar também o teste Kruskal-Wallis. Muito parecido com o ANOVA, tem a vantagem de não exigir normalidade, já que se trata de um método não paramétrico. O baixo p-valor, $1{,}4980 \times 10^{-6}$, rejeita a hipótese de que as populações vêm da mesma distribuição. Isso significa que há pelo menos uma estatisticamente diferente entre elas. O que reforça o teste anterior.

Assim, a partir destes testes, temos base estatística para concluir que as acurácias do modelo de previsão são maiores para abertura e fechamento. Isto pode ter impacto se o modelo de previsão for utilizado como parte de um modelo de operação no mercado. A menor acurácia para máximo e mínimo pode ser um problema se a estratégia envolver stops, cujo acionamento está mais aproximadamente relacionado a máximo e mínimo do que abertura e fechamento.

9.1.1.2 Coeficientes de decaimento (CD)

Pelo boxplot relacionado aos coeficientes de decaimento do índice Ibovespa (Figura 17), é possível ver que as caixas têm tamanhos parecidos, exceto pela primeira: a de abertura. Esta parece um pouco maior, e possui uma cauda superior um pouco mais longa que as demais. É possível notar também que as medianas de abertura e máximo se mostram mais distantes das outras duas. Além disso, mínimo e fechamento possuem mais outliers. Estas são algumas diferenças perceptíveis, mas serão diferenças estatisticamente significativas? O teste ANOVA, juntamente com o teste Tukey, pode embasar tais impressões e ainda trazer mais detalhes.

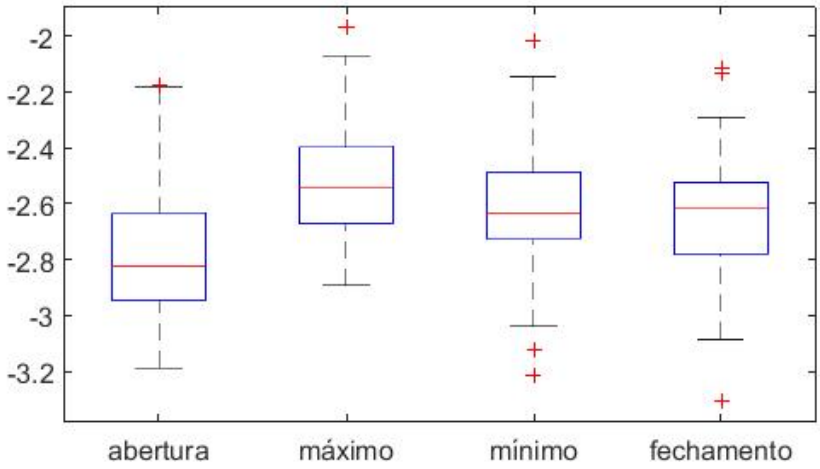

Figura 17 – Boxplot dos coeficientes de decaimento do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Lembremos que as amostras são independentes de acordo com sua origem, um índice financeiro. Seu gráfico de dispersão (Figura 18) pode mudar de aparência conforme alteramos a ordem das ações, o que indica falta de correlação.

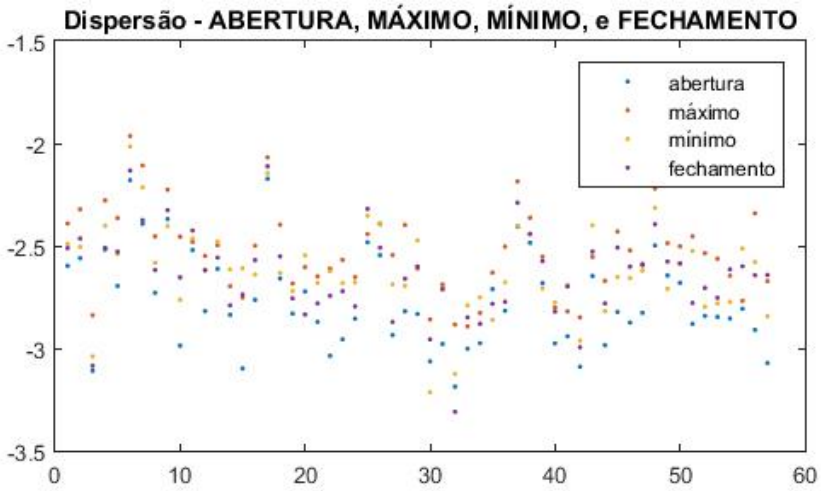

Figura 18 – Gráfico de dispersão dos CD do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Os gráficos QQ das amostras dos coeficientes de decaimento denotam distribuições aproximadamente normais (Figura 19). Consideramos como tal pela quantidade de pontos alinhados à reta correspondente à normal padrão. Ademais, estas já seriam assim consideradas pelo tamanho $N \geqslant 40$.

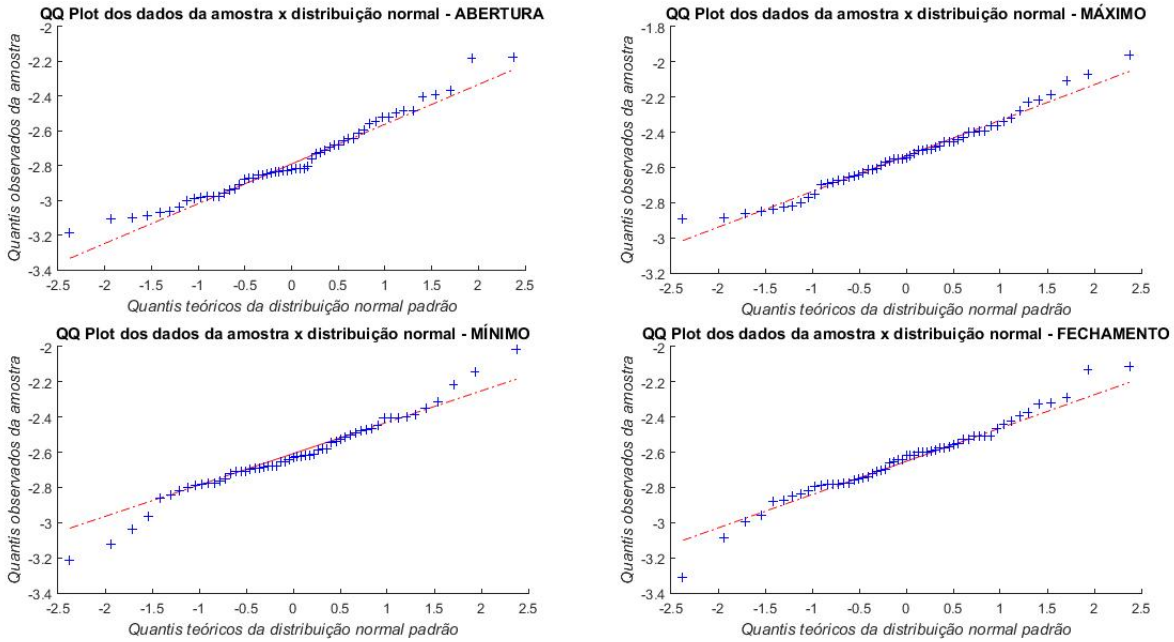

Figura 19 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos CD de 57 ativos do índice Ibovespa.

Após essas observações, com o resultado do ANOVA, $p = 2{,}8354 \times 10^{-7}$, podemos rejeitar a hipótese das distribuições possuírem a mesma média, confirmando que ao menos uma diverge estatisticamente.

O teste Tukey, através da comparação múltipla (Tabela 4), mostra muitas diferenças estatísticas entre as componentes (valores em negrito) também nesta ferramenta, mas o que mais se destaca é a distinção da componente abertura em relação às outras três, como suposto anteriormente a partir do boxplot (Figura 20). O intervalo de confiança correspondente à distribuição de abertura não coincide com nenhum dos outros três.

Tabela 4 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (CD do Ibovespa).

	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
ABERTURA	$\mathbf{2{,}35 \times 10^{-8}}$	$\mathbf{0{,}0011}$	$\mathbf{0{,}0069}$
MÁXIMO	-	$0{,}1265$	$\mathbf{0{,}0358}$
MÍNIMO	-	-	$0{,}9583$

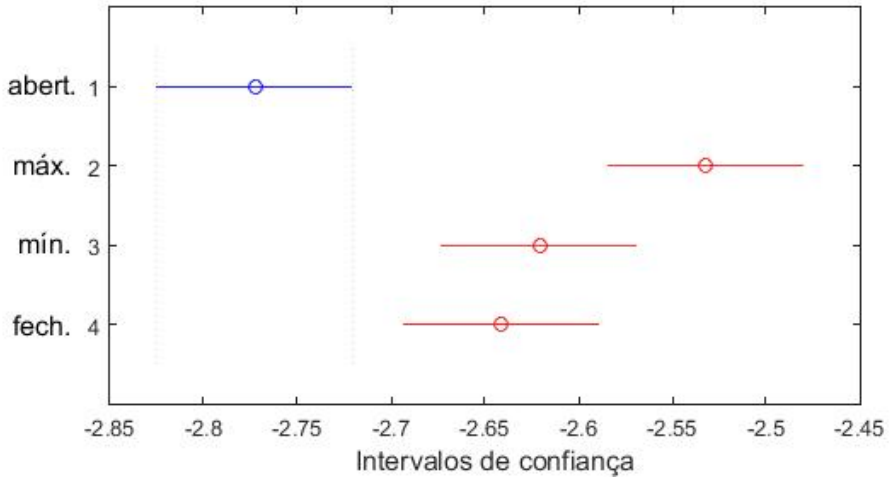

Figura 20 – Intervalos de confiança relativos aos coeficientes de decaimento para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Ibovespa).

O teste Kruskal-Wallis, com p-valor igual a $3{,}4702 \times 10^{-7}$, sustenta que ao menos uma das amostras possui diferença estatística: vem de uma população com distribuição diferente das outras.

A partir da Tabela 2, observamos que máximo e mínimo apresentam caudas mais pesadas que abertura e fechamento (decaimento mais lento, caracterizado por coeficientes menores em módulo). Esse resultado poderia ser esperado, uma vez que máximo e mínimo trazem informação sobre valores extremos dentro de um candle: variações de preços muito longe da média, que podem não ter impacto em séries de abertura e fechamento se houver uma reversão dentro do mesmo candle, serão sempre captadas pelas séries de máximo e mínimo. Apesar dos resultados da Tabela 2 sugerirem isso, os testes estatísticos que realizamos não nos permitem conclusões definitivas neste momento. Novas metodologias de análise podem ser buscadas neste contexto.

9.1.1.3 Larguras do espectro de singularidade (LES)

Examinando o boxplot referente às LES, podemos notar que as caixas são parecidas, mas mínimo e fechamento demonstram uma pequena diferença de amplitude (caudas mais longas). Além disso, ambas não possuem outliers (Figura 21). No entanto, as medianas referentes às quatro distribuições são próximas entre si. Nesse caso, é ainda mais difícil qualquer conclusão a partir deste teste. Para verificar se há diferenças estatisticamente relevantes entre as distribuições, precisamos da ajuda do teste paramétrico.

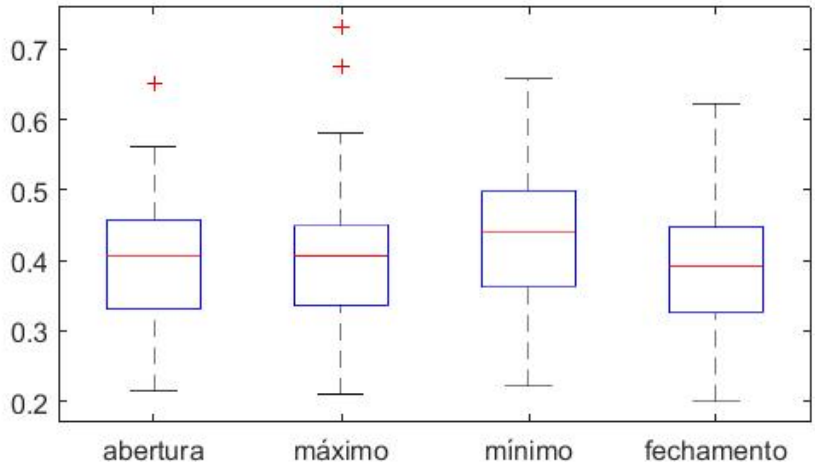

Figura 21 – Boxplot das larguras do espectro de singularidade do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

As LES são compostas de distribuições independentes, e a razão é a mesma já exposta anteriormente (índice financeiro com diferentes ações). Além disso, o gráfico de dispersão ilustra essa afirmação. As distribuições parecem livres de tendência (Figura 22).

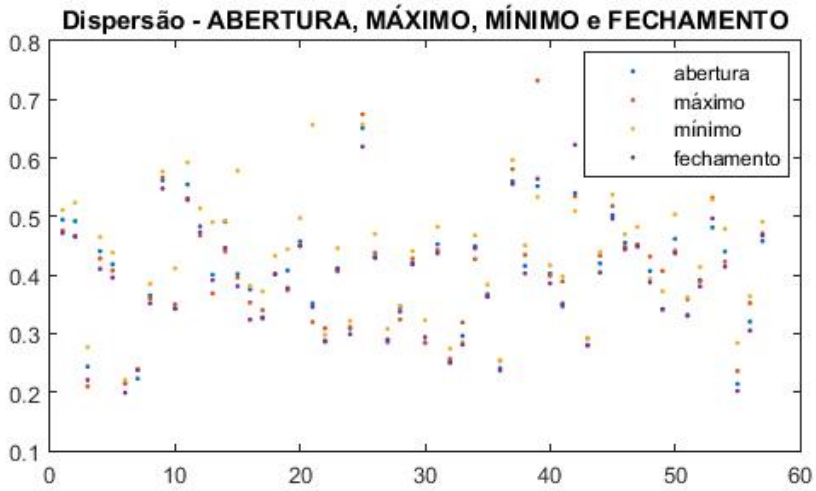

Figura 22 – Gráfico de dispersão das LES do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Temos aqui a constatação dos QQ-plots quanto à normalidade das amostras (Figura 23), e, novamente, temos o tamanho das amostras ($N = 57$) para amparar essa caracterização.

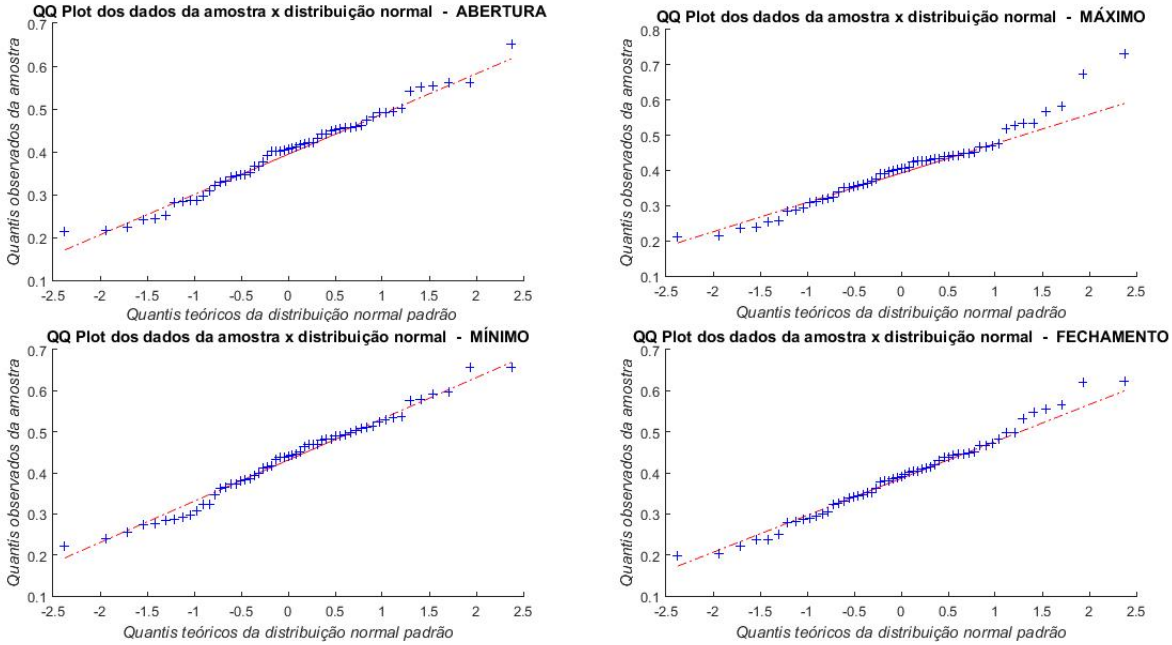

Figura 23 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às LES de 57 ativos do índice Ibovespa.

Dito isto, o teste ANOVA se torna válido. Seu p-valor $0{,}1486$, acima de $0{,}05$, não rejeita a hipótese nula das distribuições possuírem médias iguais. Na tabela do teste Tukey, de comparação múltipla (Tabela 5), e no diagrama de intervalos de confiança (Figura 24) podemos ver que todas as dimensões, aqui nesta ferramenta, são consideradas semelhantes estatisticamente. Todos os p-valores são muito altos e todos os intervalos de confiança, referentes às quatro distribuições, coincidem em alguns pontos.

Tabela 5 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (LES do Ibovespa).

	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
ABERTURA	$0{,}9959$	$0{,}3017$	$0{,}9717$
MÁXIMO	-	$0{,}4276$	$0{,}9102$
MÍNIMO	-	-	$0{,}1283$

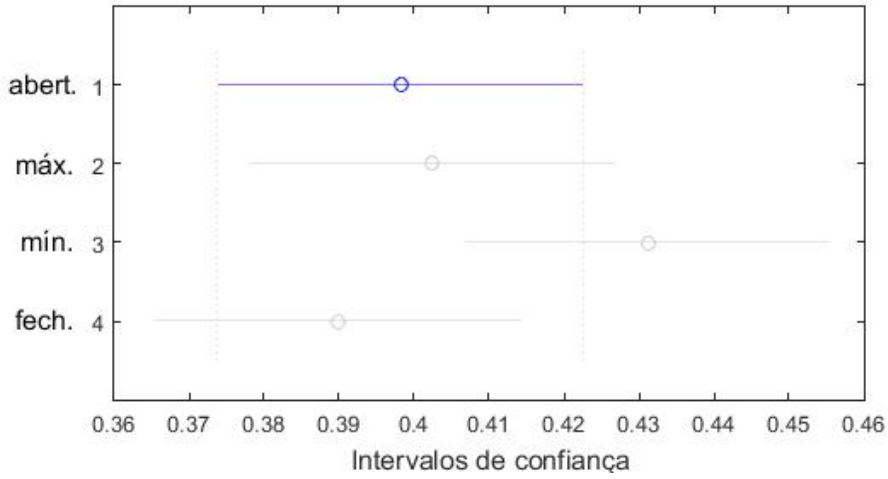

Figura 24 – Intervalos de confiança relativos às larguras do espectro de singularidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Ibovespa).

O teste Kruskal-Wallis, com alto p-valor $(0{,}1165)$, não rejeita a hipótese das distribuições virem da mesma população, corroborando o teste ANOVA.

Na Tabela 2 observamos que as LES referentes a máximo e mínimo são maiores que as de abertura e fechamento. Os testes ANOVA e Tukey não dão suporte estatístico apoiando essa conclusão. As LES estão relacionadas a correlações não lineares nas séries de preços e a distribuições de retornos com caudas pesadas. Como observamos caudas mais pesadas para máximo e mínimo (embora sem confirmação estatística ainda), é provável que pelo menos parte das diferenças nas LES se deva às distribuições.

9.1.1.4 Expoentes de Hurst canônicos (EH(2))

Para os expoentes de Hurst com $q = 2$ temos um boxplot com as quatro caixas muito semelhantes, exceto pela amplitude da distribuição de abertura e sua falta de outliers (Figura 25). Contudo, essa não parece ser uma diferença importante neste contexto, já que as medianas são todas muito próximas.

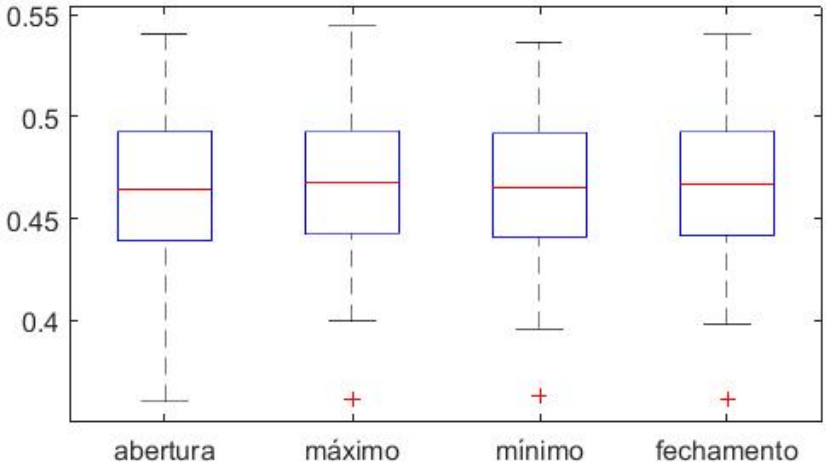

Figura 25 – Boxplot dos expoentes de Hurst com $q = 2$ do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Também aqui as amostras são consideradas independentes, pelo mesmo motivo descrito anteriormente: são provenientes de dados de um índice financeiro com diversos ativos de diferentes setores econômicos. O gráfico de dispersão para os EH(2) exibe um aspecto aleatório (Figura 26).

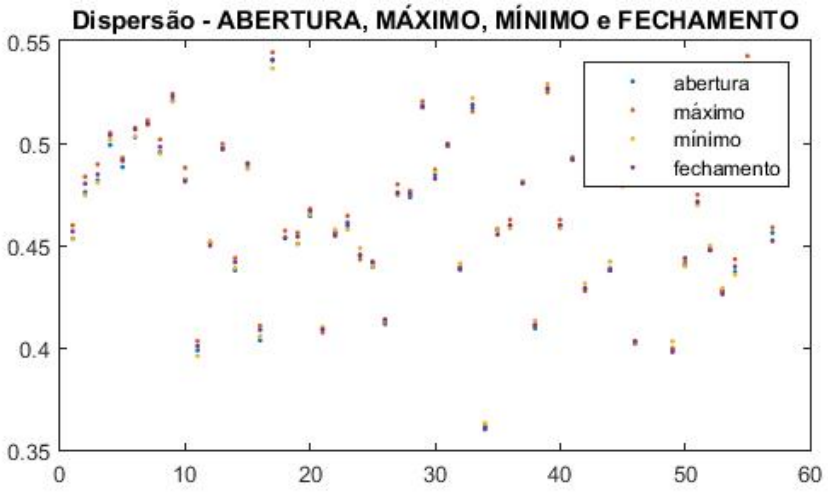

Figura 26 – Gráfico de dispersão dos EH(2) do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Na Figura 27 podemos ver as amostras comparadas a distribuições normais padrões. Todas as curvas são bem próximas às tracejadas para as gaussianas.

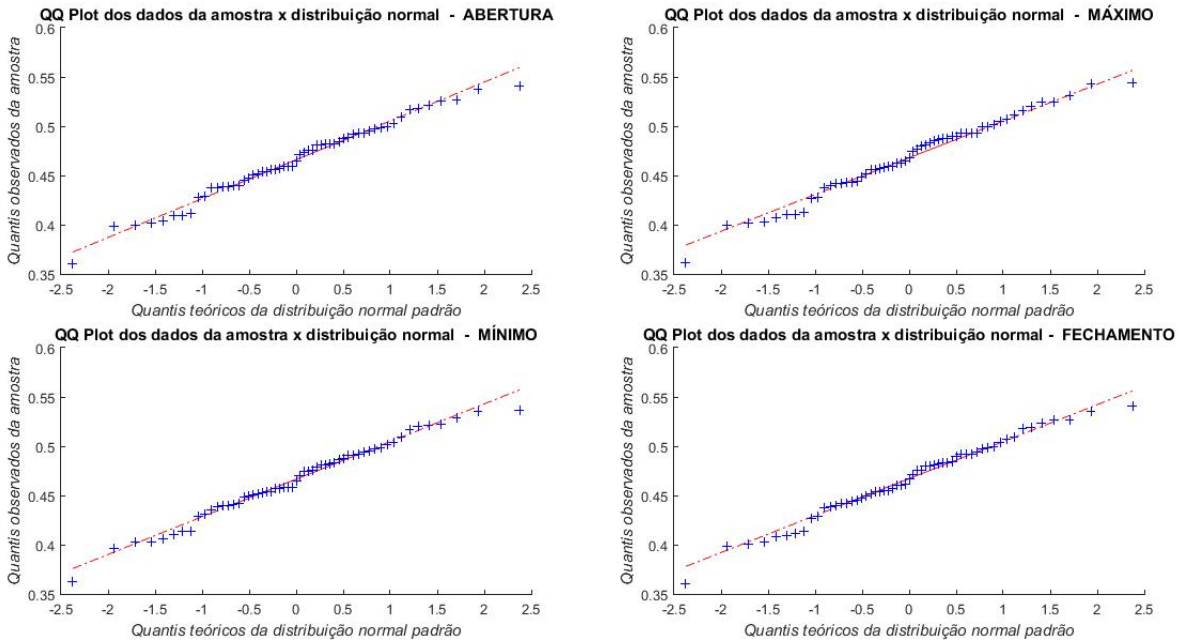

Figura 27 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(2) de 57 ativos do índice Ibovespa.

O resultado do ANOVA, como esperado, revelou um p-valor acima de $0{,}05$ ($p = 0{,}985$), que não rejeita a hipótese das amostras possuírem médias iguais. O Tukey, por sua vez, constata essas equivalências estatísticas através de seus pares (ver Tabela 6). O diagrama de intervalos de confiança também apoia essa assertiva, as amostras parecem estatisticamente iguais (Figura 28).

Tabela 6 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (EH(2) do Ibovespa).

	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
ABERTURA	$0{,}9844$	$1{,}0000$	$0{,}9993$
MÁXIMO	-	$0{,}9896$	$0{,}9956$
MÍNIMO	-	-	$0{,}9998$

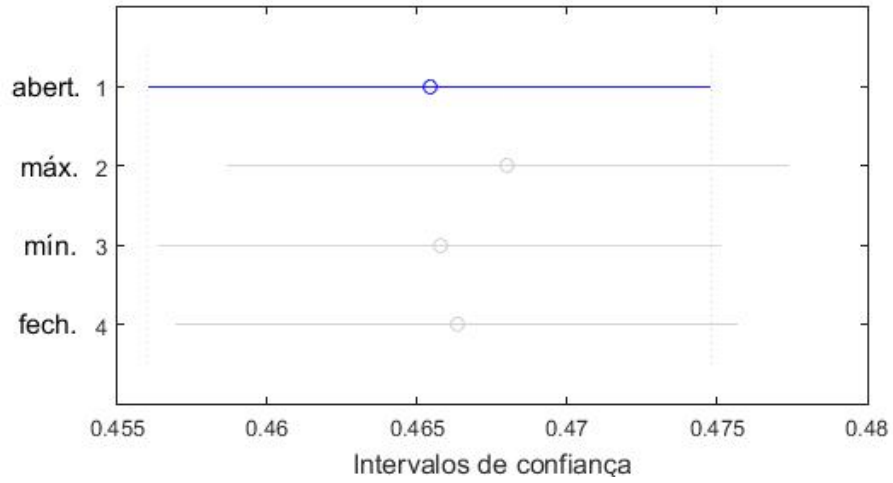

Figura 28 – Intervalos de confiança relativos a EH(2) para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Ibovespa).

Por fim, temos o resultado do Kruskal-Wallis, $0{,}9667$, que concorda com o do ANOVA.

Conforme esperado a partir da Tabela 2, diferenças significativas não foram encontradas para o expoente de Hurst canônico ($q = 2$), indicando que, no que se refere a correlações lineares, as séries de abertura, máximo, mínimo e fechamento são equivalentes.

9.1.1.5 Expoentes de Hurst generalizados (EH(-3))

O boxplot dos expoentes generalizados ($q = -3$) apresenta caixas e caudas de tamanhos similares (Figura 29). Porém, as medianas de duas delas parecem idênticas (abertura e fechamento), e as das outras duas quase coincidem (máximo e mínimo), sugerindo dois agrupamentos. Ainda assim, tal observação pode não significar distinções na amostra, já que esta diferença é muito discreta. As quatro medianas ainda são próximas umas das outras. Só um teste paramétrico, como o ANOVA, pode elucidar essa questão.

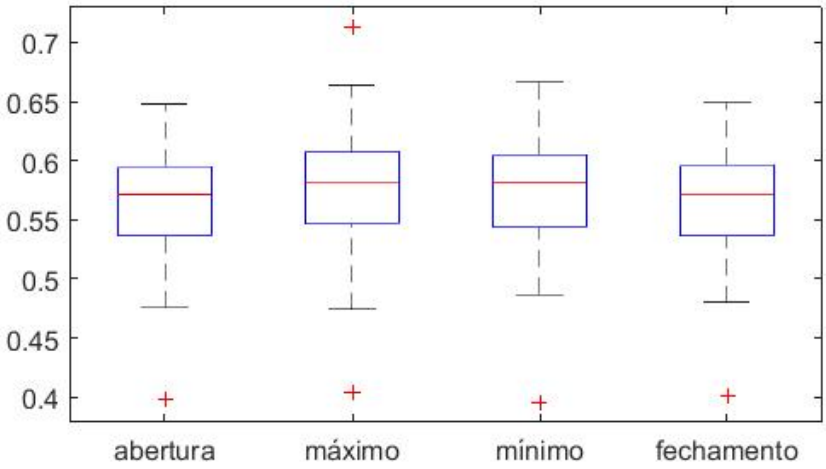

Figura 29 – Boxplot dos expoentes de Hurst com $q = -3$ do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Na Figura 30 podemos observar dados não correlacionados, condizentes com ativos distintos, de diferentes setores econômicos.

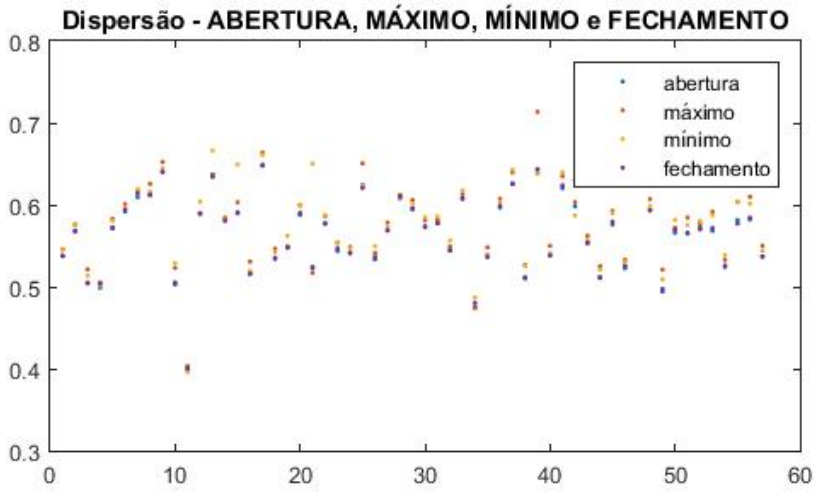

Figura 30 – Gráfico de dispersão dos EH(-3) do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Continuando a análise, os gráficos da Figura 31 configuram séries não assimétricas, e estas duas últimas Figuras, 30 e 31, juntas, permitem a utilização do ANOVA, já que atendem às suas exigências de independência e normalidade.

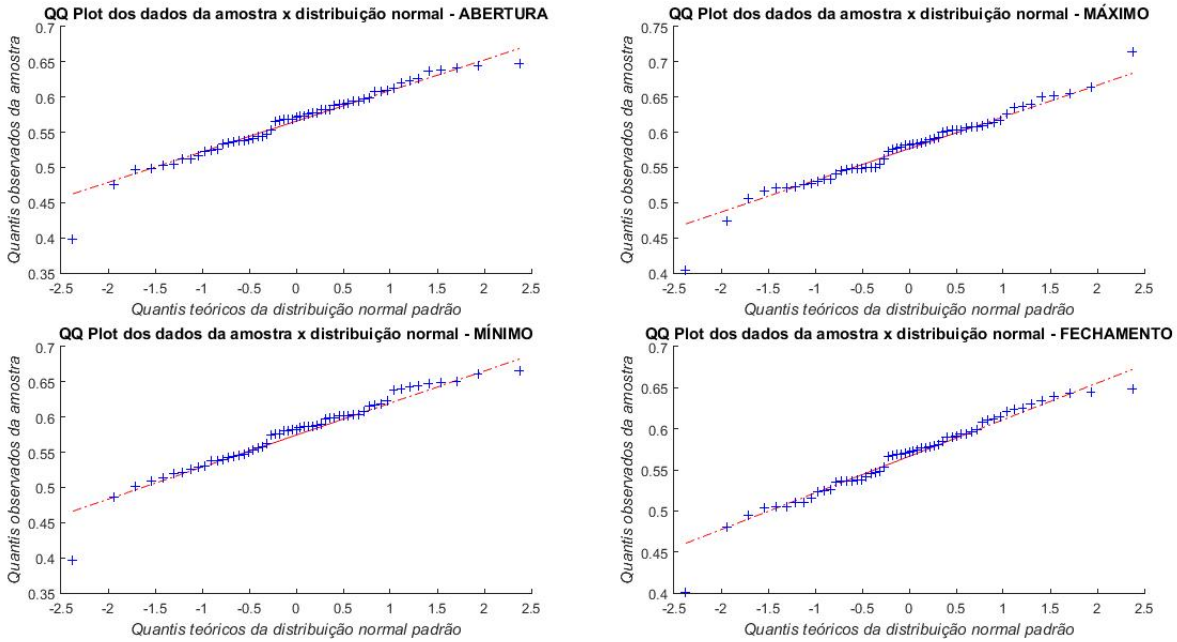

Figura 31 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(-3) de 57 ativos do índice Ibovespa.

O teste ANOVA para o expoente negativo, de fato, não confirma nossa observação a partir do boxplot. Seu p-valor igual a $0{,}4037$ aponta para um conjunto de séries considerado estatisticamente igual, mas, ao observarmos os resultados do teste Tukey (Tabela 7), notamos uma maior proximidade entre os pares que comentamos: abertura/fechamento, máximo/mínimo. A Figura 32 ilustra o que dissemos, e mostra que tais pares possuem alguns elementos em comum.

Tabela 7 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (EH(-3) do Ibovespa).

	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
ABERTURA	$0{,}5928$	$0{,}5677$	$0{,}9992$
MÁXIMO	-	$1{,}0000$	$0{,}6755$
MÍNIMO	-	-	$0{,}6510$

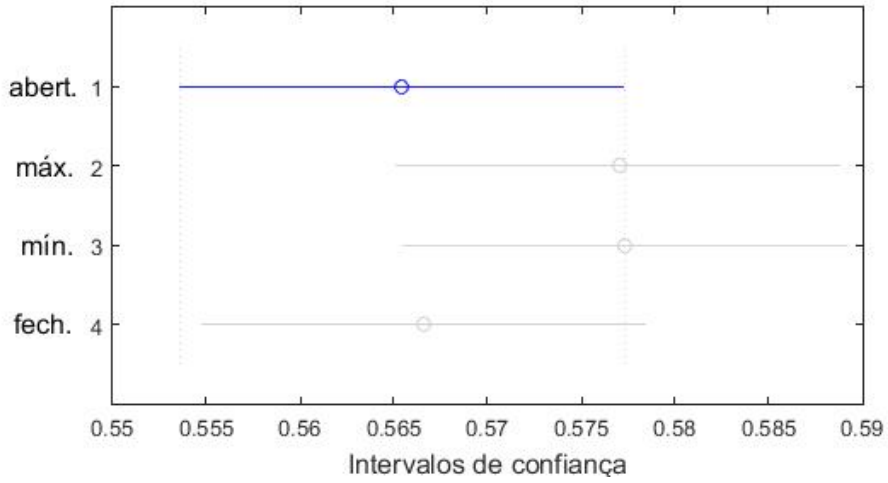

Figura 32 – Intervalos de confiança relativos a EH(-3) para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Ibovespa).

O teste Kruskal-Wallis também apresenta um p-valor alto ($0{,}3179$), indicando equidade entre as distribuições.

9.2 Índice DJIA

Toda a análise realizada na Seção 9.1 foi repetida para o índice americano. Para o cálculo dos expoentes de Hurst generalizados, através do MF-DFA, utilizamos o mesmo tamanho de espectro de singularidade e mesmos valores de q (vide Capítulo 5).

A Tabela 8 exibe as médias e desvios padrões dos EHG pertencentes ao conjunto de ativos do índice Dow Jones, para cada uma das séries do candle: abertura, máximo, mínimo e fechamento. Por ela podemos perceber que máximo e mínimo apresentam expoentes mais altos (em negrito), para cada valor de q, até o valor de $q = 1{,}4$, começando pelos valores negativos.

Para acompanharmos tal comportamento esboçamos o Gráfico 33 de forma análoga ao Gráfico 12, utilizando as Definições 44 e 45. Depois que máximo e mínimo atingem o valor de $q = 1{,}4$, as duas séries apresentam uma leve queda com relação a seus expoentes médios. Ainda assim, máximo termina com maiores expoentes que as demais, dentro destes valores de q. Os expoentes de mínimo, que começam entre os mais altos, juntamente com os de máximo, decaem até tornarem-se os mais baixos dentre todos. Já abertura e fechamento apresentam aumento dos expoentes ao longo do espectro. Fechamento cresce constantemente até $q = 1{,}4$, quando começa a se estabilizar, e abertura só aumenta, terminando em segundo lugar em relação às demais.

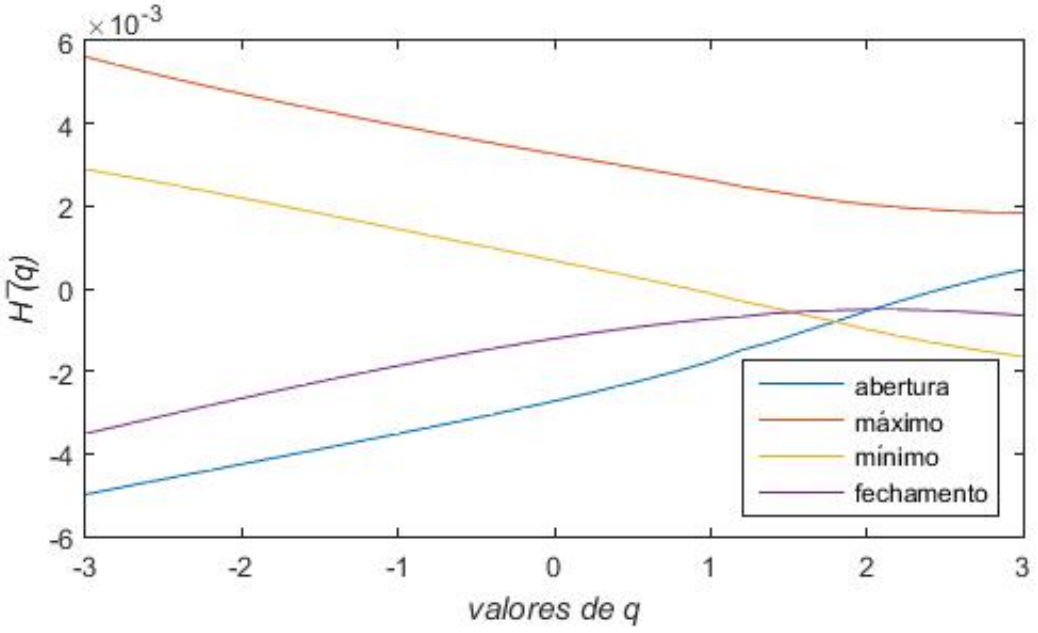

Figura 33 – Diferenças entre expoentes médios e suas respectivas médias gerais (Dow Jones) (vide Equações 44 e 45).

Tabela 8 – Médias e desvios-padrões dos expoentes generalizados de 29 ações do índice Dow Jones.

Dow Jones				
q	ABERTURA	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
-3	$0{,}5884(0{,}0382)$	$\mathbf{0{,}5990(0{,}0374)}$	$\mathbf{0{,}5962(0{,}0391)}$	$0{,}5898(0{,}0381)$
$-2{,}8$	$0{,}5861(0{,}0376)$	$\mathbf{0{,}5963(0{,}0370)}$	$\mathbf{0{,}5937(0{,}0384)}$	$0{,}5876(0{,}0375)$
$-2{,}6$	$0{,}5838(0{,}0371)$	$\mathbf{0{,}5937(0{,}0365)}$	$\mathbf{0{,}5911(0{,}0378)}$	$0{,}5853(0{,}0371)$
$-2{,}4$	$0{,}5815(0{,}0367)$	$\mathbf{0{,}5911(0{,}0361)}$	$\mathbf{0{,}5886(0{,}0373)}$	$0{,}5831(0{,}0366)$
$-2{,}2$	$0{,}5793(0{,}0362)$	$\mathbf{0{,}5886(0{,}0357)}$	$\mathbf{0{,}5860(0{,}0367)}$	$0{,}5808(0{,}0361)$
-2	$0{,}5770(0{,}0358)$	$\mathbf{0{,}5860(0{,}0354)}$	$\mathbf{0{,}5835(0{,}0362)}$	$0{,}5786(0{,}0357)$
$-1{,}8$	$0{,}5748(0{,}0354)$	$\mathbf{0{,}5834(0{,}0350)}$	$\mathbf{0{,}5809(0{,}0357)}$	$0{,}5764(0{,}0353)$
$-1{,}6$	$0{,}5725(0{,}0350)$	$\mathbf{0{,}5809(0{,}0348)}$	$\mathbf{0{,}5784(0{,}0353)}$	$0{,}5742(0{,}0350)$
$-1{,}4$	$0{,}5703(0{,}0348)$	$\mathbf{0{,}5784(0{,}0345)}$	$\mathbf{0{,}5759(0{,}0349)}$	$0{,}5719(0{,}0347)$
$-1{,}2$	$0{,}5681(0{,}0346)$	$\mathbf{0{,}5759(0{,}0344)}$	$\mathbf{0{,}5734(0{,}0346)}$	$0{,}5697(0{,}0345)$
-1	$0{,}5659(0{,}0345)$	$\mathbf{0{,}5733(0{,}0344)}$	$\mathbf{0{,}5708(0{,}0345)}$	$0{,}5675(0{,}0344)$
$-0{,}8$	$0{,}5637(0{,}0345)$	$\mathbf{0{,}5709(0{,}0345)}$	$\mathbf{0{,}5683(0{,}0345)}$	$0{,}5653(0{,}0345)$
$-0{,}6$	$0{,}5615(0{,}0348)$	$\mathbf{0{,}5684(0{,}0349)}$	$\mathbf{0{,}5659(0{,}0347)}$	$0{,}5632(0{,}0348)$
$-0{,}4$	$0{,}5594(0{,}0355)$	$\mathbf{0{,}5660(0{,}0356)}$	$\mathbf{0{,}5635(0{,}0353)}$	$0{,}5610(0{,}0355)$
$-0{,}2$	$0{,}5574(0{,}0368)$	$\mathbf{0{,}5637(0{,}0370)}$	$\mathbf{0{,}5611(0{,}0365)}$	$0{,}5589(0{,}0367)$
0	$0{,}5554(0{,}0390)$	$\mathbf{0{,}5614(0{,}0392)}$	$\mathbf{0{,}5588(0{,}0387)}$	$0{,}5569(0{,}0389)$
$0{,}2$	$0{,}5534(0{,}0423)$	$\mathbf{0{,}5598(0{,}0425)}$	$\mathbf{0{,}5565(0{,}0420)}$	$0{,}5548(0{,}0422)$
$0{,}4$	$0{,}5513(0{,}0468)$	$\mathbf{0{,}5567(0{,}0470)}$	$\mathbf{0{,}5541(0{,}0465)}$	$0{,}5527(0{,}0467)$
$0{,}6$	$0{,}5489(0{,}0520)$	$\mathbf{0{,}5539(0{,}0522)}$	$\mathbf{0{,}5513(0{,}0517)}$	$0{,}5502(0{,}0519)$
$0{,}8$	$0{,}5456(0{,}0564)$	$\mathbf{0{,}5503(0{,}0565)}$	$\mathbf{0{,}5476(0{,}0561)}$	$0{,}5468(0{,}0563)$
1	$0{,}5410(0{,}0581)$	$\mathbf{0{,}5453(0{,}0581)}$	$\mathbf{0{,}5426(0{,}0578)}$	$0{,}5420(0{,}0580)$
$1{,}2$	$0{,}5344(0{,}0554)$	$\mathbf{0{,}5384(0{,}0552)}$	$\mathbf{0{,}5356(0{,}0549)}$	$0{,}5353(0{,}0552)$
$1{,}4$	$0{,}5258(0{,}0486)$	$\mathbf{0{,}5294(0{,}0484)}$	$\mathbf{0{,}5266(0{,}0480)}$	$0{,}5265(0{,}0484)$
$1{,}6$	$0{,}5156(0{,}0400)$	$0{,}5188(0{,}0398)$	$0{,}5160(0{,}0393)$	$0{,}5160(0{,}0398)$
$1{,}8$	$0{,}5044(0{,}0326)$	$0{,}5073(0{,}0326)$	$0{,}5044(0{,}0316)$	$0{,}5047(0{,}0323)$
2	$0{,}4922(0{,}0287)$	$0{,}4948(0{,}0291)$	$0{,}4917(0{,}0276)$	$0{,}4922(0{,}0284)$
$2{,}2$	$0{,}4797(0{,}0289)$	$0{,}4820(0{,}0297)$	$0{,}4789(0{,}0278)$	$0{,}4795(0{,}0286)$
$2{,}4$	$0{,}4670(0{,}0321)$	$0{,}4690(0{,}0332)$	$0{,}4658(0{,}0310)$	$0{,}4658(0{,}0310)$
$2{,}6$	$0{,}4542(0{,}0366)$	$0{,}4560(0{,}0379)$	$0{,}4527(0{,}0357)$	$0{,}4536(0{,}0364)$
$2{,}8$	$0{,}4415(0{,}0417)$	$0{,}4431(0{,}0430)$	$0{,}4397(0{,}0407)$	$0{,}4406(0{,}0414)$
3	$0{,}4290(0{,}0468)$	$0{,}4304(0{,}0482)$	$0{,}4269(0{,}0458)$	$0{,}4279(0{,}0464)$

9.2.1 Análise estatística dos resultados

A Tabela 9 apresenta os resultados de alguns expoentes e das demais ferramentas empregadas na análise dos dados do índice Dow Jones. Podemos notar que as médias dos coeficientes de decaimento (em módulo) foram novamente maiores para as séries de abertura e fechamento, enquanto as médias das acurácias do modelo (AM) tiveram comportamento análogo ao das médias das larguras do espectro de singularidade (LES), que condizem com o observado no cálculo dos expoentes generalizados: valores maiores para as séries de máximo e mínimo.

Tabela 9 – Médias e desvios-padrões das acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), larguras do espectro de singularidade (LES) e expoentes de Hurst (EH) com $q = 2$ e $q = -3$ das quatro séries de 29 ações do índice Dow Jones.

Dow Jones				
	ABERTURA	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
AM	$0{,}5043(0{,}0097)$	$0{,}5083(0{,}0080)$	$0{,}5077(0{,}0088)$	$0{,}5067(0{,}0091)$
CD	$-2{,}4632(0{,}1587)$	$-2{,}2519(0{,}1570)$	$-2{,}2905(0{,}1548)$	$-2{,}4233(0{,}1555)$
LES	$0{,}3477(0{,}1437)$	$0{,}3632(0{,}1449)$	$0{,}3652(0{,}1416)$	$0{,}3527(0{,}1422)$
EH(2)	$0{,}4912(0{,}0287)$	$0{,}4939(0{,}0293)$	$0{,}4908(0{,}0276)$	$0{,}4913(0{,}0284)$
EH(-3)	$0{,}5894(0{,}0384)$	$0{,}5998(0{,}0378)$	$0{,}5973(0{,}0393)$	$0{,}5908(0{,}0384)$

9.2.1.1 Acurácias do modelo (AM)

Analisando o boxplot das AM para o Dow Jones (Figura 34), o que se destaca é a presença de um único outlier para máximo e a questão do tamanho variado das caixas. Mínimo e fechamento têm tamanhos parecidos, porém, abertura mostra uma diferença considerável se comparada a máximo, por exemplo. É possível notar também que, apesar disso, todas as medianas são próximas, e quando isso ocorre normalmente não são evidenciadas diferenças significativas.

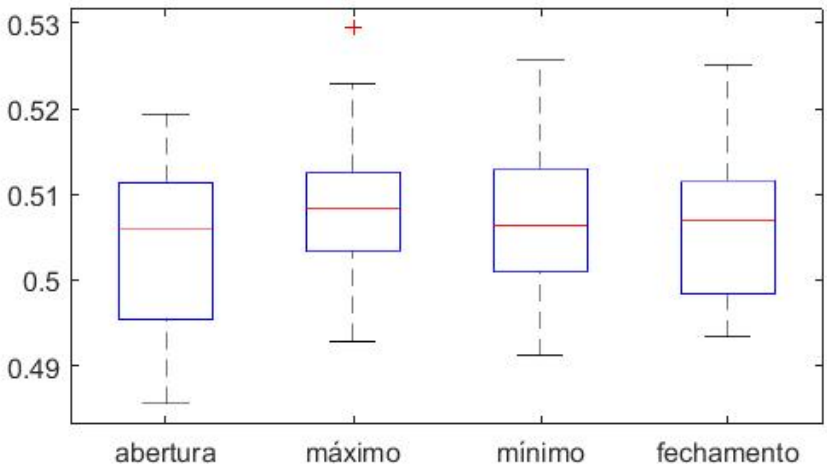

Figura 34 – Boxplot das acurácias do modelo do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Em busca de conclusões mais embasadas estatisticamente, nos apoiamos no teste ANOVA, cujo p-valor, $0{,}3274$ não nos permite rejeitar a hipótese das amostras possuírem médias iguais.

Novamente, consideramos tais amostras independentes por serem provenientes de um índice financeiro americano, composto de ativos distintos de setores econômicos também distintos. Seu gráfico de dispersão fortalece essa ideia (Figura 35). Consideramos

também as distribuições normais, dados seus gráficos Q-Q, que exibem curvas não muito longe da normalidade (Figura 36).

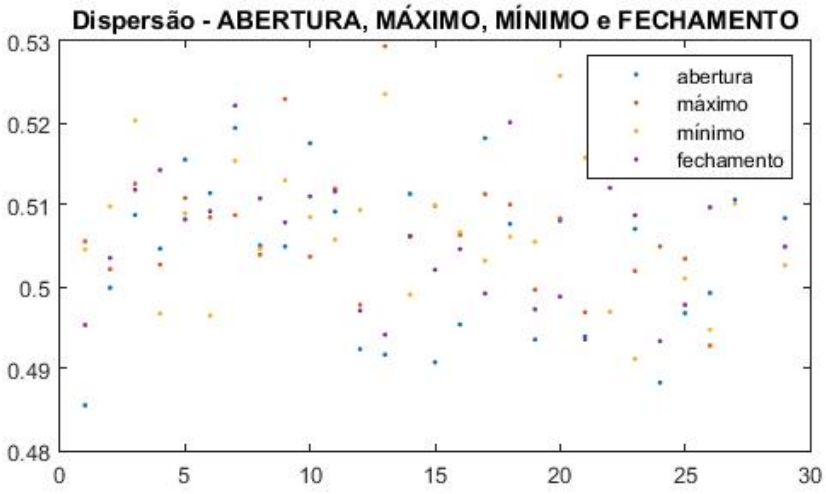

Figura 35 – Gráfico de dispersão das AM do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

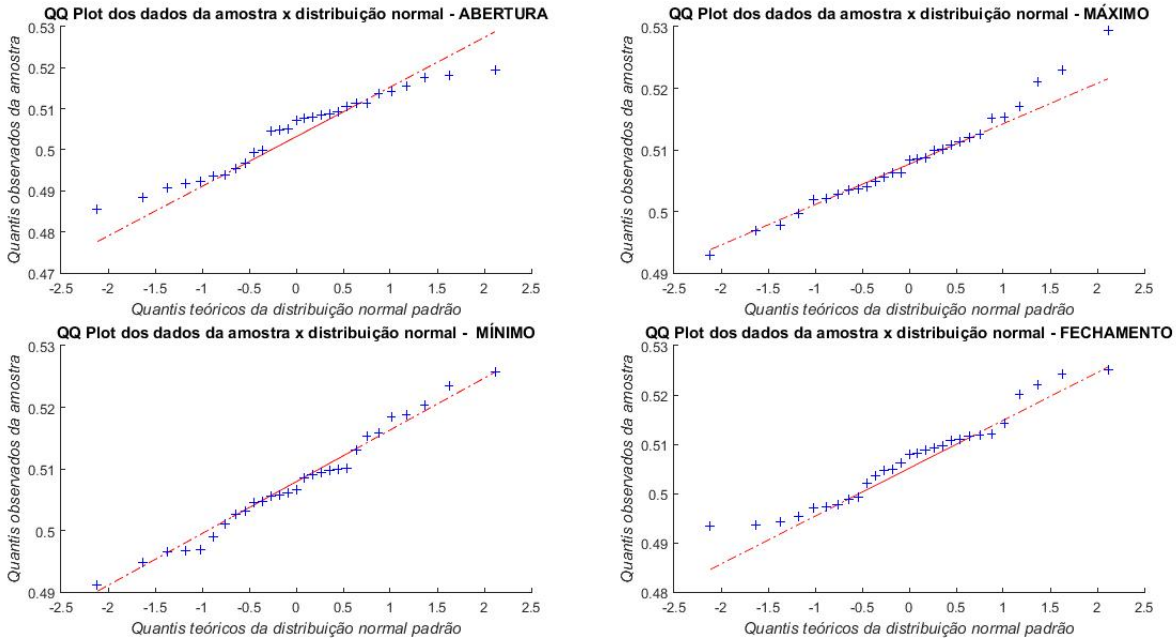

Figura 36 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às AM de 29 ativos do índice Dow Jones.

Diante do resultado do ANOVA, demos sequência ao teste Tukey, para observarmos a comparação múltipla, que detalha as semelhanças das amostras das AM referentes ao índice Dow Jones. Claramente, não se pode descartar a hipótese de equivalência estatística para nenhum par (Tabela 10). Além disso, é possível observar na Figura 37 trechos de intervalos coincidentes para as quatro distribuições .

Tabela 10 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (AM do Dow Jones).

	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
ABERTURA	$0{,}3118$	$0{,}4593$	$0{,}7171$
MÁXIMO	-	$0{,}9936$	$0{,}9057$
MÍNIMO	-	-	$0{,}9760$

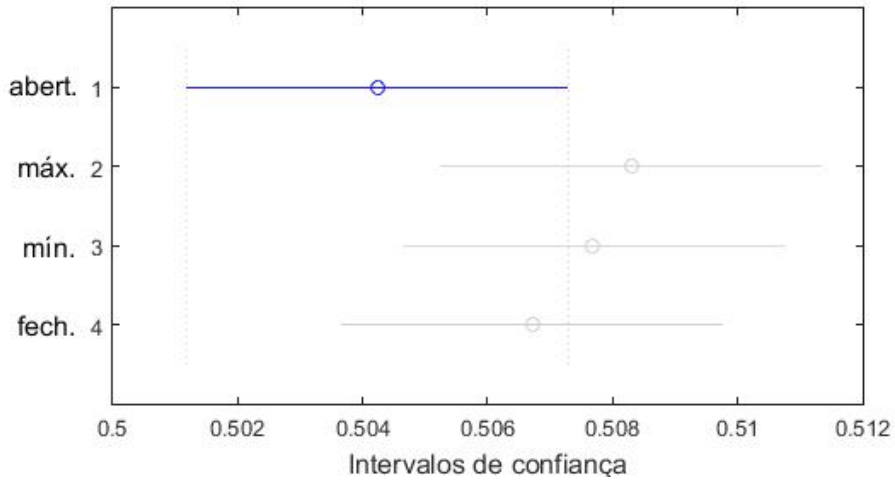

Figura 37 – Intervalos de confiança relativos às AM para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Dow Jones).

O resultado do teste Kruskal-Wallis está de acordo com os testes anteriores. Seu p-valor igual a $0{,}5850$ não nos leva a rejeitar a hipótese das amostras possuírem semelhanças estatísticas.

No índice americano, não encontramos diferenças significativas para as acurácias do modelo de previsão como no índice brasileiro. Aqui as quatro séries do candle são equivalentes estatisticamente.

9.2.1.2 Coeficientes de decaimento (CD)

O boxplot dos CD mostra ausência de outliers e uma pequena diferença de tamanho de caixa para fechamento, mas também mostra uma maior aproximação das caixas abertura e fechamento, bem como das caixas máximo e mínimo, o que a princípio informa uma distinção estatística entre as amostras (Figura 38).

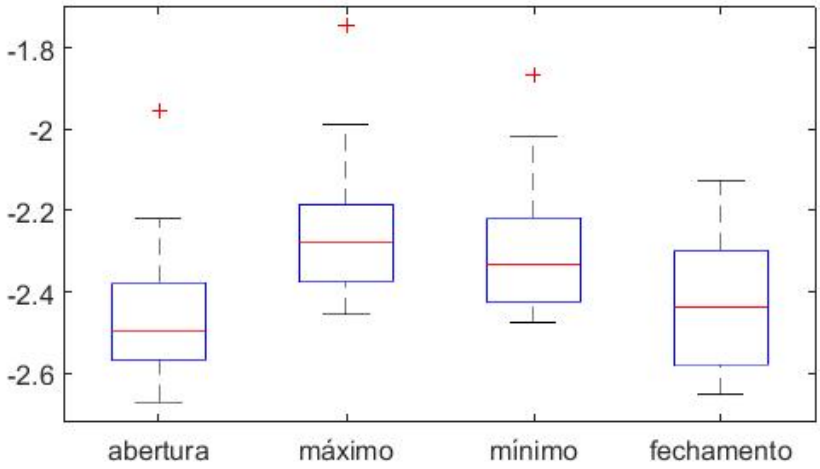

Figura 38 – Boxplot dos coeficientes de decaimento do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

As amostras relativas aos CD também são independentes conforme sua origem, e a Figura 39 mostra um gráfico de dispersão não tendencioso, que ilustra essa independência, enquanto a Figura 40 apresenta QQ-plots com distribuições aproximadamente normais. Tais requisitos favorecem a aplicação do teste ANOVA, que, através de seu baixo p-valor $5{,}2098 \times 10^{-7}$, permite rejeitar a hipótese nula das distribuições possuírem médias iguais. Este resultado fortalece a suspeita decorrente da análise do boxplot: pelo menos uma das amostras é estatisticamente diferente das demais.

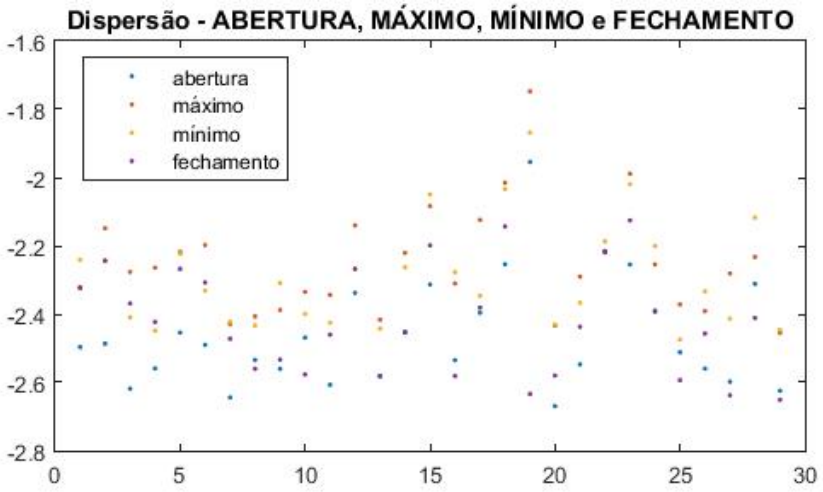

Figura 39 – Gráfico de dispersão dos CD do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

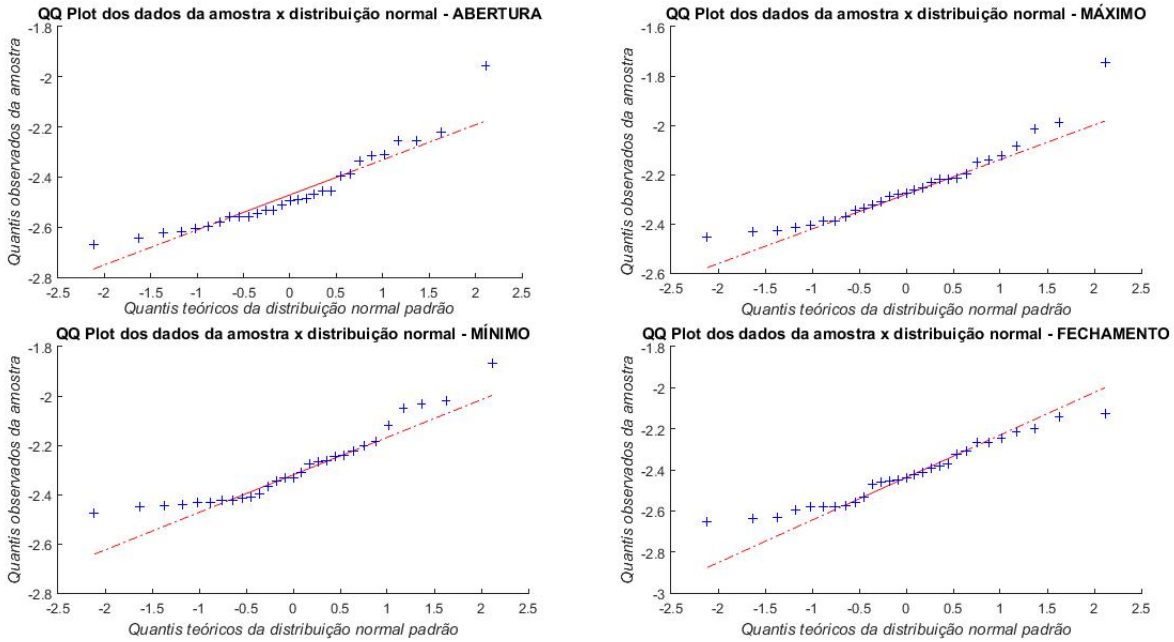

Figura 40 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos CD de 29 ativos do índice Dow Jones.

O teste Tukey expõe as diferenças estatísticas entre tais distribuições, através da comparação por pares (Tabela 11). As diferenças prevalecem, mas dois pares permanecem equivalentes estatisticamente: abertura e fechamento, e máximo e mínimo. Porém, estes dois grupos são diferentes um do outro. Esse comportamento é comprovado através de seus p-valores (Tabela 11) e de seus intervalos de confiança (Figura 41).

Tabela 11 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (CD do Dow Jones).

	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
ABERTURA	$\mathbf{6{,}94 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{0{,}0003}$	$0{,}7668$
MÁXIMO	-	$0{,}7837$	$\mathbf{0{,}0003}$
MÍNIMO	-	-	$\mathbf{0{,}0087}$

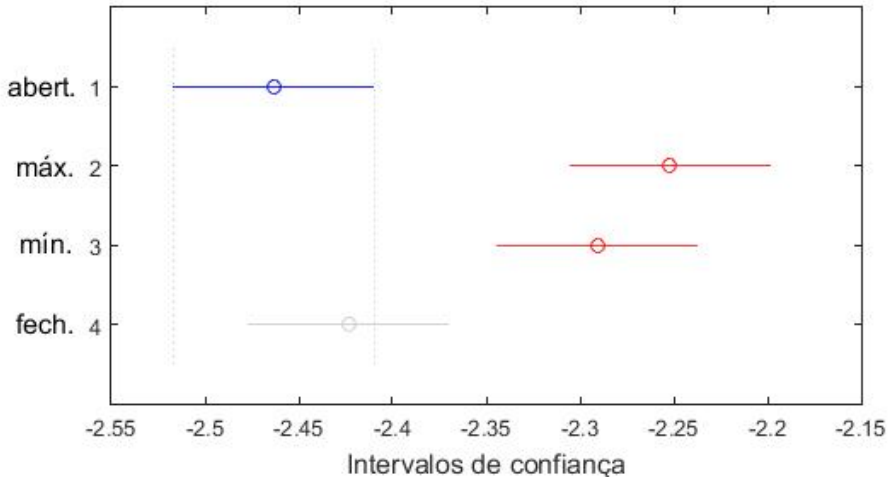

Figura 41 – Intervalos de confiança relativos aos CD para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Dow Jones).

Para confirmação, aplicamos o teste Kruskal-Wallis, que também apresentou um baixo p-valor ($7{,}4591 \times 10^{-7}$), concordando com os resultados acima descritos: as amostras possuem divergências estatísticas.

9.2.1.3 Larguras do espectro de singularidade (LES)

Já neste ponto de nossa análise, observamos que certas diferenças visuais podem não representar diferenças estatisticamente relevantes. Logo, as caudas maiores para máximo e fechamento, assim como a presença de outliers somente para abertura e mínimo, podem não bastar para diferenciar as distribuições das LES do DJIA, quando todas as medianas se encontram muito próximas umas das outras (Figura 42). Por isso, o teste ANOVA se faz necessário.

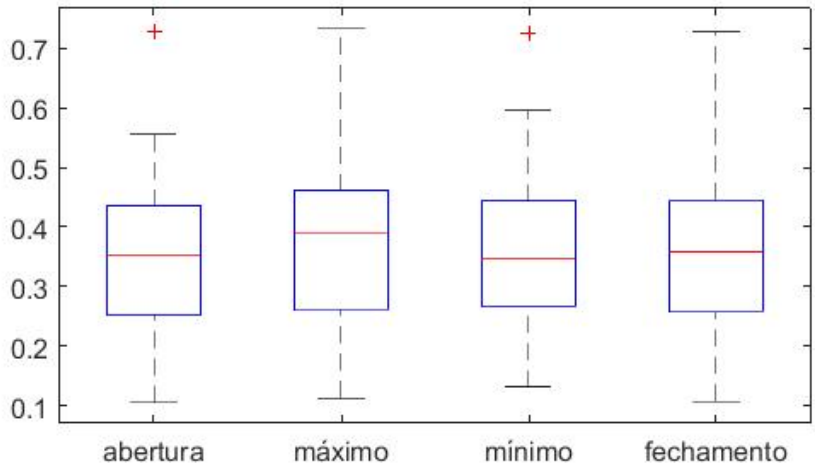

Figura 42 – Boxplot das larguras do espectro de singularidade do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

As distribuições das LES têm a mesma procedência independente que as outras ferramentas (dados de um índice financeiro de setores econômicos diversos), e seu gráfico de dispersão não contesta essa afirmação: é difícil definir um viés (Figura 43). Além disso, as distribuições se mostram aproximadamente normais pelos gráficos Q-Q (Figura 44).

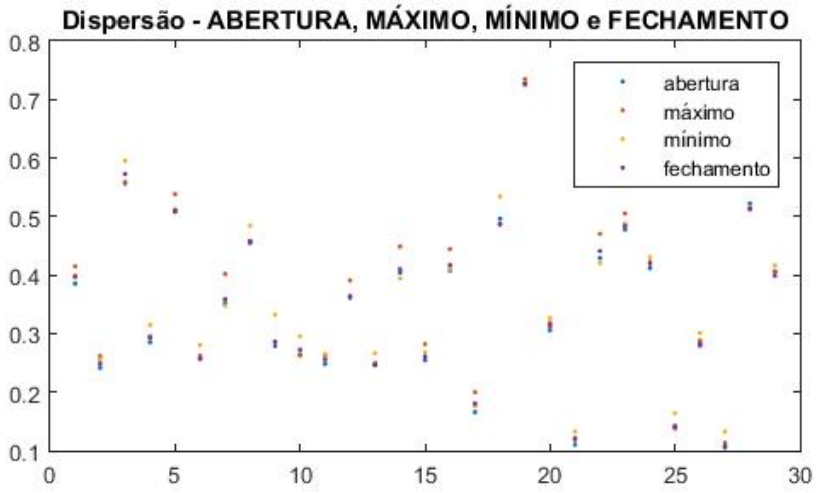

Figura 43 – Gráfico de dispersão das LES do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

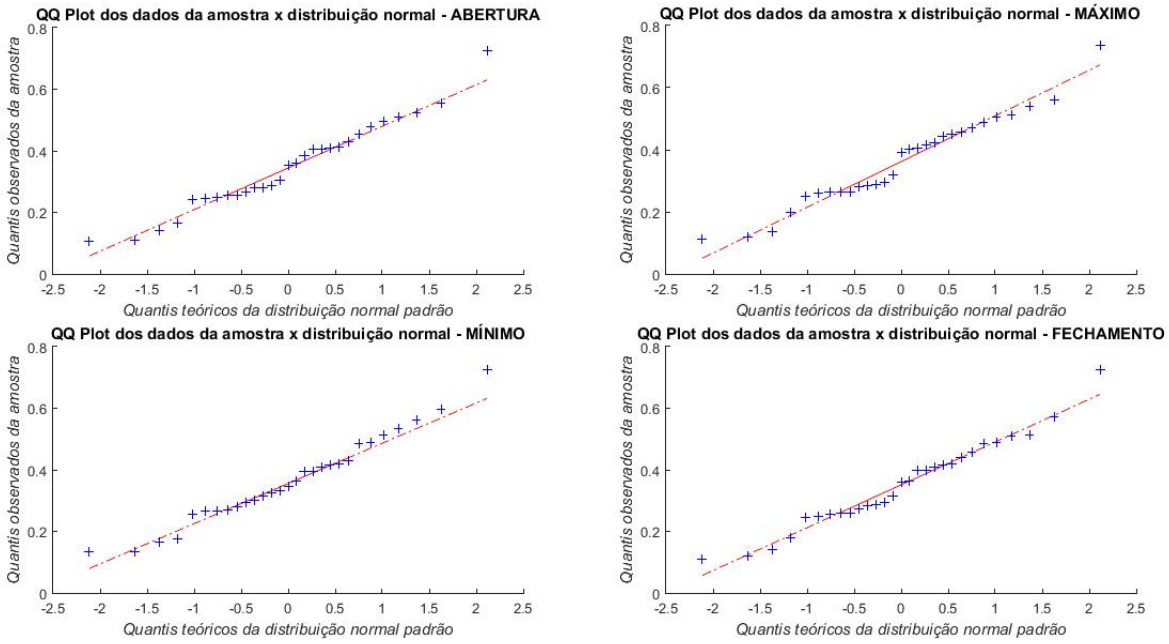

Figura 44 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às LES de 29 ativos do índice Dow Jones.

Mais uma vez o ANOVA se torna válido, e confirma que as pequenas diferenças observadas no boxplot não são significativas. Com o p-valor igual a $0{,}9605$ não podemos rejeitar a hipótese das amostras terem a mesma média. De acordo com a múltipla comparação do teste Tukey, todas as amostras são muito próximas estatisticamente. Podemos

ver na Tabela 12 os altos p-valores para todos os pares comparados. A Figura 45 também mostra claramente que nenhuma destas distribuições se destaca do resto.

Tabela 12 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (LES do Dow Jones).

	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
ABERTURA	$0{,}9763$	$0{,}9666$	$0{,}9992$
MÁXIMO	-	$0{,}9999$	$0{,}9924$
MÍNIMO	-	-	$0{,}9874$

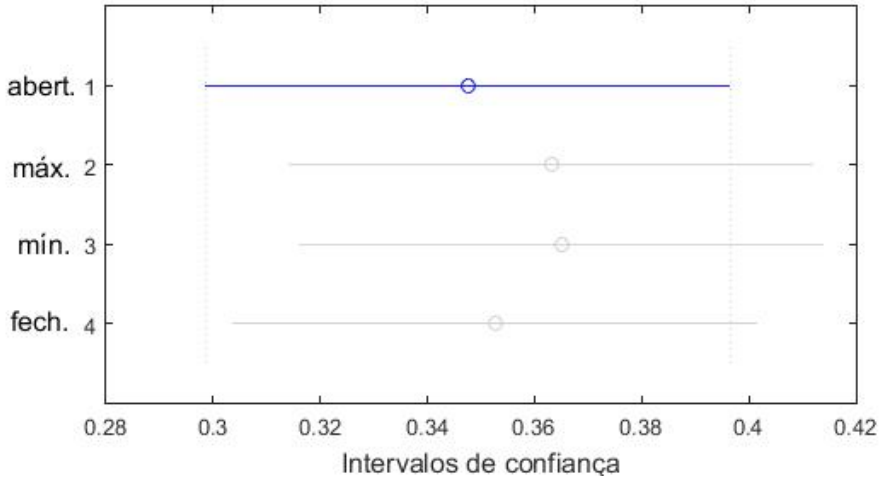

Figura 45 – Intervalos de confiança relativos às LES para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Dow Jones).

O Kruskal-Wallis com p-valor $0{,}8820$ corrobora os resultados anteriores.

9.2.1.4 Expoentes de Hurst canônicos (EH(2))

O boxplot dos EH(2) exibe caixas e medianas parecidas para as quatro distribuições (Figura 46). Exceto pela quantidade de outliers, não foram detectadas diferenças importantes.

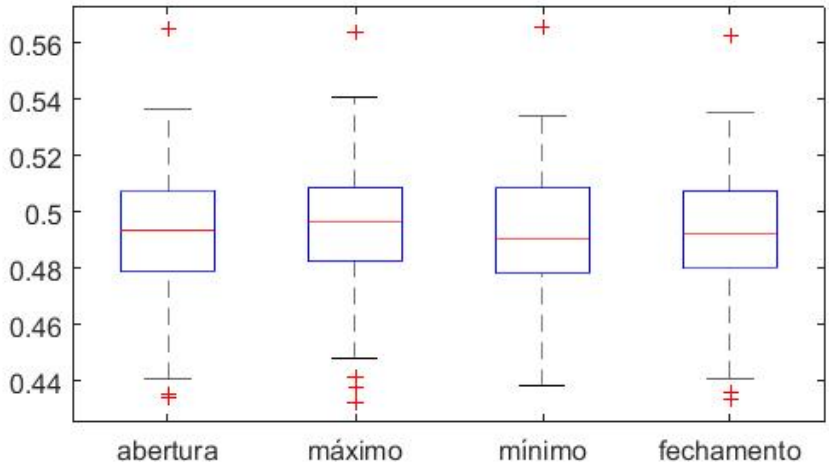

Figura 46 – Boxplot dos expoentes de Hurst com $q = 2$ do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

Mais uma vez temos amostras independentes, cujo gráfico denota comportamento aleatório (Figura 47), e também normais cujos gráficos apresentam distribuições não muito assimétricas (Figura 48).

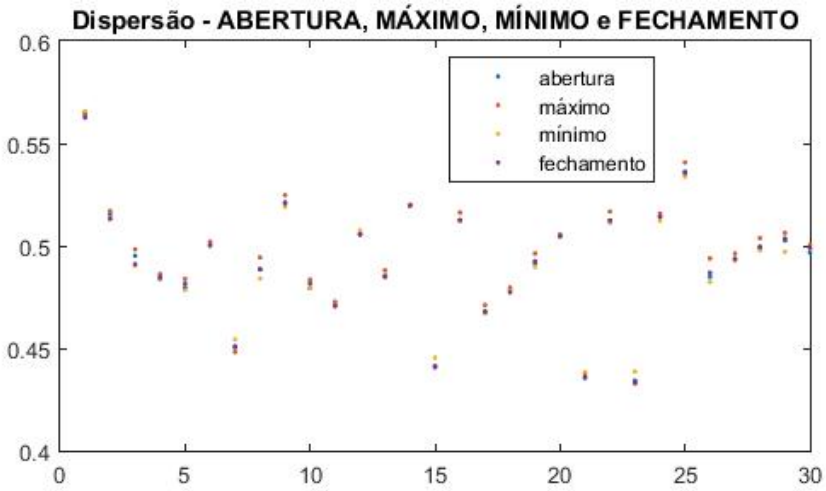

Figura 47 – Gráfico de dispersão dos EH(2) do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

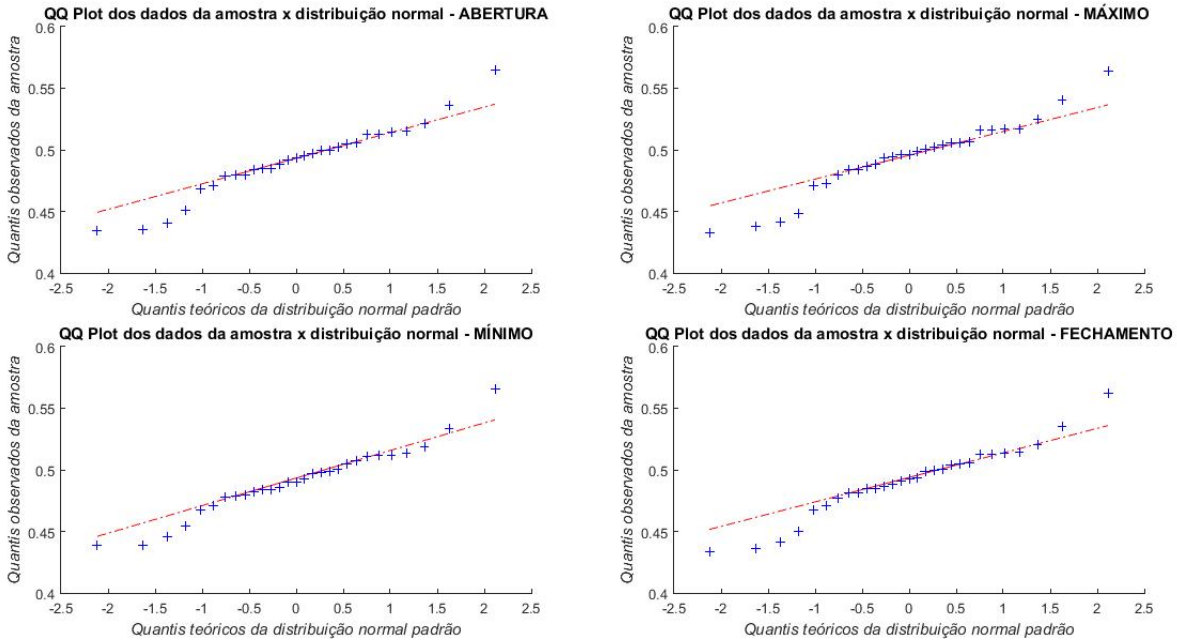

Figura 48 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(2) de 29 ativos do índice Dow Jones.

Como esperado, o ANOVA apresentou um alto p-valor $(0{,}9747)$, que não rejeita a hipótese das amostras serem equivalentes estatisticamente, e então realizamos a comparação múltipla que detalhou tais equivalências. Podemos ver os resultados na Tabela 13 e na Figura 49.

Tabela 13 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (EH(2) do Dow Jones).

	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
ABERTURA	$0{,}9842$	$0{,}9999$	$1{,}0000$
MÁXIMO	-	$0{,}9754$	$0{,}9851$
MÍNIMO	-	-	$0{,}9999$

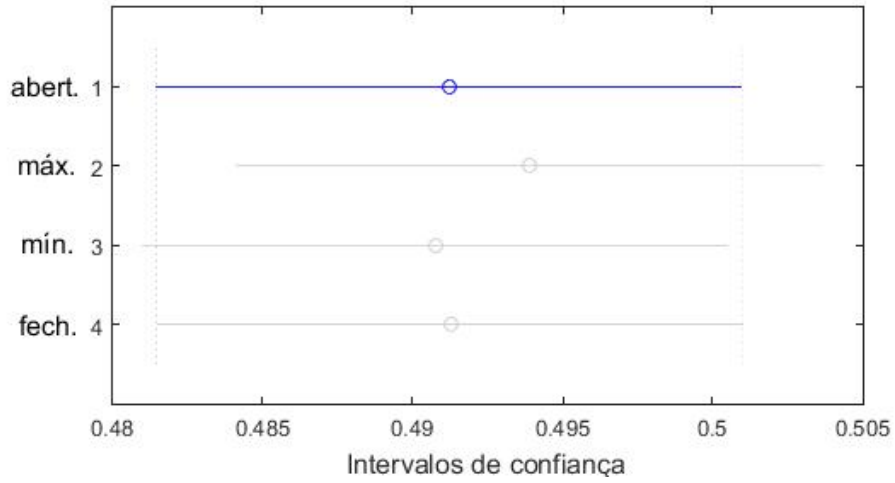

Figura 49 – Intervalos de confiança relativos a EH(2) para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Dow Jones).

Como alternativa, temos a confirmação do teste Kruskall-Wallis $(0{,}8857)$ para os resultados encontrados.

Os testes estatísticos não apresentaram novidades quanto à Tabela 9. De fato, não existem diferenças significativas para o expoente de Hurst canônico ($q = 2$), indicando que, em se tratando de correlações lineares, as quatro séries do candle são equivalentes.

9.2.1.5 Expoentes de Hurst generalizados (EH(-3))

Para o expoente de Hurst com $q = -3$ do índice Dow Jones, temos um boxplot quase homogêneo (Figura 50), com caixas de tamanhos talvez idênticos. Podemos notar uma amplitude um pouquinho maior para mínimo e uma leve proximidade entre as medianas de abertura e fechamento, e entre as de máximo e mínimo. Entretanto, essas são diferenças muito discretas. Os valores ainda são próximos para as quatro medianas, o que pode fazer com que essas não sejam diferenças significativas.

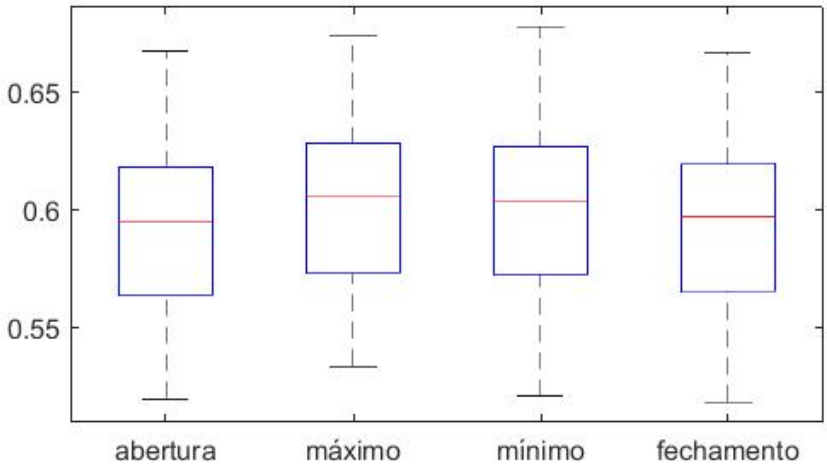

Figura 50 – Boxplot dos expoentes de Hurst com $q = -3$ do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

O Gráfico 51 apresenta dados difusos, que determinam independência entre as componentes da amostra, uma exigência do teste paramétrico Anova.

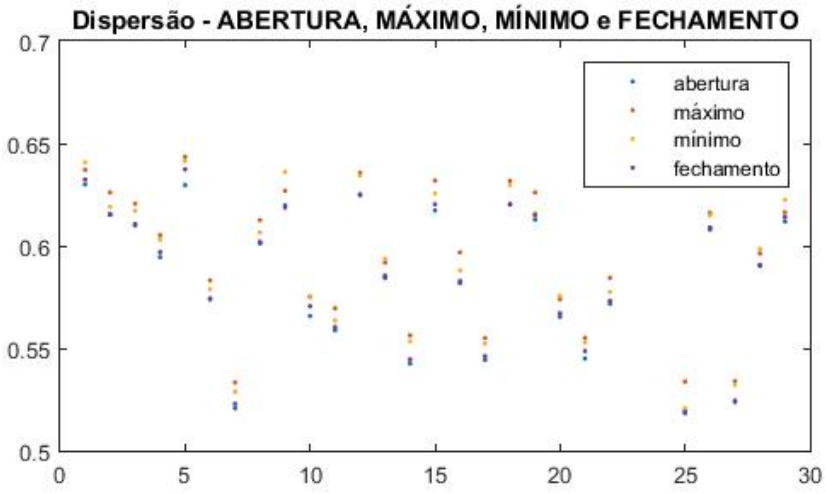

Figura 51 – Gráfico de dispersão dos EH(-3) do índice Dow Jones para abertura, máximo, mínimo e fechamento.

A Figura 52, cujos gráficos desenham distribuições quase totalmente simétricas, atesta a normalidade que o ANOVA pede como outro requisito.

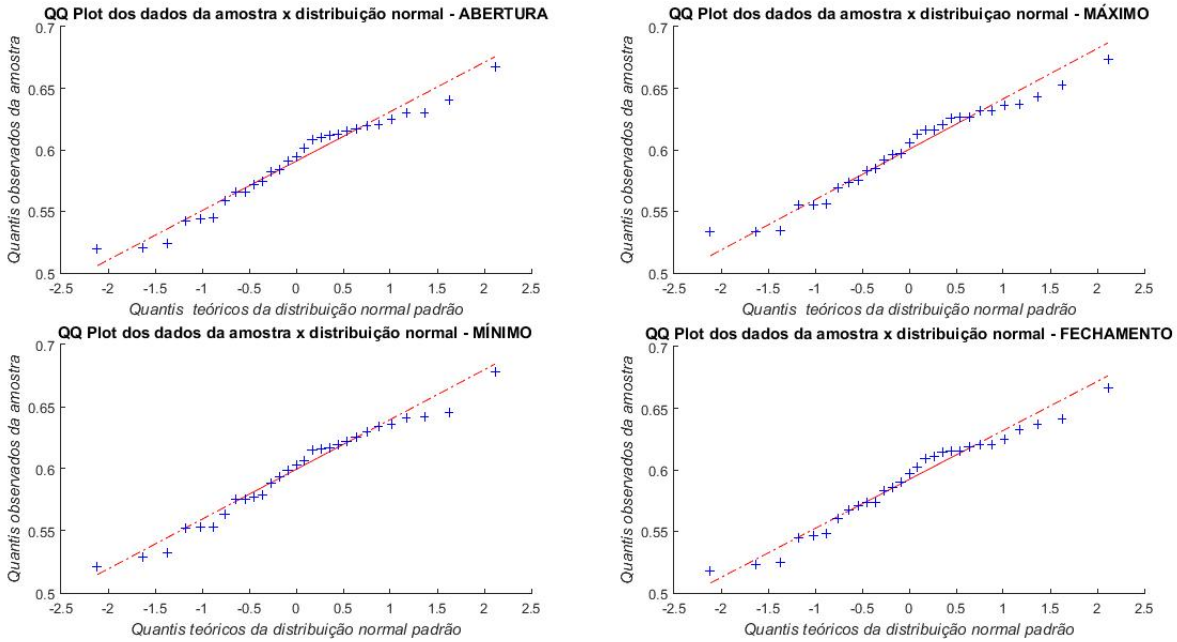

Figura 52 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(-3) de 29 ativos do índice Dow Jones.

Diante da aprovação para o teste, apresentamos o resultado de equivalência estatística para toda a amostra, com um p-valor de $0{,}6857$.

De acordo com a Tabela 14, referente ao teste Tukey, que compara todos os pares, estes são todos realmente parecidos. Suas semelhanças também podem ser vistas na Figura 53, através de seus intervalos de confiança.

Tabela 14 – P-valores do teste Tukey de comparação múltipla (EH(-3) do Dow Jones)

	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
ABERTURA	$0{,}7305$	$0{,}8614$	$0{,}9990$
MÁXIMO	-	$0{,}9946$	$0{,}8084$
MÍNIMO	-	-	$0{,}9173$

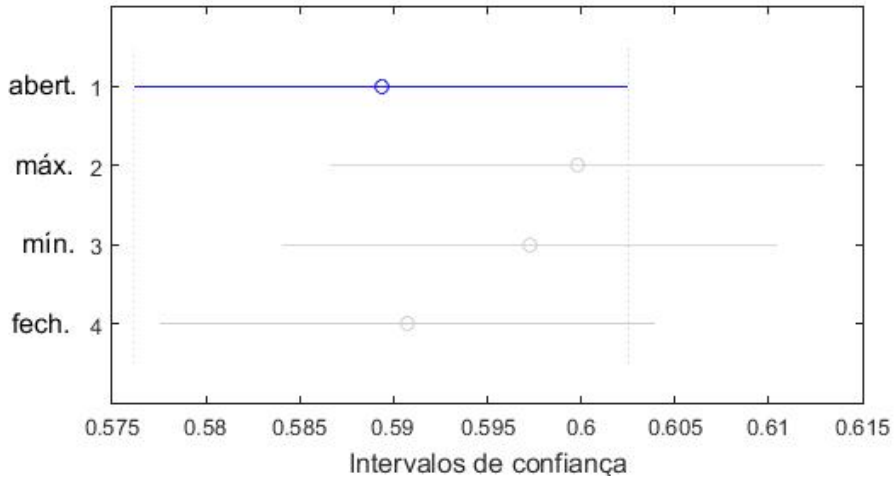

Figura 53 – Intervalos de confiança relativos a EH(-3) para abertura, máximo, mínimo e fechamento (Dow Jones).

O teste Kruskal-Wallis, com p-valor $0{,}5837$, diz o mesmo que o teste paramétrico.

9.3 Análise de correlação linear: índices Ibovespa e DJIA

Nessa seção realizamos o cálculo do *Coeficiente de Pearson* (CP), um teste estatístico que mede a correlação linear entre duas variáveis quantitativas (vide Subseção 7.5 do Capítulo de Fundamentação Teórica). Desta vez, comparamos pares de conjuntos de resultados para identificar possíveis relações entre eles, ou melhor, para entender como a variabilidade de um afeta a do outro. A hipótese nula é de que não há associação entre as ferramentas comparadas, e o nível de significância empregado foi $\alpha = 0{,}05$.

Para todas as comparações identificamos e retiramos os outliers envolvidos, no intuito de realizar uma análise melhor equilibrada.

9.3.1 Análise por componente

Aqui, a análise é realizada comparando resultados relativos a cada componente do candlestick.

9.3.1.1 Acurácias do modelo X Coeficientes de decaimento

O primeiro par de ferramentas testado foi AM e CD, e pudemos verificar na Tabela 15, para o índice Ibovespa, p-valores significativos para duas instâncias do candle: máximo e mínimo. Máximo apresenta um p-valor ($0{,}0029$) abaixo de $0{,}05$, que implica correlação, e, analisando o valor do coeficiente de correlação, $R = -0{,}4211$, podemos afirmar que se trata de uma associação negativa, que significa que, quanto menor o valor da cauda em

módulo, maior o valor da acurácia, ou seja, quanto mais pesada a cauda, maior a acurácia. O mesmo acontece para mínimo, este apresenta um p-valor estatisticamente relevante, muito próximo de $0{,}05$, e um coeficiente de correlação negativo ($R = -0{,}2826$). Na Figura 54 podemos ver as comparações para as quatro instâncias do candle.

Com relação ao índice americano, não evidenciou-se relação alguma (Tabela 16). Suas comparações também estão representadas na Figura 54. Sendo um mercado desenvolvido, a ausência de relações, que correspondem a desvios da Hipótese de Mercado Eficiente, não surpreende.

Tabela 15 – CP Ibovespa - AM X CD

Coeficientes de Pearson		
	R	P
ABERTURA	$0{,}0526$	$0{,}7226$
MÁXIMO	$-0{,}4211$	$\mathbf{0{,}0029}$
MÍNIMO	$-0{,}2826$	$\mathbf{0{,}0516}$
FECHAMENTO	$-0{,}1465$	$0{,}3203$

Tabela 16 – CP Dow Jones - AM X CD

Coeficientes de Pearson		
	R	P
ABERTURA	$0{,}0619$	$0{,}7592$
MÁXIMO	$0{,}0845$	$0{,}6752$
MÍNIMO	$0{,}1129$	$0{,}5749$
FECHAMENTO	$0{,}0412$	$0{,}8383$

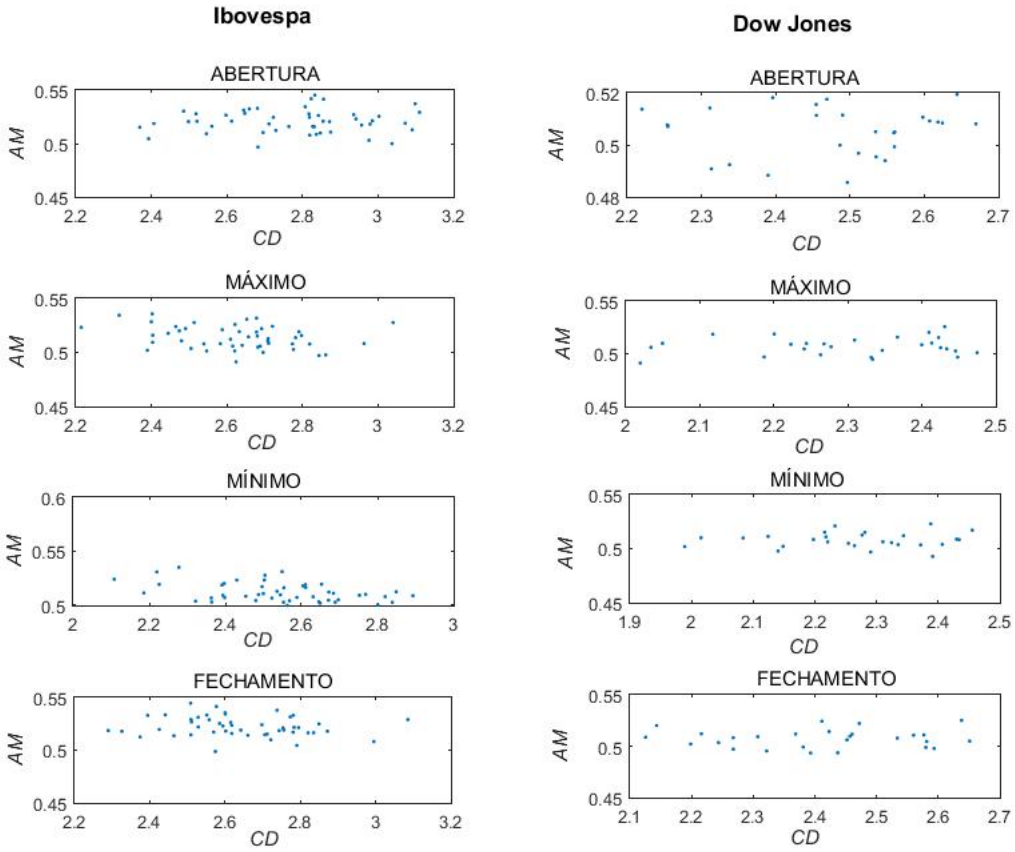

Figura 54 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson de AM X CD, índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação.

9.3.1.2 Acurácias do modelo X Larguras do espectro de singularidade

Neste teste, quando comparados, AM e LES apresentam p-valores altos que não podem rejeitar a hipótese nula, o que demonstra ausência de associações estatísticas para os dois índices verificados (Tabelas 17 e 18). A Figura 55 mostra os gráficos de correlação das quatro partes do candle, referentes a Ibovespa e Dow Jones.

Tabela 17 – CP Ibovespa - AM X LES

Coeficientes de Pearson		
	R	P
ABERTURA	$-0{,}1382$	$0{,}3336$
MÁXIMO	$-0{,}0382$	$0{,}7904$
MÍNIMO	$-0{,}1863$	$0{,}1906$
FECHAMENTO	$-0{,}1671$	$0{,}2413$

Tabela 18 – CP Dow Jones - AM X LES

Coeficientes de Pearson		
	R	P
ABERTURA	$0{,}1346$	$0{,}5032$
MÁXIMO	$0{,}2042$	$0{,}3068$
MÍNIMO	$0{,}0942$	$0{,}6402$
FECHAMENTO	$0{,}2298$	$0{,}2488$

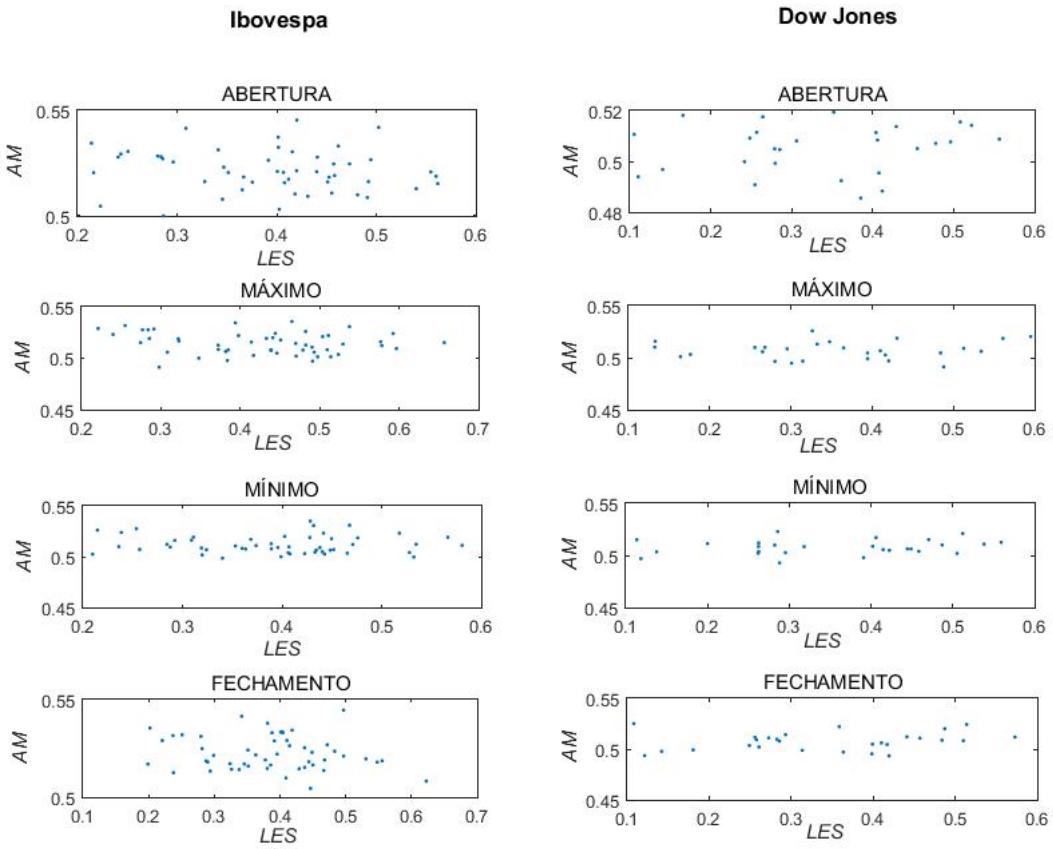

Figura 55 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson de AM X LES, índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação.

9.3.1.3 Larguras do espectro de singularidade X Coeficientes de decaimento

Este par de ferramentas, LES e CD, não apresenta p-valores abaixo de $0{,}05$ para o Ibovespa, já para o Dow Jones exibe dois p-valores relevantes, relacionados a mínimo e

fechamento (Tabelas 19 e 20). De acordo com este resultado, podemos assegurar duas correlações negativas, que apontam as distribuições de retornos com caudas pesadas como fatores que contribuem para o comportamento multifractal das LES: quanto menor o valor da cauda, em módulo, maior a LES. Posto isto, as caudas pesadas favorecem as LES, indicando, nesses casos, a distribuição de retornos como uma das fontes da multifractalidade. As comparações de Ibovespa e Dow Jones estão demonstradas na Figura 56.

Tabela 19 – CP Ibovespa - LES X CD

Coeficientes de Pearson		
	R	P
ABERTURA	$-0{,}2506$	$0{,}0762$
MÁXIMO	$-0{,}2076$	$0{,}1437$
MÍNIMO	$-0{,}0785$	$0{,}5840$
FECHAMENTO	$-0{,}2575$	$0{,}0681$

Tabela 20 – CP Dow Jones - LES X CD

Coeficientes de Pearson		
	R	P
ABERTURA	$-0{,}3376$	$0{,}0789$
MÁXIMO	$-0{,}2159$	$0{,}2698$
MÍNIMO	$-0{,}4419$	$\mathbf{0{,}0185}$
FECHAMENTO	$-0{,}3688$	$\mathbf{0{,}0534}$

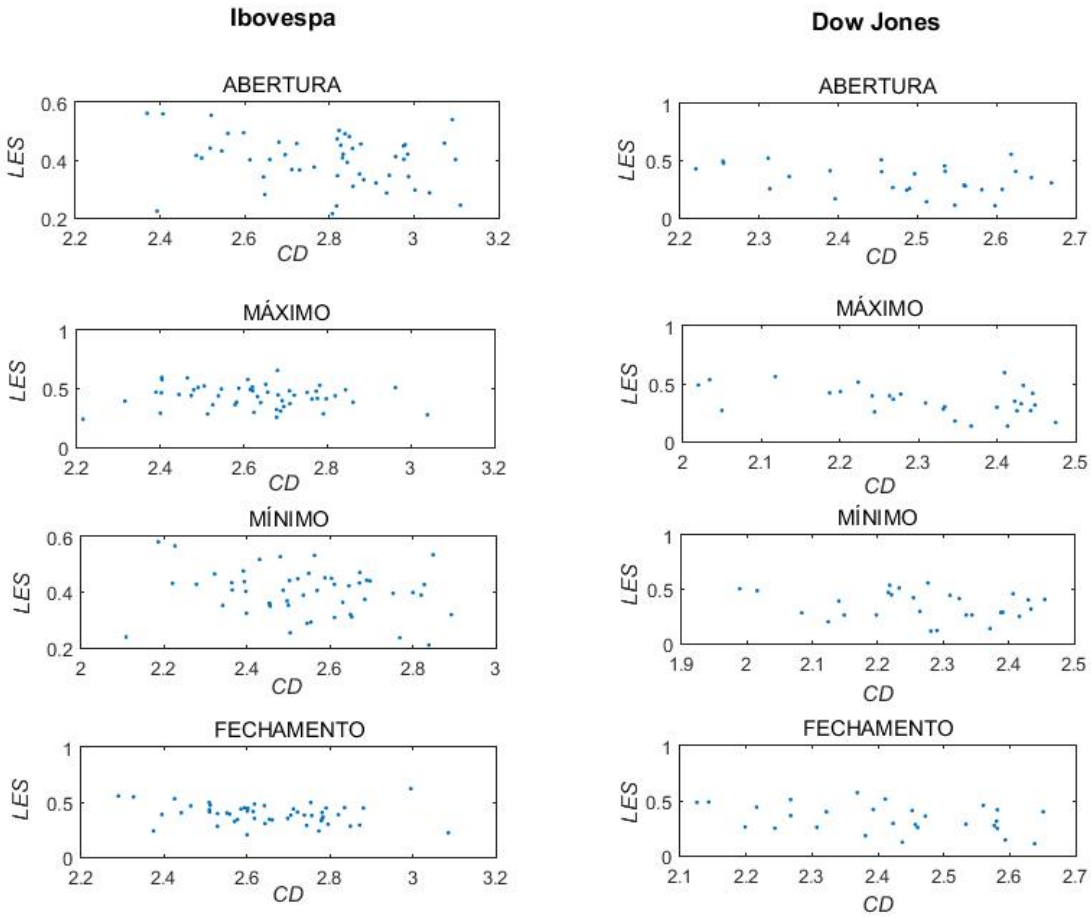

Figura 56 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson de LES X CD, índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação.

9.3.1.4 Acurácias do modelo X Expoentes de Hurst canônicos

Nesta comparação, AM e EH(2) apresentam p-valores altos, exceto para mínimo do Ibovespa e abertura do Dow Jones, os quais apresentam correlações positiva e negativa respectivamente (Tabelas 21 e 22). Porém, são resultados isolados, e não temos o que concluir, de forma consistente, destas correlações. A Figura 57 corresponde ao cálculo dos coeficientes de Pearson para Ibovespa e Dow Jones.

Tabela 21 – CP Ibovespa - AM X EH(2)

Coeficientes de Pearson		
	R	P
ABERTURA	$0{,}0281$	$0{,}8430$
MÁXIMO	$0{,}1592$	$0{,}2597$
MÍNIMO	$0{,}2930$	$\mathbf{0{,}0350}$
FECHAMENTO	$-0{,}0148$	$0{,}9170$

Tabela 22 – CP Dow Jones - AM X EH(2)

Coeficientes de Pearson		
	R	P
ABERTURA	$-0{,}4767$	$\mathbf{0{,}0215}$
MÁXIMO	$-0{,}0096$	$0{,}9652$
MÍNIMO	$0{,}2760$	$0{,}2024$
FECHAMENTO	$-0{,}2856$	$0{,}1864$

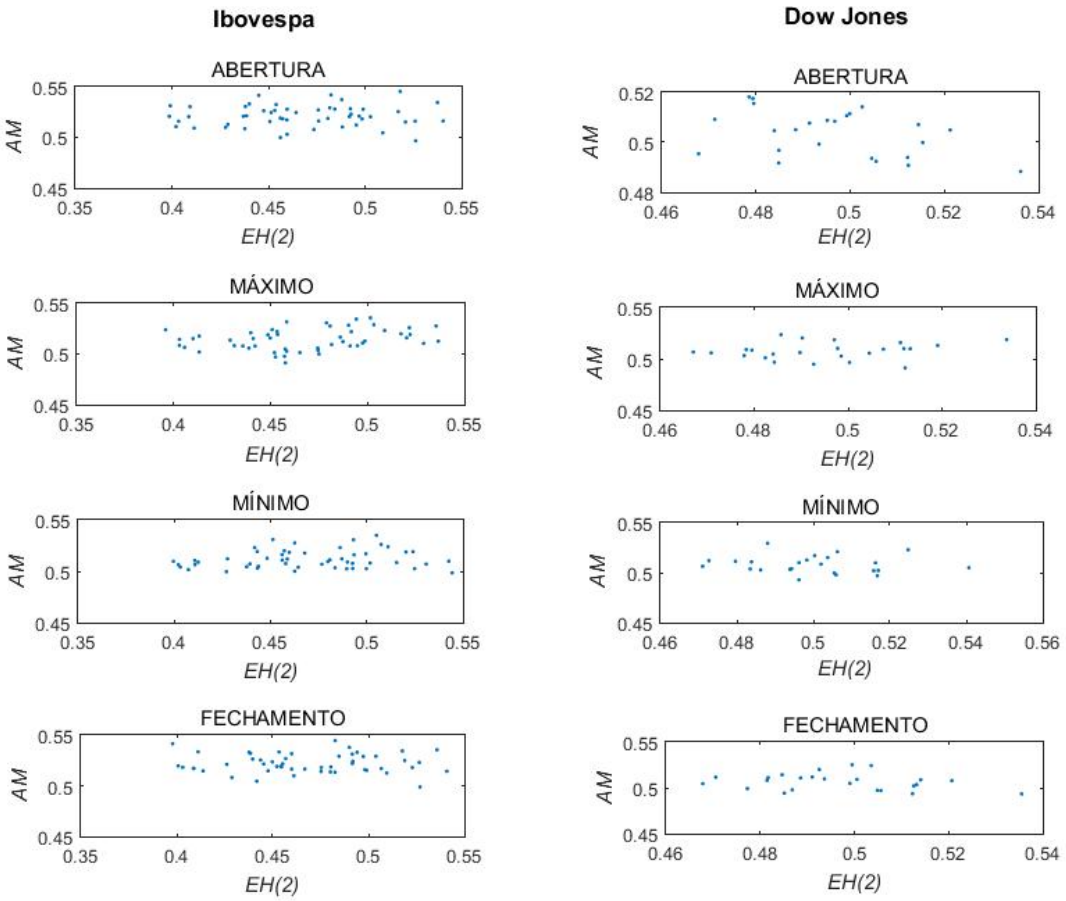

Figura 57 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson de AM X EH(2), índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação.

9.3.1.5 Acurácias do modelo X Expoentes de Hurst generalizados

Para este par de ferramentas, temos duas componentes do candle que apresentam correlação no mercado brasileiro: abertura com p-valor igual a $0{,}0418$, e fechamento com p-valor igual a $0{,}0129$ (Tabela 23). Como seus coeficientes são negativos, isto implica correlações contrárias, ou seja, quando o valor de uma ferramenta aumenta, o da outra diminui e vice-versa. Quanto ao mercado americano, apenas abertura apresenta um p-valor significativo ($0{,}0170$), cuja correlação também é negativa (Tabela 24). A Figura 58 é resultante dessa comparação.

Tabela 23 – CP Ibovespa - AM X EH(-3)

Coeficientes de Pearson		
	R	P
ABERTURA	$-0{,}2862$	$\mathbf{0{,}0418}$
MÁXIMO	$-0{,}0039$	$0{,}9784$
MÍNIMO	$0{,}0274$	$0{,}8488$
FECHAMENTO	$-0{,}3459$	$\mathbf{0{,}0129}$

Tabela 24 – CP Dow Jones - AM X EH(-3)

Coeficientes de Pearson		
	R	P
ABERTURA	$-0{,}4473$	$\mathbf{0{,}0170}$
MÁXIMO	$-0{,}1061$	$0{,}5911$
MÍNIMO	$0{,}0271$	$0{,}8910$
FECHAMENTO	$-0{,}2490$	$0{,}2014$

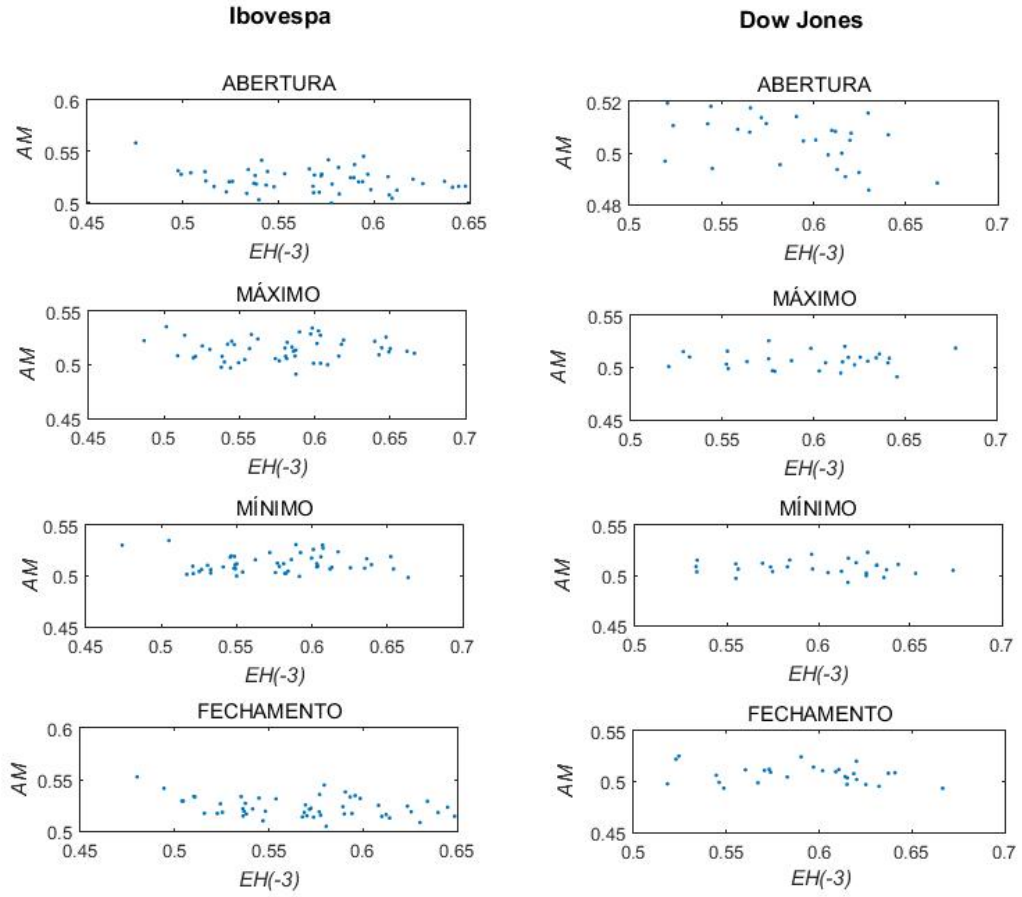

Figura 58 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson de AM X EH(-3), índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação.

9.3.2 Análise para dados agregados

Nesta seção, a análise de correlação linear é feita agregando-se os dados de todas as componentes em um único conjunto, para cada estatística (Tabelas 25 e 26).

Observamos três correlações relevantes para o Ibovespa, todas negativas (Tabela 25). Para o par AM e LES temos um p-valor $0{,}0232$ e um coeficiente de correlação $-0{,}1589$. Notemos que no estudo feito por componente (Subseção 9.3.1) não encontramos associação significativa para nenhum caso; a significância pode ter sido alcançada pelo aumento do tamanho da amostra. No caso do par LES e CD, encontramos um p-valor ainda mais baixo ($0{,}0077$), com coeficiente de Pearson também negativo ($-0{,}1862$); assim como no primeiro par (AM e LES), na verificação por componente não houve qualquer correlação. Por último, o par AM e EH(-3), com p-valor $0{,}0075$ e coeficiente $-0{,}1867$, também apresentou uma relação negativa, comportamento que foi observado na Seção anterior (9.3.1) para as componentes abertura e fechamento.

Quanto ao índice americano, foram percebidas duas correlações, novamente inversas. O par LES e CD apontou um p-valor $0{,}0016$ e coeficiente de correlação $-0{,}2997$ e o par AM e EH(-3) um p-valor $0{,}0436$ e coeficiente $-0{,}1910$ (Tabela 26). De novo, no estudo de associação por componente, ambos os pares apresentaram algumas correlações relevantes (ver Subseção 9.3.1). A Figura 59 corresponde às correlações descritas nas Tabelas 25 e 26.

Tabela 25 – CP Ibovespa - AGREGADOS

Coeficientes de Pearson		
	R	P
AM×CD	$-0{,}0210$	$0{,}7725$
AM×LES	$-0{,}1589$	$\mathbf{0{,}0232}$
LES×CD	$-0{,}1862$	$\mathbf{0{,}0077}$
AM×EH(2)	$0{,}0999$	$0{,}1512$
AM×EH(-3)	$-0{,}1867$	$\mathbf{0{,}0075}$

Tabela 26 – CP Dow Jones - AGREGADOS

Coeficientes de Pearson		
	R	P
AM×CD	$0{,}0065$	$0{,}9465$
AM×LES	$0{,}1666$	$0{,}0849$
LES×CD	$-0{,}2997$	$\mathbf{0{,}0016}$
AM×EH(2)	$-0{,}1356$	$0{,}1974$
AM×EH(-3)	$-0{,}1910$	$\mathbf{0{,}0436}$

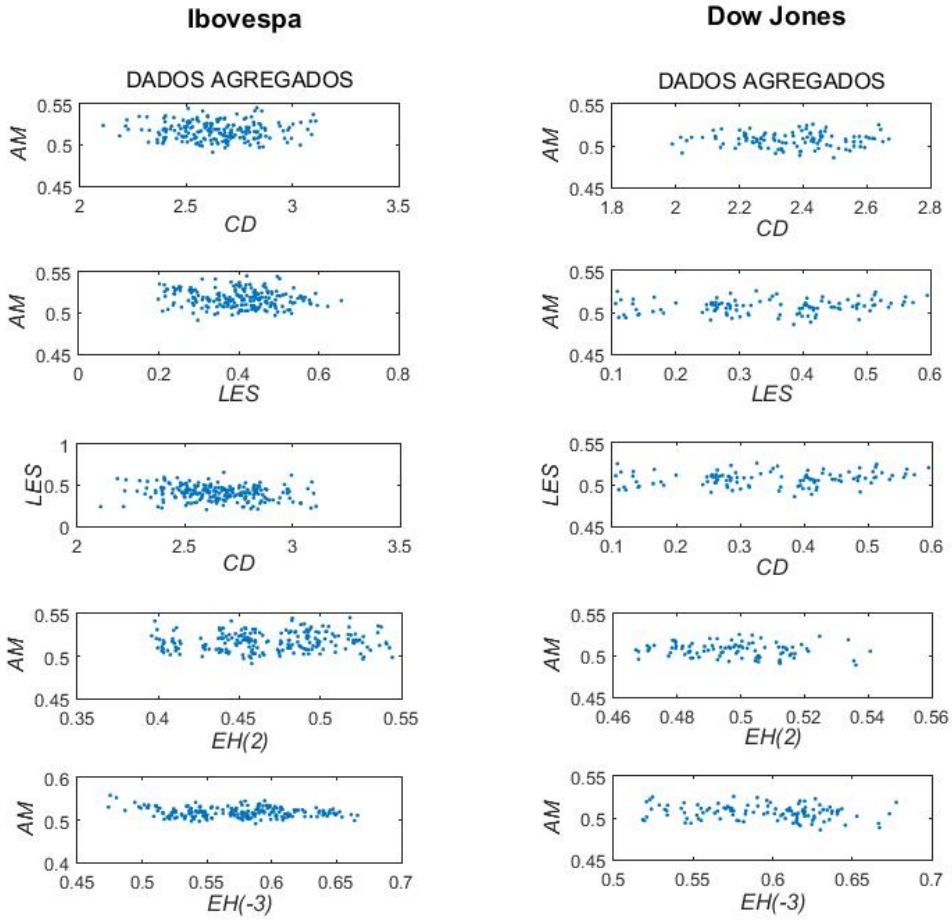

Figura 59 – Gráficos para cálculo dos coeficientes de Pearson dos dados agregados, índices Ibovespa e Dow Jones. Cada ponto representa uma ação.

10 Análise e discussão dos resultados - Experimento II

Os primeiros resultados, discutidos no Capítulo 9, concernentes a todas as estatísticas, foram analisados e sobreveio a necessidade de um novo tratamento dos dados que pudesse realçar as diferenças que realmente queremos mostrar neste estudo, que dizem respeito àquelas presentes entre as componentes do candle. Para tanto, as variações existentes entre os ativos deveriam ser atenuadas, desde que resguardadas suas devidas estruturas.

Este tratamento, já detalhado na Seção 8.2 do Capítulo de Metodologia, é aqui discutido e, para maior comodidade na leitura, novamente descrito. Assumamos que o símbolo $\Phi(s,c)$ denota, de forma genérica, as estatísticas em questão, onde s varia em conjuntos de ações e c corresponde às dimensões de abertura, máximo, mínimo ou fechamento do candle. Como a variação de tais estatísticas é tipicamente maior quando s é alterado mantendo c constante do que quando c é alterado mantendo s constante, foi preciso realçar a flutuação de Φ com c. Com este objetivo, calculamos, para cada ativo s, a média de $\Phi(s,c)$ sobre as quatro instâncias de c e a subtraímos de cada $\Phi(s,c)$, obtendo conjuntos de $\Delta\Phi(s,c)$:

$$\Delta\Phi\left(s,c\right) = \Phi(s,c) - \overline{\Phi}\left(s\right), \tag{46}$$

onde

$$\overline{\Phi}(s) = \frac{1}{4}\sum_{c}\Phi\left(s,c\right) \tag{47}$$

"Na grandeza $\Delta\Phi(s,c)$, o que é relevante para a pesquisa, a variação entre as componentes do candle, fica melhor evidenciada."

Os testes aplicados anteriormente foram refeitos com os dados ora tratados, e recorremos aos resultados preliminares, presentes no Capítulo 9, para montarmos um paralelo com os resultados atuais.

10.1 Índice Ibovespa

Lembremos que os mesmos conjuntos de dados são utilizados em todo o trabalho. Dos 59 ativos do Ibovespa, dois são desconsiderados neste estudo, a ELET6 por não fazer parte da carteira teórica do índice no primeiro quadrimestre, e a CPFE3 por conter um número excessivo de retornos nulos, o que impede o cálculo de expoentes de Hurst com q negativo para os menores tamanhos de régua (Capítulo 5). É tratado, assim, um conjunto de dados com 57 ativos do índice brasileiro.

A Tabela 27 é uma atualização da Tabela 2, após o novo tratamento dos dados. Ela apresenta as novas médias de todas as ferramentas que estamos utilizando para análise dos dados empíricos. Temos as acurácias de um modelo de previsão (AM), os coeficientes de decaimento em lei de potência da cauda da distribuição de retornos acumulada complementar (CD), os expoentes de Hurst canônico (EH(2)) e generalizado (EH(-3)), e temos também as larguras do espectro de singularidade (LES). Essa tabela nos permite desde já observar diferenças e, ainda, associar certas dimensões do candle. Assim como na Tabela 2, temos valores maiores para abertura e fechamento na ferramenta AM, e para máximo e mínimo nas ferramentas CD e EH(-3). Nas outras ferramentas estes valores não associam tais grupos.

Tabela 27 – Médias e desvios-padrões referentes às acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), larguras do espectro de singuralidade (LES) e expoentes de Hurst (EH) com $q = 2$ (canônicos) e $q = -3$ (generalizados) das quatro séries de 57 ações do índice Ibovespa, computados de acordo com a definição de $\Delta\Phi(s,c)$.

	Ibovespa			
	ABERTURA	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
AM	$0{,}0043(0{,}0066)$	$-0{,}0057(0{,}0067)$	$-0{,}0039(0{,}0078)$	$0{,}0052(0{,}0058)$
CD	$-0{,}1308(0{,}0709)$	$0{,}1097(0{,}0774)$	$0{,}0208(0{,}0769)$	$0{,}0003(0{,}0652)$
LES	$-0{,}0073(0{,}0142)$	$-0{,}0030(0{,}0279)$	$0{,}0258(0{,}0385)$	$-0{,}0156(0{,}0172)$
EH(2)	$-0{,}0010(0{,}0010)$	$0{,}0016(0{,}0020)$	$-0{,}0006(0{,}0020)$	$-5{,}4 \times 10^{-5}(0{,}0011)$
EH(-3)	$-0{,}0062(0{,}0047)$	$0{,}0054(0{,}0101)$	$0{,}0058(0{,}0147)$	$-0{,}0050(0{,}0065)$

10.1.1 Análise estatística dos resultados

10.1.1.1 Acurácias do modelo (AM)

No caso das acurácias, houve uma evolução discreta das diferenças a partir do teste visual (Figura 60). Comparando os resultados recentes com os do Experimento I (Capítulo 9, Subseção 9.1.1.1), é possível notar que os outliers encontrados anteriormente desaparecem e a distribuição da série de máximo parece aumentar em uma das caudas em sua extremidade inferior. Entretanto, aquela proximidade entre abertura e fechamento, e máximo e mínimo, observada no primeiro teste, se mantém aqui no segundo teste. Segundo essas observações, as diferenças podem continuar sendo relevantes.

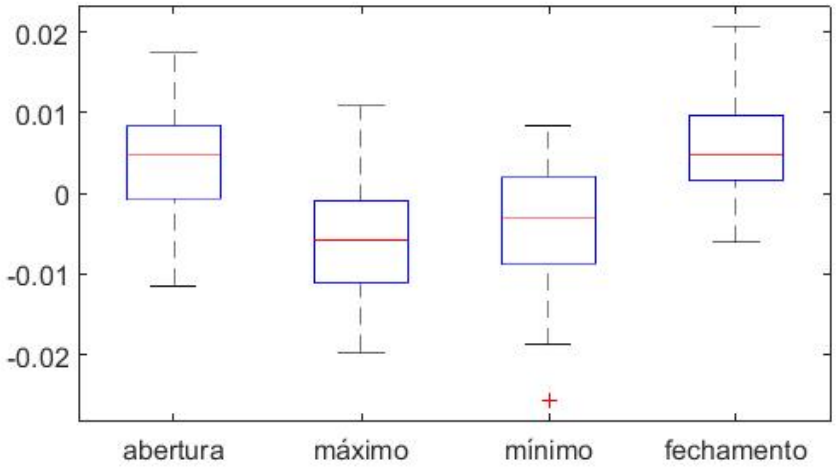

Figura 60 – Boxplot das acurácias do modelo para o índice Ibovespa. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46.

O novo teste de dispersão (Figura 61) também apresenta um gráfico aleatório, condizente com dados desvinculados. Este teste apenas justifica o uso do ANOVA quanto à exigência de independência das amostras comparadas.

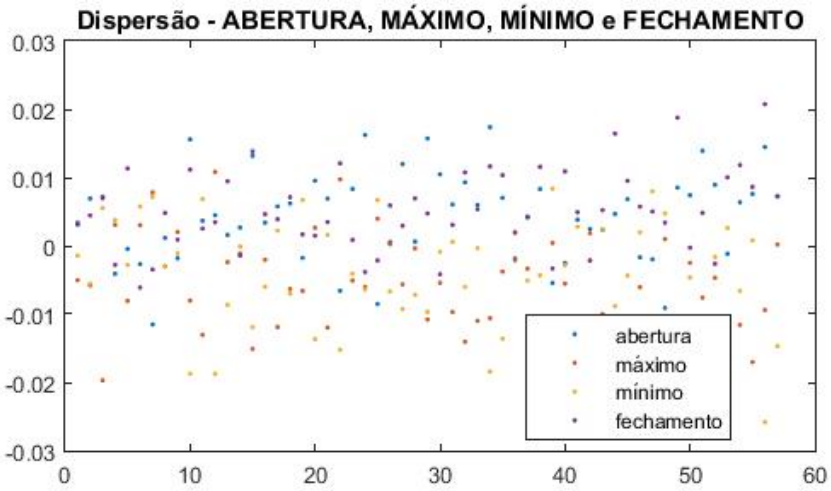

Figura 61 – Gráfico de dispersão das AM de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46.

Neste novo experimento, após o novo tratamento dos dados, descrito no início deste Capítulo, temos gráficos de normalidade cujas curvas demonstram ainda mais simetria que no experimento anterior (Capítulo 9), outro ponto que fortalece o emprego do ANOVA quanto ao quesito normalidade. Dito isso, podemos considerar os resultados do teste paramétrico.

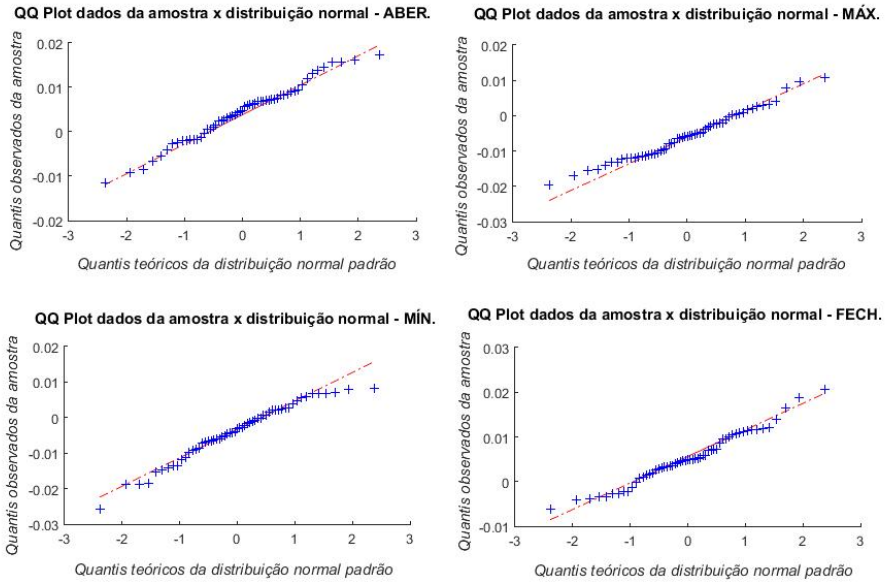

Figura 62 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às AM de 57 ativos do índice Ibovespa. Neste segundo experimento os dados foram tratados.

No novo teste ANOVA realizado, as diferenças encontradas se mostram mais significativas. A condição é a mesma, onde o resultado rejeita a hipótese de todas as amostras serem equivalentes estatisticamente, porém, agora com maior exatidão. O p-valor diminui de $5{,}1294 \times 10^{-5}$ para $3{,}1414 \times 10^{-20}$.

O teste Tukey, através de uma comparação par a par, mostra exatamente onde estão as diferenças e como seus p-valores são ainda mais baixos (Tabela 28). Como no experimento I, também aqui é possível distinguir dois grupos cujos pares são iguais estatisticamente, abertura e fechamento, e máximo e mínimo, porém um grupo difere do outro. A Figura 63, que ilustra os intervalos de confiança, confirma essas relações.

Tabela 28 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - AM Ibovespa (exp.II)

	MÁX	MÍN	FECH
ABE	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$	$\mathbf{4{,}23 \times 10^{-9}}$	$0{,}8955$
MÁX	-	$0{,}5042$	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$
MÍN	-	-	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$

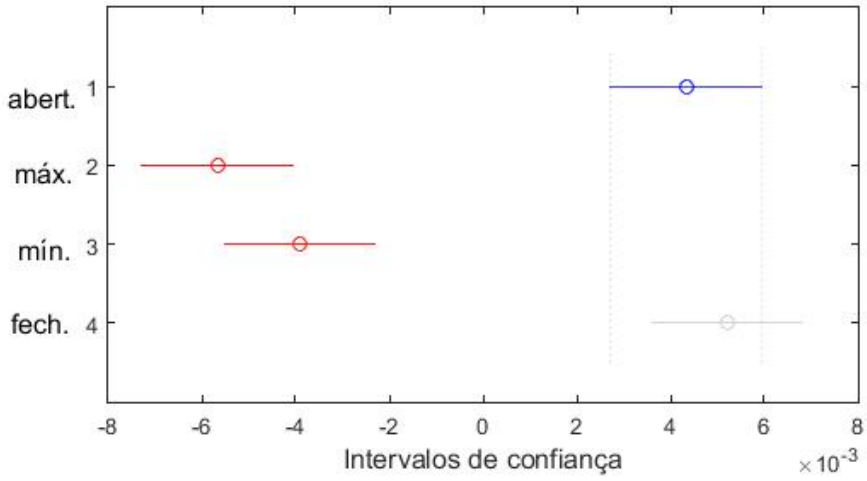

Figura 63 – Intervalos de confiança das acurácias do modelo, relativos ao índice Ibovespa, para os dados tratados.

O teste Kruskal-Wallis também se manteve quanto à condição anterior. O p-valor diminuiu de $1{,}4980 \times 10^{-6}$ para $1{,}9953 \times 10^{-17}$, e as diferenças foram salientadas, como no ANOVA.

10.1.1.2 Coeficientes de decaimento (CD)

Na comparação visual feita pelo boxplot para os coeficientes de decaimento do índice brasileiro (Figura 64), as caixas de abertura e de máximo distanciam-se das outras em sentidos opostos neste segundo teste. Somente mínimo e fechamento se mantém próximos. Abertura e máximo parecem séries melhor distribuídas, comparadas às do teste anterior (Capítulo 9, Subseção 9.2.1.2), se observadas suas respectivas caudas, e os outliers aparentam ser outros. Tais diferenças parecem significativas, mas é preciso que o ANOVA confirme.

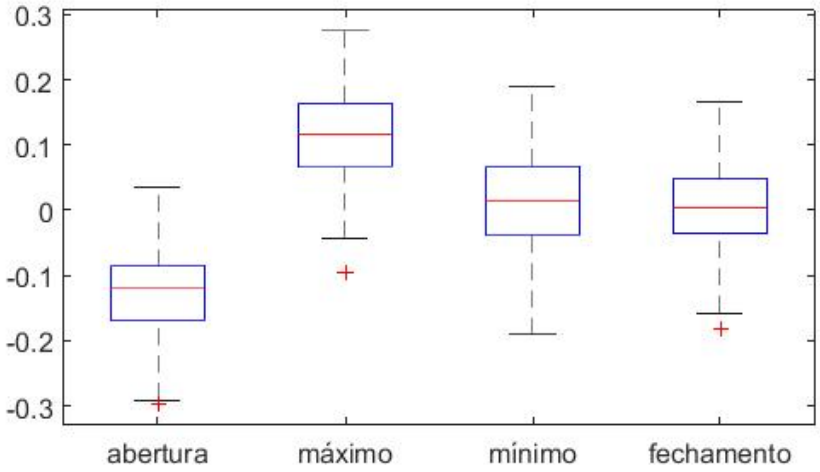

Figura 64 – Boxplot dos coeficientes de decaimento para o índice Ibovespa. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46.

O Gráfico 65 representa a aleatoriedade das amostras nesta nova aplicação. E os gráficos da Figura 66 indicam que as amostras continuam não assimétricas, como anteriormente (Capítulo 9). Isto equivale a dizer que o teste ANOVA pode ser considerado mais uma vez.

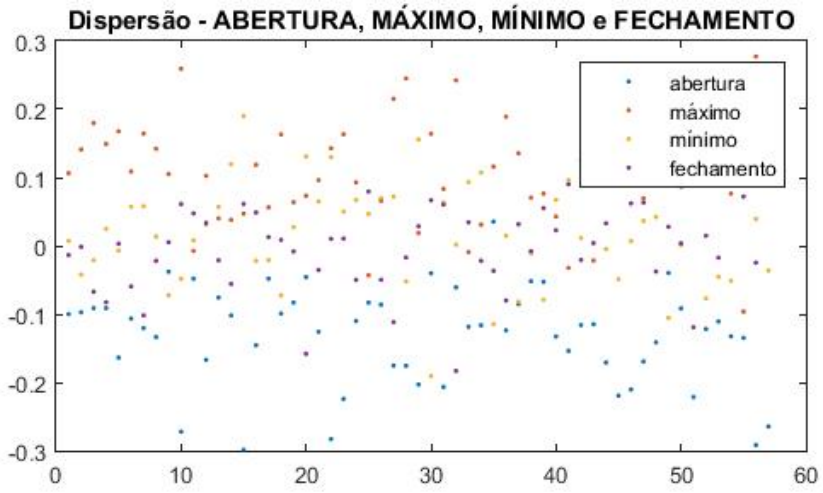

Figura 65 – Gráfico de dispersão dos CD de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46.

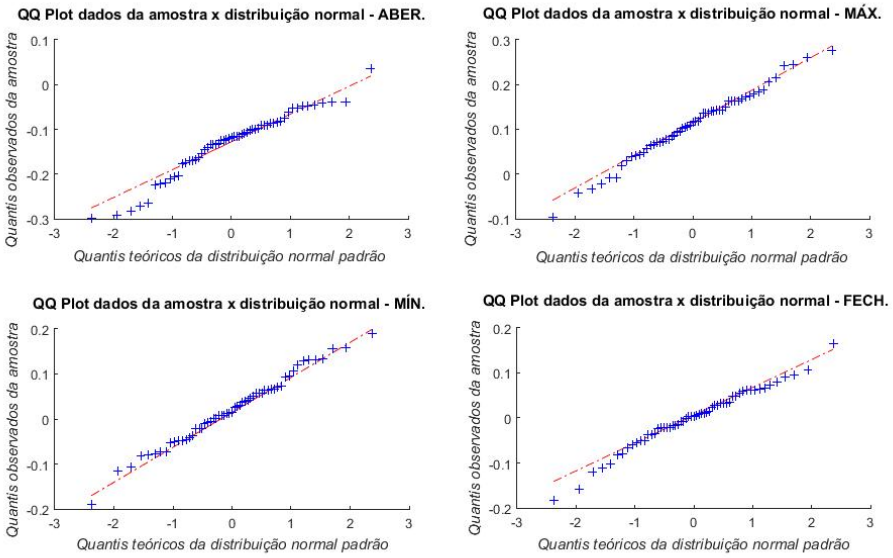

Figura 66 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos CD de 57 ativos do índice Ibovespa. Neste segundo experimento os dados foram tratados.

O teste ANOVA apresenta, nesta nova fase, um p-valor $8{,}9338 \times 10^{-43}$, muito menor que o anterior ($2{,}8354 \times 10^{-7}$), o que salienta ainda mais as diferenças entre as componentes do candle. Com o teste Tukey, é possível saber onde as diferenças estão (Tabela 29). Realmente, o único par que possui semelhança estatística é mínimo e fechamento, os demais são todos diversos. A Figura 67 estampa essa comparação.

Tabela 29 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - CD Ibovespa (exp.II)

	MÁX	MÍN	FECH
ABE	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$
MÁX	-	$\mathbf{4{,}15 \times 10^{-9}}$	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$
MÍN	-	-	$0{,}4366$

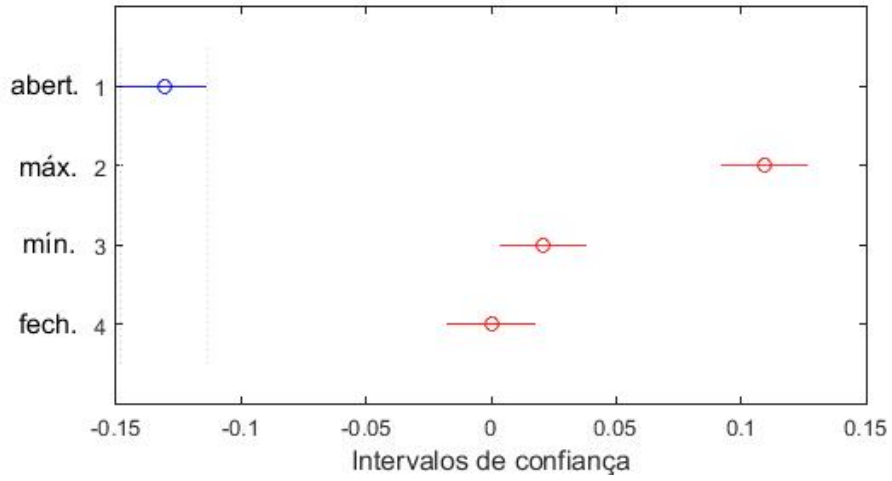

Figura 67 – Intervalos de confiança dos coeficientes de decaimento, relativos ao índice Ibovespa, para os dados tratados.

O p-valor também diminuiu no teste Kruskal-Wallis realizado para os CD do Ibovespa, em concordância com o ANOVA. De $3{,}4702 \times 10^{-7}$ para $2{,}1202 \times 10^{-29}$.

10.1.1.3 Larguras do espectro de singularidade (LES)

A Figura 68 mostra que surgiram diferenças, decorrentes deste novo cálculo, para as LES. É nítido o distanciamento da caixa de mínimo em relação às demais. Neste segundo experimento, o boxplot possui um número maior de outliers (ver Subseção 9.1.1.3 do Capítulo anterior). O ANOVA pode dizer se essas diferenças são estatisticamente importantes.

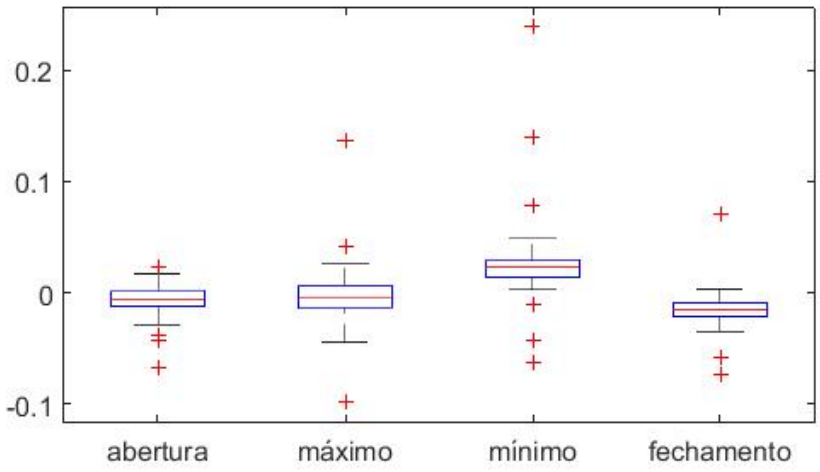

Figura 68 – Boxplot das larguras do espectro de singularidade para o índice Ibovespa. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46.

Diante dos novos testes de dispersão (Figura 69) e normalidade (Figura 70), que sustentam o resultado do teste paramétrico ANOVA, podemos verificar se tal percepção é válida.

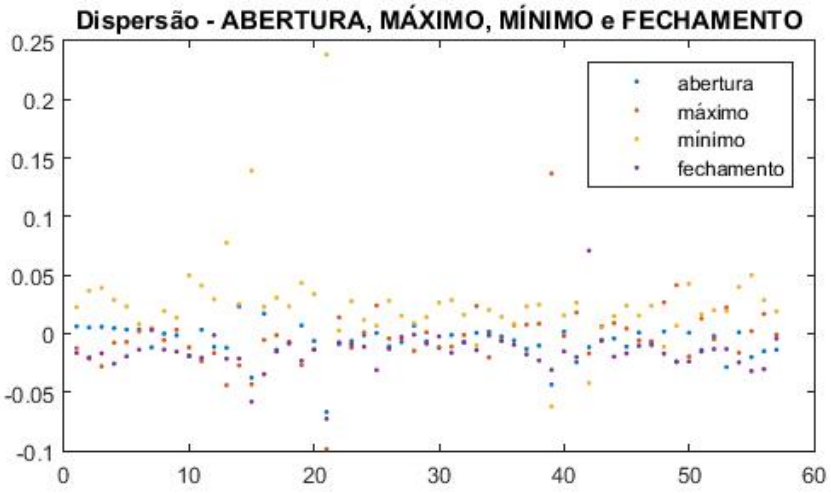

Figura 69 – Gráfico de dispersão das LES de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46.

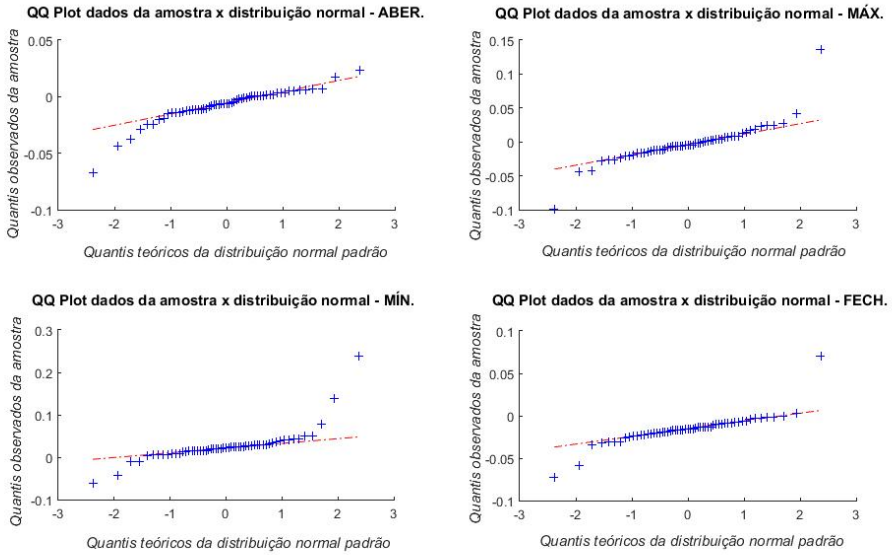

Figura 70 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às LES de 57 ativos do índice Ibovespa. Neste segundo experimento os dados foram tratados.

O teste ANOVA comprova, segundo seu novo p-valor ($8{,}2016 \times 10^{-15}$), que existe uma distinção entre os dados das amostras, o que nos cálculos anteriores não acontecia (p-valor igual a $0{,}1486$).

O teste Tukey mostra (Tabela 30) que abertura e máximo, e abertura e fechamento permanecem com alguma semelhança, já os demais não tem nenhuma equivalência. Além disso, apesar dos dois pares acima terem em comum a série abertura, as outras duas séries: máximo e fechamento estão exatamente no limite do valor referência para rejeitar a hipótese de conformidade (ver Figura 71).

Tabela 30 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - LES Ibovespa (exp.II)

	MÁX	MÍN	FECH
ABE	$0{,}8195$	$\mathbf{3{,}87 \times 10^{-9}}$	$0{,}3271$
MÁX	-	$\mathbf{3{,}34 \times 10^{-8}}$	$\mathbf{0{,}0505}$
MÍN	-	-	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$

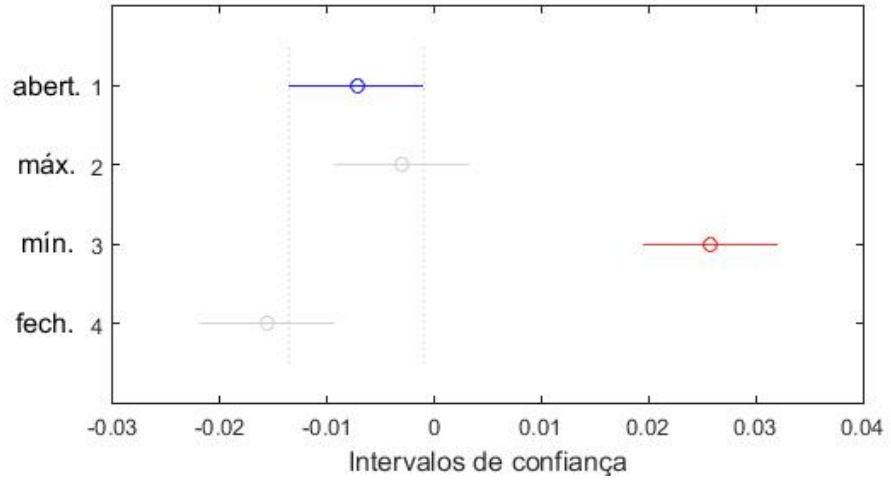

Figura 71 – Intervalos de confiança das larguras do espectro de singularidade, relativos ao índice Ibovespa, para os dados tratados.

O teste Kruskal-Wallis também muda de condição com o novo p-valor $9{,}5834 \times 10^{-22}$, diferenciando as componentes da amostra. Bem diferente do que o primeiro teste apontava ($p = 0{,}1165$).

10.1.1.4 Expoentes de Hurst canônicos (EH(2))

Antes dos cálculos com as médias, não havia qualquer sinal de diferença entre as séries do candle para expoentes de Hurst canônicos (conforme Figura 25 da Subseção 9.1.1.4). Agora é possível ver, já através do boxplot, algumas desigualdades (Figura 72). A caixa de abertura não coincide em nada com a caixa de máximo, que por sua vez se parece um pouco com a caixa de mínimo, mas não lembra em nada a de fechamento. Todas foram modificadas no segundo teste, assim como seus outliers. Em termos de tamanho, abertura parece combinar com fechamento. As medianas também são diferentes. O teste paramétrico deve confirmar diferenças para as amostras.

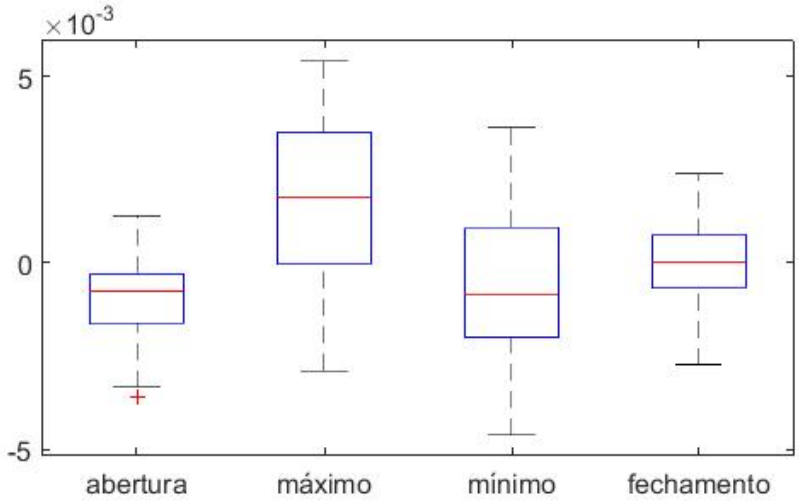

Figura 72 – Boxplot dos expoentes canônicos para o índice Ibovespa. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46.

Para a aplicação do teste ANOVA, temos o novo teste de dispersão (Figura 73), que constata a independência das séries, e temos os novos gráficos QQ (Figura 74) que assumem normalidade para as séries ora tratadas.

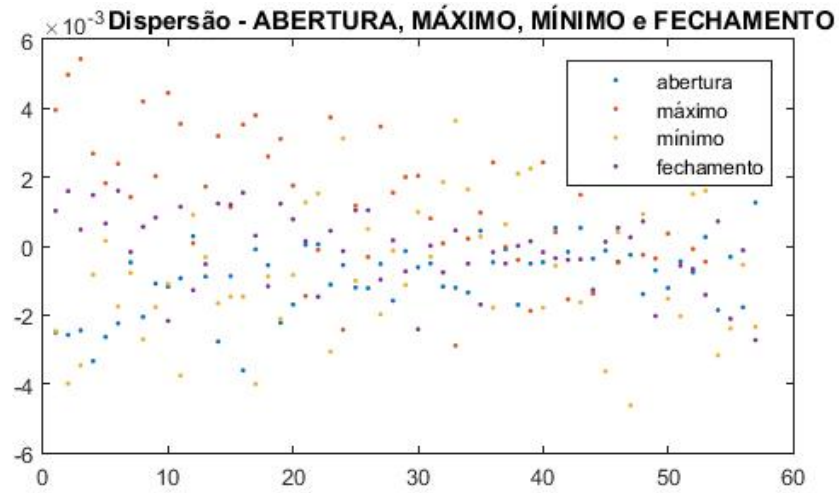

Figura 73 – Gráfico de dispersão dos EH(2) de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46.

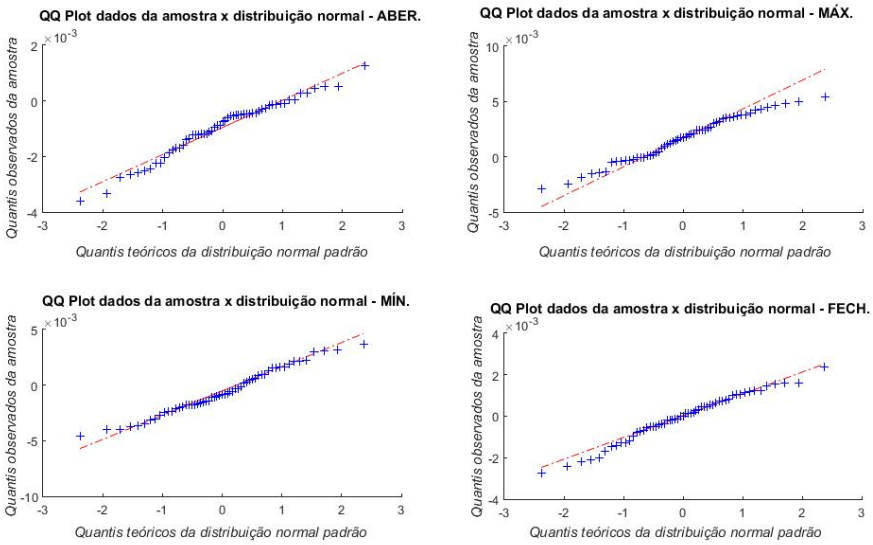

Figura 74 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(2) de 57 ativos do índice Ibovespa. Neste segundo experimento os dados foram tratados.

O teste ANOVA certifica que a amostra não é mais considerada semelhante estatisticamente. O p-valor que antes não podia rejeitar a hipótese de equivalência ($p = 0{,}9850$), agora o faz com valor bem abaixo ($9{,}6173 \times 10^{-16}$) da referência para o teste. A Tabela 31 explicita diferenças e semelhanças, mas não confirma a nossa impressão do teste visual. As séries que tem alguma correspondência estatística são abertura e mínimo, e mínimo e fechamento, e, ainda assim, abertura não se assemelha a fechamento. Os demais são distintos. É possível visualizar esses resultados na Figura 75, através dos intervalos de confiança.

Tabela 31 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - EH(2) Ibovespa (exp.II)

	MÁX	MÍN	FECH
ABE	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$	$0{,}6760$	$\mathbf{0{,}0151}$
MÁX	-	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$	$\mathbf{1{,}73 \times 10^{-7}}$
MÍN	-	-	$0{,}2450$

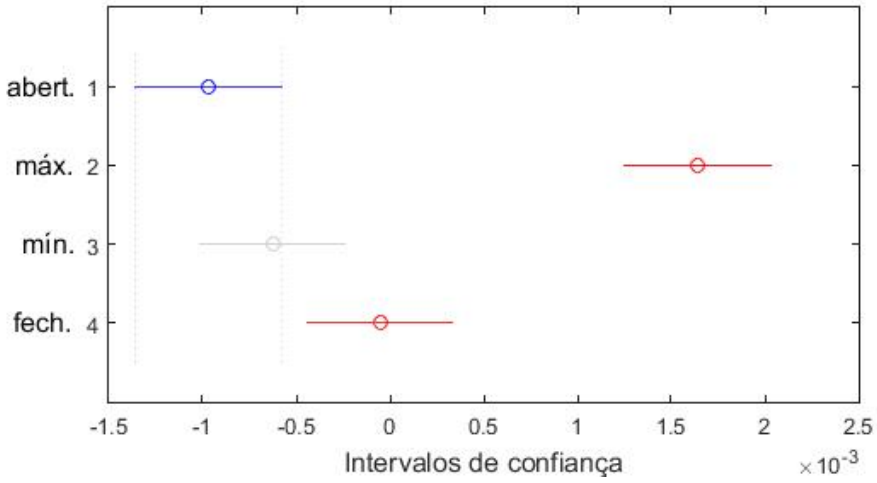

Figura 75 – Intervalos de confiança dos expoentes de Hurst canônicos ($q = 2$), relativos ao índice Ibovespa para os dados tratados.

O Kruskal-Wallis acompanha o ANOVA. O p-valor deste também altera a condição anterior. De $0{,}9667$ cai para $2{,}9686 \times 10^{-12}$, rejeitando a hipótese das amostras virem de uma mesma distribuição.

10.1.1.5 Expoentes de Hurst generalizados (EH(-3))

Para o expoente negativo, temos uma grande mudança neste segundo experimento, com relação ao teste visual boxplot. Os dois grupos (abertura/fechamento e máximo/mínimo), que costumam se distinguir, estão bem definidos aqui (Figura 76). Também é possível notar um aumento no número de outliers (observar Figura 29). Devemos encontrar diferenças significativas.

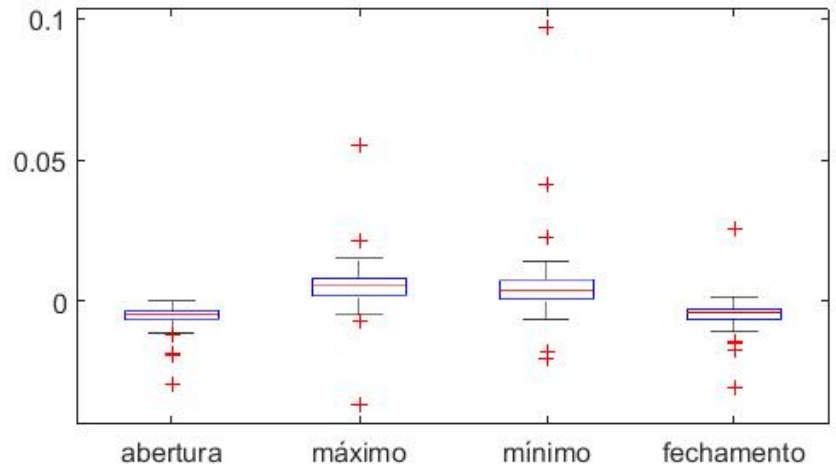

Figura 76 – Boxplot dos expoentes generalizados para o índice Ibovespa. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46.

O novo teste de dispersão (Figura 77) continua apresentando um gráfico de dados aleatórios, como anteriormente. Este, juntamente com o teste de normalidade (Figura 78), validam o teste ANOVA também para esta ferramenta estatística.

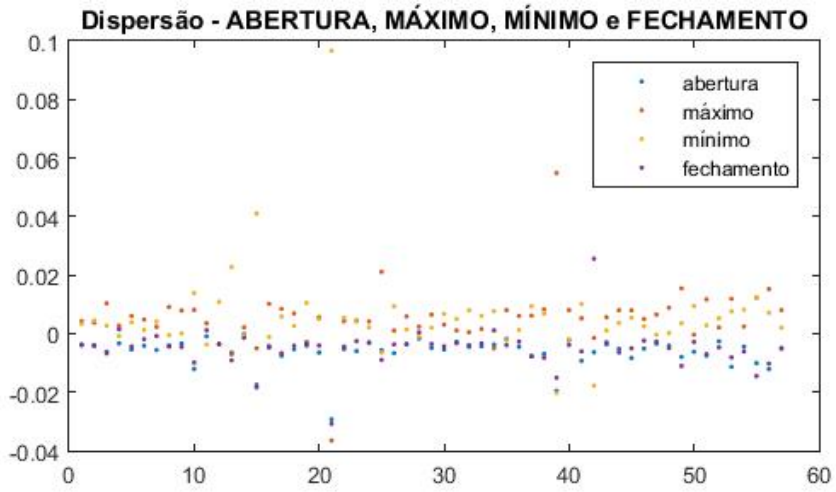

Figura 77 – Gráfico de dispersão dos EH(-3) de 57 ações do índice Ibovespa para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46.

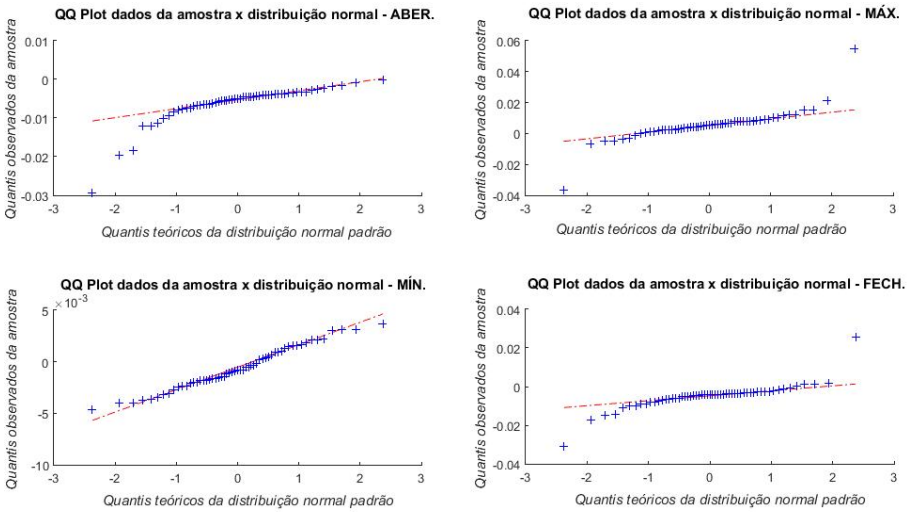

Figura 78 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(-3) de 57 ativos do índice Ibovespa. Neste segundo experimento os dados foram tratados.

O teste ANOVA, que antes apresentava um p-valor alto ($0{,}4037$), revela, nesse segundo experimento, um resultado próximo de zero (p-valor $2{,}4597 \times 10^{-12}$), que rejeita com segurança a hipótese das amostras terem médias iguais. Essa mudança pode ser verificada também no teste Tukey, através de seus p-valores (Tabela 32). Seus intervalos de

confiança confirmam as semelhanças dos pares abertura/fechamento e máximo/mínimo, vistas já no boxplot, assim como a diferença entre estes dois grupos (Figura 79).

Tabela 32 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - EH(-3) Ibovespa (exp.II)

	MÁX	MÍN	FECH
ABE	$\mathbf{7{,}95 \times 10^{-8}}$	$\mathbf{5{,}91 \times 10^{-9}}$	$0{,}9212$
MÁX	-	$0{,}9386$	$\mathbf{2{,}55 \times 10^{-6}}$
MÍN	-	-	$\mathbf{1{,}08 \times 10^{-7}}$

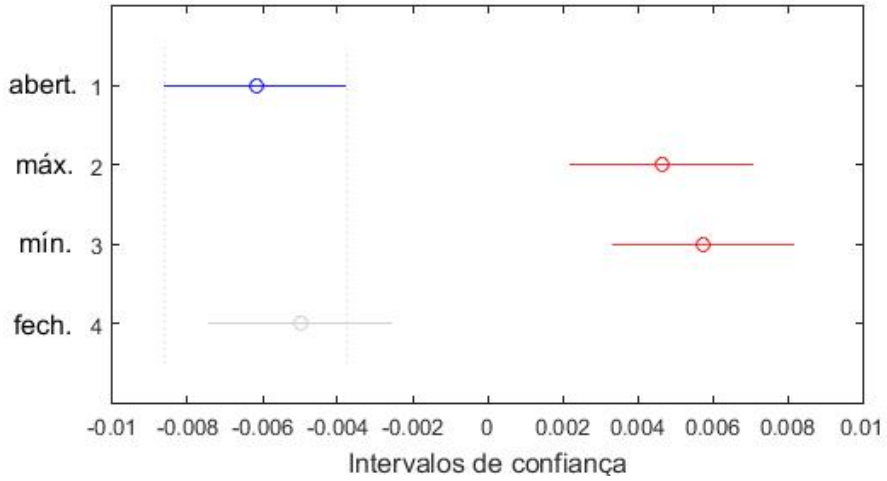

Figura 79 – Intervalos de confiança dos expoentes de Hurst generalizados ($q = -3$), relativos ao índice Ibovespa, para dados tratados.

Por último, o resultado do Kruskal-Wallis, mais uma vez acompanha o ANOVA na mudança. O p-valor diminuiu bastante nesse novo teste, de $0{,}3179$ para $3{,}8852 \times 10^{-26}$.

Todas essas comparações foram feitas também para o índice americano Dow Jones, exatamente na mesma ordem.

10.2 Índice DJIA

Reforçamos, mais uma vez, que os conjuntos de ações analisados foram os mesmos durante todo o trabalho, contando com um total de 29 ativos para o índice Dow Jones. Somente a DIS UN Equity foi descartada deste estudo.

Também aqui apresentamos uma tabela atualizada com os valores médios das ferramentas utilizadas para nossas análises (ver Tabela 33), após o novo tratamento dos dados realizado neste capítulo. São elas: acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), expoentes de Hurst canônicos e generalizados (EH(2) e EH(-3)) e larguras do espectro de singularidade (LES). De acordo com esta tabela, podemos assumir que

os valores de máximo e mínimo são maiores que os valores de abertura e fechamento em todas as ferramentas analisadas para o índice americano, com exceção do EH(2) de mínimo.

Tabela 33 – Médias e desvios-padrões das acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), larguras do espectro de singuralidade (LES) e expoentes de Hurst (EH) com $q = 2$ (canônicos) e $q = -3$ (generalizados) das quatro séries de 29 ações do índice DJIA, extraídas a partir dos novos cálculos com a média.

Dow Jones				
	ABERTURA	MÁXIMO	MÍNIMO	FECHAMENTO
AM	$-0{,}0025(0{,}0067)$	$0{,}0016(0{,}0056)$	$0{,}0010(0{,}0083)$	$-2{,}1 \times 10^{-5}(0{,}0064)$
CD	$-0{,}1060(0{,}0639)$	$0{,}1053(0{,}0598)$	$0{,}0667(0{,}0543)$	$-0{,}0661(0{,}1160)$
LES	$-0{,}0095(0{,}0036)$	$0{,}0060(0{,}0148)$	$0{,}0080(0{,}0153)$	$-0{,}0045(0{,}0039)$
EH(2)	$-0{,}0006(0{,}0008)$	$0{,}0021(0{,}0021)$	$-0{,}0010(0{,}0023)$	$-0{,}0005(0{,}0008)$
EH(-3)	$-0{,}0049(0{,}0011)$	$0{,}0055(0{,}0025)$	$0{,}0030(0{,}0026)$	$-0{,}0035(0{,}0012)$

10.2.1 Análise estatística dos resultados

10.2.1.1 Acurácias do modelo (AM)

O boxplot das acurácias do DJIA (Figura 80) mostra caixas de tamanhos distintos, assim como distribuições menores para máximo e fechamento, porém as medianas ainda são próximas levando em conta a escala do gráfico. Pela dificuldade de um parecer é necessário que façamos os outros testes.

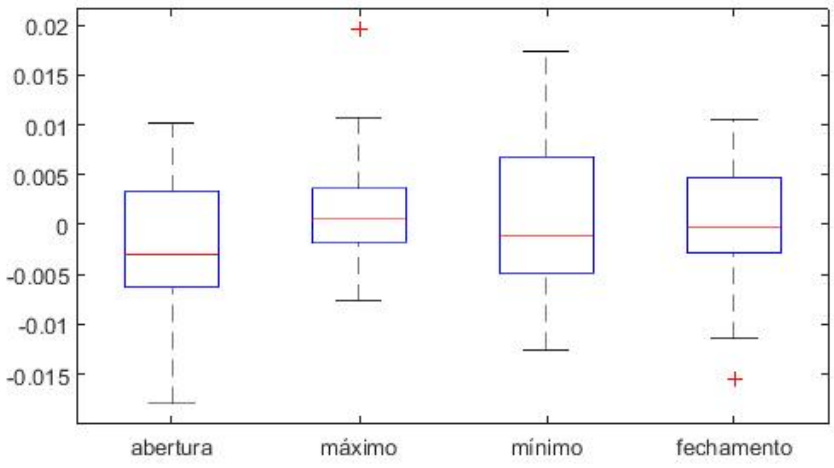

Figura 80 – Boxplot das acurácias do modelo para o índice Dow Jones. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46.

O teste de dispersão atual das AM (Figura 81) é tão heterogêneo quanto o do primeiro experimento, configurando dados independentes. O teste de normalidade (Figura

82), continua apresentando dados próximos de uma normal. Os dois resultados descritos acima possibilitam o emprego do ANOVA.

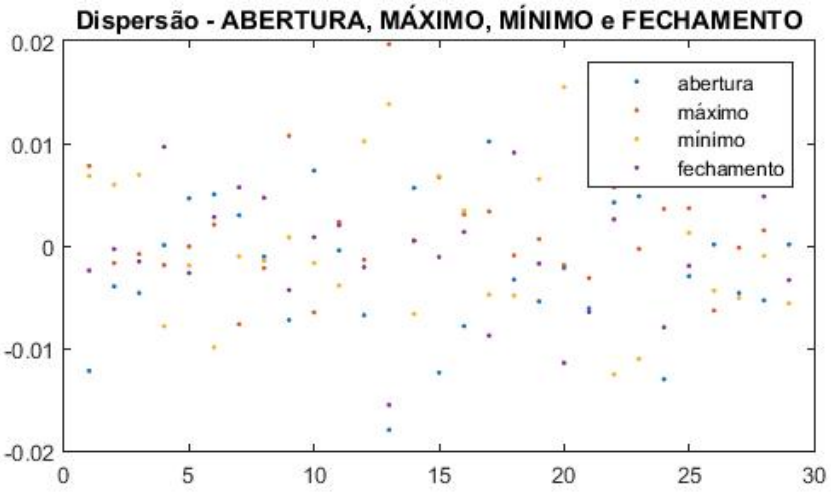

Figura 81 – Gráfico de dispersão das AM de 29 ações do índice DJIA para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46.

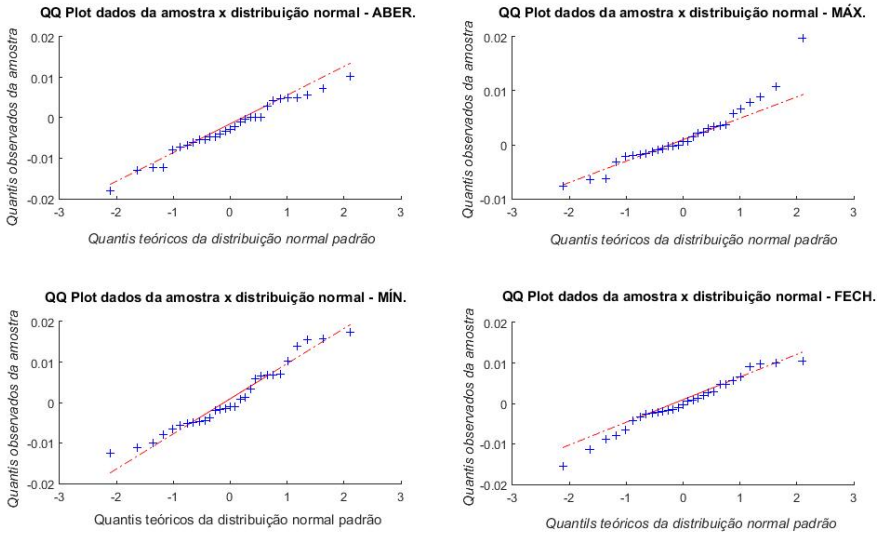

Figura 82 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às AM de 29 ativos do índice DJIA. Neste segundo experimento os dados foram tratados.

O p-valor do ANOVA diminuiu pouco (de $0{,}3274$ para $0{,}1186$), e não chegou a modificar a condição de amostra com equivalência estatística. O teste Tukey (Tabela 34) também não obteve relevante mudança, assim como o Kruskal-Wallis, cujo p-valor também diminuiu (de $0{,}5850$ para $0{,}1625$), mas não alterou a condição já existente. Os gráficos de intervalos de confiança da figura 83 são parecidos com o do primeiro experimento (ver Figura 37) no Capítulo anterior.

Tabela 34 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - AM DJIA (exp.II)

	MÁX	MÍN	FECH
ABE	0,1112	0,2232	0,5124
MÁX	-	0,9859	0,8116
MÍN	-	-	0,9484

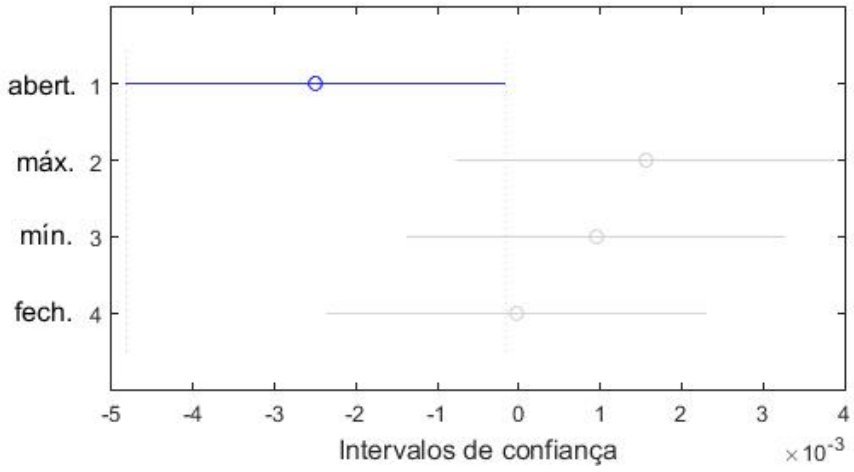

Figura 83 – Intervalos de confiança das acurácias do modelo, relativos ao índice Dow Jones, para os dados tratados.

10.2.1.2 Coeficientes de decaimento (CD)

No primeiro experimento já era possível visualizar o agrupamento dos pares abertura/fechamento e máximo/mínimo (Capítulo 9, Subseção 9.2.1.2). Com os novos cálculos envolvendo a média, essa situação permanece e fica mais nítida (Figura 84). Há também uma mudança nos tamanhos das caixas e nas distribuições neste segundo experimento. O teste ANOVA provavelmente concordará com o teste visual. Para isso, comprovamos, através dos testes de dispersão (Figura 85) e normalidade (Figura 86), que podemos utilizá-lo.

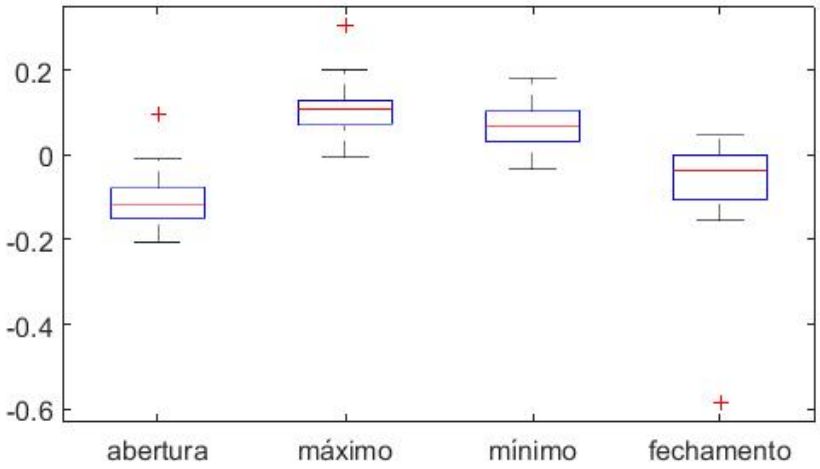

Figura 84 – Boxplot dos coeficientes de decaimento para o índice Dow Jones. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46.

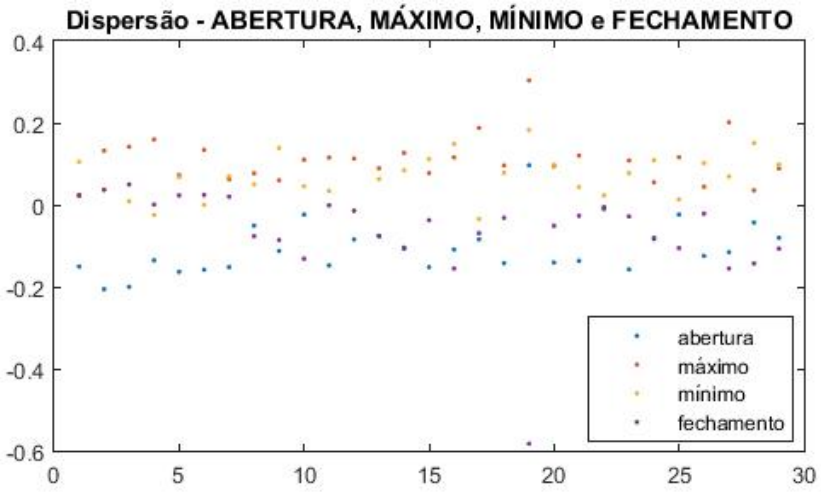

Figura 85 – Gráfico de dispersão dos CD de 29 ações do índice DJIA para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46.

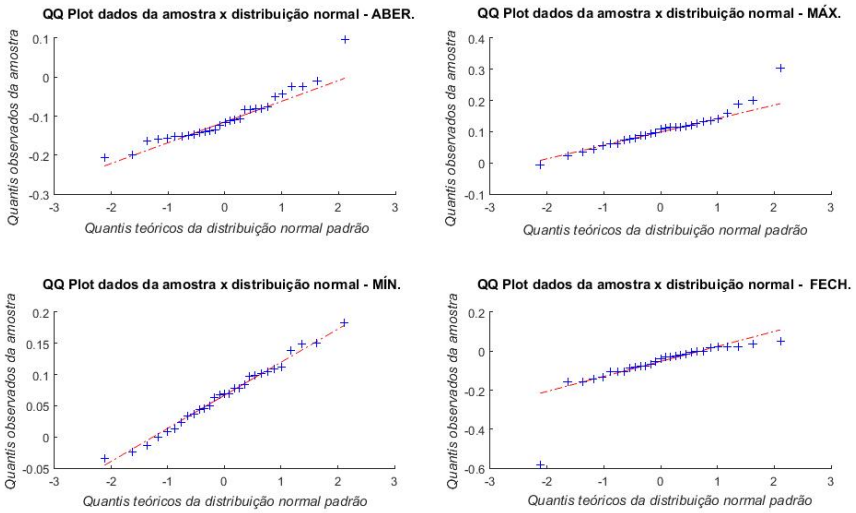

Figura 86 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos CD de 29 ativos do índice DJIA. Neste segundo experimento os dados foram tratados.

O teste ANOVA também já havia constatado uma amostra diferente estatisticamente no Capítulo anterior (p-valor $5{,}2098 \times 10^{-7}$), e agora com p-valor bem menor ($1{,}3567 \times 10^{-20}$), reafirma tal hipótese. É possível ver os valores de uma comparação par a par na Tabela 35 do teste Tukey, os quais embasam nossa percepção do boxplot atual. Também através dos intervalos de confiança (Figura 87), podemos visualizar os agrupamentos abertura/fechamento e máximo/mínimo, mais definidos neste segundo experimento. Podemos, por fim, verificar a diferença entre estes dois grupos.

Tabela 35 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - CD DJIA (exp.II)

	MÁX	MÍN	FECH
ABE	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$	$0{,}2106$
MÁX	-	$0{,}2358$	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$
MÍN	-	-	$\mathbf{1{,}63 \times 10^{-8}}$

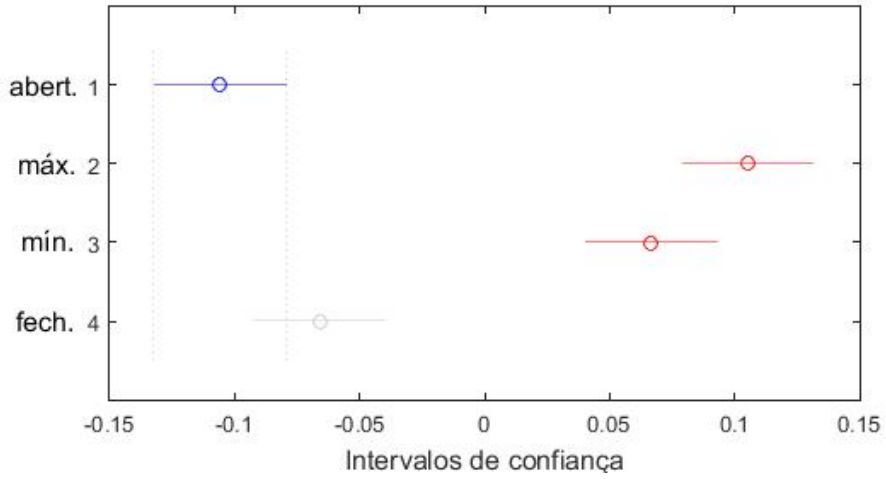

Figura 87 – Intervalos de confiança dos coeficientes de decaimento, relativos ao índice Dow Jones, para os dados tratados.

Quanto ao Kruskal-Wallis, novamente corroborou o teste ANOVA. Seu p-valor reduziu de $7{,}4591 \times 10^{-7}$ para $4{,}3123 \times 10^{-17}$.

10.2.1.3 Larguras do espectro de singularidade (LES)

As LES do DJIA, apresentam caixas bem parecidas no primeiro teste de boxplot (Figura 42), porém, quando os novos cálculos são inseridos, este comportamento modifica-se (Figura 88). Agora as quatro caixas parecem se dividir em dois grupos de tamanhos distintos. Abertura e fechamento se assemelham e o mesmo acontece para máximo e mínimo. As caudas também são diferentes, e todas essas diferenças parecem relevantes.

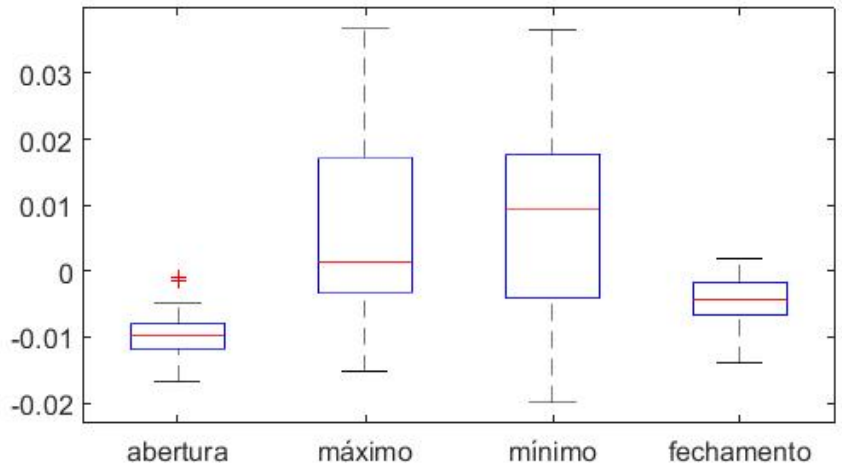

Figura 88 – Boxplot das larguras do espectro de singularidade, para o índice Dow Jones. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46.

O gráfico da Figura 89 sinaliza a independência dos dados, os gráficos da Figura 90 possuem curvas aproximadamente normais, e estes dois testes respaldam o ANOVA que vem a seguir.

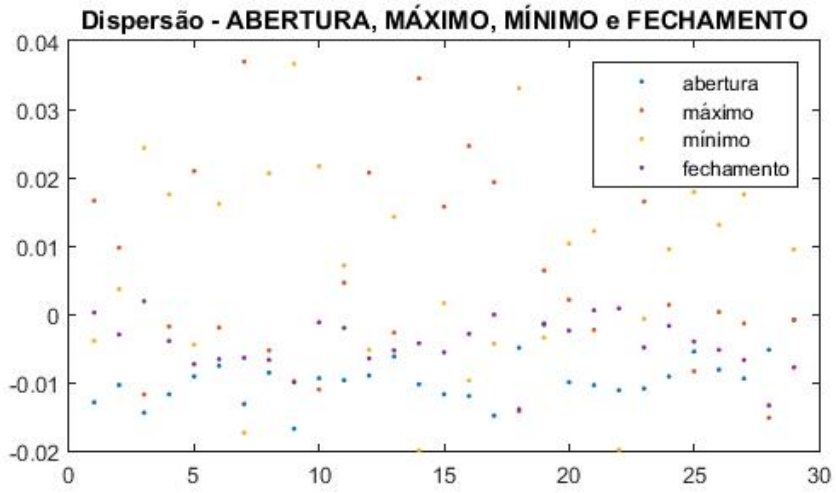

Figura 89 – Gráficos de dispersão das LES de 29 ações do índice DJIA para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46.

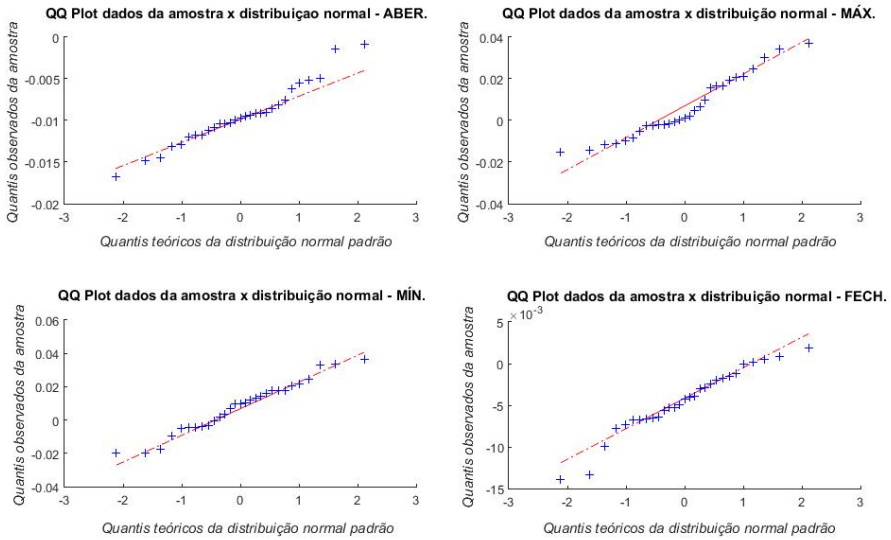

Figura 90 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes às LES de 29 ativos do índice DJIA. Neste segundo experimento os dados foram tratados.

O p-valor do teste ANOVA para as LES, $4{,}4687 \times 10^{-9}$, obviamente atesta que existem diferenças, mudando o que havíamos encontrado anteriormente (p-valor $0{,}9605$). A tabela 36, do teste de comparação, mostra todas as diferenças e ainda os p-valores que associam abertura e fechamento e também máximo e mínimo. A Figura 91 também revela esse comportamento e mais uma vez demonstra que os grupos são diferentes entre si.

Tabela 36 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - LES DJIA (exp.II)

	MÁX	MÍN	FECH
ABE	$\mathbf{2{,}62 \times 10^{-6}}$	$\mathbf{1{,}19 \times 10^{-7}}$	$0{,}3117$
MÁX	-	$0{,}9018$	$\mathbf{0{,}0024}$
MÍN	-	-	$\mathbf{0{,}0002}$

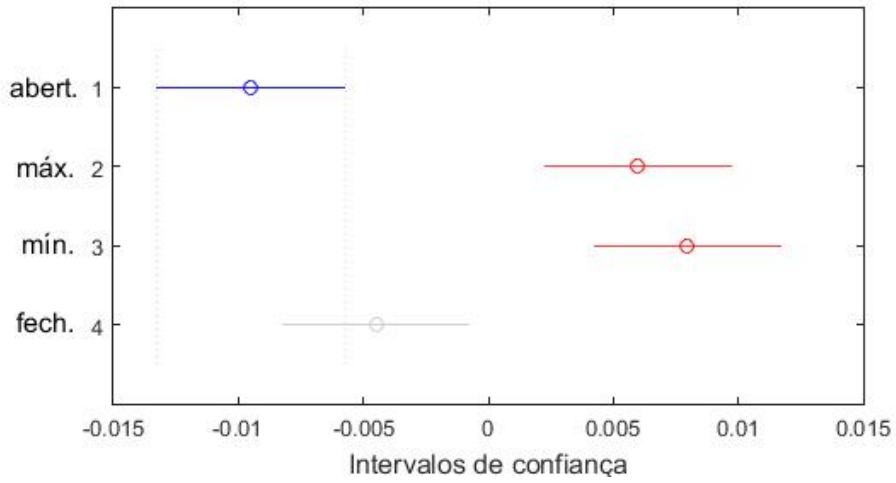

Figura 91 – Intervalos de confiança das larguras do espectro de singularidade, relativos ao índice Dow Jones, para os dados tratados.

O p-valor do teste Kruskal-Wallis também diminui (de $0{,}8820$ para $1{,}2535 \times 10^{-8}$), compactuando com o que foi apresentado.

10.2.1.4 Expoentes de Hurst canônicos (EH(2))

A alteração visual do expoente canônico para o índice americano é evidente (Figura 92). O que antes parecia quase totalmente harmônico (Figura 46) , agora apresenta outro cenário. Abertura e fechamento tem as caixas reduzidas, e máximo distancia-se das demais. Além disso, algumas medianas parecem diferentes. O teste paramétrico dirá se são diferenças razoáveis.

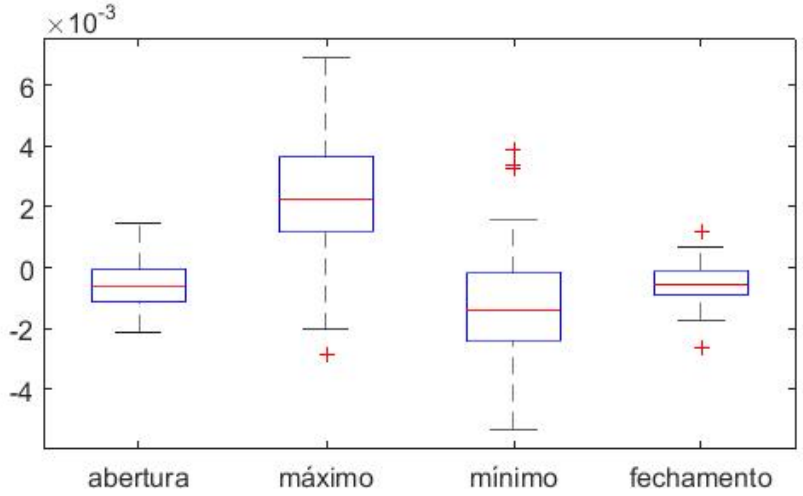

Figura 92 – Boxplot dos expoentes canônicos, para o índice Dow Jones. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46.

Continuamos contando com o teste ANOVA para confirmar nossas suspeitas e isso é possível de acordo com os resultados positivos dos testes de dispersão e normalidade, demonstrados a seguir. A Figura 93 mostra independência das componentes da amostra, e a Figura 94 mostra a normalidade através das curvas sobrepostas às curvas gaussianas, também como nos resultados anteriores (Capítulo 9).

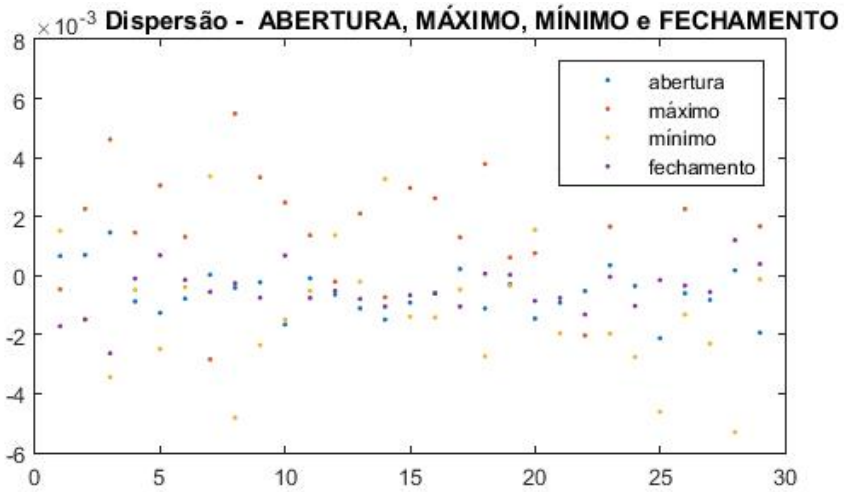

Figura 93 – Gráficos de dispersão dos EH(2) de 29 ações do índice DJIA para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46.

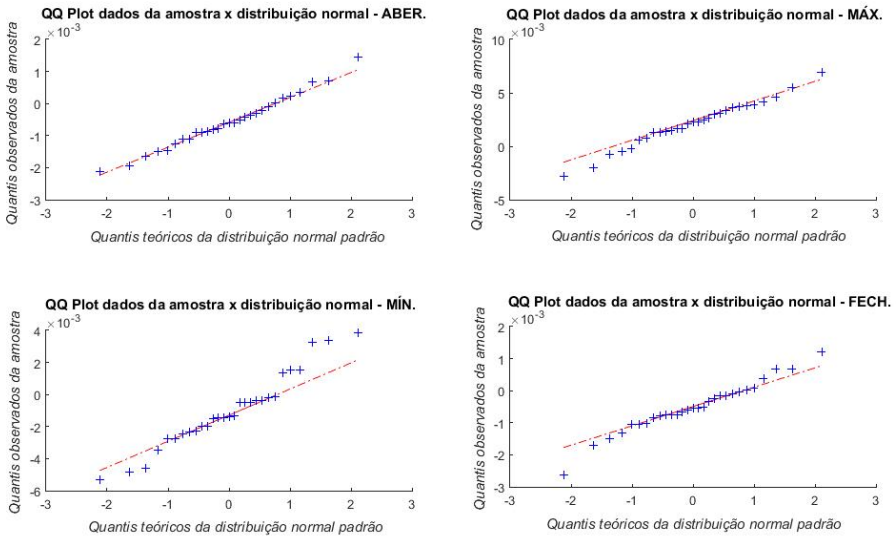

Figura 94 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(2) de 29 ativos do índice DJIA. Neste segundo experimento os dados foram tratados.

O teste ANOVA afirma que as amostras possuem diferenças. O p-valor antes alto $(0{,}9747)$, se aproxima de zero $(7{,}0112 \times 10^{-11})$ neste último teste. O teste Tukey, através de sua Tabela 37, mostra que somente a metade dos pares tem equivalência; abertura e mínimo, abertura e fechamento e, por fim, mínimo e fechamento. Na Figura 95 é possível ver tais semelhanças.

Tabela 37 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - EH(2) DJIA (exp.II)

	MÁX	MÍN	FECH
ABE	$\mathbf{9{,}23 \times 10^{-8}}$	$0{,}7434$	$0{,}9994$
MÁX	-	$\mathbf{4{,}42 \times 10^{-9}}$	$\mathbf{1{,}59 \times 10^{-7}}$
MÍN	-	-	$0{,}6714$

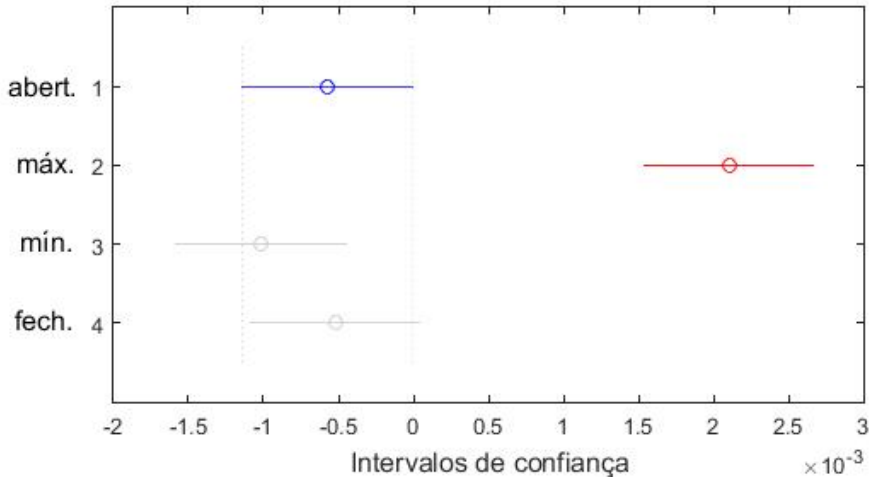

Figura 95 – Intervalos de confiança dos expoentes de Hurst canônicos, relativos ao índice Dow Jones, para os dados tratados.

No teste Kruskal-Wallis o p-valor passa de $0{,}8857$ para $8{,}7622 \times 10^{-8}$, o que prova que as amostras não são provenientes de uma mesma distribuição.

10.2.1.5 Expoentes de Hurst generalizados (EH(-3))

O EH negativo para o DJIA, apresentava um comportamento semelhante ao expoente canônico no primeiro teste, ou seja, caixas bastante parecidas. Porém, neste último teste mostra muitas divergências (ver Figura 96). Abertura e fechamento possuem caixas menores, e não é possível afirmar se máximo e mínimo tem algo em comum, exceto pelo tamanho. Apesar disto, podemos notar que abertura e fechamento estão mais próximos, assim como máximo e mínimo. As amplitudes também variam entre as quatro componentes.

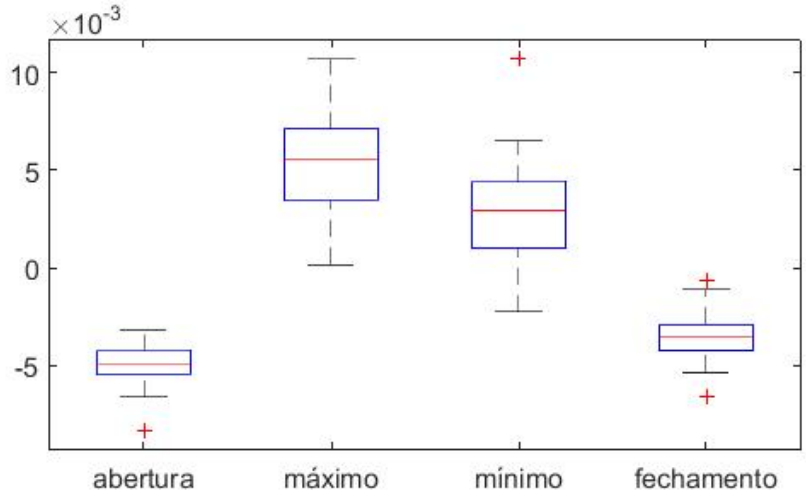

Figura 96 – Boxplot dos expoentes generalizados, para o índice Dow Jones. Resultados para grandezas definidas de acordo com a Equação 46.

O teste ANOVA é assegurado pelos testes de independência (Figura 97) e normalidade (Figura 98), ambos positivos.

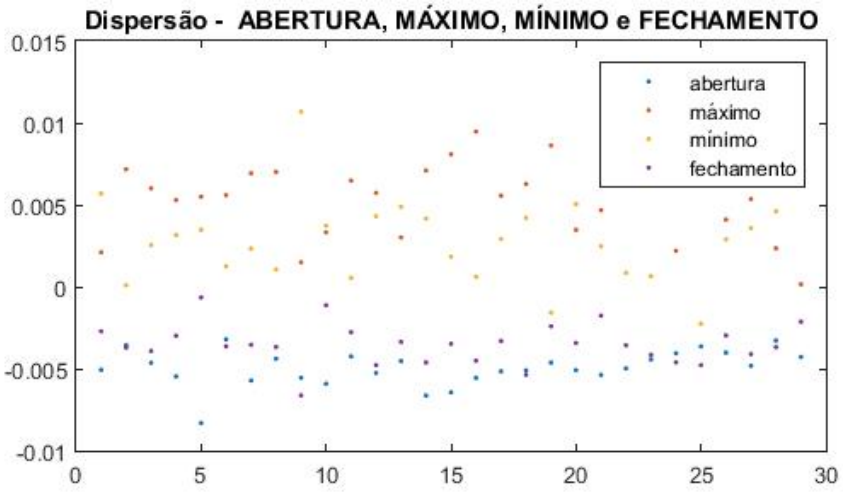

Figura 97 – Gráficos de dispersão dos EH(-3) de 29 ações do índice DJIA para abertura, máximo, mínimo e fechamento, de acordo com a Equação 46.

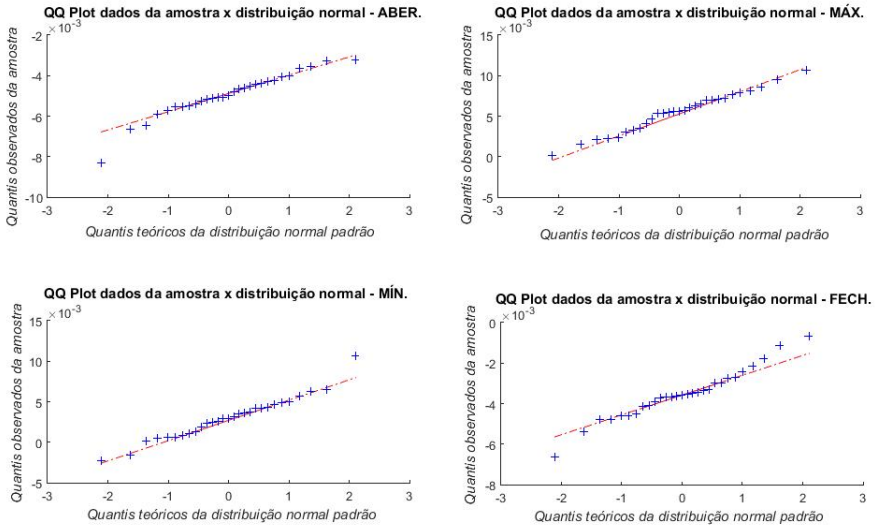

Figura 98 – Gráficos QQ de normalidade para abertura, máximo, mínimo e fechamento, referentes aos EH(-3) de 29 ativos do índice DJIA. Neste segundo experimento os dados foram tratados.

O novo p-valor do ANOVA ($3{,}0019 \times 10^{-43}$) rejeita a hipótese de uma amostra equivalente. Antes essa situação era oposta ($p = 0{,}6857$). A Tabela atual (38) difere muito da Tabela 14 do teste anterior. Os pares eram considerados estatisticamente iguais e isso mudou completamente, agora são todos diferentes uns dos outros. O gráfico de intervalos de confiança da Figura 99 exibe bem a nova situação.

Tabela 38 – P-valores teste Tukey de comparação múltipla - EH(-3) DJIA (exp.II)

	MÁX	MÍN	FECH
ABE	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$	$\mathbf{0{,}0391}$
MÁX	-	$\mathbf{2{,}86 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$
MÍN	-	-	$\mathbf{3{,}77 \times 10^{-9}}$

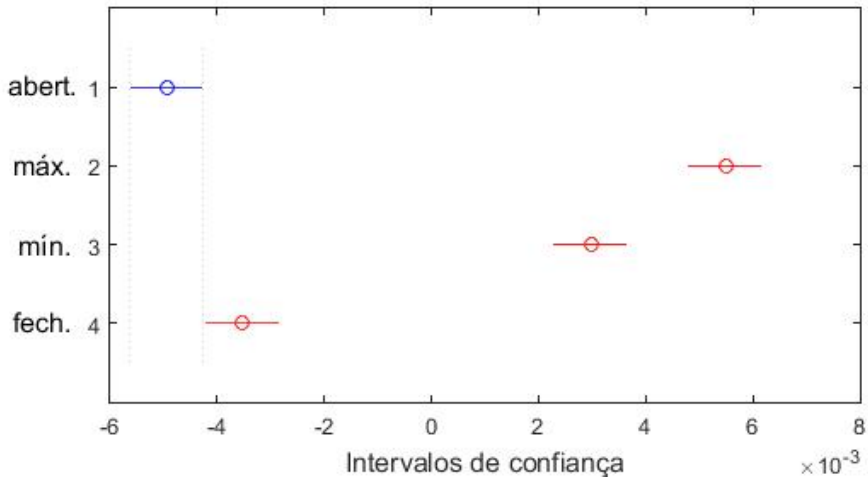

Figura 99 – Intervalos de confiança dos expoentes de Hurst generalizados, relativos ao índice Dow Jones, para os dados tratados.

O teste Kruskal-Wallis, como antes, segue o ANOVA. A condição muda de status. O p-valor ($0{,}5837$), que antes não podia rejeitar a hipótese das séries pertencerem a uma mesma distribuição, agora demonstra o contrário ($4{,}2023 \times 10^{-20}$), através do valor de referência.

11 Análise e discussão dos resultados - Experimento III

A maneira pela qual as séries de máximo e de mínimo são construídas é estruturalmente diferente daquela relativa a séries de abertura e fechamento. Cada ponto numa série de máximo ou de mínimo depende de todos os preços pelo qual o ativo passou durante o intervalo do candle correspondente, uma vez que surge através da comparação de tais preços. Já um valor de abertura depende somente de uma transação efetuada, a primeira durante o intervalo investigado; analogamente, o preço de fechamento depende somente do último negócio realizado no período. Sendo assim, séries de máximo e mínimo apresentam naturezas semelhantes entre si, bem como séries de abertura e fechamento. Contudo, a natureza das primeiras é diferente da natureza das últimas. Levando isso em consideração, agregamos, neste capítulo, os valores de $\Delta\Phi$ referentes a abertura e fechamento em um grupo, e os referentes a máximo e mínimo em outro grupo, para cada grandeza estudada e para cada mercado. Testes estatísticos para investigar possíveis diferenças foram, então, realizados.

11.1 Índice Ibovespa x Índice DJIA

A partir de agora, os resultados são discutidos através de uma comparação entre os grupos dos índices Ibovespa e Dow Jones.

A Tabela 39 exibe valores maiores para abertura/fechamento das AM e dos CD (em módulo) do Ibovespa, assim como para máximo/mínimo das LES, EH(2) e EH(-3) do mesmo índice. Quanto ao DJIA, só exibe valores maiores para abertura/fechamento dos CD (em módulo). Todas as outras ferramentas tem valores mais altos em máximo/mínimo.

Tabela 39 – Médias e desvios-padrões das acurácias do modelo (AM), coeficientes de decaimento (CD), larguras do espectro de singuralidade (LES) e expoentes de Hurst (EH) com $q = 2$ (canônicos) e $q = -3$ (generalizados) das séries agregadas em dois conjuntos: abertura/fechamento e máximo/mínimo, dos índices Ibovespa e DJIA.

	Ibovespa		**Dow Jones**	
	ABER/FECH	MÁX/MÍN	ABER/FECH	MÁX/MÍN
AM	$0{,}5245(0{,}0168)$	$0{,}5150(0{,}0129)$	$0{,}5055(0{,}0094)$	$0{,}5080(0{,}0083)$
CD	$-2{,}7069(0{,}2302)$	$-2{,}5764(0{,}2162)$	$-2{,}4433(0{,}1570)$	$-2{,}2712(0{,}1558))$
LES	$0{,}3940(0{,}0979)$	$0{,}4168(0{,}1046)$	$0{,}3502(0{,}1417)$	$0{,}3642(0{,}1420)$
EH(2)	$0{,}4659(0{,}0388)$	$0{,}4669(0{,}0388)$	$0{,}4912(0{,}0283)$	$0{,}4923(0{,}0282)$
EH(-3)	$0{,}5660(0{,}0477)$	$0{,}5772(0{,}0504)$	$0{,}5901(0{,}0381)$	$0{,}5985(0{,}0382))$

11.1.1 Análise estatística dos resultados

Utilizamos a metodologia descrita no capítulo 7, que envolve a extração de médias (ver Equações 46 e 47), para refazer os testes estatísticos empregados até aqui. Desta vez, os testes são realizados para os dois conjuntos formados, abertura/fechamento e máximo/mínimo, ou seja, para os dados agregados.

11.1.1.1 Acurácias do modelo (AM)

Conforme os gráficos da Figura 100, podemos verificar uma diferença entre os dois grupos quando falamos das acurácias para o índice brasileiro. Suas medianas estão distantes uma da outra e somente o primeiro grupo possui outliers. Entretanto, não podemos dizer o mesmo para o índice americano partindo apenas do seu boxplot. É claro que as amplitudes são distintas e um dos grupos possui um outlier, mas suas medianas parecem próximas.

O que podemos assegurar é que os dois grupos, abertura/fechamento e máximo/mínimo, possuem distribuições aleatórias, que caracterizam amostras independentes, tanto para o índice brasileiro quanto para o índice americano (Figura 101). Em se tratando da normalidade, é possível notar, através dos Gráficos 102 e 103, que os dois grupos do Ibovespa possuem distribuições bem simétricas, com muitos pontos bem próximos da gaussiana tracejada. Já no Dow Jones o grupo máximo/mínimo tem um pouco menos de simetria, mas ainda muito próximo da normal. Estes dados nos permitem, mais uma vez, lançar mão do teste ANOVA.

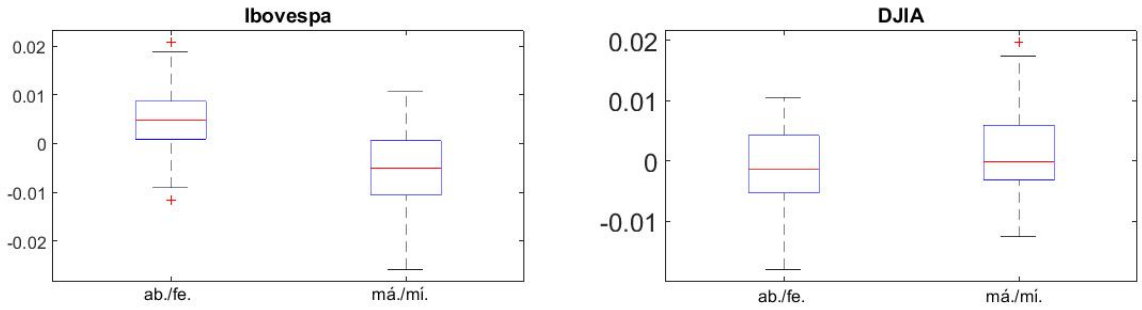

Figura 100 – Boxplots concernentes às acurácias dos índices Ibovespa e Dow Jones para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo.

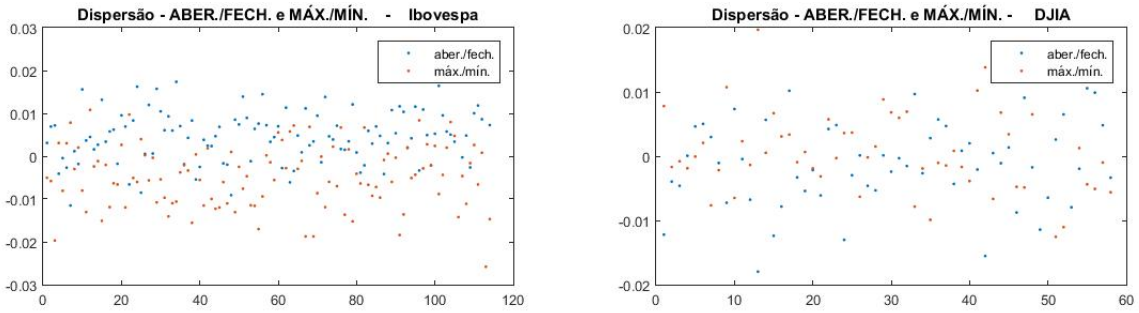

Figura 101 – Gráficos de dispersão dos grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo para os índices Ibovespa e DJIA, relativos às acurácias do modelo (AM).

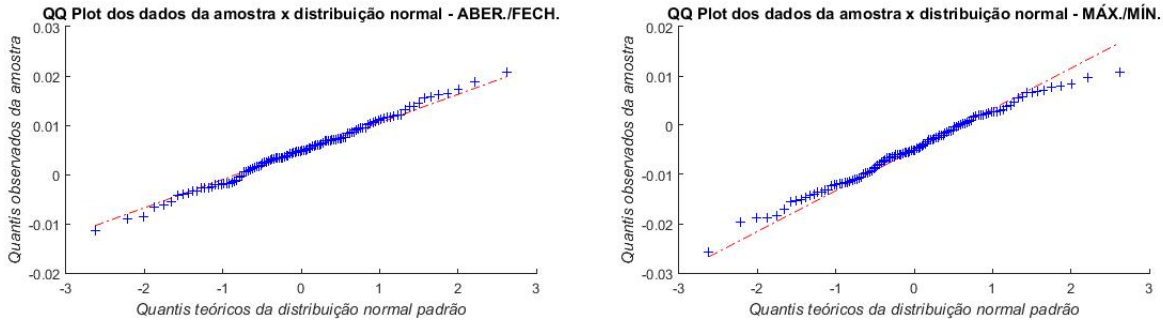

Figura 102 – Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes às AM do índice Ibovespa (114 ativos).

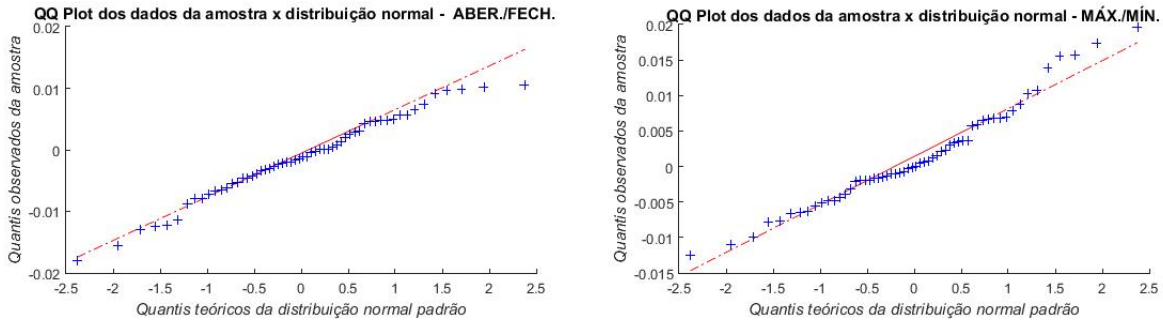

Figura 103 – Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes às AM do índice DJIA (58 ativos).

O p-valor do ANOVA para as acurácias do Ibovespa, $9{,}0147 \times 10^{-22}$, representa muito bem a diferença entre os grupos mencionados. Já o resultado para o Dow Jones mostra um p-valor de $0{,}0491$, que está no limite do valor de referência, $0{,}05$, para o teste, o que não é evidente no teste visual anterior (Figura 100). O gráfico dos intervalos de confiança, entretanto, ilustra nitidamente esse limite, com uma diferença considerável (Figura 104).

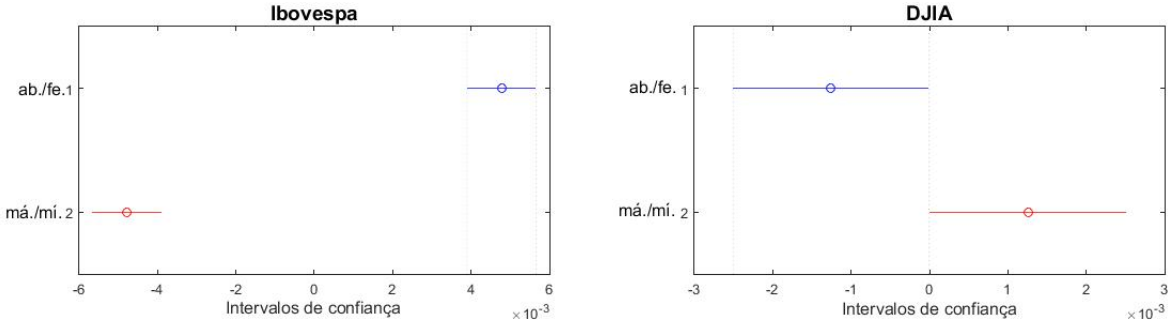

Figura 104 – Intervalos de confiança relativos às acurácias para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo dos índices Ibovespa e Dow Jones.

Os resultados do Kruskal-Wallis para os índices Ibovespa e Dow Jones são respectivamente $p = 7{,}4863 \times 10^{-19}$ e $p = 0{,}1010$. Segundo este teste, não há diferença para o índice americano em relação às acurácias, se comparados os dois grupos. Já para o índice brasileiro essa diferença é clara.

11.1.1.2 Coeficientes de decaimento (CD)

Em se tratando dos coeficientes de decaimento, tanto o mercado brasileiro quanto o americano apresentam diferenças entre os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo já na primeira comparação (Figura 105). Em seus gráficos boxplot podemos visualizar as respectivas caixas distantes uma da outra. Os grupos do Dow Jones ainda apresentam outliers em diferentes partes da cauda.

Os testes de dispersão (Figura 106) e normalidade (Figuras 107 e 108) também conferem, a ambos os índices, tais requisitos, o que permite a utilização do ANOVA.

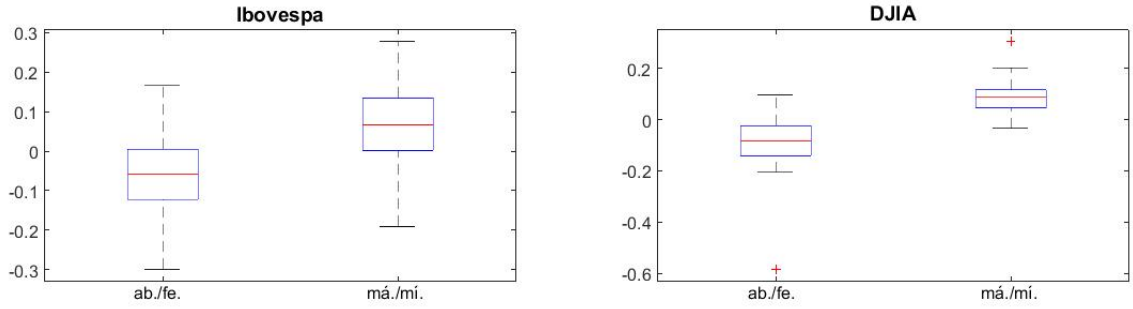

Figura 105 – Boxplots concernentes aos coeficientes de decaimento dos índices Ibovespa e Dow Jones para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo.

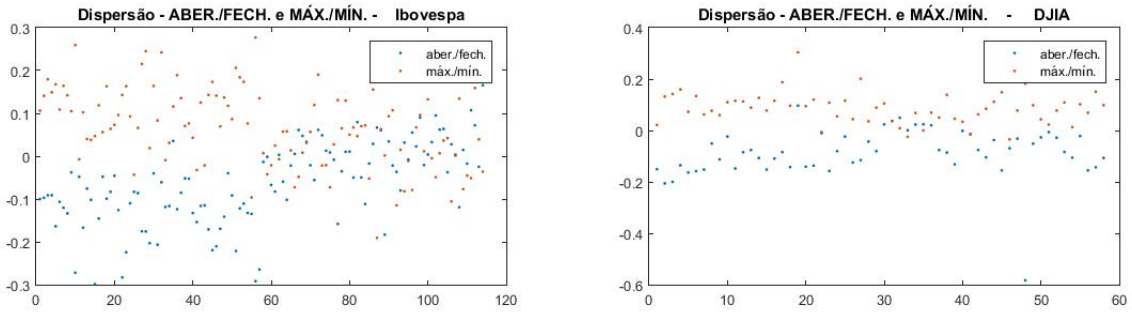

Figura 106 – Gráficos de dispersão dos grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo para os índices Ibovespa e DJIA, relativos aos coeficientes de decaimento do modelo (CD).

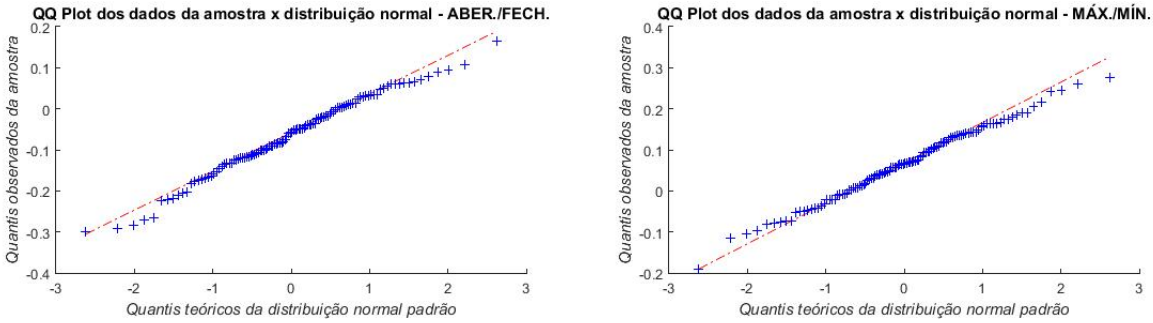

Figura 107 – Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos CD do índice Ibovespa (114 ativos).

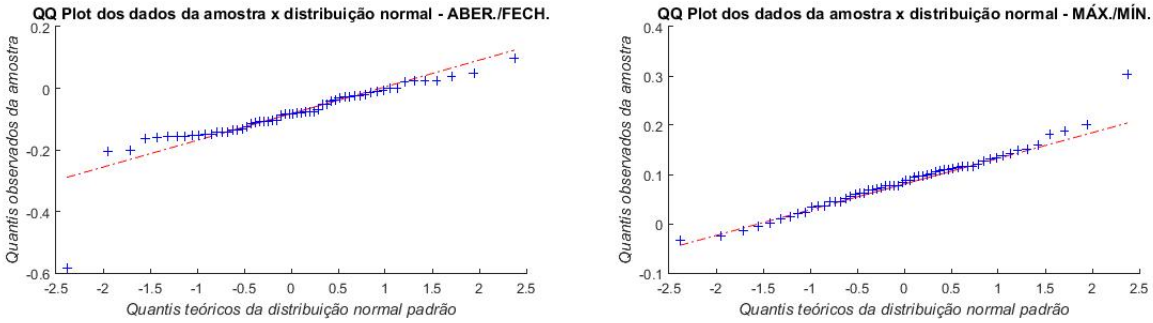

Figura 108 – Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos CD do índice DJIA (58 ativos).

O teste ANOVA aplicado ao Ibovespa resulta num p-valor ($5{,}2122 \times 10^{-22}$) que confirma a diferença entre os grupos. O mesmo para o Dow Jones, cujo p-valor é igual a $3{,}4854 \times 10^{-21}$. Tais diferenças ficam evidentes na Figura 109, para os dois mercados.

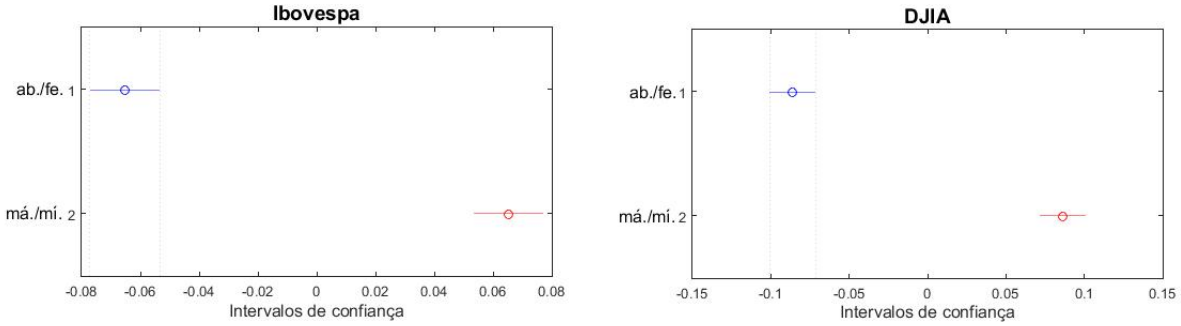

Figura 109 – Intervalos de confiança relativos aos coeficientes de decaimento para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo dos índices Ibovespa e Dow Jones.

O teste Kruskal-Wallis apoia o ANOVA com seus resultados bem abaixo do valor de referência para o Ibovespa ($3{,}8318 \times 10^{-19}$) e DJIA ($6{,}8991 \times 10^{-18}$).

11.1.1.3 Larguras do espectro de singularidade (LES)

Para esta ferramenta temos uma diferença nítida dos dois grupos em ambos os mercados. Os gráficos boxplots do Ibovespa e Dow Jones apresentam caixas distintas em tamanho, distribuição e outliers (Figura 110). Com relação às medianas, também parecem não coincidir mesmo no índice brasileiro.

A Figura 111 apresenta gráficos cujos pontos são dispersos, sem qualquer padrão de dependência, e as Figuras 112 e 113 mostram distribuições que podem ser descritas como normais. Desta forma, o teste paramétrico continua sendo válido para nossa análise.

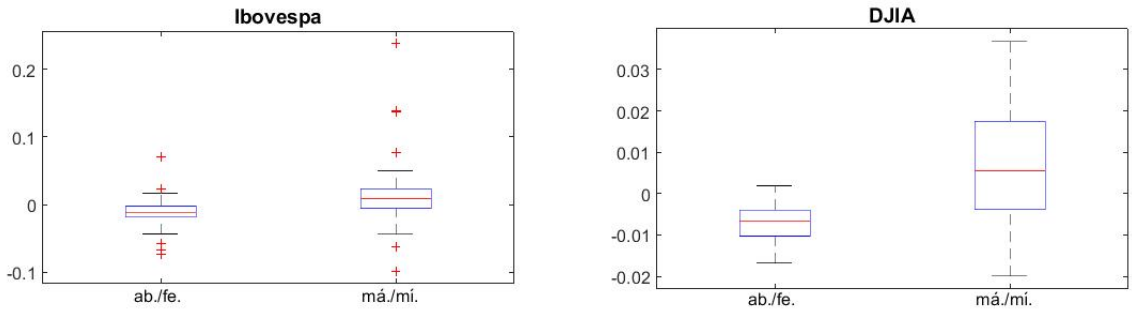

Figura 110 – Boxplots concernentes às larguras do espectro de singularidade dos índices Ibovespa e Dow Jones para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo.

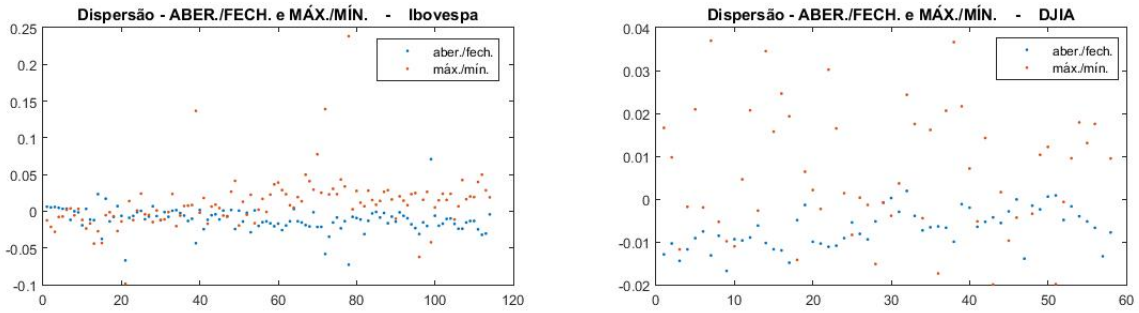

Figura 111 – Gráficos de dispersão dos grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo para os índices Ibovespa e DJIA, relativos às larguras do espectro de singularidade (LES).

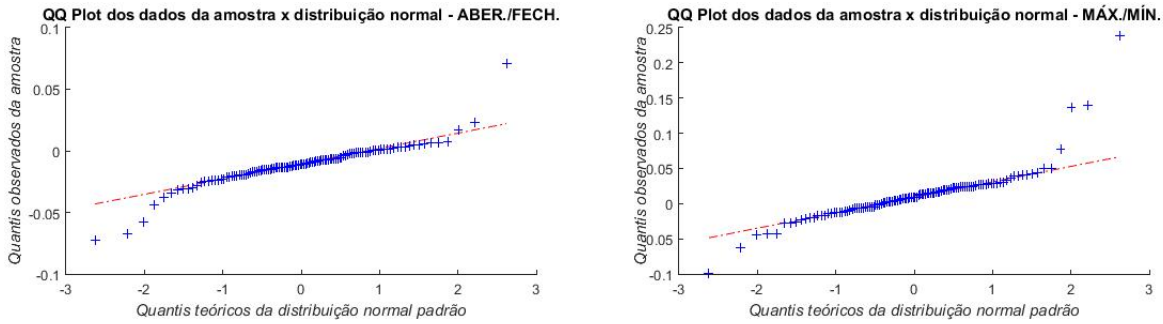

Figura 112 – Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes às LES do índice Ibovespa (114 ativos).

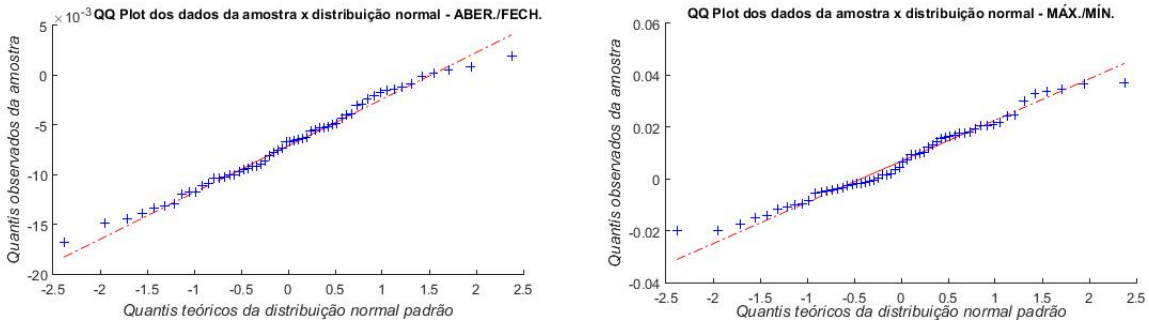

Figura 113 – Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes às LES do índice DJIA (58 ativos).

O teste ANOVA confirma as diferenças percebidas no boxplot, através dos p-valores baixos, Ibovespa com p-valor $4{,}3541 \times 10^{-9}$ e DJIA com p-valor $4{,}9556 \times 10^{-10}$. Nos gráficos que esboçam os intervalos de confiança (Figura 114) essa diferença é bem representada.

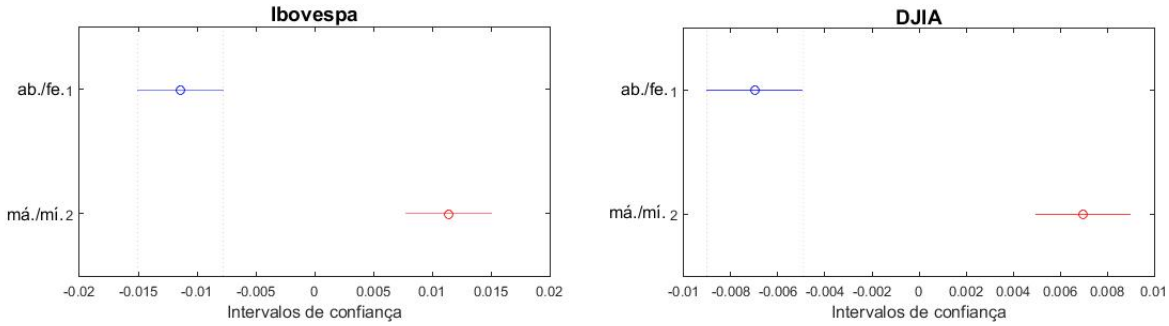

Figura 114 – Intervalos de confiança relativos às larguras do espectro de singularidade para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo dos índices Ibovespa e Dow Jones.

Outra vez o teste Kruskal-Wallis anda junto com o ANOVA rejeitando a semelhança estatística entre os grupos. Ibovespa apresenta um p-valor $9{,}9381 \times 10^{-14}$, e DJIA $2{,}1564 \times 10^{-8}$.

11.1.1.4 Expoentes de Hurst canônicos (EH(2))

Os boxplots apresentam caixas de tamanhos diferentes e amplitudes também (Figura 115). Além disso, as medianas dos grupos de ambos os mercados parecem afastadas.

Como os testes de independência e normalidade, pré-requisitos do ANOVA, deram positivo (ver Figuras 116, 117 e 118), já podemos afirmar que existe uma diferença estatística entre os grupos dos dois mercados: o resultado do ANOVA para o índice Ibovespa é um p-valor igual a $4{,}1485 \times 10^{-5}$, e para o Dow Jones, $0{,}0039$. Além disso, a Figura 119 também ilustra essa diferença, através de seus intervalos de confiança bem afastados.

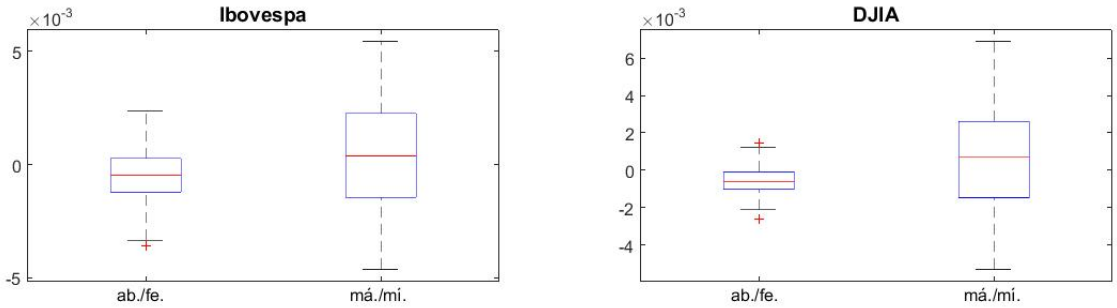

Figura 115 – Boxplots concernentes aos expoentes de Hurst canônicos (EH(2)) dos índices Ibovespa e Dow Jones para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo.

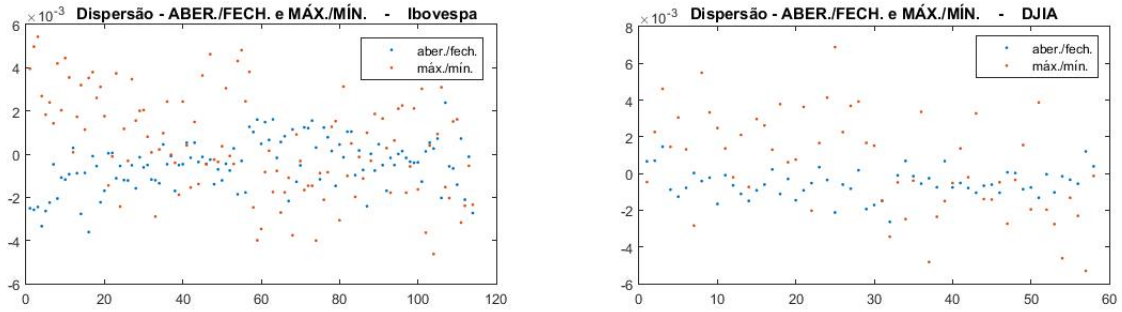

Figura 116 – Gráficos de dispersão dos grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo para os índices Ibovespa e DJIA, relativos aos expoentes canônicos (EH(2)).

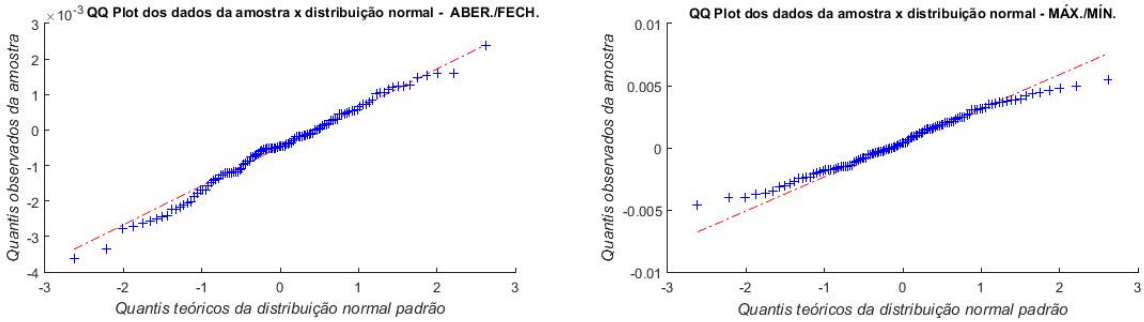

Figura 117 – Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos EH(2) do índice Ibovespa (114 ativos).

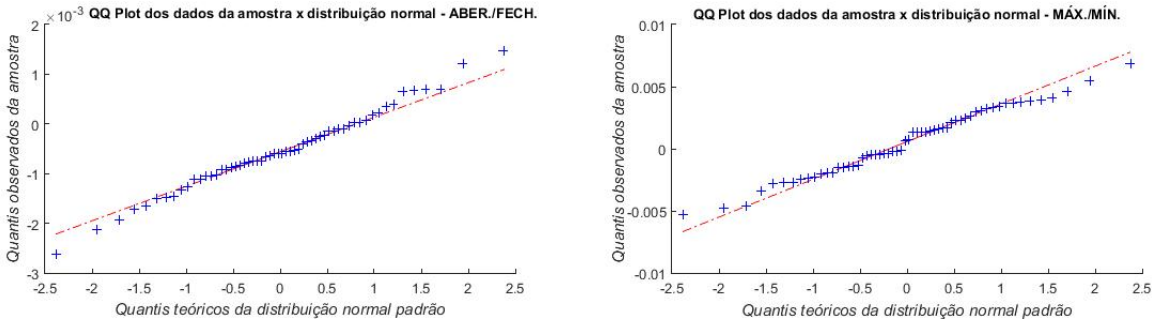

Figura 118 – Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos EH(2) do índice DJIA (58 ativos).

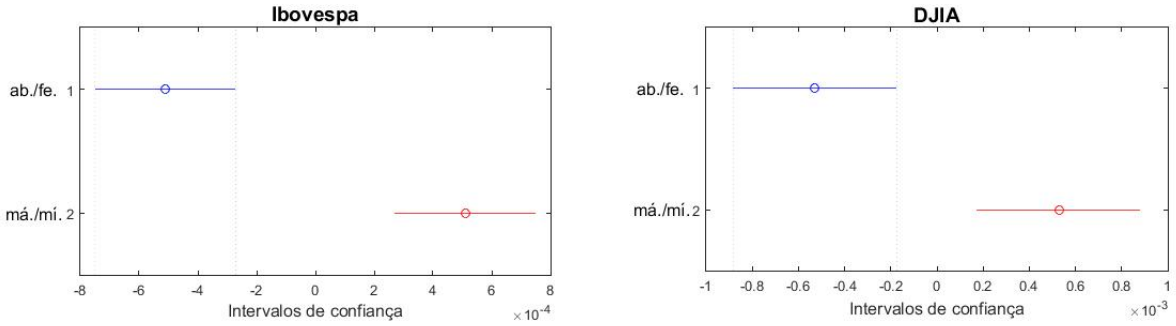

Figura 119 – Intervalos de confiança relativos aos expoentes de Hurst (EH(2)) para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo dos índices Ibovespa e Dow Jones.

Novamente, o teste Kruskal-Wallis corrobora o ANOVA, apresentando p-valores baixos que rejeitam a semelhança dos grupos: Ibovespa $3{,}6213 \times 10^{-4}$, DJIA $0{,}0144$.

11.1.1.5 Expoentes de Hurst generalizados (EH(-3))

Para o expoente generalizado, as desigualdades estão ainda mais marcadas, tanto em relação às caixas e amplitudes, quanto às medianas (Figura 120). Já no boxplot podemos confiar na diferença estatística presente nos dois índices.

O teste de dispersão (Figura 121) e o de normalidade (Figuras 122 e 123) apoiam o uso do teste Anova, que, por sua vez, apoia nosso parecer do boxplot.

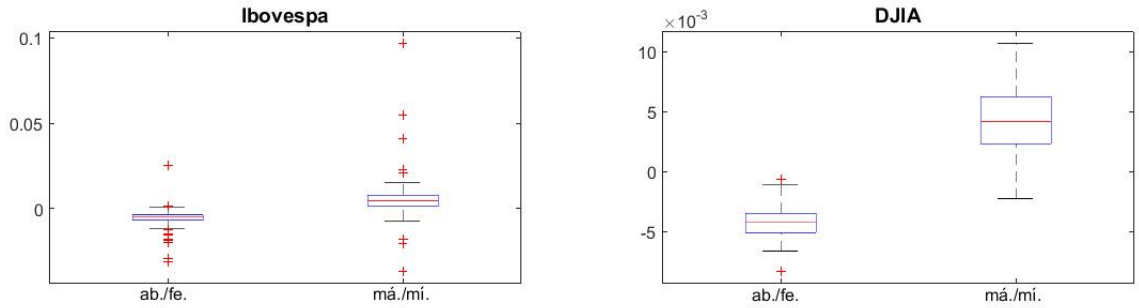

Figura 120 – Boxplots concernentes aos expoentes de Hurst generalizados (EH(-3)) dos índices Ibovespa e Dow Jones para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo.

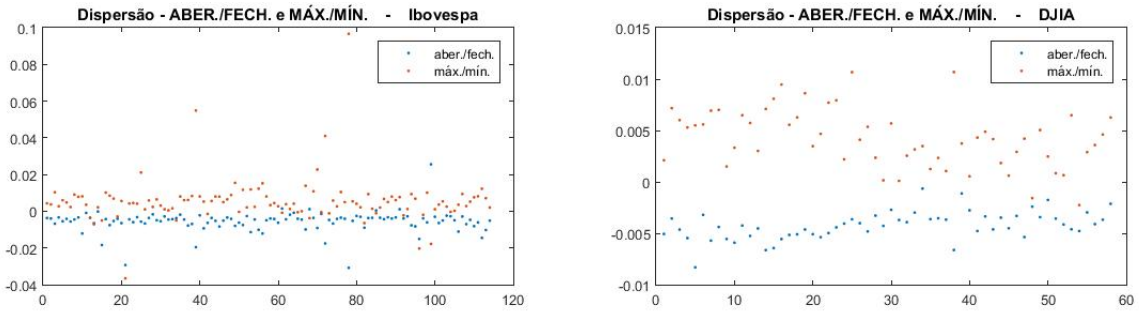

Figura 121 – Gráficos de dispersão dos grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo para os índices Ibovespa e DJIA, relativos aos expoentes generalizados (EH(-3)).

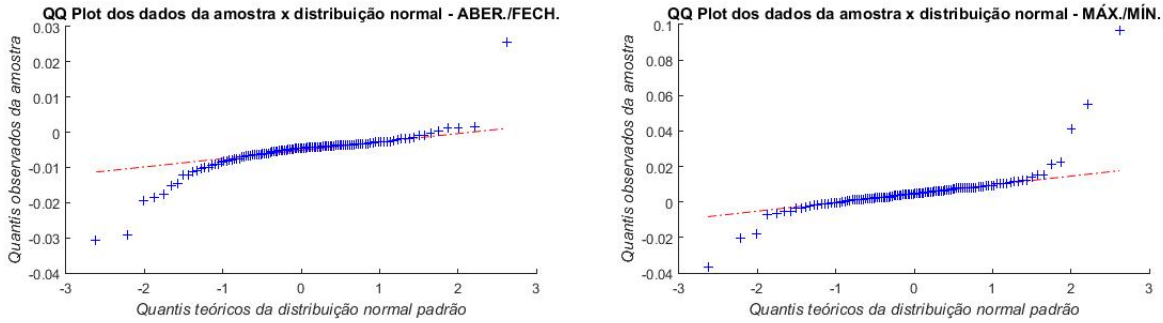

Figura 122 – Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos EH(-3) do índice Ibovespa (114 ativos).

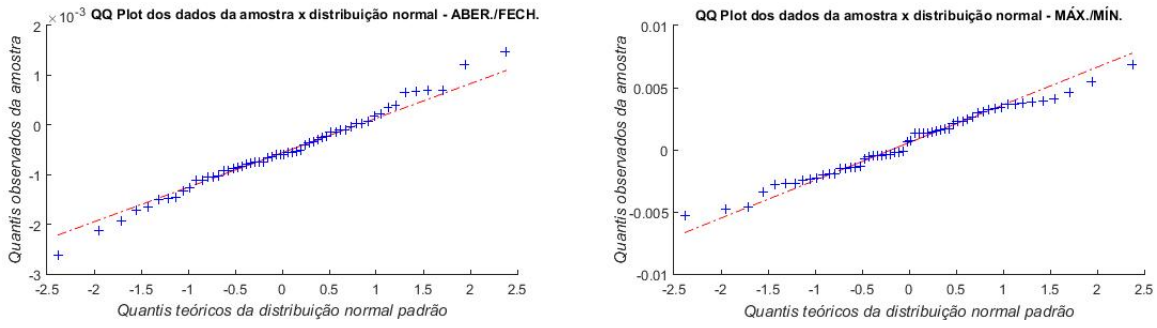

Figura 123 – Gráficos QQ de normalidade para abertura/fechamento e máximo/mínimo referentes aos EH(-3) do índice DJIA (58 ativos).

No teste ANOVA, temos um p-valor muito pequeno para Ibovespa ($1{,}0406 \times 10^{-15}$) e DJIA ($4{,}7641 \times 10^{-40}$). O mesmo acontece com os resultados do teste Kruskal-Wallis: Ibovespa, $4{,}5791 \times 10^{-29}$, DJIA, $2{,}1560 \times 10^{-20}$. Ainda temos o gráfico de intervalos de confiança (Figura 124) para ilustrar as diferenças quanto ao expoente negativo.

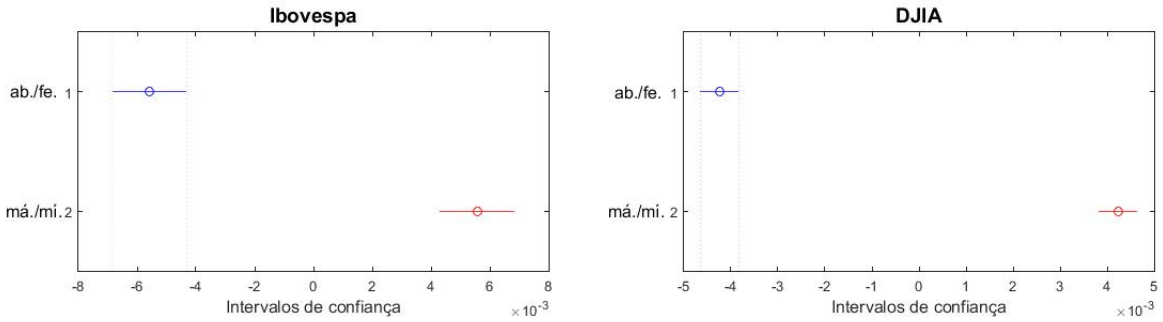

Figura 124 – Intervalos de confiança relativos aos expoentes de Hurst generalizados (EH(-3)) para os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo dos índices Ibovespa e Dow Jones.

Para enriquecer a investigação que concerne aos expoentes de Hurst generalizados, construímos os gráficos na Figura 125. Os $\Delta h(q)$ foram calculados, a partir dos expoentes obtidos para cada ativo, de acordo com as Equações 46 e 47. Os gráficos mostram a mediana, bem como o primeiro e terceiro quartis, relativos aos grupos que agregam máximo e mínimo, e abertura e fechamento, referentes a cada mercado. É possível observar que o contraste entre os grupos é mais pronunciado para os valores mais baixos de q, o que indica que as divergências entre o comportamento de escala das séries máximo/mínimo e abertura/fechamento são mais significativas para os segmentos com pequenas flutuações, que são aqueles que influenciam mais intensamente os expoentes referentes a valores negativos de q [34].

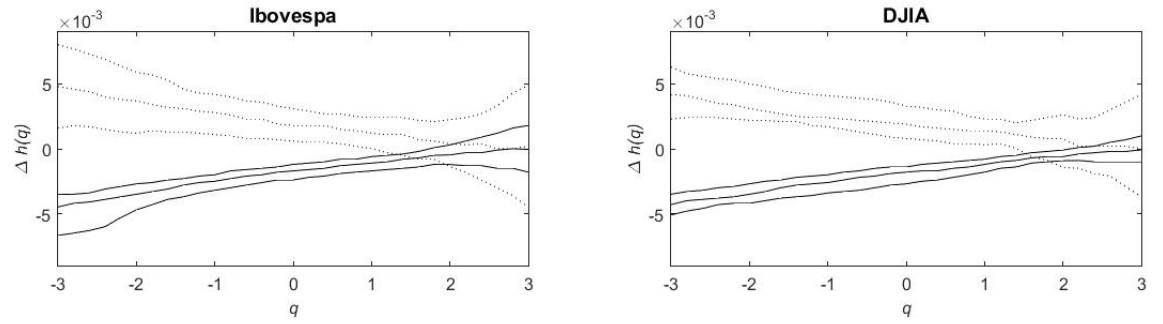

Figura 125 – Variação dos conjuntos de abertura/fechamento (linhas sólidas) e máximo/mínimo (linhas pontilhadas) de $h(q)$ para q no intervalo $[-3,3]$, para as ações do Ibovespa e DJIA. Para cada conjunto, a curva inferior (superior) corresponde ao primeiro (terceiro) quartil, e a curva entre eles exibe a mediana.

12 Considerações finais

Quando iniciamos nossa investigação, grande parte dos expoentes de Hurst, utilizados no cálculo do espectro de singularidade, apresentou valores maiores para as componentes máximo e mínimo, diferindo-as de abertura e fechamento (desde valores de q negativos até valores próximos de 1), como pode ser visto nas Tabelas 1 e 8. Isso foi observado considerando os dados de dois índices financeiros, Ibovespa e Dow Jones.

Cientes de tal ocorrência, decidimos verificar se o mesmo persistia em outras estatísticas. Para tanto, elegemos três ferramentas (acurácias de um modelo de previsão baseado em equações diferenciais (AM), coeficientes de decaimento em lei de potência da cauda da distribuição de retornos acumulada complementar (CD) e larguras do espectro de singularidade (LES)). Além disso, escolhemos dois dos expoentes do espectro (aqueles com $q = 2$, que chamamos de expoentes canônicos (EH(2), e os com $q = -3$, que tratamos como expoentes generalizados, os EH(-3)), para dar continuidade ao estudo. Toda análise feita para um mercado foi repetida para o outro (mercado brasileiro e americano).

Começamos computando as médias e desvios-padrões relativos a cada série do candle (Tabelas 2 e 9), através das cinco ferramentas definidas (AM, CD, LES, EH(2) e EH(-3)). No caso do Ibovespa, esses primeiros resultados mostraram valores maiores para as séries de máximo e mínimo das LES e dos EH(-3). Quanto às suas AM, os valores maiores foram para abertura e fechamento, e o mesmo ocorreu com os CD, em módulo. Os EH(2) do índice brasileiro não associaram tais grupos. Para o DJIA, os valores de máximo e mínimo foram maiores em três dessas ferramentas, AM, LES e EH(-3), e menores nos CD, em módulo. Novamente, os EH(2) não agruparam tais componentes. Os valores relativamente altos dos desvios-padrões, nesse momento de nossa avaliação, devem-se à ocorrência de uma maior variação entre os ativos, que mascarava a variação entre as componentes do candle.

Depois de conhecidas as médias e desvios-padrões, recorremos a testes estatísticos, novamente para as quatro séries do candle, no âmbito de cada ferramenta, e referentes a cada mercado (Capítulo 9). Aqui encontramos diferenças para as ferramentas AM e CD do Ibovespa e para CD do DJIA, mas foram as acurácias do índice brasileiro e os coeficientes de decaimento do índice Dow Jones que exibiram diferenças entre os grupos abertura/fechamento e máximo/mínimo.

Ainda nessa primeira fase de nossa pesquisa, examinamos, em pares, conjuntos de resultados; algumas correlações foram encontradas (Seção 9.3). Essas correlações podem nos dizer se uma ferramenta varia no mesmo sentido da outra (correlação positiva), ou se uma varia no sentido contrário ao da outra (correlação negativa ou inversa). O primeiro par,

AM e CD, apresentou duas associações negativas, para as séries de máximo e mínimo do Ibovespa. LES e CD mostraram duas correlações, também negativas (ou inversas), para as séries de mínimo e fechamento, mas desta vez para o DJIA. AM e EH(2) expuseram uma relação positiva para mínimo do índice brasileiro, e outra negativa para abertura do índice americano. Já AM e EH(-3), indicaram duas componentes com relação inversa para o Ibovespa, abertura e fechamento, e uma correlação, novamente negativa, para a série abertura do Dow Jones. Também realizamos esse estudo considerando-se o conjunto de dados agregados: para cada estatística e mercado, agrupamos os resultados referentes a abertura, máximo, mínimo e fechamento em um único conjunto. Correlações significativas foram encontradas para três pares do Ibovespa (AM e LES, LES e CD, e AM e EH(-3)) e dois pares do Dow Jones (LES e CD, e AM e EH(-3)). Deste estudo de correlações, o que encontramos de mais notável foi a presença de relações inversas envolvendo AM e EH(-3), que apareceu para dados agregados nos dois mercados, bem como para algumas componentes. Esse resultado pode auxiliar na escolha de ativos para a aplicação do modelo de previsão.

Até este ponto, os resultados mostravam variações maiores para os ativos, e por isso optamos por uma nova abordagem, que atenuasse tais variações, para expor as variações que nos interessavam mais, existentes entre as componentes do candlestick (Capítulo 10). Feito isso, repetimos todos os cálculos e testes realizados anteriormente e obtivemos resultados mais expressivos: todas as cinco ferramentas do Ibovespa e quatro ferramentas do Dow Jones (com exceção das AM) mostraram diferenças e com valores ainda mais acentuados. Além disso, não só acurácias do Ibovespa como também seus expoentes generalizados (EH(-3)) mostraram semelhanças estatísticas para abertura e fechamento, como também para máximo e mínimo, diferenciando-os. Com relação ao DJIA, além dos coeficientes de decaimento, as LES demonstraram o mesmo comportamento. Aqui, os desvios-padrões foram menores, o que valorizou ainda mais tais diferenças (Tabelas 27 e 33).

A partir do que observamos nas etapas anteriores, e baseados também em outra percepção (a origem das séries), evoluímos nossa investigação. Observando que máximo e mínimo são semelhantes estruturalmente (decorrem de todos os preços pelos quais o ativo variou durante uma negociação num determinado intervalo de tempo), bem como abertura e fechamento (são definidos por apenas uma instância da negociação), resolvemos associar as componentes formando dois grupos. Com resultados de máximo e mínimo agregados em um grupo, e de abertura e fechamento em outro, novos testes foram aplicados (Capítulo 11), em conformidade com a nova abordagem (retirando a variação entre os ativos). O resultado foi consistente nas cinco ferramentas investigadas dos dois índices (Ibovespa e DJIA). Os grupos formados apresentaram-se diferentes estatisticamente em todas elas.

Na totalidade da exploração que realizamos, as diferenças encontradas não mudam

qualitativamente os fatos estilizados investigados: distribuições com caudas pesadas foram encontradas em todos os grupos, bem como comportamento multifractal. As acurácias das previsões também mantiveram essencialmente a mesma natureza para todos os conjuntos de dados.

Temos alguns pontos a ressaltar com relação a modelos de operação no mercado financeiro. Um deles é que as quatro dimensões do candle devem ser levadas em consideração, pois trazem diferentes tipos de informação. Apesar de desiguais desde a origem, as componentes do candlestick apresentam variações mais evidentes em algumas estatísticas. Essas estatísticas podem ser úteis por motivos diversos, de acordo com o modelo de operação pretendido. Desta maneira, conforme a análise técnica empregada, tais estatísticas podem ser relevantes. Expoentes de Hurst podem atestar persistência ou anti-persistência nas séries examinadas, o que é um ponto importante na previsão de tendência. Uma largura significativa do espectro de singularidade pode indicar agrupamento de volatilidade, da mesma maneira que caudas pesadas podem dizer se a gama de magnitudes de retorno é ampla, e ambos os casos estão relacionados ao risco.

Outro aspecto é que estratégias de negociação normalmente são baseadas em pontos para realização de lucro ou de prejuízo (*take profit* e *stop loss*, respectivamente), que serão acionados de acordo com preços máximos ou mínimos, ao invés de preços de abertura ou de fechamento. Assim, o conhecimento sobre estatísticas de máximo e mínimo pode ser importante para simulações nesse contexto. Deixar de lado componentes do candlestick usualmente disponíveis nas bases de dados financeiros é ignorar informação potencialmente útil na busca por maximização de ganhos e minimização de riscos.

Nos trabalhos futuros pretendemos explorar outras ferramentas, assim como outras granulometrias, talvez trabalhar com outras combinações de componentes ou frequências de candlesticks. Outra possibilidade é explorarmos outros modelos de previsão para entender como aplicaríamos juntamente com estas ferramentas, em modelos de operação. Pretendemos amadurecer todas essas informações para sabermos o melhor uso das mesmas.

Mercados financeiros são sistemas formados por uma multiplicidade de agentes que exibem comportamentos variados e, em certa medida, imprevisíveis. O conjunto das ações de tais agentes leva à emergência de fenômenos frequentemente caracterizados por estatísticas que se afastam da gaussianidade e pela presença de correlações típicas desse tipo de sistema. Os mercados financeiros influenciam significativamente a sociedade contemporânea, com impactos sociais e políticos, muitas vezes, dramáticos. Uma imensa quantidade de dados financeiros é atualmente disponível para pesquisa científica. A busca pelo entendimento do funcionamento de sistemas financeiros passa pela análise de tais informações e pela modelagem dos mesmos, guiada pelos fatos observados. Ampliar a utilização das bases de dados para além do foco usual é passo relevante no caminho para

a compreensão das interações que compõem os mercados financeiros.

Referências

1 SORNETTE, D. **Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems**. [s.n.], 2017. 448 p. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/j.ctt1h1htkg>. Citado na página 1.

2 JACOBSEN, B. Long term dependence in stock returns. **Journal of Empirical Finance**, v. 3, n. 4, p. 393–417, 1996. ISSN 09275398. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 5.

3 CHORDIA, T.; ROLL, R.; SUBRAHMANYAM, A. Liquidity and market efficiency. **Journal of Financial Economics**, v. 87, n. 2, p. 249–268, 2008. ISSN 0304405X. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 5.

4 D. Chung, K. H. Liquidity and market efficiency: A large sample study. 2010. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbankfin.2010.02.021>. Citado na página 1.

5 SAMUELSON, P. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. **Industrial Management Review**, p. 41, 1965. Citado na página 1.

6 FAMA, E. F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. **The Journal of Finance**, v. 25, p. 383, 1970. ISSN 00221082. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2325486?origin=crossref>. Citado na página 1.

7 CHARLES, A.; DARNÉ, O.; KIM, J. H. Journal of International Money Exchange-rate return predictability and the adaptive markets hypothesis : Evidence from major foreign exchange rates. Elsevier Ltd, v. 31, p. 1607–1626, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 5.

8 MOAT, H. S. et al. Quantifying wikipedia usage patterns before stock market moves. **Scientific Reports**, v. 3, p. 1–5, 2013. ISSN 20452322. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.

9 KAHNEMAN DANIEL TVERSKY, A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. **Econometrica**, v. 47, p. 263, 1979. ISSN 00129682. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/1914185?origin=crossref>. Citado na página 1.

10 SHILLER ROBERT J. FISCHER, S. F. B. M. Stock Prices and Social Dynamics. **Brookings Papers on Economic Activity**, v. 1984, p. 457, 1984. ISSN 00072303. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2534436>. Citado na página 1.

11 MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E.; CHRISS, N. A. **An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance**. [s.n.], 2000. v. 53. 70 p. ISSN 00319228. ISBN 0521620082. Disponível em: <http://scitation.aip.org/content/aip/magazine/physicstoday/article/53/12/10.1063/1.1341926http://link.aip.org/link/PHTOAD/v53/i12/p70/s1{&}Agg=>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 7.

12 BUCHANAN, M. What has econophysics ever done for us? **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 9, n. 6, p. 317–317, 2013. ISSN 1745-2473. Disponível em: <http://www.nature.com/doifinder/10.1038/nphys2648>. Citado na página 1.

13 STANLEY, M. et al. Can statistical physics contribute to the science of economics? **Fractals**, v. 4, p. 415–425, 1996. ISSN 0218348X. Citado na página 1.

14 STANLEY, H. E. et al. Similarities and differences between physics and economics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 299, p. 1–15, 2001. ISSN 03784371. Citado na página 1.

15 FONSECA, C. L. G. et al. Is the choice of the candlestick dimension relevant in econophysics? **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 582, p. 1–10, 2021. Citado na página 3.

16 CAJUEIRO, D. O.; TABAK, B. M. The Hurst exponent over time: Testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 336, n. 3-4, p. 521–537, 2004. ISSN 03784371. Citado na página 4.

17 ZUNINO, L. et al. Inefficiency in Latin-American market indices. **European Physical Journal B**, v. 60, n. 1, p. 111–121, 2007. ISSN 14346028. Citado na página 4.

18 AL-KHAZALI, O. M.; PYUN, C. S.; KIM, D. Are exchange rate movements predictable in Asia-Pacific markets? Evidence of random walk and martingale difference processes. **International Review of Economics and Finance**, Elsevier Inc., v. 21, n. 1, p. 221–231, 2012. ISSN 10590560. Citado na página 4.

19 GRECH, D.; MAZUR, Z. Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea? **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 336, n. 1-2, p. 133–145, 2004. ISSN 03784371. Citado na página 4.

20 GARCIA, M. et al. Forecast model for financial time series: An approach based on harmonic oscillators. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 549, p. 1–9, 2020. Citado na página 4.

21 LAZăR, D.; TODEA, A.; FILIP, D. Martingale difference hypothesis and financial crisis: Empirical evidence from European emerging foreign exchange markets. **Economic Systems**, v. 36, n. 3, p. 338–350, 2012. ISSN 09393625. Citado na página 5.

22 ESCANCIANO, J. C.; VELASCO, C. Generalized spectral tests for the martingale difference hypothesis. **Journal of Econometrics**, v. 134, n. 1, p. 151–185, 2006. ISSN 03044076. Citado na página 5.

23 CHOUDHRY, T.; JAYASEKERA, R. Comparison of efficiency characteristics between the banking sectors of US and UK during the global financial crisis of 2007-2011. **International Review of Financial Analysis**, v. 25, p. 106–116, 2012. ISSN 10575219. Citado na página 5.

24 PREIS, T. et al. Quantifying the behavior of stock correlations under market stress. **Scientific Reports**, v. 2, p. 1–5, 2012. ISSN 20452322. Citado na página 6.

25 KARANASOS, M.; YFANTI, S.; KAROGLOU, M. Multivariate FIAPARCH modelling of financial markets with dynamic correlations in times of crisis. **International Review of Financial Analysis**, The Authors, v. 45, p. 332–349, 2016. ISSN 10575219. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.irfa.2014.09.002>. Citado na página 6.

26 PREIS, T.; MOAT, H. S.; Eugene Stanley, H. Quantifying trading behavior in financial markets using google trends. **Scientific Reports**, v. 3, p. 1–6, 2013. ISSN 20452322. Citado na página 6.

27 BOTTA, F. et al. Quantifying Stock Return Distributions in Financial Markets. p. 1–10, 2015. Citado na página 6.

28 MAI, Y. et al. Currency co-movement and network correlation structure of foreign exchange market. **Physica A**, Elsevier B.V., v. 492, p. 65–74, 2018. ISSN 0378-4371. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.09.068>. Citado na página 6.

29 WIKIPEDIA. **Hipótese do mercado eficiente**. 2018. Disponível em: <pt.wikipedia.org/wiki/Hip{ó}tese{_}do{_}merca>. Citado na página 7.

30 INVESTOPEDIA. **Candlesticks**. 2017. Disponível em: <http://www.investopedia.com/terms/c/candlestick.asp>. Citado na página 8.

31 CARBONE, A.; CASTELLI, G.; STANLEY, H. E. Time-dependent Hurst exponent in financial time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, p. 267–271, 2004. Citado na página 9.

32 RESENDE, C. C. D. et al. Investigating market efficiency through a forecasting model based on differential equations. **Physica A**, Elsevier B.V., v. 474, p. 199–212, 2017. ISSN 0378-4371. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2017.01.057>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 17.

33 RESENDE, C. C. D. **Modelo Matemático-computacional para Previsão de Tendência de Preços: Abordagem com Múltiplos Ativos Buscando Oportunidades em Desvios da Hipótese de Mercado Eficiente. Tese (Doutorado em Modelagem Matemática e Computacional) - CEFET-MG**. 2021. 32-36 p. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

34 KANTELHARDT, J. W. et al. Multifractal detrended uctuation analysis of nonstationary time series. v. 316, p. 87–114, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 113.

35 MILONE, G. **Estatística Geral e Aplicada**. [S.l.: s.n.], 2009. ISBN 8522103399. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 36.

36 MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. [S.l.: s.n.], 2016. ISBN 9788521632412. Citado na página 36.

Apêndices

APÊNDICE A – Os 57 ativos analisados do índice Ibovespa

*** Amostra coletada através da Plataforma Bloomberg**

**A ELET6 foi desconsiderada por não fazer parte da carteira teórica do Ibovespa no primeiro quadrimestre, e a CPFE3 por não apresentar suporte compacto (a série contém um número excessivo de retornos nulos, o que impede o cálculo de expoentes com q negativo para os menores tamanhos de régua).

ITUB4 - Ação do Itaú Unibanco, uma instituição financeira brasileira.

BBDC3 e BBDC4 - Ações do Banco Bradesco, um banco privado do Brasil.

ABEV3 - Ação da Ambev (Companhia de Bebidas das Américas), uma indústria brasileira de bebidas.

PETR3 e PETR4 - Ações da Petrobras, uma indústria de Petróleo, Gás, Energia e Biocombustível.

VALE3 e VALE5- Ações da Vale, uma indústria brasileira de mineração, logística, energia e siderurgia.

BRFS3 - Ação da BRF, uma indústria alimentícia do Brasil.

BBAS3 - Ação do Banco do Brasil, uma instituição financeira brasileira.

ITSA4 - Ação da Itaúsa, uma indústria de conglomerado.

BVMF3 - Ação da BM&FBOVESPA (Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo).

UGPA3 - Ação da Ultrapar (Grupo Ultra), uma indústria de conglomerado.

CIEL3 - Ação da Cielo, uma indústria de serviços financeiros brasileira.

BBSE3 - Ação da BB Seguridade, uma indústria de seguros brasileira, que pertence ao Banco do Brasil.

KROT3 - Ação da Kroton Educacional, uma indústria brasileira no setor da educação.

VIVT4 - Ação da Telefônica Vivo (Telefônica Brasil), uma indústria de telocomunicações.

JBSS3 - Ação da JVBS, uma indústria alimentícia brasileira.

LREN3 - Ação das Lojas Renner, uma indústria varejista brasileira.

CCRO3 - Ação do Grupo CCR, uma indústria brasileira de infraestrutura e transporte.

RADL3 - Ação da RaiaDrogasil, uma indústria farmacêutica varejista brasileira.

EMBR3 - Ação da Embraer, uma indústria aeronáutica e de defesa.

SANB11 - Ação do Banco Santander, uma instituição financeira brasileira.

EQTL3 - Ação da Equatorial Energia, uma indústria energia elétrica.

HYPE3 - Ação da Hypermarcas, uma indústria brasileira de conglomerado.

SBSP3 - Açao da SABESP (Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo), uma indústria brasileira de saneamento básico.

GGBR4 e GOAU4 - Ações da Gerdau, uma indústria siderúrgica brasileira.

BRKM5 - Ação da Braskem, uma indústria química e petroquímica brasileira.

LAME4 - Ação das Lojas Americanas, uma indústria varejista brasileira.

WEGE3 - Açao da WEG, uma indústria no ramo de engenharia industrial.

PCAR4 - Ação da GPA (Companhia Brasileira de Distribuição), uma indústria brasileira alimentícia, atacadista, varejista e de e-commerce.

KLBN11 - Ação da Klabin, uma indústria brasileira de papel e celulose.

FIBR3 - Ação da Fibria, uma indústria de celulose.

EGIE3 - Ação da Engie Brasil Energia, do setor de energia.

BRML3 - Ação da BRMalls, uma indústria brasileira do setor imobiliário, composta por shopping centers.

CSNA3 - Ação da CSN (Companhia Siderúrgica Nacional), uma indústria siderúrgica brasileira.

CMIG4 - Ação da Cemig (Companhia Energética de Minas Gerais), uma indústria brasileira de energia elétrica.

TIMP3 - Ação da TIM Brasil (TIM Participações), uma indústria de telefonia móvel e banda Larga.

ELET3 - Ação da Eletrobras, Centrais Elétricas Brasileiras S.A., do setro elétrico.

CSAN3 - Ação da Cosan, uma indústria brasileira de energia, logística e infraestrutura.

SUZB5 - Ação da Suzano Papel e Celulose, uma indústria de celulose.

RENT3 - Ação da Localiza, uma indústria brasileira de locação de veículos.

ESTC3 - Ação da Estácio Participações, uma indústria no setor da educação.

MULT3 - Ação da Multiplan, uma indústria do setor imobiliário, composta por shop-

ping centers.

RAIL3 - Ação da Rumo S.A., uma indústria brasileira de transporte ferroviário e logística.-

QUAL3 - Ação da Qualicorp, uma indústria brasileira de planos de saúde.

NATU3 - Ação da Natura, uma indústria de cosméticos brasileira.

BRAP4 - Ação da Bradespar, uma indústria brasileira de holding.

ENBR3 - Ação da EDP (Energias do Brasil), uma indústria brasileira de energia.

MRVE3 - Ação da MRV Engenharia, uma indústria brasileira de construção civil.

CPLE6 - Ação da Copel (Companhia Paranaense de Energia), uma indústria brasileria do estado do Paraná, de energia elétrica e telecomunicações.

SMLE3 - Ação da Smiles, uma industria que administra programas de fidelidade para milhas aereas.

CYRE3 - Ação da Cyrela Brazil Realty, uma indústria brasileira incorporadora e construtora de imóveis residenciais.

MRFG3 - Ação da Marfrig, uma indústria alimentícia brasileira.

USIM5 - Ação da Usiminas (Usinas Siderurgicas de Minas Gerais S.A), uma indústria brasileira de mineração e siderurgia.

ECOR3 - Ação da EcoRodovias, uma indústria brasileira de infraestrutura e transporte.

APÊNDICE B – Os 29 ativos analisados do índice Dow Jones

*** Amostra coletada através da Plataforma Bloomberg**

** A DIS UN foi excluída por não apresentar distribuição de retornos com decaimento em lei de potência no intervalo escolhido para investigação (ver seção **??** para maiores detalhes).

BA - Boeing Company, companhia multinacional americana de desenvolvimento aeroespacial e de defesa.

GS - Goldman Sachs Group Inc., grupo financeiro multinacional americano.

MMM - 3M Company, grupo econômico multinacional presente em 6 mercados: Industria & Transporte; Saúde; Consumo & Escritório; Segurança; Produtos elétricos & Comunicação; Controle de tráfego & Comunicação visual.

UNH - UnitedHealth Group Inc., uma empresa americana do setor de saúde.

AAPL - Apple Inc., empresa multinacional americana que projeta e comercializa produtos eletrônicos de consumo, softwares de computador e computadores pessoais.

HD - Home Depot Inc., companhia americana varejista de produtos para o lar e construção civil.

MCD - McDonald's Corporation, empresa americana de restaurantes de fast food de hambúrger, presente em 119 países.

IBM - International Business Machines Corporation, empresa americana de informática.

JNJ - Johnson & Johnson, empresa americana de produtos farmacêuticos, utensílios médicos e produtos pessoais de higiene.

TRV - Travelers Companies Inc., empresa seguradora americana.

UTX - United Technologies Corporation, conglomerado multinacional americano que pesquisa, desenvolve e manufatura produtos de alta tecnologia de diversos setores.

CAT - Caterpillar, empresa multinacional estadunidense fabricante de máquinas, motores e veículos pesados.

CVX - Chevron Corporation, empresa americana do ramo energético.

V - Visa Inc., empresa multinacional americana de serviços financeiros.

JPM - JPMorgan Chase & Company, empresa americana de serviços financeiros.

PG - Procter & Gamble Company, empresa multinacional americana de bens de consumo.

AXP - American Express Company, empresa de serviços financeiros dos Estados Unidos.

WMT - Walmart Inc., multinacional estadunidense de lojas de departamento.

DD - DuPont de Nemours Inc., empresa química americana, resultante da fusão da Dow Chemical e da DuPont, e depois, cisões de da Dow Inc. e da Corteva.

XOM - Exxon Mobil Corporation, empresa multinacional americana de petróleo e gás dos Estados Unidos.

MSFT - Microsoft Corporation, empresa transnacional americana do setor tecnológico.

MRK - Merck & Company Inc, empresa dos Estados Unidos e Canadá do setor farmacêutico (de saúde humana e animal).

NKE - Nike Inc, empresa estadunidense de calçados, roupas e acessórios.

VZ - Verizon Communications Inc, empresa estadunidense do setor de telecomunicações.

KO - Coca-Cola Company, companhia multinacional estadunidense do setor de bebidas.

INTC - Intel Corporation, empresa multinacional americana de tecnologia.

PFE - Pfizer Inc., industria farmacêutica multinacional americana.

CSCO - Cisco Systems Inc., setor tecnológico.

GE - General Electric Company, empresa transnacional estadunidense de tecnologia.