



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS CEFET-MG  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

# **A MÊCANICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA E SUAS APLICAÇÕES**

**WANDERLEY DA SILVA**

Orientador: Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli

Co-orientador: Prof. Dr. Osvaldo Negrini Neto

Belo Horizonte  
Março de 2023

**WANDERLEY DA SILVA**

# **A MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA E SUAS APLICAÇÕES**

Dissertação de mestrado submetido à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de Concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de Pesquisa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli

Co-orientador: Prof. Dr. Oswaldo Negrini Neto

Belo Horizonte  
Março de 2023

Silva, Wanderley da

S586m A mecânica quântica supersimétrica e suas aplicações. /  
Wanderley da Silva. – Belo Horizonte, 2023.  
80 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Centro Federal de Educação  
Tecnológica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em  
Modelagem Matemática e Computacional, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli

Coorientador: Prof. Dr. Osvaldo Negrini Neto

1. Mecânica Quântica. 2. Supersimetria. 3. Átomos de Hidrogênio.  
I. Scarpelli, Antônio Paulo Baêta. II. Centro Federal de Educação  
Tecnológica de Minas Gerais. III. Título

CDD 530.12



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MESTRADO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**“A MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA E SUAS  
APLICAÇÕES”**

Dissertação de Mestrado apresentada por **Wanderley da Silva**, em 13 de março de 2023, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Documento assinado digitalmente



ANTONIO PAULO BAETA SCARPELLI

Data: 16/03/2023 10:51:34-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Antônio Paulo Baeta Scarpelli  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Documento assinado digitalmente



OSVALDO NEGRINI NETO

Data: 14/03/2023 18:52:09-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Osvaldo Negrini Neto  
Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares

Documento assinado digitalmente



LUIZ CLEBER TAVARES DE BRITO

Data: 15/03/2023 20:04:00-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luiz Cléber Tavares de Brito  
Universidade Federal de Lavras

Documento assinado digitalmente



GIANCARLO QUEIROZ PELLEGRINO

Data: 14/03/2023 10:59:54-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Modelagem Matemática e Computacional

# Resumo

A supersimetria é um princípio bastante atraente na busca por teorias mais abrangentes, além do Modelo Padrão das partículas elementares, pois envolve o intercâmbio entre campos fermiônicos e bosônicos, além de resolver problemas como o do ajuste fino. A mecânica quântica supersimétrica (MQ SUSI) foi desenvolvida por Witten em 1981, inicialmente como um modelo para testar métodos de teorias de campos. A partir do momento em que a comunidade científica voltou sua atenção para a Mecânica Quântica SUSI, ficou evidente que este campo de estudos era interessante por si mesmo. Além de servir como um modelo para testar métodos de teorias de campos, constatou-se que a MQ SUSI traz novas luzes sobre o método de fatoração de Infeld e Hull, que foi a primeira forma de categorizar os problemas de potenciais solucionáveis analiticamente. Cálculos da mecânica quântica podem ser simplificados por meio de procedimentos da MQ SUSI. Há muito o que ser explorado em MQ SUSI no cenário atual. Este projeto tem como proposta fazer uma revisão dos diversos procedimentos adotados na MQ SUSI, desenvolver procedimentos numéricos para o cálculo de grandezas físicas em MQ SUSI. Neste trabalho vamos estudar os poços quânticos nas dimensões: 1D (finito e infinito), 2D (quadrado e circular), 3D esférico (finito e infinito) e o átomo de hidrogênio, bem como seus parceiros supersimétricos. Apresentaremos ao fim uma discussão de aplicações da mecânica quântica supersimétrica e algumas aplicações tecnológicas.

**Palavras-chave:** Mecânica Quântica; Supersimetria; Átomo de Hidrogênio; Aplicações Tecnológicas.

# Abstract

Supersymmetry is a very attractive principle in the search for more comprehensive theories, in addition to the Standard Model of elementary particles, as it involves the exchange between fermionic fields and bosons, in addition to solving problems such as fine tuning. Supersymmetric quantum mechanics (MQ SUSI) was developed by Witten in 1981, initially as a model for testing field theory methods. From the moment the scientific community turned its attention to SUSI Quantum Mechanics, it became evident that this field of study was interesting in itself. In addition to serving as a model for testing field theory methods, it was found that the MQ SUSI sheds new light on the Infeld and Hull factoring method, which it was the first way to categorize analytically problems which are potentially solvable. Quantum mechanics calculations can be simplified using QM procedures SUSI There is a lot to be explored in MQ SUSI in the current scenario. This project aims to proposal to review the various procedures adopted in MQ SUSI , develop numerical procedures for the calculation of physical quantities in MQ SUSI. In this job let's study quantum wells in dimensions: 1D (finite and infinite), 2D (square and circular), spherical 3D (finite and infinite) and the hydrogen atom, as well as its supersymmetric partners. Finally, we will present a discussion of applications of supersymmetric quantum mechanics and some technological applications.

Keywords: Quantum Mechanics; Supersymmetry; Hydrogen Atom; Technological Applications  
funny.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Parceiros supersimétricos, destacando-se o gluino, parceiro do gluon. . . . .	12
Figura 2 – Potencial Contínuo Simples. . . . .	19
Figura 3 – Níveis de Energias de dois Potencias Parceiros Supersimétricos. . . . .	30
Figura 4 – Potencial $V_2(x,1) = 2\cos\sec^2x - 1$ . . . . .	36
Figura 5 – Poço unidimensional infinito de largura $L$ . . . . .	43
Figura 6 – Três primeiros níveis de energia do poço de potencial infinito. . . . .	44
Figura 7 – Potenciais Parceiros e seus autoestados . . . . .	46
Figura 8 – Poço Retangular 2D . . . . .	49
Figura 9 – Coordenadas esféricas. . . . .	54
Figura 10 – Poço Circular Infinito . . . . .	70
Figura 11 – Potencial $V_0^{(2)}(r)$ para $L = 1$ . . . . .	73
Figura 12 – Superpotencial para $m = 0$ e $L = 1$ . . . . .	73
Figura 13 – Potencial circular com barreira refletora. . . . .	76

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Operação de simetria / Lei de conservação. . . . .	11
---	----

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus pela saúde, força e fé para chegar até aqui.

Ao longo dessa jornada de três anos de estudos e pesquisas sobre a mecânica quântica supersimétrica, obtive grande ajuda de todos aqueles que acreditaram e confiaram nessa proposta de trabalho, sejam os familiares por entenderem a minha ausência em determinados eventos de família, aos colegas de trabalho que me apoiaram, aos amigos e colegas de estudos que adquiri no CEFET- MG, à coordenação do programa de mestrado, a todos os professores que tive a honra de ser aluno e guardar os mais diversos ensinamentos e aos funcionários da secretaria do CEFET-MG.

Agradeço imensamente ao meu orientador professor Dr. Antônio Paulo Baeta Scarpelli, que com todo o seu conhecimento, seriedade e competência esteve sempre presente no desenvolvimento desse trabalho. Ao meu coorientador professor Dr. Osvaldo Negrini Neto, um profissional muito sério, participativo, dedicado e que sempre esteve presente nas orientações contribuindo para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço de coração à minha família, que sempre deixou claro nos seus ensinamentos, o quão importante eram os estudos. Dedico essa conquista a todos os meus familiares, amigos e professores.

# Sumário

<b>1 – INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>2 – Revisão da Literatura</b>	<b>15</b>
2.1 Postulados da Mecânica Quântica	15
2.1.1 Postulado 1	15
2.1.2 Postulado 2	15
2.1.3 Postulado 3	15
2.1.4 Postulado 4	15
2.1.4.1 Postulado 4 - caso de espectro discreto não degenerado	16
2.1.4.2 Postulado 4 - caso de espectro discreto degenerado	16
2.1.4.3 Postulado 4 - caso de espectro contínuo não degenerado	17
2.1.5 Postulado 5	18
2.1.6 Postulado 6	18
2.2 A equação de Schroedinger unidimensional	18
2.3 Formalismo de operadores no oscilador harmônico	19
2.4 A Equação de Dirac	21
<b>3 – Mecânica Quântica Supersimétrica</b>	<b>27</b>
3.1 Fatoração Geral de um Hamiltoniano	27
3.2 Hierarquia de Hamiltonianas	30
3.3 Espalhamento em Supersimetria	30
3.4 Potenciais Invariantes de Forma	33
3.4.1 Exemplo de Invariância de Forma - O Potencial de Pöschl-Teller	35
3.4.2 Outros Exemplos de Potenciais Invariantes de Forma com Parâmetros Relacionados por Translação	36
3.5 A Supersimetria e sua Quebra	39
3.5.1 Quebra de supersimetria	41
<b>4 – Poços Quânticos em uma e duas Dimensões</b>	<b>43</b>
4.1 Poço Unidimensional Infinito	43
4.1.1 Parceiro Supersimétrico do Poço Infinito	44
4.2 Oscilador Harmônico Quântico Supersimétrico	46
4.3 Poço Retangular Infinito	49
4.3.1 Poço Retangular 2D Supersimétrico	50
<b>5 – Poços Quânticos Esfericamente Simétricos</b>	<b>53</b>
5.1 Separação de Variáveis e Obtenção do Potencial Efetivo	53

5.2	Poço Esférico Infinito . . . . .	54
5.3	Átomo de Hidrogênio . . . . .	56
<b>6</b>	<b>A MQ SUSI e a Teoria de Dirac . . . . .</b>	<b>59</b>
6.1	A Supersimetria e a Equação de Dirac . . . . .	59
6.2	A Supersimetria e a Equação de Dirac em 3D+1 . . . . .	61
6.2.1	Hamiltoniano de Dirac . . . . .	61
6.2.2	Separação de Variáveis na Equação de Dirac para Potenciais Esfericamente Simétricos . . . . .	61
<b>7</b>	<b>O Poço Circular Infinito . . . . .</b>	<b>69</b>
7.1	Poço Circular . . . . .	69
7.1.1	O Poço Circular e a Supersimetria . . . . .	70
7.1.2	O Potencial Circular com Fluxo Magnético pelo Centro . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Discussão e Conclusões . . . . .</b>	<b>77</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>79</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O conhecimento a respeito da natureza da matéria e das interações entre as partículas elementares é reunido no chamado Modelo Padrão, que divide as partículas em duas categorias: férmions e bósons. O Modelo Padrão das partículas elementares é consensualmente considerado uma teoria incompleta, ainda que em escalas de baixa energia como a da Teoria Eletrofraca, em torno de 100 GeV. Uma das razões é o chamado problema da hierarquia, proveniente do fato de que a massa da partícula de Higgs recebe grandes correções em ordens superiores da expansão perturbativa, composta por termos que são representados por diagramas de Feynman em loops. Em princípio, tais correções podem ser canceladas por meio de um ajuste fino de alguns parâmetros do Modelo Padrão. Contudo, tal solução para o problema da hierarquia soa não natural para a maioria dos pesquisadores da área, e esta é a razão pela qual tal questão é denominada pela comunidade científica como o problema da “naturalidade” ou do ajuste fino.

Assim, é muito grande a busca por novas teorias que abranjam além do Modelo Padrão e, como sempre, tal busca é guiada por princípios de simetria. A supersimetria é um princípio bastante atraente na busca por teorias mais abrangentes, pois envolve o intercâmbio entre campos fermiônicos e bosônicos. Um dos pontos mais chamativos nas teorias supersimétricas é o fato de que modelos desse tipo resolvem o problema da hierarquia, já que as correções para as massas das partículas devidas aos loops de férmions e de bósons se cancelam exatamente. Na verdade, a maioria das divergências (contribuições tendentes ao infinito) vindas de altas energias desaparecem nos modelos supersimétricos.

Contudo, a exata invariância sob supersimetria implica a existência, para todas as partículas observadas, de um parceiro de mesma massa e com os mesmos números quânticos, à exceção do spin, que difere por  $1/2$ . O fato de esses parceiros não serem observados na natureza indica que essa simetria, se existente, é quebrada por meio de algum mecanismo em escalas de energias mais altas. Em geral, quando se projeta uma teoria, procura-se um modelo o mais geral possível que seja compatível com as simetrias julgadas essenciais. Conceitos físicos como as leis de conservação são profundamente conectados às simetrias da natureza, conforme estabelecido pelo teorema de Noether (GOMES, 2002). O teorema de Noether usa o princípio variacional para discutir as propriedades de invariância de um sistema. Estabelece que a cada operação de simetria corresponde uma lei de conservação. A tabela 1 apresenta a relação de operação de simetria com a lei de conservação.

Os mecanismos de quebra da simetria são importantes, porque as simetrias impõem restrições de tal ordem nos sistemas físicos que, caso elas fossem exatas, alguns fenômenos que são observados não seriam possíveis. Na verdade, deseja-se que a Lagrangeana (ou a Hamiltoniana) do modelo seja simétrica, embora o mundo que ela descreve não o seja. Esta é a razão pela qual uma das áreas de pesquisa mais promissoras atualmente é a dos mecanismos de

Tabela 1 – Operação de simetria / Lei de conservação.

Operação de Simetria	Lei de Conservação
Translação no espaço	Momento linear
Rotação no espaço	Momento angular
Translação no tempo	Energia

Fonte: Elaborada pelo autor.

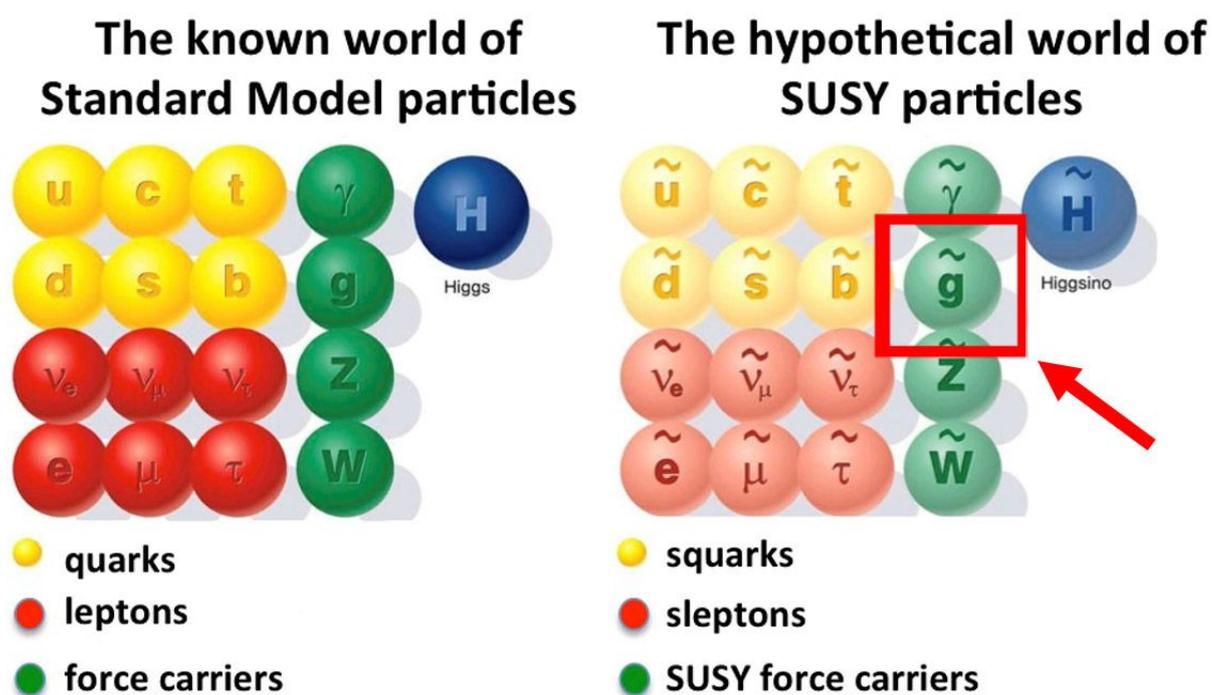
quebra de simetria.

Por outro lado, algo de fato notável emerge da simples ideia de se misturar férmions e bósons. Duas transformações sucessivas de supersimetria nos levam de volta ao mesmo campo, mas em um ponto diverso do espaço-tempo. Dessa forma, a supersimetria (SUSI) também está intimamente vinculada a transformações no espaço-tempo, além das simetrias internas do usual Modelo Padrão. Do ponto de vista teórico, a SUSI unifica as partículas com diferentes spins, férmions e bósons, em um supermultiplete e permite que simetrias internas, tais como de isospin e SU(3), sejam incorporadas, produzindo uma mistura entre simetrias interna e espaço-temporais. Além de sua elegância conceitual, a SUSI produziu algumas teorias de campo renormalizáveis com um comportamento melhor no regime ultravioleta, e foi explorada como possível solução para o problema da hierarquia de gauge em teorias unificadas (LABELLE, 2010).

A SUSI relaciona os férmions, que constituem o mundo material, e os bósons, responsáveis pelas forças da natureza. Para diferentes tipos de superparceiros, acrescentam-se prefixos ou sufixos na nomenclatura das novas partículas. No caso de a partícula ser um bóson, seu superparceiro é nomeado com um sufixo “ino” (o fóton possui um fotino como superparceiro, que é um férmion). Cada férmion possui um superparceiro bóson, cujo spin difere por meia unidade e que recebe um “s” como prefixo (ao elétron associa-se o selectron). A Figura 1 ilustra os parceiros supersimétricos.

Os principais mecanismos e cenários da quebra da SUSI, como, por exemplo, a discussão das quebras espontânea e dinâmica, podem ser encontrados em (WEINBERG, 1995). Alguns trabalhos abordam a possibilidade da quebra da SUSI associada à violação da simetria de Lorentz, como discutido em (BERNALD, 2010), ao passo que outros utilizam efeitos não-perturbativos. Na literatura, percebe-se que esta última discussão foi essencial para o estabelecimento da Mecânica Quântica Supersimétrica (MQ SUSI) como objeto de investigação científica (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001), (GANGOPADHYAYA; MALLOW; RASINARIU, 2017). Historicamente, Nicolai (NICOLAI, 1976) introduziu a SUSI na mecânica não-relativística, mas foi a partir do trabalho de Witten (WITTEN, 1982), em 1981, que a MQ SUSI foi desenvolvida. Nesse trabalho, Witten introduziu a SUSI em uma Teoria de Campos em (1+0) dimensões (MQ SUSI), sendo o tempo a coordenada e, a posição, o próprio campo. Ele estudou os instantons como efeitos não-perturbativos, o que resultou na quebra dinâmica da SUSI em mecânica quântica para, posteriormente, tentar acomodar essas ideias na teoria de campos.

Figura 1 – Parceiros supersimétricos, destacando-se o gluino, parceiro do gluon.



Fonte: <https://www.ictp-saifr.org/wp-content/uploads/2015/09/Supersymmetry.jpg>

A MQ SUSI tem sido muito utilizada na compreensão das degenerescências e simetrias de sistemas físicos e como uma ferramenta poderosa em cálculos de espectro de operadores. Neste contexto, utiliza-se uma superálgebra de Lie que se fecha sob uma combinação de relações de comutação e anticomutação. Esse formalismo tem estimulado algumas novas abordagens para outros ramos da física, como a atômica, a molecular, a nuclear, a estatística e a da matéria condensada. A partir do momento em que a comunidade científica voltou sua atenção para a Mecânica Quântica SUSI, ficou evidente que este campo de estudos era interessante por si mesmo. Além de servir como um modelo para testar métodos de teorias de campos, constatou-se que a MQ SUSI traz novas luzes sobre o método de fatoração de Infeld e Hull (INFELD; HULL, 1951), que foi a primeira forma de categorizar os problemas de potenciais solucionáveis analiticamente. Aos poucos, todo um novo conjunto de procedimentos foi se desenvolvendo, a partir da SUSI, a fim de se melhor compreender os problemas de potenciais solucionáveis, e mesmo de se descobrir novos problemas de potenciais solucionáveis. Para os potenciais não exatamente solucionáveis, a SUSI permite a obtenção de novos e poderosos métodos de aproximação. É possível entender porque alguns potenciais são exatamente solucionáveis a partir de algumas poucas e básicas ideias, dentre elas as dos potenciais parceiros supersimétricos e dos potenciais invariantes de forma (potenciais cujos parceiros SUSI possuem a mesma dependência espacial, a menos de ajustes de parâmetros).

Uma Hamiltoniana na MQ SUSI é uma matriz  $2 \times 2$  que, quando diagonalizada, dá origem a duas Hamiltonianas separadas, cujos autovalores, autofunções e matrizes  $S$  estão relacionados

por causa da existência de operadores fermiônicos que comutam com a Hamiltoniana. Uma questão de interesse na mecânica quântica é o método da fatoração para se obter soluções, no qual a Hamiltoniana pode ser reescrita como um produto de dois fatores, usualmente chamados de operadores de criação e aniquilação. Dessa forma, o método evitaria a necessidade de solução direta da equação de Schroedinger, de segunda ordem, e levaria a uma equação diferencial de primeira ordem. Foi o próprio Schroedinger quem percebeu este fato e que desenvolveu uma maneira de fatorar a Hamiltoniana do átomo de hidrogênio em 1941 ([SCHRÖDINGER, 1940](#)). Alguns anos depois, Infeld e Hull generalizaram a técnica para um grande número de sistemas, que hoje são conhecidos como sistemas com potenciais invariantes de forma. Todas essas observações se revelaram como manifestações de uma simetria subjacente, posteriormente explicada pela MQ SUSI.

A MQ SUSI está intimamente relacionada ao método de fatoração ([STEDMAN, 1985](#)). Na verdade, trata-se de técnicas equivalentes no processo de gerar novos potenciais solucionáveis a partir de um inicial. O exemplo clássico do método da fatoração é o do oscilador harmônico quântico, no qual os operadores de posição e de momento são escritos como combinação linear de novos operadores, em função dos quais a Hamiltoniana apresenta uma forma muito simples. Tais operadores apresentam as propriedades muito peculiares de nos levarem a estados com energias imediatamente superiores ou inferiores no espectro e, por isso, são chamados de operadores de criação e aniquilação, respectivamente.

O oscilador harmônico SUSI inclui também uma Hamiltoniana para o setor fermiônico análoga, mas que é escrita em termos de operadores de criação e aniquilação que respeitam relações de anticomutação (em vez de comutação), que forçam o respeito ao princípio da exclusão de Pauli. Além disso, são construídos operadores fermiônicos geradores de supersimetria que comutam com a Hamiltoniana. Estes são produtos mistos dos operadores de criação e aniquilação bosônicos e fermiônicos, de tal forma que, ao destruírem um bóson, criam um férmion e vice-versa. Trata-se de um procedimento muito elegante e que permite a construção de um conjunto de Hamiltonianas hierarquizadas. Tal elegância não se restringe ao oscilador harmônico, já que a MQ SUSI formaliza o procedimento de fatoração para Hamiltonianas mais gerais.

Há muito o que ser explorado em MQ SUSI no cenário atual. É importante uma revisão consistente dos procedimentos adotados, já que existem muitos formalismos diferentes em uso, mas que são equivalentes. De forma geral, este trabalho apresenta uma revisão dos procedimentos adotados na Mecânica Quântica Supersimétrica e a utilização de tais técnicas em alguns problemas.

A seguir, apresentamos a forma como este projeto está organizado. No capítulo 1, é apresentada a Introdução. No capítulo 2, faremos uma revisão da literatura através de tópicos da mecânica quântica, postulados básicos, a equação de Schroedinger, o estudo do formalismo do operador no oscilador harmônico, e a introdução à equação de Dirac. No capítulo 3, é realizada uma introdução aos conceitos e cálculos da Mecânica Quântica Supersimétrica. Nos capítulos que seguem, diversos problemas serão abordados do ponto de vista da Mecânica Quântica

Supersimétrica. No capítulo 4, serão estudados os poços quânticos em uma e duas dimensões, incluindo o oscilador harmônico, o poço unidimensional infinito e o poço retangular infinito. No capítulo 5, apresentamos um estudo sobre os poços quânticos em três dimensões, com especial atenção ao poço esférico infinito e ao átomo de hidrogênio. O capítulo 6 é voltado para as aplicações da MQ SUSI na equação de Dirac. Estudamos de forma aprofundada o caso de potenciais circulares infinitos no capítulo 7. As conclusões e as perspectivas são apresentadas no capítulo 8.

## 2 Revisão da Literatura

Neste capítulo, faremos uma revisão de alguns tópicos básicos da mecânica quântica com e sem relatividade: seus postulados; a álgebra envolvida nesse estudo; a equação de Schroedinger; o formalismo de operadores no oscilador harmônico; e uma introdução à equação de Dirac.

### 2.1 Postulados da Mecânica Quântica

A descrição quântica de sistemas físicos se baseia em postulados, que podem ser organizados de acordo com o descrito nas subseções abaixo.

#### 2.1.1 Postulado 1

Em um dado instante  $t_0$ , o estado de um sistema físico é definido pela especificação de um ket  $|\psi(t_0)\rangle$  pertencente ao espaço de estados  $\mathcal{E}$ .

É importante notar que, como  $\mathcal{E}$  é um espaço vetorial, este primeiro postulado implica um princípio de superposição: uma combinação linear de vetores de estado é um vetor de estado.

#### 2.1.2 Postulado 2

Toda grandeza física mensurável  $\mathcal{A}$  é descrita por um operador  $A$  atuando em  $\mathcal{E}$ : este operador é um observável.

Importante notar que, em mecânica quântica, um estado é representado por um vetor, ao passo que uma quantidade física é representada por um operador.

#### 2.1.3 Postulado 3

O único resultado possível da medição de uma grandeza física  $\mathcal{A}$  é um dos autovalores do observável  $A$  correspondente.

Este valor será real, pois  $A$  é, por definição, Hermitiano. Se o espectro de  $A$  for discreto, os resultados que podem ser obtidos são quantizados.

#### 2.1.4 Postulado 4

Consideremos um sistema cujo estado é caracterizado, em um dado tempo, pelo ket  $|\psi\rangle$ , assumido normalizado para 1:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1. \quad (1)$$

Queremos prever o resultado da medição de uma grandeza física  $\mathcal{A}$  associada ao observável  $A$ . Essa previsão terá caráter probabilístico. Para um espectro discreto, se todos os autovalores  $a_n$  de

A forem não degenerados, estará associado a cada um deles um autovetor único  $|u_n\rangle$ :

$$A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle. \quad (2)$$

Como  $A$  é um observável, o conjunto de autovetores  $|u_n\rangle$ , normalizado, constitui uma base em  $\mathcal{E}$ , e o vetor de estado  $|\psi\rangle$  pode ser escrito,

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n|u_n\rangle, \quad (3)$$

de forma que a probabilidade  $P(a_n)$  de encontrar  $a_n$  quando  $\mathcal{A}$  é medida é dada por

$$P(a_n) = |c_n|^2 = |\langle u_n|\psi\rangle|^2. \quad (4)$$

#### 2.1.4.1 Postulado 4 - caso de espectro discreto não degenerado

Quando a grandeza física  $\mathcal{A}$  é medida em um sistema no estado normalizado  $|\psi\rangle$ , a probabilidade  $P(a_n)$  de obter o autovalor não degenerado  $a_n$  do observável  $A$  correspondente é dada por

$$P(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2,$$

em que  $|u_n\rangle$  é o autovetor normalizado de  $A$  associado ao autovalor  $a_n$ .

#### 2.1.4.2 Postulado 4 - caso de espectro discreto degenerado

Se algum dos autovalores  $a_n$  for degenerado, vários autovetores ortonormalizados  $|u_n^i\rangle$  estão a ele associados,

$$A|u_n^i\rangle = a_n|u_n^i\rangle; \quad i = 1, 2, \dots, g_n, \quad (5)$$

sendo  $g_n$  o grau de degenerescência (ou a dimensão do subespaço) do autovalor  $a_n$ . A expansão de  $|\psi\rangle$  na base ortonormal  $|u_n^i\rangle$  é, então, escrita como

$$|\psi\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle \quad (6)$$

e, nesse caso, a probabilidade  $P(a_n)$  se torna

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i|\psi\rangle|^2 \quad (7)$$

Assim, quando a grandeza física  $\mathcal{A}$  é medida em um sistema no estado normalizado  $|\psi\rangle$ , a probabilidade  $P(a_n)$  de obter o autovalor  $a_n$ , do observável  $A$  correspondente, cujo espectro é discreto e degenerado, é dada por

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i|\psi\rangle|^2 \quad (8)$$

em que  $g_n$  é o grau de degenerescência de  $a_n$  e  $|u_n^i\rangle$ ,  $i = 1, \dots, g_n$ , é um conjunto de vetores ortonormais que forma uma base no subespaço próprio  $\mathcal{E}_n$  associado ao autovalor  $a_n$  de  $A$ .

#### 2.1.4.3 Postulado 4 - caso de espectro contínuo não degenerado

Para o caso de um espectro de  $A$  contínuo, não degenerado, o conjunto ortonormal, no sentido estendido, de autovetores  $|v_s\rangle$  de  $A$ ,

$$A|v_s\rangle = \alpha|v_s\rangle, \quad (9)$$

forma uma base contínua em  $\mathcal{E}$ , em termos da qual  $|\psi\rangle$  pode ser expandido:

$$|\psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha)|v_s\rangle. \quad (10)$$

Como os resultados possíveis de uma medida de  $\mathcal{A}$  formam um conjunto contínuo, devemos definir uma densidade de probabilidade. A probabilidade  $dP(\alpha)$  de obter um valor compreendido entre  $\alpha$  e  $\alpha + d\alpha$  é dada por

$$dP(\alpha) = \rho(\alpha)d\alpha,$$

sendo

$$\rho(\alpha) = |c(\alpha)|^2 = |\langle v_\alpha|\psi\rangle|^2. \quad (11)$$

Quando a quantidade física  $\mathcal{A}$  é medida em um sistema no estado normalizado  $|\psi\rangle$ , a probabilidade  $dP(\alpha)$  de obter um resultado compreendido entre  $\alpha$  e  $\alpha + d\alpha$  é igual a

$$dP(\alpha) = |\langle v_\alpha|\psi\rangle|^2 d\alpha,$$

em que  $|v_\alpha\rangle$  é o autovetor correspondente ao autovalor  $\alpha$  do observável  $A$  associado a  $\mathcal{A}$ .

É importante notar, em cada um dos casos considerados acima, que a probabilidade total é igual a 1. Por exemplo, usando a equação (7), encontramos

$$\sum_n P(a_n) = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad (12)$$

já que  $|\psi\rangle$  é normalizado. Esta última condição é, portanto, indispensável para que as afirmações que fizemos sejam coerentes. Caso o estado não esteja normalizado, basta substituir as equações (7) e (11), respectivamente, por:

$$P(a_n) = \frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle} \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 \quad (13)$$

e

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle} |c(\alpha)|^2. \quad (14)$$

### 2.1.5 Postulado 5

Se a medição da grandeza física  $\mathcal{A}$  no sistema no estado  $|\psi\rangle$  dá o resultado  $a_n$ , o estado do sistema imediatamente após a medição é a projeção normalizada de  $|\psi\rangle$  no subespaço próprio  $\mathcal{E}_n$ ,

$$\frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}}.$$

O estado do sistema imediatamente após a medição é, portanto, sempre um autovetor de  $A$  com o autovalor  $a_n$ . Ressaltamos, no entanto, que não se trata de um ket arbitrário do subespaço  $\mathcal{E}_n$ , mas da parte de  $|\psi\rangle$  que pertence a  $\mathcal{E}_n$  (normalizada, por conveniência).

### 2.1.6 Postulado 6

A evolução temporal do vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  é governada pela equação de Schroedinger:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle, \quad (15)$$

em que  $H(t)$ , chamado de operador Hamiltoniano, é o observável associado à energia total do sistema.

## 2.2 A equação de Schroedinger unidimensional

Considerando uma partícula que se move ao longo de uma reta, sob a ação de um potencial independente do tempo  $V(x)$ , é possível separar a parte espacial da equação de Schroedinger da parte temporal (SILVA, 2009). A parte espacial é chamada de equação de Schroedinger independente do tempo. A soma dos operadores que representam a energia cinética e a energia potencial nos fornece o Hamiltoniano  $H$ , que pode ser representado por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (16)$$

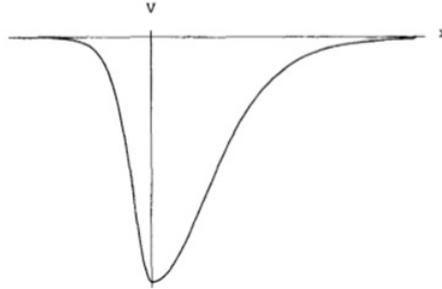
Com a equação de Shroedinger independente do tempo, temos  $H\psi(x) = E\psi(x)$ , de forma que

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x) \quad (17)$$

Para satisfazer as condições de contorno, a função de onda  $\psi(x)$  deve ser restringida. Funções de onda senoidalmente oscilantes resultam de regiões nas quais  $E > V(x)$ , e soluções exponencialmente amortecidas e crescentes resultam de regiões em que  $E < V(x)$ . As restrições da conservação de probabilidade e os requisitos de continuidade de  $\psi$  e  $\psi'$  fornecem as energias de autoestados e propriedades de espalhamento. Boa parte dos resultados obtidos para potenciais constantes por partes são válidos para potenciais gerais.

Consideremos uma situação de um potencial  $V(x)$  que tenda a um valor constante  $V_{max}$  em  $x \rightarrow \pm\infty$ , sendo menor que  $V_{max}$  para todos os valores de  $x$ , e que apresente um valor mínimo  $V_{min}$ .

Figura 2 – Potencial Contínuo Simples.



Fonte: F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Supersymmetry and Quantum Mechanics, Phys. Rep. 251 (1995) 267-385.

Para o potencial acima, se  $E < V_{min}$ , não existem soluções normalizáveis da eq.(17). Se  $V_{min} < E < V_{max}$ , temos valores discretos de  $E$  para os quais existem soluções normalizáveis. Esses valores,  $E_0, E_1, \dots$ , são energias próprias e as funções de onda correspondentes  $\psi_0, \psi_1, \dots$  são autofunções do Hamiltoniano. Para  $E \geq V_{max}$ , existe uma faixa contínua de níveis de energia com as funções de onda tendo o comportamento  $e^{\pm ikx}$ .

### 2.3 Formalismo de operadores no oscilador harmônico

O oscilador harmônico simples clássico tem, como principal característica, a atuação da força restauradora  $F = -kx$ . A energia potencial elástica resultante tem a forma  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ . O movimento da partícula de massa  $m$ , sujeita a esta energia potencial, será tal que

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi), \quad (18)$$

em que  $X_m$  e  $\phi$  dependem das condições iniciais e  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a frequência angular.

O oscilador harmônico quântico é estudado por meio da equação de Schroedinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi, \quad (19)$$

em que as condições de contorno estabelecem que  $\psi(x) \rightarrow 0$  em  $x \rightarrow \pm\infty$ . O caminho para a solução é fornecido por um método algébrico atribuído a Dirac (GANGOPADHYAYA; MALLOW, 2007) (FOCK, 1928). As soluções apresentam um espectro discreto de energia,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, n = 0, 1, 2, \dots$$

com autofunções correspondentes

$$\psi_n = N_n \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right) H_n(\tilde{x}), \quad (20)$$

em que  $\tilde{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ ,  $H_n$  é o polinômio de Hermite de grau  $n$ , e  $N_n$  é uma constante de normalização.

Um tratamento muito elegante para a solução do oscilador harmônico quântico faz uso de uma fatoração. Por conveniência, redefinimos o Hamiltoniano de forma que a energia do estado fundamental seja nula:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (21)$$

A mudança por uma energia constante  $-\frac{1}{2}\hbar\omega$  é útil na discussão padrão de supersimetria não quebrada, na qual o estado fundamental apresenta energia zero. Para a fatoração, definimos os operadores de elevação e abaixamento,  $a^\dagger$  e  $a$ ,

$$a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right), \quad a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right), \quad (22)$$

de tal forma que o comutador  $[a, a^\dagger]$  é a unidade, e o Hamiltoniano é dado por

$$H = \hbar\omega a^\dagger a. \quad (23)$$

Para todo autoestado  $\psi(x)$  de  $H$  com autovalor  $E$ , temos que  $a^\dagger\psi$  e  $a\psi$  também são autoestados com autovalores  $E + \hbar\omega$  e  $E - \hbar\omega$ , respectivamente. Isso ocorre porque  $[H, a^\dagger] = a^\dagger\hbar\omega$  e  $[H, a] = -a\hbar\omega$ , de forma que

$$Ha^\dagger\psi = (a^\dagger H + a^\dagger\hbar\omega)\psi = (E + \hbar\omega)a^\dagger\psi \quad (24)$$

e

$$Ha\psi = (aH - a\hbar\omega)\psi = (E - \hbar\omega)a\psi. \quad (25)$$

Isso justifica  $a^\dagger$  e  $a$  serem chamados de operadores de elevação e abaixamento, respectivamente. Como a energia é limitada por baixo, o processo de descida ao estado fundamental  $\psi_0(x)$  nos leva a  $a\psi_0(x) = 0$ , o que determina que a energia do estado fundamental é zero (conforme já esperado), com função de onda dada pela solução da equação diferencial de primeira ordem,

$$x\psi_0 + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d\psi_0}{dx} = 0. \quad (26)$$

Obtemos

$$\psi_0(x) = N_0 \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right), \quad (27)$$

em acordo com a eq. (20). Os autoestados superiores são obtidos pela aplicação do operador de levantamento  $a^\dagger$ :

$$\psi_n = N_n (a^\dagger)^n \psi_0, \quad E_n = n\hbar\omega, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (28)$$

Assim, a redefinição do Hamiltoniano apenas faz um deslocamento nos níveis de energia,  $E_n \rightarrow E_n - \frac{1}{2}\hbar\omega$ .

O procedimento de fatoração da Hamiltoniana apresentado acima será de suma importância nos capítulos que seguem, já que a mecânica quântica supersimétrica é construída a partir de uma generalização desta técnica.

## 2.4 A Equação de Dirac

A equação de Dirac é a versão relativística da equação de Schroedinger para partículas de spin semi-inteiro. Inicialmente, obteremos a equação de Dirac para uma partícula livre, assim como as suas soluções em tal situação. Mais adiante neste trabalho, vamos estudar as diferentes formas de introduzir interações e relacioná-las com a MQ SUSI.

Na teoria relativística, o tempo e as coordenadas espaciais devem ser tratados de forma igual. A equação de Schroedinger apresenta derivadas de 1ª ordem no tempo e de 2ª ordem no espaço. A equação de Klein-Gordon utiliza derivadas de 2ª ordem na posição e no espaço, mas não é eficiente para o tratamento de férmions. Dirac, por sua vez, propôs uma equação de 1ª ordem no tempo e no espaço. Usando a equação de energia relativística:

$$p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow p_\mu p^\mu = m^2 c^2, \quad (29)$$

com

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right),$$

temos

$$\frac{E}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2 \Rightarrow E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Normalmente, para a construção das equações, usamos os operadores  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$ . Na forma de quadri-vetor, temos  $p_\mu = i\hbar \partial_\mu$ , sendo  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  e  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ . De forma que

$$p_0 = p^0 = \frac{E}{c} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^0} = i\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

e

$$p_i = -p^i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow p^i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Fatorando a equação,

$$p^2 - m^2 c^2 = 0, \quad (30)$$

escrevemos

$$(\beta^k p_k + mc) (\gamma^k p_k - mc) = 0, \quad (31)$$

com  $\beta^\kappa$  e  $\gamma^\kappa$  coeficientes a serem determinados, que não necessariamente comutam. Obtemos:

$$\beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda + mc (\gamma^\kappa - \beta^\kappa) p_\kappa - m^2 c^2 = 0. \quad (32)$$

Como o termo linear em  $p_\kappa$  deve se anular, temos  $\gamma^\kappa = \beta^\kappa$ . Além disso, devemos ter

$$\gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda = p^\lambda p_\lambda. \quad (33)$$

Por simetria, podemos escrever:

$$\gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda = \frac{1}{2} [\gamma^\kappa \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\kappa] p_\kappa p_\lambda,$$

de forma que, para obtermos (33), devemos ter:

$$\frac{1}{2} [\gamma^\kappa \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\kappa] p_\kappa = p^\lambda,$$

ou

$$\gamma^\kappa \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\kappa \equiv \{\gamma^\kappa, \gamma^\lambda\} = 2n^{\kappa\lambda}, \quad (34)$$

com

$$n^{\kappa\lambda} = \begin{cases} 0, & \kappa \neq \lambda \\ 1, & \kappa = \lambda = 0 \\ -1, & \kappa = \lambda = 1, 2, 3 \end{cases}.$$

Da equação (34), temos:  $(\gamma^0)^2 = I$  e  $(\gamma^i)^2 = -I$ . Em 4 dimensões, a menor matriz com tais propriedades é 4x4. Então, a equação de Dirac é matricial e, sua solução, é um espinor  $\psi$  de 4 componentes.

Há várias representações para as matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$ . Uma delas é a padrão (standard), com:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

que são matrizes em blocos 2x2, sendo  $\sigma^i$  as chamadas matrizes de Pauli,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que respeitam a relação cíclica:  $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$ .

Dadas as relações entre as matrizes  $\gamma$  de Dirac, ficamos com

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc) \psi = 0 \quad (35)$$

ou

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi(x) = 0 \quad (36)$$

que é a equação de Dirac para uma partícula livre. Na notação das matrizes em blocos, escrevemos o espinor como

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (37)$$

com

$$\begin{cases} \varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (38)$$

Para obtermos a solução da equação de Dirac para uma partícula livre, devemos considerar o caso de  $\psi$  independente da posição, tal que:  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ . A equação de Dirac toma a forma

$$i\frac{\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial \psi}{\partial t} = mc\psi \quad (39)$$

ou

$$i\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{pmatrix} = mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (40)$$

da qual obtemos

$$i\hbar\frac{\partial \varphi}{\partial t} = mc^2\varphi \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0)e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}, \quad (41)$$

$$-i\hbar\frac{\partial \chi}{\partial t} = mc^2\chi \Rightarrow \chi(t) = \chi(0)e^{\frac{imc^2t}{\hbar}}. \quad (42)$$

Sabendo que  $mc^2$  é a energia de repouso da partícula, vemos que  $\varphi$  varia com  $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ , enquanto  $\chi$  varia com  $e^{\frac{iEt}{\hbar}}$ . Isso indicaria uma energia negativa para  $\chi$ , mas a interpretação correta é de que  $\varphi$  representa a partícula, e  $\chi$ , a sua antipartícula, ambas com energia positiva.

Temos, então, à parte fatores de normalização,

$$\psi_1 = e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \psi_2 = e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\psi_3 = e^{\frac{imc^2t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \psi_4 = e^{\frac{imc^2t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora o caso em que  $\psi$  depende da posição. Suponhamos uma solução de onda plana:

$$\psi(\vec{r}, t) = a e^{\frac{-i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} u(E, \vec{p}). \quad (43)$$

Na notação de quadrivetores, sendo  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  e  $p^\mu = (\frac{E}{c}, px, py, pz)$ , temos

$$p \cdot x = p^\mu x_\mu = p^0 x_0 + p^i x_i = p^0 x^0 - p^i x^i = \frac{E}{c} \cdot ct - \vec{p} \cdot \vec{r} = Et - \vec{p} \cdot \vec{r}, \quad (44)$$

de forma que

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(x) = a e^{\frac{-i}{\hbar} x \cdot p} u(p). \quad (45)$$

Na equação de Dirac (34), temos

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc) u(p) a e^{\frac{-i x \cdot p}{\hbar}} = 0, \quad (46)$$

da qual obtemos a equação de Dirac no espaço dos momentos,

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc) u(p) = 0. \quad (47)$$

Façamos agora a substituição das matrizes de Dirac na equação matricial acima. Temos

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \vec{p} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -\frac{E}{c} \end{pmatrix} \quad (48)$$

e

$$mc I = \begin{pmatrix} mc & 0 \\ 0 & mc \end{pmatrix}, \quad (49)$$

tal que a equação de Dirac se torna

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

a partir da qual obtemos o sistema

$$\begin{cases} (\frac{E}{c} - mc) u_1 - (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_2 = 0 \\ (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_1 - (\frac{E}{c} + mc) u_2 = 0 \end{cases}. \quad (51)$$

Resolvendo o sistema, substituímos

$$u_2 = \frac{c}{E + mc^2} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_1 \quad (52)$$

na primeira equação para obtermos

$$u_1 = \frac{c^2}{E^2 - m^2 c^4} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 u_1 \quad (53)$$

Sendo

$$\sigma_i \sigma_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, & i \neq j \end{cases}, \quad (54)$$

podemos escrever  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ . Desta forma, escrevemos

$$(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = p_i p_j [\delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k] = |\vec{p}|^2 + i \varepsilon_{ijk} p_i p_j \sigma_k. \quad (55)$$

Como  $p_i$  comuta com  $p_j$ , temos que o segundo termo é nulo e que  $(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{p}|^2$ . Então:

$$u_1 = \frac{|\vec{p}|^2 c^2}{E^2 - m^2 c^4} u_1, \quad (56)$$

o que se mostra consistente com a equação para a energia da partícula livre relativística,  $E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$ . Voltando em (52), usando

$$\vec{p} \cdot \vec{\sigma} = p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$= \begin{pmatrix} p_z & p_x - i p_y \\ p_x + i p_y & -p_z \end{pmatrix}. \quad (58)$$

obtemos

$$u_2 = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z & p_x - i p_y \\ p_x + i p_y & -p_z \end{pmatrix} u_1. \quad (59)$$

Por outro lado, temos também:

$$u_1 = \frac{c}{E - mc^2} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_2 = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z & p_x - i p_y \\ p_x + i p_y & -p_z \end{pmatrix} u_2. \quad (60)$$

A partir das relações obtidas entre os espinores de duas componentes, consideramos quatro situações, abaixo exibidas:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + i p_y \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - i p_y \\ -p_z \end{pmatrix}, \quad (62)$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + i p_y \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \quad (64)$$

A equação da energia relativística nos fornece duas soluções:

$$E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2}. \quad (65)$$

Nas situações acima, as duas primeiras equações exigem  $E > 0$ , pois, em caso de  $|\vec{p}|^2 = 0$ , teremos  $E = \pm m^2 c^2$ , de forma que a solução negativa nos levaria a um denominador nulo. As duas últimas equações, por outro lado, exigem  $E < 0$ , pelo mesmo motivo. As duas primeiras soluções são de partículas com spin  $\pm \frac{1}{2}$ . As duas últimas são soluções de antipartículas com spin  $\pm \frac{1}{2}$ .

## 3 Mecânica Quântica Supersimétrica

A partir do momento em que a comunidade científica voltou sua atenção para a Mecânica Quântica supersimétrica, ficou evidente que este campo de estudos era interessante por si mesmo. Além de servir como um modelo para testar métodos de teorias de campos, constatou-se que a MQ SUSI traz novas luzes sobre o método de fatoração de Infeld e Hull, que foi a primeira forma de categorizar os problemas de potenciais solucionáveis analiticamente. Para os potenciais não exatamente solucionáveis, a MQ SUSI permite a obtenção de novos e poderosos métodos de aproximação.

Uma questão de interesse na mecânica quântica é o método da fatoração para se obter soluções, no qual a Hamiltoniana pode ser reescrita como um produto de dois fatores, usualmente chamados de operadores de criação e aniquilação (ou elevação e abaixamento) (JUNKER; ROY, 1998). Desta forma, o método evitaria a necessidade de solução direta da equação de Schroedinger, de segunda ordem, e levaria a uma equação diferencial de primeira ordem. A MQ SUSI está intimamente relacionada ao método de fatoração. Na verdade, trata-se de técnicas equivalentes no processo de gerar novos potenciais solucionáveis a partir de um inicial. O exemplo clássico do método da fatoração é o do oscilador harmônico quântico, cuja solução foi descrita no capítulo anterior, no qual os operadores de posição e de momento são escritos como combinação linear de novos operadores, em função dos quais a Hamiltoniana apresenta uma forma muito simples. Tais operadores apresentam as propriedades muito peculiares de nos levarem a estados com energias imediatamente superiores ou inferiores no espectro e, por isso, são chamados de operadores de criação e aniquilação, respectivamente.

Schroedinger introduziu o método de fatoração pela primeira vez para resolver o problema do átomo de hidrogênio algebricamente. A generalização desse método foi realizada posteriormente por Infeld e Hull, resultando em seis formas de fatoração. Vale ressaltar que os métodos de MQ SUSI e de fatoração resultam da ideia de Ricatti, que é usar a equivalência entre a solução da equação de Ricatti e uma associada equação diferencial linear de ordem 2. Neste trabalho, será considerado um método variacional que utiliza a hierarquia de Hamiltonianos relacionados por MQ SUSI e fatoração.

### 3.1 Fatoração Geral de um Hamiltoniano

A MQ SUSI é introduzida através da fatoração geral de um Hamiltoniano. Considerando um Hamiltoniano quântico de uma única partícula,

$$H \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x),$$

podemos considerar que, a princípio, todos os estados ligados e as propriedades de espalhamento podem ser calculados.

Partimos de uma função de onda no estado fundamental,  $\psi_0(x)$ , que não possui nós e tende a zero em  $x \rightarrow \pm\infty$ . Uma vez que se conheça a função de onda do estado fundamental, então se conhece o potencial (a menos de uma constante). Podemos também escolher a energia do estado fundamental,  $E_0^1$ , de  $H_1$  como zero. Assim, a equação de Schroedinger independente do tempo para a função de onda do estado fundamental  $\psi_0(x)$  é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_0}{dx^2} + V_1(x)\psi_0(x) = 0, \quad (66)$$

de forma que

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}. \quad (67)$$

A equação acima permite a determinação do potencial  $V_1(x)$  uma vez que se tenha o conhecimento da função de onda no estado fundamental do sistema.

Para se fatorar o Hamiltoniano, a exemplo do problema do oscilador harmônico, escreve-se

$$H_1 = A^\dagger A \quad (68)$$

e procura-se  $W(x)$ , tal que

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x). \quad (69)$$

A partir dessas definições, pode-se determinar  $V_1(x)$  também por meio da chamada equação de Riccati,

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (70)$$

Com a equação de Schroedinger independente do tempo para o estado fundamental,  $H_1\psi_0 = A^\dagger A\psi_0 = 0$ ,  $W(x)$ , o chamado o superpotencial na MQ SUSI pode ser determinado:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}. \quad (71)$$

O próximo passo para a construção da supersimetria é a definição do Hamiltoniano parceiro  $H_2 = AA^\dagger$ , obtido pela inversão na ordem do produto dos operadores  $A$  e  $A^\dagger$ . Após alguma álgebra, concluímos que a  $H_2$  corresponde a um novo potencial  $V_2(x)$ ,

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \quad (72)$$

com

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (73)$$

$V_1(x)$  e  $V_2(x)$  são conhecidos como potenciais parceiros supersimétricos.

É fácil mostrar que as autoenergias, as funções de onda e as matrizes  $S$  de  $H_1$  e  $H_2$  estão relacionados (SUKUMAR, 1985). Os autovalores de  $H_1$  e  $H_2$  são definidos não negativos ( $E_n^{(1,2)} \geq 0$ ). Assim, com  $n > 0$ , a equação de Schroedinger para  $H_1$  é escrita

$$H_1 \psi_n^{(1)} = A^\dagger A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}, \quad (74)$$

o que implica

$$H_2 \left( A \psi_n^{(1)} \right) = A A^\dagger A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \left( A \psi_n^{(1)} \right). \quad (75)$$

Analogamente, a equação de Schrodinger para  $H_2$  é dada por

$$H_2 \psi_n^{(2)} = A A^\dagger \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \psi_n^{(2)}, \quad (76)$$

tal que

$$H_1 \left( A^\dagger \psi_n^{(2)} \right) = A^\dagger A A^\dagger \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \left( A^\dagger \psi_n^{(2)} \right). \quad (77)$$

A partir do fato de que  $E_0^{(1)} = 0$  e das equações (75) e (77), verifica-se que os autovalores e as autofunções dos dois Hamiltonianos  $H_1$  e  $H_2$  se relacionam da seguinte maneira:

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0, \quad (78)$$

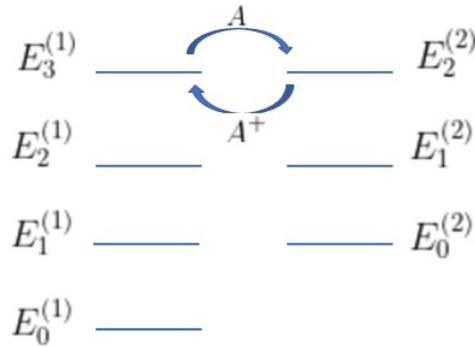
$$\psi_n^{(2)} = \left[ E_{n+1}^{(1)} \right]^{(-\frac{1}{2})} A \psi_{n+1}^{(1)}, \quad (79)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = \left[ E_n^{(2)} \right]^{(-\frac{1}{2})} A^\dagger \psi_n^{(2)}, \quad (80)$$

com ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

As autofunções à esquerda das eqs. (79) e (80) são normalizadas se as que estão à direita estão também normalizadas. Vemos que o operador  $A$  ( $A^\dagger$ ) converte uma autofunção de  $H_1$  ( $H_2$ ) em uma autofunção de  $H_2$  ( $H_1$ ) de mesma energia, e destrói (cria) um nó nas funções próprias em que atuam. Como a função de onda do estado fundamental de  $H_1$  é aniquilada pelo operador  $A$ , esse estado não possui um parceiro SUSI. Desta forma, conhecendo-se todas as autofunções de  $H_1$ , podem-se obter as funções próprias de  $H_2$ , com o uso do operador  $A$ . Por outro lado, usando  $A^\dagger$ , podemos reconstruir todas as funções próprias de  $H_1$  daquelas de  $H_2$ , exceto para o estado fundamental. Isto é ilustrado na Figura (3), na qual são apresentados os níveis de energia de dois potenciais parceiros supersimétricos e são ilustradas as ações dos operadores  $A$  e  $A^\dagger$ . Os níveis de energia são iguais, exceto pelo fato que  $V_1$  tem um estado extra com energia zero.

Figura 3 – Níveis de Energias de dois Potencias Parceiros Supersimétricos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.2 Hierarquia de Hamiltonianas

Mostramos na seção anterior que, de posse do estado fundamental de uma Hamiltoniana  $H_1$ , determina-se, por meio da equação (71), o superpotencial (que aqui designaremos como  $W_1(x)$ ). A partir do superpotencial, determinam-se os operadores  $A_1$  e  $A_1^\dagger$ , que possibilitarão a fatoração da Hamiltoniana  $H_1$ . Consideremos agora o Hamiltoniano parceiro  $H_2$ . Seu estado fundamental pode ser obtido da aplicação do operador  $A_1$  no primeiro estado excitado de  $H_1$ . De maneira análoga ao que foi realizado com  $H_1$ , podemos usar o estado fundamental de  $H_2$  para a determinação de um novo superpotencial  $W_2$  e, conseqüentemente, de uma nova Hamiltoniana  $H_3$ , parceira de  $H_2$ . O processo pode, então, ser repetido para a obtenção de novas Hamiltonianas,  $H_4, \dots, H_n$ .

Considerando-se que a Hamiltoniana original  $H_1$  possui estados ligados, cada nova Hamiltoniana obtida dentro dessa hierarquia possui um estado ligado a menos que a anterior. O processo se encerra quando os estados ligados se extinguem. Assim, se temos um problema de potencial exatamente solucionável para  $H_1$ , podem-se encontrar os autovalores e autovetores para a inteira hierarquia de Hamiltonianas criadas pelas repetidas refatorações. De maneira inversa, se os estados fundamentais para todas as Hamiltonianas do conjunto são conhecidos, podem-se reconstruir as soluções do problema original.

### 3.3 Espalhamento em Supersimetria

O estudo de espalhamentos desempenha um papel importante na modelagem atômica e subatômica. É por meio de experimentos de espalhamento que primeiro se entendeu a estrutura dos átomos. Em um experimento de espalhamento, um feixe de partículas ou radiação com intensidade e direção conhecidas é jogado contra uma estrutura que se deseja investigar. O feixe defletido é detectado nos diferentes ângulos e intensidades. A partir deste resultado, cria-se um modelo de interação ou determina-se uma estrutura.

Aqui estudaremos, do ponto de vista de MQ SUSI, o espalhamento em uma dimensão,

no qual as grandezas de interesse são as amplitudes de transmissão e reflexão. As observações devem ser realizadas muito distante das regiões de interação:  $x \rightarrow -\infty$  e  $x \rightarrow +\infty$ . Para essas regiões, denotaremos os potenciais como  $V_-$  e  $V_+$ . Partículas incidentes são descritas pela onda plana  $e^{ikx}$ . Em  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\psi_{-\infty}(x,e) \sim e^{ikx} + r(k)e^{-ikx}, \quad (81)$$

em que  $r(k)e^{-ikx}$  representa a parte refletida. Em  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\psi_{+\infty}(x,e) \sim t(k')e^{ik'x}, \quad (82)$$

na qual  $t(k')e^{ik'x}$  representa a parte transmitida. Nas expressões acima,  $k$  e  $k'$  são momentos assintóticos da partícula,  $r(k)$  e  $t(k)$  são as chamadas amplitudes de reflexão e transmissão, respectivamente, ao passo que  $R = |r(k)|^2$  e  $T = |t(k)|^2$  são os coeficientes de reflexão e transmissão. Em espalhamentos elásticos, temos a conservação da energia expressa por

$$E = k^2 + V_{-\infty} = k'^2 + V_{+\infty}. \quad (83)$$

Em mecânica quântica supersimétrica, temos os potenciais parceiros

$$V_1 = W^2 - W' \quad (84)$$

e

$$V_2 = W^2 + W' \quad (85)$$

Além disso, como os potenciais devem ser finitos em  $\pm\infty$ , devemos ter

$$\frac{dW}{dx} \Big|_{\pm\infty} = 0, \quad (86)$$

de forma que

$$V_{1+} = V_{2+} = W_+^2 \quad \text{e} \quad V_{1-} = V_{2-} = W_-^2. \quad (87)$$

Para o potencial  $V_1$ , temos

$$\psi_-^{(1)} \sim e^{ikx} + r_1(k)e^{-ikx} \quad \text{e} \quad \psi_+^{(1)} = t_1(k')e^{ik'x} \quad (88)$$

Para o potencial  $V_2$ , por sua vez, escrevemos

$$\psi_-^{(2)} \sim e^{ikx} + r_2(k)e^{-ikx} \quad \text{e} \quad \psi_+^{(2)} = t_2(k')e^{ik'x}. \quad (89)$$

Importante observar nas equações acima que, como  $V_{1+} = V_{2+}$  e  $V_{1-} = V_{2-}$ , os momentos assintóticos para os potenciais  $V_1$  e  $V_2$  são iguais:

$$k = \sqrt{E - (W_-)^2} \quad \text{e} \quad k' = \sqrt{E - (W_+)^2}. \quad (90)$$

Os autoestados dos Hamiltonianos parceiros, como já vimos, se relacionam da seguinte forma:

$$A\psi^{(1)} = N_1\psi^{(2)} \Rightarrow \left(\frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi^{(1)} = N_1\psi^{(2)}, \quad (91)$$

$$A^+\psi^{(2)} = N_2\psi^{(1)} \Rightarrow \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi^{(2)} = N_2\psi^{(1)}, \quad (92)$$

com  $N_1$  e  $N_2$  constantes. Quando usamos tais relações nas formas assintóticas, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + W_-\right)\left(e^{ikx} + r_1 e^{-ikx}\right) &= N_1\left(e^{ikx} + r_2 e^{-ikx}\right) \\ \Rightarrow (ik + W_-)e^{ikx} + r_1(-ik + W_-)e^{-ikx} &= N_1\left(e^{ikx} + r_2 e^{-ikx}\right) \end{aligned} \quad (93)$$

e

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx} + W_-\right)\left(e^{ikx} + r_2 e^{-ikx}\right) &= N_2\left(e^{ikx} + r_1 e^{-ikx}\right) \\ \Rightarrow (-ik + W_-)e^{ikx} + r_2(ik + W_-)e^{-ikx} &= N_2\left(e^{ikx} + r_1 e^{-ikx}\right). \end{aligned} \quad (94)$$

Da equação (93), obtemos

$$\begin{aligned} N_1 &= ik + W_- \quad \text{e} \quad r_1(-ik + W_-) = N_1 r_2 \\ \Rightarrow r_1(-ik + W_-) &= (ik + W_-)r_2 \\ \Rightarrow r_1 &= \frac{(ik + W_-)}{(-ik + W_-)} r_2. \end{aligned} \quad (95)$$

Utilizando procedimento idêntico, podemos obter uma relação entre  $t_1$  e  $t_2$ , se utilizarmos a região  $x \rightarrow \infty$ :

$$t_1 = \frac{(W_+ - ik')}{(W_- - ik)} t_2. \quad (96)$$

Vemos facilmente que  $|r_1|^2 = |r_2|^2$ . O mesmo ocorre para  $|t_1|^2$  e  $|t_2|^2$ , pois  $W_+^2 + k'^2 = W_-^2 + k^2 = E$ . Observa-se, além disso, que  $r_1$  e  $r_2$  e também  $t_1$  e  $t_2$  apresentam os mesmos polos, à exceção de  $k = -iW_-$ , que é polo apenas de  $r_1$  e  $t_1$  e que corresponde à energia de ponto zero de  $H_1$  (se  $W_- < 0$ ).

Pelo fato de a probabilidade de reflexão ser a mesma para os potenciais  $V_1$  e  $V_2$ , temos uma situação interessante. Se um dos potenciais é constante, então o outro obrigatoriamente deverá transmitir o feixe incidente integralmente, ou seja, será de reflexão zero. Por exemplo, consideremos o superpotencial

$$W(x) = A \tanh \alpha x, \quad (97)$$

tal que

$$W^2 = A^2 \tanh^2 \alpha x \quad (98)$$

e

$$W' = \alpha A \operatorname{sech}^2 \alpha x. \quad (99)$$

Usando

$$V_1 = W^2 - W', \quad (100)$$

obtemos

$$\begin{aligned} V_1 &= A^2 \tanh^2 \alpha x - \alpha A \operatorname{sech}^2 \alpha x, \\ &= A^2 (1 - \operatorname{sech}^2 \alpha x) - \alpha A \operatorname{sech}^2 \alpha x, \\ &= A^2 - A(A + 1) \operatorname{sech}^2 \alpha x. \end{aligned} \quad (101)$$

Por outro lado,

$$V_2 = W^2 + W', \quad (102)$$

tal que

$$V_2 = A^2 - A(A - \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x. \quad (103)$$

Se  $A = \alpha$ , temos  $V_2 = A^2$ , que é um potencial constante. Consequentemente, de forma surpreendente, o potencial  $V_1 = A^2(1 - 2\operatorname{sech}^2 \alpha x)$  é um potencial com transmissão integral. Em relação a este resultado, faz-se necessária uma observação. Se reinserirmos o fator  $\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}$  na definição dos potenciais, teremos  $A = \frac{\alpha \hbar}{\sqrt{2m}}$  e

$$V_1 = \frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m} [1 - 2\operatorname{sech}^2 \alpha x]. \quad (104)$$

Tal dependência em  $\hbar$  é importante para a característica de não reflexão.

### 3.4 Potenciais Invariantes de Forma

Há uma classe de superpotenciais,  $W(x, a)$ , para os quais os potenciais parceiros,  $V_1(x, a)$  e  $V_2(x, a)$ , obedecem a uma restrição chamada de invariância de forma. Para esta classe, não é necessário conhecer o espectro de uma Hamiltoniana para se determinar o da outra. Consideremos que os potenciais parceiros obedecem à relação,

$$V_2(x, a_0) = V_1(x, a_1) + R(a_0), \quad (105)$$

sendo  $a_0$  um conjunto de parâmetros,  $a_1$  uma função de  $a_0$  ( $a_1 = f(a_0)$ ) e  $R(a_0)$  independente de  $x$ . Nestas condições, dizemos que  $V_1(x, a_0)$  e  $V_2(x, a_0)$  são potenciais invariantes de forma (PIFs), pois possuem a mesma dependência em  $x$ , apesar de diferirem na dependência nos parâmetros. Usando a condição de integrabilidade e a hierarquia dos Hamiltonianos, podemos obter os autovalores e autofunções de quaisquer PIFs para a SUSI não quebrada.

Em termos dos Hamiltonianos, podemos escrever

$$H_2(x, a_0) = H_1(x, a_1) + R(a_0). \quad (106)$$

Por outro lado, definimos  $g(a_i)$ , tal que

$$H_2(x, a_0) + g(a_0) = H_1(x, a_1) + g(a_1), \quad (107)$$

de forma que

$$R(a_0) = g(a_1) - g(a_0). \quad (108)$$

Se aplicarmos a equação (106) no autoestado de  $H_1(x, a_1)$ ,  $\psi_n^{(1)}(x, a_1)$ , obtemos

$$\begin{aligned} H_2(x, a_0)\psi_n^{(1)}(x, a_1) &= [H_1(x, a_1) + R(a_0)]\psi_n^{(1)}(x, a_1) \\ &= [E_n^{(1)} + R(a_0)]\psi_n^{(1)}(x, a_1). \end{aligned} \quad (109)$$

Assim,  $\psi_n^{(1)}(x, a_1)$  é também autoestado de  $H_2(x, a_0)$  e, para todo  $x$ , temos

$$\begin{aligned} \psi_n^{(2)}(x, a_0) &= \psi_n^{(1)}(x, a_1), \\ E_n^{(2)}(a_0) &= E_n^{(1)}(a_1) + g(a_1) - g(a_0). \end{aligned} \quad (110)$$

Consideremos, então, a supersimetria não quebrada, tal que  $E_0^{(1)}(a_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

e

$$\psi_0^{(1)}(x, a_i) = N \exp \left\{ - \int_{x_0}^x W(y, a_i) dy \right\} \quad (111)$$

é normalizável. Desta forma, temos ainda as relações entre autoenergias e autoestados devido à supersimetria,

$$\begin{aligned} E_n^{(2)}(a_i) &= E_{n+1}^{(1)}(a_i), \\ \psi_n^{(2)}(x, a_i) &= [E_{n+1}^{(1)}(a_i)]^{-1/2} A \psi_{n+1}^{(1)}(x, a_i), \\ \psi_{n+1}^{(1)}(x, a_i) &= [E_n^{(2)}(a_i)]^{-1/2} A^\dagger \psi_n^{(2)}(x, a_i). \end{aligned} \quad (112)$$

A fim de se construírem todos os estados e autoenergias, devemos intercalar o uso das relações de invariância de forma (110) e de supersimetria (112).

Tratemos primeiro da obtenção dos níveis de energia. Partimos do estado fundamental do Hamiltoniano  $H_1$ .

$$E_0^{(1)}(a_1) = 0, \quad (113)$$

$$\text{IF} \rightarrow E_0^{(2)}(a_0) = g(a_1) - g(a_0), \quad (114)$$

$$\text{SUSI} \rightarrow E_1^{(1)}(a_0) = E_0^{(2)}(a_0) = g(a_1) - g(a_0), \quad (115)$$

$$\text{IF} \rightarrow E_1^{(2)}(a_0) = E_1^{(1)}(a_1) + g(a_1) - g(a_0), \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \text{SUSI} \rightarrow E_2^{(1)}(a_0) &= E_1^{(2)}(a_0) = E_1^{(1)}(a_1) + g(a_1) - g(a_0) \\ &= g(a_2) - g(a_1) + g(a_1) - g(a_0) = g(a_2) - g(a_0). \end{aligned} \quad (117)$$

Repetindo-se seguidamente o processo, obtém-se

$$E_n^{(1)}(a_0) = g(a_n) - g(a_0). \quad (118)$$

É importante notar que  $a_n$  se relaciona com  $a_{n-1}$  da mesma forma que  $a_1$  se relaciona com  $a_0$ :  $a_1 = f(a_0)$  e  $a_n = f(a_{n-1})$ .

A fim de se obterem os autoestados, iniciamos pelo estado fundamental do Hamiltoniano  $H_1$ , que pode ser obtido a partir do superpotencial:

$$\psi_0^{(1)}(x, a_i) \sim e^{-\int_{x_0}^x W(x, a_i) dx}. \quad (119)$$

Como exemplo, façamos a intercalação das relações de supersimetria e invariância de forma para a obtenção do autoestado de  $H_1$ ,  $\psi_2^{(1)}(x, a_0)$ :

$$\text{SUSI} \rightarrow \psi_2^{(1)}(x, a_0) \sim A^\dagger(x, a_0)\psi_1^{(2)}(x, a_0), \quad (120)$$

$$\text{IF} \rightarrow \sim A^\dagger(x, a_0)\psi_1^{(1)}(x, a_1), \quad (121)$$

$$\text{SUSI} \rightarrow \sim A^\dagger(x, a_0)A^\dagger(x, a_1)\psi_0^{(2)}(x, a_1), \quad (122)$$

$$\text{IF} \rightarrow \sim A^\dagger(x, a_0)A^\dagger(x, a_1)\psi_0^{(1)}(x, a_2) \sim A^\dagger(x, a_0)A^\dagger(x, a_1)e^{-\int_{x_0}^x W(x, a_2) dx}. \quad (123)$$

O procedimento acima utilizado pode ser aplicado para a obtenção de todos os autoestados de  $H_1$  e  $H_2$ . É importante observar que podemos construir diversos pares de Hamiltonianos,  $H_1(x, a_i)$  e  $H_2(x, a_i)$ , relacionados por supersimetria e invariância de forma.

O problema geral de potenciais invariantes de forma ainda não foi resolvido. Contudo, eles se concentram em duas classes. A primeira classe, à qual nos restringiremos neste trabalho, apresenta parâmetros que se relacionam por meio de translação:  $a_1 = a_0 + \alpha$ . É notável que todos os potenciais analiticamente solucionáveis bem conhecidos encontrados nos livros de Mecânica Quântica não relativística pertencem a essa classe. Na segunda classe, os parâmetros apresentam uma relação de escala:  $a_1 = qa_0$ .

### 3.4.1 Exemplo de Invariância de Forma - O Potencial de Pöschl-Teller

Podemos utilizar o potencial de Pöschl-Teller para mostrar como a invariância de forma leva à solução exata. Considerando o superpotencial  $W(x) = -b \cot x$ , com  $b > 0$  e domínio  $(0, \pi)$ , os potenciais parceiros supersimétricos são

$$V_1(x, b) = W^2(x) - \frac{dW}{dx} = b(b-1)\text{cosec}^2 x - b \quad (124)$$

e

$$V_2(x, b) = W^2(x) + \frac{dW}{dx} = b(b+1)\text{cosec}^2 x - b, \quad (125)$$

em que, por simplicidade, estamos usando  $\hbar = 2m = 1$ .

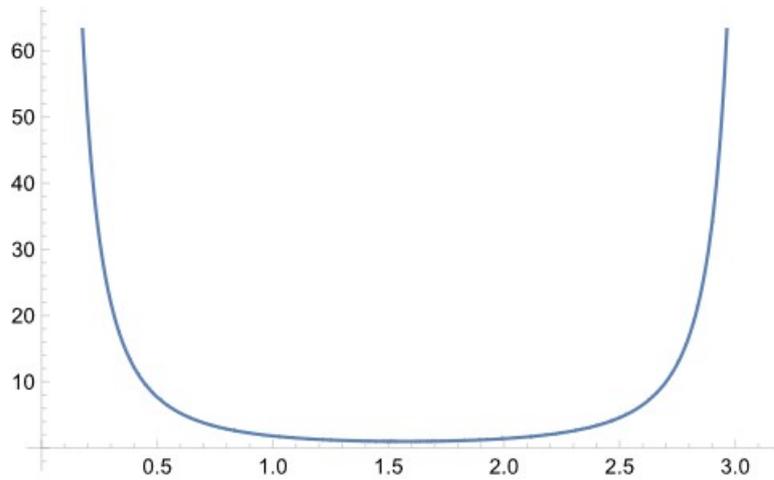
Notemos que o potencial  $V_2(x,b)$ , pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} V_2(x,b) &= (b+1)[(b+1)-1]\operatorname{cosec}^2x - (b+1)^2 + (b+1)^2 - b^2 \\ &= V_1(x,b+1) + (b+1)^2 - b^2. \end{aligned} \quad (126)$$

Assim, os potenciais  $V_1(x,b)$  e  $V_2(x,b)$  são invariantes de forma, sendo  $a_0 = b$  e  $a_1 = a_0 + 1 = b + 1$ , com  $g(b) = b^2$ .

Um caso especial do potencial de Pöschl-Teller muito interessante ocorre quando escolhemos  $b = 1$ . Quando substituimos  $b = 1$ , obtemos  $V_2(x,1) = 2\operatorname{cosec}^2x - 1$  e  $V_1(x,1) = -1$ , que representa um poço de potencial infinitamente profundo na região  $0 < x < \pi$ . O estado fundamental  $H_1(x,1)$  é dado por  $\psi_0^{(1)}(x,1) \sim e^{-\int W(x,1)dx} \sim e^{\int \cot x dx} \sim \operatorname{sen} x$ , com autoenergia correspondente 0. Usando-se as relações de invariância de forma e de supersimetria determinam-se os estados excitados. A Figura 4 apresenta o gráfico do potencial  $V_2(x,b)$  para este caso especial.

Figura 4 – Potencial  $V_2(x,1) = 2\operatorname{cosec}^2x - 1$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.4.2 Outros Exemplos de Potenciais Invariantes de Forma com Parâmetros Relacionados por Translação

Abaixo são listados potenciais invariantes de forma cujos parâmetros se relacionam por translação ( $a_1 = a_0 + \beta$ ).

- Potencial Oscilador transladado:

$$W(x) = \frac{1}{2}\omega x - b$$

$$V_1(x,a_0) = \frac{1}{4}\omega^2\left(x - \frac{2b}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$a_0 = \omega \quad \text{e} \quad a_1 = \omega$$

$$\text{Autovalores: } E_n^{(1)} = n\omega$$

$$\text{Variável: } y = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(x - \frac{2b}{\omega}\right)$$

Funções de Onda:  $\psi_n(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) H_n(y)$

- Potencial Oscilador 3-D:

$$W(x) = \frac{1}{2}\omega r - \frac{(l+1)}{r}$$

$$V_1(x, a_0) = \frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} - \left(l + \frac{3}{2}\right)\omega$$

$$a_0 = l \quad \text{e} \quad a_1 = l + 1$$

$$\text{Autovalores: } E_n^{(1)} = 2n\omega$$

$$\text{Variável: } y = \frac{1}{2}\omega r^2$$

$$\text{Função de Onda: } \psi_n(y) = y^{\frac{(l+1)}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) L_n^{\frac{(l+1)}{2}}(y)$$

- Potencial de Coulomb :

$$W(x) = \frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{(l+1)}{r}$$

$$V_1(x, a_0) = -\frac{e^2}{r} + l\frac{(l+1)}{r^2} + \frac{e^4}{4(l+1)^2}$$

$$a_0 = l \quad \text{e} \quad a_1 = l + 1$$

$$\text{Autovalores: } E_n^{(1)} = \frac{e^4}{4(l+1)^2} - \frac{e^4}{4(n+l+1)^2}$$

$$\text{Variável: } y = \frac{re^2}{(n+l+1)}$$

$$\text{Função de Onda: } \psi_n(y) = y^{l+1} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) L_n^{2l+1}(y)$$

- Potencial de Morse :

$$W(x) = A - B \exp(\alpha - x)$$

$$V_1(x, a_0) = A^2 + B^2 \exp(-2\alpha x) - 2B\left(A + \frac{\alpha}{2}\right) \exp(-\alpha x)$$

$$a_0 = A \quad \text{e} \quad a_1 = A - \alpha$$

$$\text{Autovalores: } E_n^{(1)} = A^2 - (A - n\alpha)^2$$

$$\text{Variável: } y = \frac{2B}{\alpha} e^{-\alpha x}, \quad s = \frac{A}{\alpha}$$

$$\text{Função de Onda: } \psi_n(y) = y^{s-n} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) L_n^{2s-2n}(y)$$

- Potencial Scarf II (hiperbólico):

$$W(x) = A \tanh \alpha x + B \operatorname{sech} \alpha x$$

$$V_1(x, a_0) = A^2 + (B^2 - A^2 - A\alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x + B(2A + \alpha) \operatorname{sech} \alpha x \tanh \alpha x$$

$$a_0 = A \quad \text{e} \quad a_1 = A - \alpha$$

$$\text{Autovalores: } E_n^{(1)} = A^2 - (A - n\alpha)^2$$

$$\text{Variável: } y = \sinh \alpha x, \quad s = \frac{A}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{B}{\alpha}$$

$$\text{Função de Onda: } \psi_n(y) = i^n (l + y^2)^{-\frac{s}{2}} e^{-\lambda \tan^{-1} y} \cdot P_n^{\left(\frac{i\lambda-s-1}{2}, \frac{i\lambda-s-1}{2}\right)}(iy)$$

- Potencial Rosen – Morse II (hiperbólico):

$$W(x) = A \tanh \alpha x + \frac{B}{A}, \quad (B < A^2)$$

$$V_1(x, a_0) = A^2 + \frac{B^2}{A^2} - A(A + \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x + 2B \tanh \alpha x$$

$$a_0 = A \quad \text{e} \quad a_1 = A - \alpha$$

$$\text{Autovalores: } E_n^{(1)} = A^2 - (A - n\alpha)^2 - \frac{B^2}{(A - n\alpha)^2} + \frac{B^2}{A^2}$$

$$\text{Variável: } y = \tanh \alpha x, \quad s = \frac{A}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{B}{\alpha^2}, \quad a = \frac{\lambda}{(s-n)}$$

$$\text{Função de Onda: } \psi_n(y) = (1 - y)^{\frac{s_1}{2}} (1 + y)^{\frac{s_2}{2}} \cdot P_n^{(s_1, s_2)}(y)$$

- Potencial Eckart:

$$W(x) = -A \coth \alpha x + \frac{B}{A}, \quad (B > A^2)$$

$$V_1(x, a_0) = A^2 + \frac{B^2}{A^2} - 2B \coth \alpha x + A(A - \alpha) \operatorname{cosech}^2 \alpha x$$

$$a_0 = A \quad \text{e} \quad a_1 = A + \alpha$$

$$\text{Autovalores: } E_n^{(1)} = A^2 - (A + n\alpha)^2 - \frac{B^2}{(A - n\alpha)^2} + \frac{B^2}{A^2}$$

$$\text{Variável: } y = \coth \alpha x, \quad s = \frac{A}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{B}{\alpha^2}, \quad a = \frac{\lambda}{(n+s)}$$

$$\text{Função de Onda: } \psi_n(y) = (y - 1)^{\frac{s_3}{2}} (y + 1)^{\frac{s_4}{2}} \cdot P_n^{(s_3, s_4)}(y)$$

- Potencial Scarf I (trigonométrico) :

$$W(x) = A \tan \alpha x - B \sec \alpha x, \quad \left(-\frac{1}{2}\pi \leq \alpha x \leq \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$V_1(x, a_0) = -A^2 + (A^2 + B^2 - A\alpha) \sec^2 \alpha x - B(2A - \alpha) \tan \alpha x \sec \alpha x$$

$$a_0 = A \quad \text{e} \quad a_1 = A + \alpha$$

$$\text{Autovalores: } E_n^{(1)} = (A + n\alpha)^2 - A^2$$

$$\text{Variável: } y = \sin \alpha x, \quad s = \frac{A}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{B}{\alpha}$$

$$\text{Função de Onda: } \psi_n(y) = (1 - y)^{\frac{(s-\lambda)}{2}} (y + 1)^{\frac{(s+\lambda)}{2}} \cdot P_n^{\left(\frac{s-\lambda-1}{2}, \frac{s+\lambda-1}{2}\right)}(y)$$

- Potencial Pöschl-Teller (hiperbólico):

$$W(x) = A \coth \alpha x - B \operatorname{cosech} \alpha x, \quad (A < B)$$

$$V_1(x, a_0) = A^2 + (A^2 + B^2 + A\alpha) \operatorname{cosech}^2 \alpha x - B(2A + \alpha) \coth \alpha x \operatorname{cosech} \alpha x$$

$$a_0 = A \quad \text{e} \quad a_1 = A - \alpha$$

$$\text{Autovalores: } E_n^{(1)} = A^2 - (A - n\alpha)^2$$

$$\text{Variável: } y = \cosh \alpha x, \quad s = \frac{A}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{B}{\alpha}$$

$$\text{Função de Onda: } \psi_n(y) = (y - 1)^{\frac{(\lambda-s)}{2}} (y + 1)^{-\frac{(s+\lambda)}{2}} \cdot P_n^{\left(\frac{\lambda-s-1}{2}, \frac{-\lambda-s-1}{2}\right)}(y)$$

- Potencial Rosen – Morse I (trigonométrico) :

$$W(x) = -A \cot \alpha x - \frac{B}{A}, \quad (0 \leq \alpha x \leq \pi)$$

$$V_1(x, a_0) = A(A - \alpha) \operatorname{cosec} 2\alpha x + 2B \cot \alpha x - A^2 + \frac{B^2}{A^2}$$

$$a_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_1 = A + \alpha$$

$$\text{Autovalores: } E_n^{(1)} = (A + n\alpha)^2 - A^2 - \frac{B^2}{(A+n\alpha)^2} + \frac{B^2}{A^2}$$

Variável:  $y = i \cot \alpha x$ ,  $s = \frac{A}{\alpha}$ ,  $\lambda = \frac{B}{\alpha^2}$ ,  $a = \frac{\lambda}{(s+n)}$

Função de Onda:  $\psi_n(y) = (y^2 - 1)^{-\frac{(s+n)}{2}} \exp(a\alpha x) \cdot P_n^{(-s-n+i\alpha, -s-n-i\alpha)}(y)$

Observa-se que as funções de onda para os potenciais oscilador trasladado, oscilador 3-D, Coulomb e Morse apresentam polinômios de Hermite e Laguerre, e são casos especiais da função hipergeométrica confluyente, enquanto que para os demais exemplos temos os polinômios de Jacobi, que são casos especiais da função hipergeométrica.

### 3.5 A Supersimetria e sua Quebra

Em mecânica quântica supersimétrica, os Hamiltonianos parceiros são dados por  $H_1 = A^\dagger A$  e  $H_2 = AA^\dagger$ , em que  $A^\dagger$  e  $A$  são conjugados hermiteanos. Esta estrutura garante que as autoenergias nunca serão negativas. Vejamos os valores esperados de  $H_1$  e  $H_2$ :

$$\begin{aligned} \langle \phi | H_1 | \phi \rangle &= \langle \phi | A^\dagger A | \phi \rangle = (\langle \phi | A^\dagger) (A | \phi \rangle) \\ &= \|A | \phi \rangle\|^2 \end{aligned} \quad (127)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \phi | H_2 | \phi \rangle &= \langle \phi | AA^\dagger | \phi \rangle = (\langle \phi | A) (A^\dagger | \phi \rangle) \\ &= \|A^\dagger | \phi \rangle\|^2. \end{aligned} \quad (128)$$

A fim de construirmos a álgebra da mecânica quântica supersimétrica, definamos os operadores

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (129)$$

de forma que

$$QQ^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q^\dagger Q = \begin{bmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (130)$$

A equação que caracteriza um sistema supersimétrico é

$$QQ = Q^\dagger Q^\dagger = 0. \quad (131)$$

O Hamiltoniano supersimétrico será, então, dado por

$$H_S = \{Q, Q^\dagger\} = QQ^\dagger + Q^\dagger Q = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \quad (132)$$

Um resultado importante, que se pode facilmente verificar, é que  $Q^2 = (Q^\dagger)^2 = 0$ . Além disso, é trivial checar que  $[Q, H_S] = [Q^\dagger, H_S] = 0$ . Quando um operador comuta com o

Hamiltoniano, isto indica a presença de uma simetria no sistema. Explicitamente, dada a equação de autovalor,

$$H_S|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (133)$$

temos, para  $Q$  e  $Q^\dagger$  comutantes com o Hamiltoniano,

$$H_S Q|\psi\rangle = Q H_S|\psi\rangle = E Q|\psi\rangle \quad (134)$$

e

$$H_S Q^\dagger|\psi\rangle = Q^\dagger H_S|\psi\rangle = E Q^\dagger|\psi\rangle. \quad (135)$$

Ou seja, a operação de  $Q$  ou  $Q^\dagger$  no estado não altera a sua energia. Tal simetria é a supersimetria e  $Q$  e  $Q^\dagger$  são os seus geradores. Por outro lado, a propriedade de que  $Q^2 = (Q^\dagger)^2 = 0$  implica que a ação duas vezes dos operadores em qualquer estado não gera nenhum estado novo. Isso se deve ao fato de os geradores de supersimetria serem operadores fermiônicos.

Consideremos agora os autoestados de  $H_1$  e  $H_2$ ,  $\psi_n^{(1)}(x)$  e  $\psi_{n-1}^{(2)}(x)$ , respectivamente, e definamos os estados

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \psi_n^{(1)}(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(2)}(x) \end{bmatrix}. \quad (136)$$

A atuação de  $H_S$  nestes dois estados nos fornece

$$\begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n^{(1)}(x) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \psi_n^{(1)}(x) \\ 0 \end{bmatrix} = E_n^{(1)} \begin{bmatrix} \psi_n^{(1)}(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (137)$$

e

$$\begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(2)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H_2 \psi_{n-1}^{(2)}(x) \end{bmatrix} = E_{n-1}^{(2)} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(2)}(x) \end{bmatrix}. \quad (138)$$

Contudo, sabemos que  $E_n^{(1)} = E_{n-1}^{(2)}$ . Assim,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  são autoestados degenerados de  $H_S$ . Além disso, esses estados se relacionam por meio dos geradores  $Q$  e  $Q^\dagger$ :

$$Q \begin{bmatrix} \psi_n^{(1)}(x) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n^{(1)}(x) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \psi_n^{(1)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(2)}(x) \end{bmatrix}, \quad (139)$$

$$Q^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(2)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(2)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\dagger \psi_{n-1}^{(2)}(x) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_n^{(1)}(x) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (140)$$

Como os operadores  $Q$  e  $Q^\dagger$  não alteram a energia do estado, essas transformações conectam dois estados com o mesmo autovalor de  $H_S$ . Assim, enquanto  $A$  e  $A^\dagger$  conectam autoestados de dois Hamiltonianos diferentes, os operadores  $Q$  e  $Q^\dagger$  transformam um autoestado de  $H_S$  em outro. Os operadores fermiônicos  $Q$  e  $Q^\dagger$ , sempre que atuam em estados bosônicos, os convertem em fermiônicos e vice-versa. Chamamos os estados do tipo  $\Psi_1$  de bosônicos e, os estados do tipo  $\Psi_2$ , de fermiônicos.

### 3.5.1 Quebra de supersimetria

Discutiremos agora sistemas em que a supersimetria é quebrada. Nos casos em que  $[Q, H_S] \neq 0$  ou  $[Q^\dagger, H_S] \neq 0$ , dizemos que a supersimetria é quebrada explicitamente. Contudo, mesmo que os geradores comutem com o Hamiltoniano, pode ocorrer o que chamamos de quebra espontânea de supersimetria (SUSI). Para que a supersimetria não seja espontaneamente quebrada, o estado fundamental do sistema (vácuo) deve ser único e invariante sob esta transformação de simetria.

Um operador unitário que gera a transformação SUSI tem a forma

$$e^{i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} Q^\dagger)}, \quad (141)$$

em que  $\epsilon$  é um parâmetro fermiônico e  $\bar{\epsilon}$  é o seu complexo conjugado. Assim, para que a SUSI não seja quebrada, dado um valor arbitrário de  $\epsilon$ , devemos ter

$$e^{i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} Q^\dagger)} |0\rangle = |0\rangle, \quad (142)$$

o que implica

$$Q|0\rangle = 0 \quad \text{e} \quad Q^\dagger|0\rangle = 0. \quad (143)$$

Por outro lado, se o valor esperado de  $H_S$  é zero (supersimetria não quebrada), temos

$$\begin{aligned} \langle 0|H_S|0\rangle &= \langle 0|(QQ^\dagger + Q^\dagger Q)|0\rangle \\ &= (\langle 0|Q)(Q^\dagger|0\rangle) + (\langle 0|Q^\dagger)(Q|0\rangle) = 0, \end{aligned} \quad (144)$$

o que só pode ocorrer se  $Q|0\rangle = Q^\dagger|0\rangle = 0$ .

A fim de entendermos as implicações para o estado fundamental da supersimetria não quebrada, consideremos que o vácuo seja dado por

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \quad (145)$$

tal que, para SUSI não quebrada, temos

$$\begin{bmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (146)$$

o que implica  $A^\dagger A \phi_1 = 0$  e  $AA^\dagger \phi_2 = 0$ . Temos, então, que

$$A\phi_1 = 0 \quad \text{e} \quad A^\dagger\phi_2 = 0. \quad (147)$$

Dado que (fazendo  $\hbar = 2m = 1$ )

$$A = \frac{d}{dx} + W(x) \quad \text{e} \quad A^\dagger = -\frac{d}{dx} + W(x), \quad (148)$$

temos, para  $\phi_1$ ,

$$\frac{d\phi_1}{\phi_1} = -W(x)dx \Rightarrow \phi_1 = N_1 e^{-\int W(x)dx}, \quad (149)$$

sendo  $N_1$  uma constante de normalização. Da mesma forma, obtemos

$$\phi_2 = N_2 e^{+\int W(x)dx}. \quad (150)$$

Tais relações mostram que  $\phi_1 \sim 1/\phi_2$ . Isso implica que apenas uma das duas funções é normalizável, pois, se  $\phi_1$  é normalizável,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_1 = 0$ , o que implica  $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_2 = \infty$ . O contrário funciona da mesma forma. A única maneira de termos um estado  $|0\rangle$  normalizável é fixando  $\phi_1$  ou  $\phi_2$  identicamente nulos. Adotamos, então,

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (151)$$

Sendo  $\phi_1$  autoestado de  $H_1 = A^\dagger A$  com autovalor zero, a chamaremos de  $\psi_0^{(1)}(x)$ , que será dada por

$$\psi_0^{(1)}(x) = N e^{-\int_{x_0}^x W(x')dx'}. \quad (152)$$

Como já observado,  $\psi_0^{(1)}(x)$  deve ser anular em  $x \rightarrow \pm\infty$ , a fim de que seja normalizável. Isto implica

$$\int_{x_0}^{\pm\infty} W(x')dx' = \infty. \quad (153)$$

Para isso, o superpotencial  $W(x)$  deve ser positivo para  $x \rightarrow \infty$  e negativo para  $x \rightarrow -\infty$ . Assim,  $W(x)$  deve ter um número ímpar de zeros no eixo real, tal que  $\psi_0^{(1)}(x)$  seja normalizável e para que exista um estado de energia nula para  $H_S$ . Uma função ímpar automaticamente satisfaz esta condição. Por outro lado, se  $W(x)$  possuir um número par de zeros (ou nenhum), a supersimetria é quebrada espontaneamente.

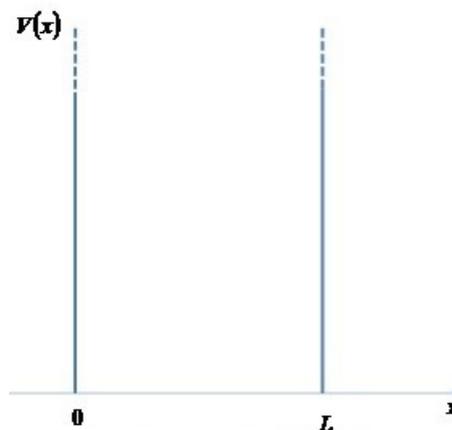
## 4 Poços Quânticos em uma e duas Dimensões

A solução da equação de Schroedinger permite o estudo de uma partícula confinada em uma determinada região do espaço, os chamados poços quânticos. Neste capítulo, serão estudados, do ponto de vista da MQ SUSI, o poço unidimensional infinito, o oscilador harmônico e o poço retangular infinito em duas dimensões.

### 4.1 Poço Unidimensional Infinito

Consideremos o poço unidimensional, tal que a energia potencial seja nula em  $0 < x < L$  e  $\infty$ , para  $x \leq 0$  ou  $x \geq L$ . Tal energia potencial define o chamado poço unidimensional infinito de largura  $L$ , representado na Figura (5).

Figura 5 – Poço unidimensional infinito de largura  $L$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos que as soluções do poço infinito estão confinadas no intervalo  $0 < x < L$ . Tomando a equação de Schroedinger no intervalo  $0 < x < L$ , para uma partícula de massa  $m$ , temos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \quad (154)$$

cujas soluções normalizadas, considerando as condições de contorno  $\psi(0) = \psi(L) = 0$  são dadas por

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(k_n x) = 0, \quad (155)$$

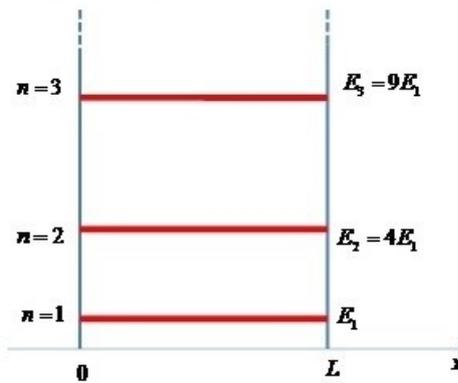
com  $k_n = \frac{(n+1)\pi}{L}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Observamos que os valores de  $k$  são um exemplo de número quântico, identificando as diferentes soluções do problema. Como consequência, a energia,

também quantizada, é dada por

$$E_n = \frac{(\hbar k_n)^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n+1)^2}{2mL^2}, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (156)$$

Temos um número infinito de níveis discretos de energia, não degenerados, pois existe apenas uma função de onda para cada valor de energia. A Figura (6) apresenta os três primeiros níveis de energia para o sistema.

Figura 6 – Três primeiros níveis de energia do poço de potencial infinito.



Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.1.1 Parceiro Supersimétrico do Poço Infinito

Consideremos agora o poço unidimensional infinito sob a perspectiva da MQ SUSI. Temos os Hamiltonianos

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (157)$$

e

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x). \quad (158)$$

Consideramos o potencial  $V_1(x)$  como o do poço infinito. Para que a supersimetria seja exata, o nível de energia do estado fundamental para o Hamiltoniano  $H_1$  deve ser nulo. Assim,  $V_1(x)$  será redefinido da seguinte forma:  $V_1(x) = V(x) - E_0$ . Assim, os níveis de energia para o sistema descrito por  $H_1$  serão dados por

$$E_n^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n(n+2)}{2mL^2}, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (159)$$

sem que sejam alteradas as autofunções correspondentes.

Seguimos, então o procedimento já anteriormente descrito. O superpotencial pode ser obtido por meio da equação de Riccati,

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}, \quad (160)$$

com

$$\psi_0^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right). \quad (161)$$

O superpotencial é, então, facilmente obtido, com a expressão

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{2}{L} \operatorname{cotg} \left( \frac{\pi x}{L} \right). \quad (162)$$

Por sua vez, o potencial parceiro,  $V_2(x)$ , é obtido a partir da equação

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x), \quad (163)$$

com o resultado

$$V_2(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left[ 2 \operatorname{coss}^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) - 1 \right]. \quad (164)$$

Trata-se de um potencial completamente diferente de  $V_1(x)$ , mas que, curiosamente, leva ao mesmo espectro que o seu parceiro supersimétrico (com exceção da energia  $E_0^{(1)}$ ), já que  $E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}$ . Além disso, as autofunções do sistema descrito por  $H_2$  podem ser obtidas facilmente a partir dos estados  $\psi_n^{(1)}(x)$ , por meio da aplicação do operador

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{d}{dx} - \frac{2}{L} \operatorname{cotg} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right], \quad (165)$$

já que  $\psi_n^{(2)} = [E_{n+1}^{(1)}]^{-1/2} A \psi_{n+1}^{(1)}$ . Os dois primeiros estados são exibidos abaixo:

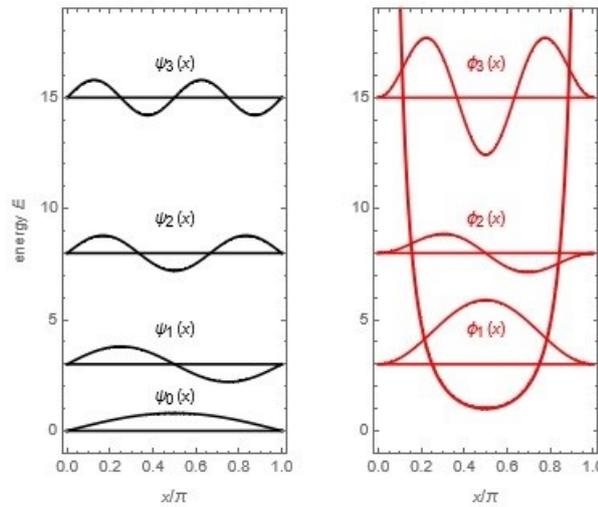
$$\psi_0^{(2)} = -2\sqrt{\frac{2}{3L}} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad (166)$$

e

$$\psi_1^{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{L} \right). \quad (167)$$

A Figura (7) exhibe os potenciais parceiros supersimétricos e com seus primeiros autoestados e correspondentes níveis de energia.

Figura 7 – Potenciais Parceiros e seus autoestados



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 4.2 Oscilador Harmônico Quântico Supersimétrico

Um problema um pouco mais elaborado e interessante é o do oscilador harmônico supersimétrico. Nesta seção, por conveniência, trabalharemos com operadores adimensionais, por meio das substituições,

$$H \rightarrow \hbar\omega H, \quad x \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}x \quad \text{e} \quad p \rightarrow \sqrt{2m\hbar\omega}p. \quad (168)$$

O oscilador harmônico convencional é aqui chamado de bosônico, o qual tem Hamiltoniano da forma

$$H_b = p^2 + \frac{1}{4}x^2; \quad p = -i\frac{d}{dx}, \quad (169)$$

em que a subtração de  $1/2$ , para ajustar a energia do estado fundamental em zero, será realizada por meio da introdução da parte fermiônica. O Hamiltoniano bosônico, então, é escrito como

$$H_b = a^\dagger a + \frac{1}{2}, \quad (170)$$

sendo  $a$  e  $a^\dagger$  os operadores de aniquilação e criação, respectivamente,

$$a = \left(\frac{x}{2} + ip\right) \quad \text{e} \quad a^\dagger = \left(\frac{x}{2} - ip\right), \quad (171)$$

que satisfazem as relações de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \text{e} \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (172)$$

A atuação do operador de aniquilação no estado fundamental nos fornece

$$a|0\rangle = 0 \rightarrow |0\rangle \sim e^{-x^2}, \quad (173)$$

com os demais autoestados sendo dados por

$$|n_b\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (174)$$

Introduzimos também os operadores fermiônicos  $\Psi$ , de aniquilação, e  $\Psi^\dagger$ , de criação, que obedecem às relações de anticomutação

$$\{\Psi^\dagger, \Psi\} = 1 \quad \text{e} \quad \{\Psi^\dagger, \Psi^\dagger\} = \{\Psi, \Psi\} = 0. \quad (175)$$

Os estados serão representados como vetores de  $\mathbb{R}^2$ , cujas componentes correspondem aos estados bosônico (primeiro elemento) e fermiônico (segundo elemento):

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_b \\ \phi_f \end{pmatrix}. \quad (176)$$

Nesta base, os operadores fermiônicos são dados por

$$\Psi = \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (177)$$

e

$$\Psi^\dagger = \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (178)$$

com  $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$  escrito em termos das matrizes de Pauli. É útil obter também a relação de comutação entre esses operadores, que é dada por

$$[\Psi, \Psi^\dagger] = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (179)$$

De maneira análoga ao bosônico, escrevemos o Hamiltoniano fermiônico,

$$H_f = \Psi^\dagger \Psi - \frac{1}{2}I, \quad (180)$$

tal que o Hamiltoniano SUSI, a soma dos dois, torna-se:

$$H_s = H_b I + H_f = a^\dagger a I + \Psi^\dagger \Psi, \quad (181)$$

em que  $I$  representa a matriz identidade  $2 \times 2$ . Os operadores de supersimetria (supercargas),  $Q$  e  $Q^\dagger$ , são definidos como produtos mistos de operadores de criação e aniquilação bosônicos e fermiônicos, como a seguir:

$$Q = a\Psi^\dagger \quad \text{e} \quad Q^\dagger = a^\dagger\Psi. \quad (182)$$

A definição acima das supercargas nos permite escrever o Hamiltoniano SUSI como

$$H_s = QQ^\dagger + Q^\dagger Q \equiv \left( -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{4} \right) I - \frac{1}{2} [\Psi, \Psi^\dagger]. \quad (183)$$

Como se pode facilmente verificar, o último termo da equação acima tem o efeito de cancelar a energia de ponto zero do primeiro elemento da diagonal principal de  $H_s$ , composta pelos Hamiltonianos parceiros  $H_1$  e  $H_2$ .

O estado do sistema pode ser representado no espaço de Fock pelo *ket*  $|n_b, n_f\rangle$ . Como os operadores de criação e aniquilação fermiônicos obedecem relações de anticomutação, o número fermiônico é zero ou um. Escolhe-se o estado fundamental de  $H_1$  de forma que este número seja zero. Se representarmos o operador do número fermiônico por  $N_f$ , podemos escrever

$$N_f = \frac{1}{2} \{I - [\Psi, \Psi^\dagger]\}, \quad (184)$$

cujos autovalores são 0 ou 1, conforme estabelecido pelo princípio da exclusão de Pauli. As energias dos estados fermiônicos (em unidades de  $\hbar\omega$ ) são dadas por

$$E_f = \left( n_f - \frac{1}{2} \right) = \pm \frac{1}{2}, \quad (185)$$

o que torna o espectro degenerado.

Os operadores de criação e aniquilação bosônicos e fermiônicos e as supercargas atuam no espaço de Fock da seguinte maneira:

$$a|n_b, n_f\rangle = |n_b - 1, n_f\rangle; \quad (186)$$

$$a^\dagger|n_b, n_f\rangle = |n_b + 1, n_f\rangle; \quad (187)$$

$$\Psi|n_b, n_f\rangle = |n_b, n_f - 1\rangle; \quad (188)$$

$$\Psi^\dagger|n_b, n_f\rangle = |n_b, n_f + 1\rangle; \quad (189)$$

$$Q^\dagger|n_b, n_f\rangle = |n_b + 1, n_f - 1\rangle; \quad (190)$$

e

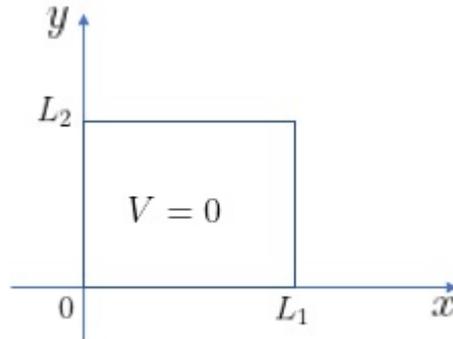
$$Q|n_b, n_f\rangle = |n_b - 1, n_f + 1\rangle. \quad (191)$$

Sendo assim, a transformação de um férmion em um bóson se dá pela atuação da supercarga  $Q^\dagger$ , ao passo que a supercarga  $Q$  transforma um bóson em um férmion.

### 4.3 Poço Retangular Infinito

Consideremos a extensão do poço infinito para duas dimensões, em que a região de energia potencial nula se restringe ao interior de um retângulo de lados  $L_1$  e  $L_2$ . A partícula de massa  $m$  e energia  $E$  encontra-se confinada no poço, esboçado na Figura 8. Temos:

Figura 8 – Poço Retangular 2D



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$V(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 < x < L_1 \text{ e } 0 < y < L_2 \\ \infty, & \text{para } x \leq 0, x \geq L_1, y \leq 0, y \geq L_2 \end{cases} \quad (192)$$

Em tal situação, em que  $V(x,y) = V_x(x) + V_y(y)$  e  $E = E_x + E_y$ , podemos fatorar a autofunção, de forma que  $\psi(x,y) = \psi_x(x)\psi_y(y)$ . A equação de Schroedinger independente do tempo em duas dimensões, escrita em coordenada retangulares, será, então, dada por

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) + V_x(x) + V_y(y) \right] \psi_x(x)\psi_y(y) = E\psi_x(x)\psi_y(y) \quad (193)$$

e pode ser submetida ao processo de separação de variáveis. Obtemos duas equações que são idênticas à do poço infinito unidimensional,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_x''(x)}{\psi_x(x)} = E_x; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_y''(y)}{\psi_y(y)} = E_y, \quad (194)$$

cujas soluções são

$$\begin{cases} \psi_{n_x}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n_x+1)\pi x}{L}; & \text{e } E_{n_x} = \frac{(n_x+1)^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \\ \psi_{n_y}(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n_y+1)\pi y}{L}; & \text{e } E_{n_y} = \frac{(n_y+1)^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \end{cases}, \quad (195)$$

em que, para simplificar, fizemos  $L = L_1 = L_2$ . Temos, então, as autofunções

$$\psi_{n_x n_y}(x, y) = \left( \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n_x + 1)\pi x}{L} \right) \left( \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n_y + 1)\pi y}{L} \right), \quad (196)$$

correspondendo aos níveis de energia

$$E_{n_x n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} [(n_x + 1)^2 + (n_y + 1)^2]. \quad (197)$$

Verificamos a existência de níveis de energia degenerados no sistema, já que  $E_{n_x n_y} = E_{n_y n_x}$ .

### 4.3.1 Poço Retangular 2D Supersimétrico

O estudo de problemas além de uma dimensão necessita extensões das definições até agora utilizadas. Primeiramente, o superpotencial será uma grandeza vetorial, obtida a partir do estado fundamental do Hamiltoniano  $H_1$  por meio da relação

$$\vec{W} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\psi_{00}^{(1)}(x, y)} \vec{\nabla} \psi_{00}^{(1)}(x, y). \quad (198)$$

Dado o estado fundamental do poço retangular (quadrado),

$$\psi_{00}^{(1)}(x, y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), \quad (199)$$

obtemos facilmente

$$\vec{W} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \left\{ \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \hat{i} + \cot\left(\frac{\pi y}{L}\right) \hat{j} \right\}. \quad (200)$$

Os operadores de criação e aniquilação são também estendidos para objetos vetoriais,

$$\vec{A} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \vec{\nabla} + \vec{W} \quad (201)$$

e

$$\vec{A}^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \vec{\nabla} + \vec{W}. \quad (202)$$

O potencial  $V_1(x, y)$  pode ser obtido por uma simples extensão do caso unidimensional,

$$V_1(x, y) = |\vec{W}|^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \vec{\nabla} \cdot \vec{W}, \quad (203)$$

de forma que  $V_1(x, y) = -\frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2}$ , que é exatamente o deslocamento no potencial necessário para que a energia do estado fundamental do sistema de Hamiltoniano  $H_1$  seja nula. Por sua vez, tal extensão para o potencial parceiro não se aplica. Para entendermos por quê, vejamos

primeiramente a definição do Hamiltoniano  $H_1$ , a partir dos operadores vetoriais de criação e aniquilação,

$$H_1 = \vec{A}^\dagger \cdot \vec{A}. \quad (204)$$

A equação de autovalor para o sistema 1 fica

$$\vec{A}^\dagger \cdot \vec{A} \psi_{n_x n_y}^{(1)} = E_{n_x n_y}^{(1)} \psi_{n_x n_y}^{(1)}. \quad (205)$$

Contudo, quando aplicamos o operador  $\vec{A}$  na equação (205) para gerarmos os autoestados do Hamiltoniano parceiro  $H_2$ , obtemos como resultado um vetor,

$$\vec{A} (\vec{A}^\dagger \cdot \vec{A}) \psi_{n_x n_y}^{(1)} = E_{n_x n_y}^{(1)} \vec{A} \psi_{n_x n_y}^{(1)}. \quad (206)$$

Assim, verificamos que, por questão de consistência, os autoestados de  $H_2$  são vetores proporcionais a  $\vec{A} \psi_{n_x n_y}^{(1)}$  e, conseqüentemente, o Hamiltoniano  $H_2$  será uma matriz dada por um produto externo, tal que

$$(H_2)_{ij} = A_i A_j^\dagger. \quad (207)$$

Uma outra questão a esclarecer diz respeito ao abaixamento e elevação de índices. Deve-se notar que os autoestados de  $H_1$  são definidos por dois índices,  $n_x$  e  $n_y$ . O estado  $\vec{A} \psi_{n_x n_y}^{(1)}$  é autofunção de  $H_2$  com a mesma energia  $E_{n_x n_y}^{(1)}$  de  $\psi_{n_x n_y}^{(1)}$ . Definimos o índice  $n = n_x + n_y$  para as autofunções e autoenergias de  $H_2$ . Assim, no caso em que os lados do retângulo são iguais,  $L_1 = L_2 = L$ , os autoestados de  $H_2$  também serão degenerados, incluindo o de menor energia, com  $n = 0$ . A fim de diferenciar os estados degenerados, acrescentaremos um índice  $m$ .

Os autoestados e autoenergias dos Hamiltonianos parceiros  $H_1$  e  $H_2$ , então, se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{n,m}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} \vec{A} \psi_{n+1,m}^{(1)}, \\ \psi_{n+1,m}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} \vec{A}^\dagger \cdot \vec{\psi}_{n,m}^{(2)}, \\ E_n^{(2)} &= E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (208)$$

Como exemplo, usamos os autoestados e autoenergias de  $H_1$  (equações (196) e (197), respectivamente),

$$\psi_{10}^{(1)}(x,y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad \text{e} \quad \psi_{01}^{(1)}(x,y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right), \quad (209)$$

com

$$E_{10}^{(1)} = E_{01}^{(1)} = \frac{2\hbar^2\pi^2}{5mL^2}. \quad (210)$$

Com a nova notação definida acima, chamamos  $\psi_{10}^{(1)} \equiv \psi_{1,1}^{(1)}$ ,  $\psi_{01}^{(1)} \equiv \psi_{1,2}^{(1)}$  e  $E_{10}^{(1)} = E_{01}^{(1)} \equiv E_1$ . A partir das relações (208), obtemos dois autoestados degenerados para  $H_2$  com a mesma energia,

$$\vec{\psi}_{0,1}^{(2)} = -\frac{4}{\sqrt{5}L} \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \hat{i} \quad (211)$$

e

$$\vec{\psi}_{0,2}^{(2)} = -\frac{4}{\sqrt{5}L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{L}\right) \hat{j}. \quad (212)$$

## 5 Poços Quânticos Esfericamente Simétricos

Neste capítulo, estudaremos problemas de Mecânica Quântica em três dimensões, com simetria esférica, do ponto de vista da supersimetria. Veremos que há um procedimento geral que poderá ser aplicado a todas as situações que respeitem esta condição. Faremos o estudo do poço esférico infinito, do átomo de hidrogênio e estabeleceremos um procedimento geral.

### 5.1 Separação de Variáveis e Obtenção do Potencial Efetivo

Os problemas a que nos dedicaremos neste capítulo são aqueles em três dimensões, mas que apresentam uma energia potencial com dependência apenas radial,  $V = V(r)$ . O operador Laplaciano em coordenadas esféricas é dado por

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) = \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \psi(r, \theta, \varphi), \quad (213)$$

em que as variáveis  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ , ilustradas na Figura 9, se relacionam com as retangulares pelas expressões

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \quad e \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (214)$$

Considerando um potencial radial, com a finalidade de solucionar a equação de Schrodinger, podemos proceder à separação de variáveis,  $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , em que os  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  são os chamados harmônicos esféricos. As funções angulares serão as mesmas para todas as situações em que o problema é esfericamente simétrico. Nos interessaremos, aqui, pelas soluções das equações radiais, que poderão ser tratadas com as ferramentas utilizadas em problemas unidimensionais.

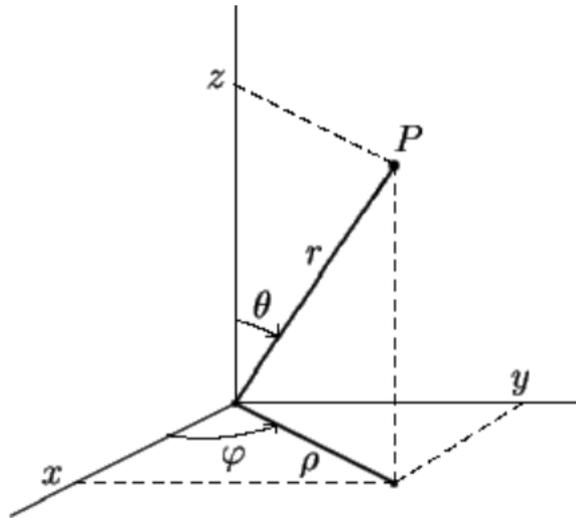
A equação radial será dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_{nl}}{dr} \right) + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] R_{nl} = E_{nl} R_{nl}, \quad (215)$$

cujas soluções podem ser, por exemplo, funções de Bessel esféricas, no caso de um potencial nulo. Contudo, neste capítulo, adotaremos um procedimento diferente para identificar as soluções. Primeiramente, fazemos a substituição  $R_{nl} = u_{nl}/r$ , de forma a obter

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] u_{nl} = E_{nl} u_{nl}, \quad (216)$$

Figura 9 – Coordenadas esféricas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

que possui a forma da equação de Schroedinger em uma dimensão com potencial efetivo,

$$V_l(r) = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}. \quad (217)$$

## 5.2 Poço Esférico Infinito

O poço de potencial esférico infinito é definido pela energia potencial,

$$V(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r < a \\ \infty & , \quad r \geq a \end{cases}, \quad (218)$$

Assim, para o interior do poço,  $r < a$ , escrevemos, novamente considerando a energia em unidades de  $\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}$ ,

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_{nl} = \epsilon_{nl} u_{nl}. \quad (219)$$

É importante notar que este problema não admite solução de energia zero. Isto ocorre porque os estados obtidos em tal condição não respeitam a condição de contorno de se anularem em  $r = a$ . Consideremos, então, um valor de  $n$  arbitrário e comecemos por  $l = 0$ . Temos uma equação diferencial simples, dada por

$$-u''_{n0} = k_{n0}^2 u_{n0}, \quad (220)$$

com  $k_{n0}^2 = \epsilon_{n0}$  (em unidades de  $\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}$ ). Considerando a condição de contorno de que as autofunções se anulem em  $r = a$ , permanecem apenas as soluções

$$u_{n0} = \sin(k_{n0}r), \quad (221)$$

com  $k_{n0} = \frac{n\pi}{a}$ , e nas quais desconsideramos os fatores de normalização. Os níveis de energia para  $l = 0$  serão então dados por

$$\epsilon_{n0} = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (222)$$

Uma forma interessante de construir o superpotencial, lembrando-nos de que  $H_l^{(1)} = W_l^2 - W_l'$  é a procura por  $c_1$  e  $c_2$ , tais que

$$W_l(r) = \frac{c_1 l + c_2}{r} \quad (223)$$

nos forneça

$$H_l^{(1)}(r) = \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (224)$$

Uma das possibilidades é

$$W_l(r) = -\frac{l+1}{r}, \quad (225)$$

que implica os operadores de criação e aniquilação,

$$A_l^\dagger = -\frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} \quad \text{e} \quad A_l = \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r}, \quad (226)$$

respectivamente. Por outro lado, o potencial parceiro,  $V_l^{(2)} = W_l^2 + W_l'$ , é escrito como

$$V_l^{(2)} = \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} = V_{l+1}^{(1)}. \quad (227)$$

É importante que entendamos a forma de atuação dos operadores  $A_l$  e  $A_l^\dagger$ . Primeiramente, na formulação que estamos apresentando nesta seção, para cada valor de  $l$ , temos um superpotencial, dois potenciais parceiros e os correspondentes operadores de aniquilação e criação. Tais operadores atuam dentro dos subespaços com um  $l$  definido, interconectando autoestados de  $H_l^{(1)}$  e  $H_l^{(2)}$ , abaixando e levantando em uma unidade, respectivamente, o índice  $n$ . Contudo, a relação  $H_l^{(2)} = H_{l+1}^{(1)}$  permite que se construam os estados e as energias para todos os valores de  $l$ .

Vejam, então, a aplicação

$$A_l u_{nl}^{(1)} = u_{n-1,l}^{(2)}, \quad (228)$$

relação já discutida nos capítulos anteriores, na qual desprezamos fatores de normalização. Como  $u_{n-1,l}^{(2)}$  é autofunção de  $H_l^{(2)} = H_{l+1}^{(1)}$ , temos, a menos do fator de normalização, que  $u_{n-1,l}^{(2)} = u_{n-1,l+1}^{(1)}$ . Da mesma forma,

$$A_{l-1}^\dagger u_{n,l-1}^{(2)} = u_{n+1,l-1}^{(1)}, \quad (229)$$

com  $u_{n,l-1}^{(2)} = u_{n,l}^{(1)}$ , pelos mesmos motivos. Quanto às energias, seguimos o mesmo procedimento já introduzido nas seções e capítulos anteriores. Primeiramente, chamamos de  $\alpha_{n,l}$  à enésima raiz da função esférica de Bessel de ordem  $l$ , de forma que, para  $a = 1$  e em unidades de  $\hbar^2/(2\mu)$ , temos a relação de autovalor

$$H_l^{(1)} u_{n,l}^{(1)} = \alpha_{n,l}^2 u_{n,l}^{(1)}. \quad (230)$$

Em seguida, usamos as relações  $\epsilon_{n+1,l}^{(1)} = \epsilon_{n,l}^{(2)}$  e  $\epsilon_{n,l+1}^{(1)} = \epsilon_{n,l}^{(2)}$  para obtermos os níveis de energia correspondentes aos demais estados.

Apenas como ilustração, calculemos dois estados a partir de  $u_{n0} = \sin(k_{n0}r)$ . Escrevemos

$$\begin{aligned} u_{n-1,1} &= A_0 u_{n,0} = \left( \frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \sin(k_{n0}r) \\ &= k_{n0} \cos(k_{n0}r) - \frac{1}{r} \sin(k_{n0}r). \end{aligned} \quad (231)$$

Em seguida, podemos determinar

$$\begin{aligned} u_{n-2,2} &= A_1 u_{n-1,1} = \left( \frac{d}{dr} - \frac{2}{r} \right) \left[ k_{n0} \cos(k_{n0}r) - \frac{1}{r} \sin(k_{n0}r) \right] \\ &= -\frac{k_{n0}}{r} \cos(k_{n0}r) + \left( \frac{3}{r^2} - k_{0,n}^2 \right) \sin(k_{n0}r). \end{aligned} \quad (232)$$

Na próxima seção, estudaremos uma aplicação mais interessante da Mecânica Quântica Supersimétrica com simetria esférica.

### 5.3 Átomo de Hidrogênio

O problema do átomo de hidrogênio, quando se considera o referencial do centro de massa, se reduz ao caso dos potenciais com simetria esférica (no caso, o potencial de Coulomb) (MARKOVICH; BIAMONTE; KOURI, 2011). Após a manipulação na equação radial, usando  $u_{n,l}(r) = r R_{n,l}(r)$ , obtemos o potencial efetivo,

$$V_l(r) = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{r}, \quad (233)$$

em que estamos considerando o caso da energia em unidades de  $\hbar^2/(2\mu e^4)$ , sendo  $\mu$  a massa reduzida do sistema e  $e$  a carga do elétron. O Hamiltoniano de Coulomb é, então, dado por,

$$H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{r}. \quad (234)$$

Definimos o Hamiltoniano de energia do estado fundamental nula como

$$H_l^{(1)} = H_l - \epsilon_0, \quad (235)$$

em que  $\epsilon_0$  é a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio em unidades de  $\hbar^2/(2\mu e^4)$ . Sendo

$$V^{(1)}(r) = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{r} - \epsilon_0 = W_l^2 - W_l', \quad (236)$$

escrevemos

$$W_l(r) = \frac{c_1 l + c_2}{r} + c_3 \quad (237)$$

e encontramos

$$W_l = -\frac{l+1}{r} + \frac{1}{2(l+1)} \quad (238)$$

e

$$\epsilon_0 = -\frac{1}{4(l+1)^2}. \quad (239)$$

Determinamos, também, o Hamiltoniano parceiro,

$$H_l^{(2)} = -\frac{d^2}{dr^2} + W_l^2 + W_l' = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{4(l+1)^2}. \quad (240)$$

Assim, temos

$$H_l^{(2)} = H_{l+1}^{(1)} + \frac{1}{4(l+1)^2} - \frac{1}{4(l+2)^2}. \quad (241)$$

A relação acima nos permite trabalhar com apenas um conjunto de funções,  $u_{n,l}(r)$ , que são autoestados dos três Hamiltonianos,  $H_l$ ,  $H_l^{(1)}$  e  $H_l^{(2)}$ . Além disso, é importante notar que  $u_{n,l}^{(2)} = u_{n,l+1}^{(1)} \equiv u_{n,l+1}$ . Finalmente, a partir das autoenergias do Hamiltoniano  $H^{(1)}$ , podemos facilmente obter os níveis de energia do átomo de hidrogênio pela simples soma de  $\epsilon_0$ .

A partir do superpotencial, escrevemos, respectivamente, os operadores de aniquilação e criação,

$$A_l = \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} + \frac{1}{2(l+1)} \quad \text{e} \quad A_l^\dagger = -\frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} + \frac{1}{2(l+1)}. \quad (242)$$

Diferentemente do que ocorreu no caso do poço esférico infinito, temos agora um estado fundamental de energia nula para cada valor de  $l$  (TANGERMAN; TJON, 1993). Assim, o operador  $A_l$  aniquila tal estado, de forma que temos uma equação diferencial simples para a sua obtenção,

$$A_l u_{0,l} = \left[ \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} + \frac{1}{2(l+1)} \right] u_{0,l} = 0, \quad (243)$$

cuja solução, desprezando-se fatores de normalização é dada por

$$u_{0,l} = r^{l+1} e^{-\frac{r}{2(l+1)}}. \quad (244)$$

Estados de energias superiores podem agora ser facilmente obtidos por meio das relações obtidas na seção anterior,

$$u_{n,l} = A_l^\dagger u_{n-1,l+1} \quad \text{e} \quad u_{n,l} = A_{l-1} u_{n+1,l-1}, \quad (245)$$

que podem ser usadas recursivamente. Como exemplo, calculemos

$$u_{1,0} = A_1^\dagger u_{0,1} = \left[ -\frac{d}{dr} - \frac{2}{r} + \frac{1}{4} \right] \left( r^2 e^{-\frac{r}{4}} \right) = r e^{-\frac{r}{4}} \left( \frac{r}{2} - 4 \right). \quad (246)$$

Todos os outros estados podem ser construídos, como

$$u_{2,0} = A_0^\dagger A_1^\dagger u_{0,2} \quad (247)$$

e

$$u_{2,1} = A_0 u_{3,0} = A_0 A_0^\dagger A_1^\dagger A_2^\dagger u_{0,3}. \quad (248)$$

Vejam, agora, como obter todos os níveis de energia. O estado  $u_{0,l+1}$  é o estado fundamental do Hamiltoniano  $H_l^{(2)}$ , com energia, de acordo com a Equação (241),

$$\epsilon_{0,l}^{(2)} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(l+1)^2} - \frac{1}{(l+2)^2} \right\}. \quad (249)$$

Contudo, sendo  $H_l^{(2)}$  e  $H_l^{(1)}$  parceiros supersimétricos, tal energia é autovalor também de  $H_l^{(1)}$ ,  $\epsilon_{1,l}^{(1)}$ , correspondente aos estados

$$u_{1,l} = A_l^\dagger u_{0,l+1}. \quad (250)$$

Por outro lado,  $u_{1,l}$  também é auto estado do Hamiltoniano de Coulomb, mas com energia dada por

$$\epsilon_{1,l} = \epsilon_{1,l}^{(1)} - \epsilon_0 = -\frac{1}{4(l+2)^2}. \quad (251)$$

A repetição do procedimento nos leva ao resultado

$$\epsilon_{n,l} = -\frac{1}{4(n+l+1)^2}. \quad (252)$$

Identificando o número quântico principal como  $\nu = n + l + 1$  e recobrando o fator  $2\mu e^4/\hbar^2$ , obtemos, para os níveis de energia do átomo de hidrogênio,

$$E_\nu = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \nu^2}. \quad (253)$$

Um comentário importante ao fim deste capítulo diz respeito a uma particularidade dos problemas do poço esférico infinito e do potencial de Coulomb. Trata-se de casos particulares de potenciais invariantes de forma. Dizemos que o par de potenciais parceiros é invariante de forma se eles são similares na forma e diferem apenas nos parâmetros envolvidos. Mais precisamente, se

$$V^{(2)}(x; \alpha) = V^{(1)}(x; f(\alpha)) + R(\alpha), \quad (254)$$

em que  $\alpha$  é um conjunto de parâmetros e  $R(\alpha)$  é independente de  $x$ , dizemos que  $V^{(1)}$  e  $V^{(2)}$  são invariantes de forma. Este é justamente o caso dos potenciais estudados neste capítulo, nos quais o parâmetro envolvido é  $l$ .

## 6 A MQ SUSI e a Teoria de Dirac

A Mecânica Quântica Supersimétrica pode também ser aplicada na solução de problemas relativísticos e que são descritos por meio da equação de Dirac. Nesta seção, primeiramente estudamos o caso simples de um problema com apenas uma dimensão espacial e, em seguida, investigamos o caso mais complexo de sistemas tridimensionais com simetria esférica.

### 6.1 A Supersimetria e a Equação de Dirac

Iniciamos pelo Lagrangeano de Dirac em 1 + 1 dimensões (1 temporal e 1 espacial), no qual o campo fermiônico não massivo está acoplado a um potencial escalar:

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \psi \phi, \quad (255)$$

em que  $\mu = 0, 1$  e  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . O campo  $\phi(x)$ , escalar, apresenta Lagrangeano dado por

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (256)$$

Do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  obtém-se a equação de Dirac com interação,

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \phi \psi = 0, \quad (257)$$

e fazemos a separação da parte espacial escrevendo  $\psi(x, t) = e^{-i\omega t} \psi(x)$ :

$$\begin{aligned} i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) + i \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) - \phi \psi(x, t) &= 0 \\ \Rightarrow i \gamma^0 (-i\omega) e^{-i\omega t} \psi(x) + i \gamma^1 e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) - \phi e^{-i\omega t} \psi(x) &= 0 \\ \Rightarrow \gamma^0 \omega \psi(x) + i \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) - \phi(x) \psi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (258)$$

Em 2 dimensões, uma representação possível para as matrizes  $\gamma$  é dada por

$$\gamma^0 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^1 = i\sigma_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (259)$$

Escrevendo  $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$  na equação (258), obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi \psi_1 \\ \phi \psi_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \omega\psi_2 \\ \omega\psi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-\partial\psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi\psi_1 \\ \phi\psi_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[ \frac{\partial}{\partial x} + \phi \right] \psi_1 = \omega\psi_2 \\ \left[ \frac{-\partial}{\partial x} + \phi \right] \psi_2 = \omega\psi_1 \end{cases} \quad (260)$$

Na equação acima, identificamos

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + \phi \quad \text{e} \quad A^\dagger = \frac{-\partial}{\partial x} + \phi, \quad (261)$$

de forma que temos:

$$\begin{cases} A\psi_1 = \omega\psi_2 \\ A^\dagger\psi_2 = \omega\psi_1 \end{cases} \quad (262)$$

Aplicando  $A^\dagger$  em  $A\psi_1$ , encontramos

$$A^\dagger A\psi_1 = \omega A^\dagger\psi_2 \quad \Rightarrow \quad A^\dagger A\psi_1 = \omega^2\psi_1. \quad (263)$$

Por outro lado, aplicando  $A$  em  $A^\dagger\psi_2$ , encontramos

$$AA^\dagger\psi_2 = \omega A\psi_1 \quad \Rightarrow \quad AA^\dagger\psi_2 = \omega^2\psi_2. \quad (264)$$

Comparando as equações (263) e (264) com o formalismo da MQ SUSI, notamos que há uma relação de supersimetria, com  $\phi(x)$  fazendo o papel de superpotencial  $W(x)$  do formalismo de Schroedinger, com  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sendo as autofunções dos Hamiltonianos  $H_1 = A^\dagger A$  e  $H_2 = AA^\dagger$ , respectivamente. Os potenciais podem ser facilmente encontrados por meio das já conhecidas relações

$$\begin{cases} V_1(x) = W^2 - W' \\ V_2(x) = W^2 + W' \end{cases}$$

Os espectros de  $H_1$  e  $H_2$  são iguais (degenerados), com exceção do estado fundamental de  $H_1$  que possui energia nula, desde que  $\phi \rightarrow \pm\infty$  possuam sinal trocado com  $\phi(x \rightarrow +\infty) > 0$  e  $\phi(x \rightarrow -\infty) < 0$ . Podemos concluir que, para potencial invariante de forma, existe um problema solúvel analiticamente de Dirac, cujo potencial  $\phi(x)$  é o superpotencial de problema de Schroedinger.

## 6.2 A Supersimetria e a Equação de Dirac em 3D+1

### 6.2.1 Hamiltoniano de Dirac

A equação de Dirac para uma partícula livre em 3+1 dimensões é dada por

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0 \quad (265)$$

Abrindo a equação em componentes, obtemos

$$\left[ i\hbar\gamma^0\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\gamma^i\partial_i - mc \right] \psi = 0. \quad (266)$$

Usando  $\gamma^0 = \beta$ ,  $\beta^2 = I$ ,  $\vec{\alpha} = \beta\vec{\gamma}$  e multiplicando pela esquerda por  $\beta c$ , encontramos

$$\left[ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c\alpha^i\partial_i - \beta mc^2 \right] \psi = 0. \quad (267)$$

Lembrando que  $H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$  e  $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ , encontramos, para a partícula livre,

$$H\psi = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2)\psi. \quad (268)$$

Para o caso com interação, somamos o potencial  $V(\vec{r})$  à direita:

$$H\psi = [c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V(\vec{r})]\psi; \quad \psi = \psi(\vec{r}, t). \quad (269)$$

Em seguida, separamos a parte espacial, escrevendo  $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ :

$$[c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V(\vec{r})]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (270)$$

em que  $(c\vec{\alpha} \cdot \vec{p})$  é o termo cinético.

### 6.2.2 Separação de Variáveis na Equação de Dirac para Potenciais Esfericamente Simétricos

A equação (270) faz uso das matrizes

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (271)$$

Definimos também a matriz

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (272)$$

O único termo dependente da parte angular no nosso Hamiltoniano é o cinético ( $c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ ), que será trabalhado em termos de decomposições e propriedades de matrizes de Pauli. Primeiramente, escrevemos o operador para momento linear em sua representação no espaço das coordenadas,  $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ . Então, fazemos a seguinte decomposição,

$$\nabla = \hat{r}(\hat{r} \cdot \nabla) - \hat{r} \times (\hat{r} \times \nabla), \quad (273)$$

e a representação do operador momento angular orbital,

$$\vec{L} = -i\hbar r(\hat{r} \times \nabla), \quad (274)$$

para obter

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{\hbar r} \hat{r} \times \vec{L}, \quad (275)$$

em que foi utilizada a expressão para o gradiente em coordenadas esféricas. Assim, temos

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = -i\hbar \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \times \vec{L}. \quad (276)$$

Ainda precisamos manipular o segundo termo da equação acima. O momento angular orbital, em um problema esfericamente simétrico, é ortogonal a  $\vec{r}$ , de forma que  $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$  e

$$i\vec{\sigma} \cdot \vec{r} \times \vec{L} = (\vec{\sigma} \cdot \vec{r})(\vec{\sigma} \cdot \vec{L}). \quad (277)$$

Uma possível representação para  $\gamma_5$  é  $\gamma_5 = -\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ . Assim,

$$\gamma_5 \vec{\alpha} = -\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = -\vec{\tilde{\sigma}}, \quad (278)$$

de forma que, multiplicando a equação (277) à esquerda por  $i\gamma_5$ , obtemos:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{r} \times \vec{L} = -i(\vec{\alpha} \cdot \vec{r})(\vec{\tilde{\sigma}} \cdot \vec{L}) \quad (279)$$

e, portanto,

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = -i\hbar \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} (\vec{\alpha} \cdot \hat{r}) (\vec{\tilde{\sigma}} \cdot \vec{L}) \quad (280)$$

O segundo termo acima pode ser colocado de forma mais adequada. Para isso, definimos o operador  $K$ , tal que

$$K^2 = J^2 + \frac{\hbar}{4} I, \quad (281)$$

em que todos os termos são matrizes  $4 \times 4$ . Seja  $\psi$  autoestado de  $J^2$ . Assim:

$$K^2 \psi = \left[ j(j+1)\hbar^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right] \psi = \left[ j^2 + j + \frac{1}{4} \right] \hbar^2 \psi$$

$$\Rightarrow K^2\psi = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2\psi \quad (282)$$

ou

$$K\psi = \pm \left(j + \frac{1}{2}\right) \hbar\psi \equiv -\kappa\hbar\psi, \quad (283)$$

com  $-\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$ . Por outro lado, a partir da definição de  $K^2$ , podemos mostrar que

$$K^2 = L^2 + \hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar^2 I. \quad (284)$$

Além disso, em função de as componentes do momento angular orbital não comutarem entre si, tem-se

$$L^2 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{L})^2 + \hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \quad (285)$$

que, substituída na equação 284, nos fornece

$$\begin{aligned} K^2 &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{L})^2 + 2\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar^2 \\ \Rightarrow K^2 &= \beta^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar)^2, \end{aligned} \quad (286)$$

em que  $\beta^2 = I$  foi inserido por conveniência. Escolhemos  $K = \beta[\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar]$  e obtemos

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{L} = \beta K - \hbar, \quad (287)$$

de forma que

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = -i\hbar\vec{\alpha} \cdot \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} (\vec{\alpha} \cdot \hat{r}) (\beta K - \hbar) \quad (288)$$

Definindo  $\alpha_r = \vec{\alpha} \cdot \hat{r}$ , ficamos com

$$c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = -ic\alpha_r \left[ \hbar \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\beta K}{r} \right]. \quad (289)$$

Além disso, usamos  $-\vec{\alpha} = \gamma_5 \vec{\sigma}$  e  $\vec{\sigma}_r = \vec{\sigma} \cdot \hat{r}$  para escrever

$$c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = ic\gamma_5 \vec{\sigma}_r \left[ \hbar \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\beta K}{r} \right] \quad (290)$$

e, então, obter a equação de Dirac na forma

$$\left\{ ic\gamma_5 \vec{\sigma}_r \left[ \hbar \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\beta K}{r} \right] + \beta mc^2 + V(r) \right\} \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (291)$$

Notemos que, até o momento, estamos utilizando matrizes  $4 \times 4$  em blocos. Contudo, faremos a decomposição da equação de Dirac em equações escritas em termos de matrizes  $2 \times 2$ .

Os espinores de 4 componentes  $\psi(\vec{r})$  serão escritos em função de espinores de duas componentes  $\chi_\kappa^{mj}(\hat{r})$ , que são autoestados das versões  $2 \times 2$  de  $J^2$ ,  $J_z$  e  $K$ . Particularmente, temos:

$$k\chi_\kappa^{mj} = -\kappa\hbar\chi_\kappa^{mj}, \quad (292)$$

em que a matriz  $k$ ,  $2 \times 2$ , é definida a partir da relação

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}. \quad (293)$$

Para entendermos a atuação de  $\alpha_r$  em tais estados, primeiramente observamos que  $\sigma_r \equiv \vec{\sigma} \cdot \hat{r}$  anticomuta com  $k$  (embora a verificação seja simples, é um pouco longa). Assim:

$$\begin{aligned} k\sigma_r\chi_\kappa^{mj} &= -\sigma_r k\chi_\kappa^{mj} = -\sigma_r(-\hbar\kappa)\chi_\kappa^{mj} \\ &\Rightarrow k(\sigma_r\chi_\kappa^{mj}) = -\hbar\kappa(\sigma_r\chi_\kappa^{mj}). \end{aligned} \quad (294)$$

Desta forma, devemos ter  $\sigma_r\chi_\kappa^{mj} = -\chi_{-\kappa}^{mj}$ , já que  $k\chi_\kappa^{mj} = -\kappa\hbar\chi_\kappa^{mj}$ . A fim de que voltemos à equação de Dirac, escrevemos o espinor de 4 componentes na forma,

$$\psi_\kappa^{mj}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g_\kappa(r)\chi_\kappa^{mj}(\hat{r}) \\ if_\kappa(r)\chi_{-\kappa}^{mj}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (295)$$

Na matriz do Hamiltoniano, o único termo não diagonal é o primeiro,

$$ic\gamma_5\tilde{\sigma}_r \left[ \hbar\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\beta K}{r} \right] = -ic \begin{pmatrix} 0 & \sigma_r \left[ \hbar\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\kappa}{r} \right] \\ \sigma_r \left[ \hbar\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\kappa}{r} \right] & 0 \end{pmatrix}, \quad (296)$$

de forma que

$$ic\gamma_5\tilde{\sigma}_r \left[ \hbar\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\beta K}{r} \right] \psi = ic \begin{pmatrix} i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{\kappa}{r} \right] \chi_\kappa^{mj} f_\kappa \\ \hbar \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\kappa}{r} \right] \chi_{-\kappa}^{mj} g_\kappa \end{pmatrix}, \quad (297)$$

na qual foram utilizadas as relações  $\sigma_r\chi_{-\kappa}^{mj} = -\chi_\kappa^{mj}$  e  $\sigma_r\chi_\kappa^{mj} = -\chi_{-\kappa}^{mj}$

Juntando-se todos os termos da equação de Dirac, os chamados espinores angulares de spin,  $\chi_\kappa^{mj}$  e  $\chi_{-\kappa}^{mj}$ , cancelam-se, assim como os fatores de  $i$ . Ficamos, então com duas equações acopladas dependentes apenas da variável radialna qual fizemos  $\hbar = c = 1$  e omitimos o índice  $\kappa$ :

$$\begin{cases} - \left[ \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - \frac{\kappa}{r} \right] f(r) + (m + V(r) - E) g(r) = 0 \\ \left[ \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\kappa}{r} \right] g(r) + (-m + V(r) - E) f(r) = 0 \end{cases}. \quad (298)$$

O primeiro passo para a solução do sistema de equações são as substituições  $f = \frac{1}{r}F$  e  $g = \frac{1}{r}G$ , na equação (298), que nos levam a

$$\begin{cases} G'(r) + \frac{\kappa}{r}G(r) - (\alpha_1 - V(r)s)F(r) = 0 \\ F'(r) - \frac{\kappa}{r}F(r) - (\alpha_2 + V(r))G(r) = 0; \end{cases}, \quad (299)$$

em que  $\alpha_1 = m + E$  e  $\alpha_2 = m - E$ . Estamos interessados no caso de um átomo com um elétron, para o qual  $V(r) = -\frac{\gamma}{r}$ , com  $\gamma = Ze^2$ . Obtemos, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} G' \\ F' \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \kappa & -\gamma \\ \gamma & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix}. \quad (300)$$

Para o desacoplamento das equações, para a aplicação dos métodos da MQ SUSI, precisamos diagonalizar a matriz

$$M = \begin{pmatrix} \kappa & -\gamma \\ \gamma & -\kappa \end{pmatrix} \quad (301)$$

Escrevendo  $V = \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix}$  e  $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$ , temos:

$$V' + \frac{1}{r}MV = \bar{\alpha}V. \quad (302)$$

A diagonalização se dará obtendo-se a equação matricial

$$\tilde{V}' + \frac{1}{r}D\tilde{V} = \tilde{\alpha}\tilde{V}, \quad (303)$$

em que

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{F} \end{pmatrix} = P^{-1}V, \quad D = P^{-1}MP \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha} = P^{-1}\bar{\alpha}P, \quad (304)$$

com

$$P = \begin{pmatrix} \kappa + s & \gamma \\ \gamma & \kappa + s \end{pmatrix}; \quad s = \sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}. \quad (305)$$

Obtém-se o novo sistema desacoplado,

$$\begin{pmatrix} \tilde{G}' \\ \tilde{F}' \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{F} \end{pmatrix} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} \gamma E & E\kappa + ms \\ -E\kappa + ms & -\gamma E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{F} \end{pmatrix}, \quad (306)$$

no qual fazemos ainda a substituição de variáveis  $\rho/E$ , para escrevermos

$$\begin{cases} A\tilde{F} = \left(\frac{m}{E} - \frac{\kappa}{s}\right)\tilde{G} \\ A^\dagger\tilde{G} = -\left(\frac{m}{E} + \frac{\kappa}{s}\right)\tilde{F} \end{cases} \quad (307)$$

em que usamos a definição

$$\begin{cases} A = \frac{d}{d\rho} - \frac{s}{\rho} + \frac{\gamma}{s} \\ A^\dagger = -\frac{d}{d\rho} - \frac{s}{\rho} + \frac{\gamma}{s} \end{cases} \quad (308)$$

Aplicando-se  $A^\dagger$  na primeira equação e  $A$  na segunda, obtemos

$$A^\dagger A \tilde{F} = \left( \frac{\kappa^2}{s^2} - \frac{m^2}{E^2} \right) \tilde{F} \quad \text{ou} \quad H_1 \tilde{F} = \left( \frac{\kappa^2}{s^2} - \frac{m^2}{E^2} \right) \tilde{F} \quad (309)$$

e

$$A A^\dagger \tilde{G} = \left( \frac{\kappa^2}{s^2} - \frac{m^2}{E^2} \right) \tilde{G} \quad \text{ou} \quad H_2 \tilde{G} = \left( \frac{\kappa^2}{s^2} - \frac{m^2}{E^2} \right) \tilde{G}. \quad (310)$$

Notamos, então, que chegamos a um problema de Mecânica Quântica Supersimétrica. A partir das definições (308), é fácil identificar o superpotencial, dado por

$$W(\rho) = -\frac{s}{\rho} + \frac{\gamma}{s}. \quad (311)$$

Os potenciais parceiros,

$$V_1 = W^2 - W' \quad \text{e} \quad V_2 = W^2 + W', \quad (312)$$

são também facilmente obtidos:

$$V_1 = \frac{s(s-1)}{\rho^2} - 2\frac{\gamma}{\rho} + \frac{\gamma^2}{\rho^2} \quad (313)$$

e

$$V_2 = \frac{s(s+1)}{\rho^2} - 2\frac{\gamma}{\rho} + \frac{\gamma^2}{\rho^2}. \quad (314)$$

Temos, então, um caso de invariância de forma, já que

$$V_1(\rho, s+1, \gamma) = \frac{s(s+1)}{\rho^2} - \frac{2\gamma}{\rho} + \frac{\gamma^2}{s^2} \quad (315)$$

e

$$V_2(\rho, s, \gamma) - V_1(\rho, s+1, \gamma) = \gamma^2 \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \right). \quad (316)$$

O parâmetro a ser utilizado nesta relação de potenciais invariantes de forma é  $s$ . Além disso, temos  $a_0 = s$  e  $a_1 = s+1$ ,  $R(a_0) = \gamma^2 \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \right)$ ,  $g(a_0) = -\frac{1}{s^2}$  e  $a_n = s+n$ . Do estudo de potenciais invariantes de forma, temos  $E_n^{(1)} = g(a_n) - g(a_0)$  de forma que

$$E_n^{(1)} = \gamma^2 \left( -\frac{1}{(s+n)^2} + \frac{1}{s^2} \right) = \gamma^2 \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s+n)^2} \right). \quad (317)$$

Contudo, é importante notar que  $E_n^{(1)}$  é autoenergia de  $H_1$ , que não é o Hamiltoniano de Dirac. Podemos obter as autoenergias do Hamiltoniano de Dirac,  $E_n$ , por meio da equação

$$H_1 \tilde{F} = \left( \frac{\gamma^2}{s^2} - \frac{m^2}{E_n^2} \right) \tilde{F}.$$

Assim, temos

$$E_n^{(1)} = \frac{\gamma^2}{s^2} - \frac{m^2}{E_n^2}, \quad (318)$$

de forma que

$$E_n = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{(s+n)^2}}}. \quad (319)$$

Os valores de energia  $E_n^{(1)}$  são os mesmos para  $H_2$ , tais que  $E_n^{(1)} = E_{n+1}^{(1)}$ . A exceção é o estado fundamental de  $H_1$ , de energia nula e tal que

$$A\tilde{F} = 0 \quad (320)$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{d}{d\rho} - \frac{s}{\rho} + \frac{\gamma}{s} \right] \tilde{F}_0 = 0 \quad (321)$$

$$\Rightarrow \tilde{F}_0 = \rho^s e^{-\frac{\gamma\rho}{s}}, \quad (322)$$

a menos de uma constante de normalização.

Os demais estados podem ser construídos pelas relações de invariância de forma e SUSI. Dados  $H_1$  e  $H_2$ , com autoestados  $\psi^{(1)}$  e  $\psi^{(2)}$ , respectivamente, e parâmetros  $a_n$ , temos, a menos de constantes,

$$\psi_1^{(1)}(x, a_0) = A^\dagger(x, a_0) \psi_0^{(1)}(x, a_0) \quad (\text{SUSI}) \quad (323)$$

e

$$\psi_0^{(2)}(x, a_0) = \psi_0^{(1)}(x, a_1) \quad (\text{Invariância de forma}). \quad (324)$$

No nosso caso, temos  $\tilde{F} = \psi^{(1)}$  e  $\tilde{G} = \psi^{(2)}$ . Os parâmetros são  $a_0 = s$  e  $a_n = s + n$ , com

$$A_s = \frac{d}{d\rho} - \frac{s}{\rho} + \frac{\gamma}{s} \quad \text{e} \quad A_s^\dagger = -\frac{d}{d\rho} - \frac{s}{\rho} + \frac{\gamma}{s}.$$

De forma que

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(\rho, s) &= \tilde{F}_0(\rho, s + 1) \\ &= \rho^{s+1} e^{-\frac{\gamma\rho}{(s+1)}}, \end{aligned} \quad (325)$$

por invariância de forma.

Por SUSY, temos:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1(\rho, s) &= A_s^\dagger \tilde{G}_0(\rho, s) \\ &= \left[ -\frac{d}{d\rho} - \frac{s}{\rho} + \frac{\gamma}{s} \right] \rho^{s+1} e^{-\frac{\gamma\rho}{(s+1)}}.\end{aligned}\quad (326)$$

Por invariância de forma,

$$\begin{aligned}\tilde{G}_1(\rho, s) &= \tilde{F}_1(\rho, s+1) \\ &= A_{s+1}^\dagger \tilde{G}_0(\rho, s+1) \\ &= A_{s+1}^\dagger \tilde{F}_0(\rho, s+2).\end{aligned}\quad (327)$$

Por SUSY,

$$\begin{aligned}\tilde{F}_2(\rho, s) &= A_s^+ \tilde{G}_1(\rho, s) \\ &= A_s^+ A_{s+1}^\dagger \tilde{F}_0(\rho, s+2).\end{aligned}\quad (328)$$

Repetindo-se o procedimento , temos:

$$\tilde{F}_n(\rho, s) = A_s^+ A_{s+1}^\dagger \dots A_{s+n-1}^\dagger \left( \rho^{s+n} e^{-\frac{\gamma\rho}{(s+n)}} \right).\quad (329)$$

As funções  $\tilde{G}_n(\rho, s)$  podem ser obtidas por meio da relação de invariância de forma,

$$\tilde{G}_n(\rho, s+n) = \tilde{F}_n(\rho, s+n+1).\quad (330)$$

Por fim, deve-se retornar as funções originais  $f_\kappa(r)$  e  $g_\kappa(r)$ , usando  $\rho = Er$ , além de:

$$\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{F} \end{pmatrix}\quad (331)$$

e

$$\begin{cases} f = \frac{1}{r} F \\ g = \frac{1}{r} G \end{cases}.\quad (332)$$

## 7 O Poço Circular Infinito

Neste capítulo, fazemos um estudo mais aprofundado de um problema bastante interessante: o do poço circular infinito. Trata-se de um problema em duas dimensões não trivial que possibilita a análise de diversos detalhes adicionais. Primeiramente, apresentamos o problema do ponto de vista da Mecânica Quântica tradicional. Em seguida, aplicamos os conceitos da MQ SUSI para estudar o potencial parceiro. Por fim, investigamos como o sistema se comporta sob a ação de um campo magnético uniforme perpendicular ao plano do poço.

### 7.1 Poço Circular

A Mecânica Quântica supersimétrica tem aplicações muito interessantes em problemas que envolvem simetrias (SUN; DONG, 2010). Este é o caso do poço circular infinito (ROBINETT, 2003), que apresenta simetria radial em duas dimensões. O sistema de coordenadas polares é adequado para o tratamento do problema. A Figura 10 apresenta um esboço dos limites de tal poço de raio  $L$ . Um ponto no interior da região pode ser localizado pelas coordenadas  $(r, \theta)$ , que se relacionam com as retangulares da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (333)$$

ou

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (334)$$

Para a energia potencial,

$$V(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r < L \\ \infty & , \quad r \geq L \end{cases}, \quad (335)$$

a equação de Schroedinger independente do tempo em coordenadas polares é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi(r, \theta) = E\psi(r, \theta). \quad (336)$$

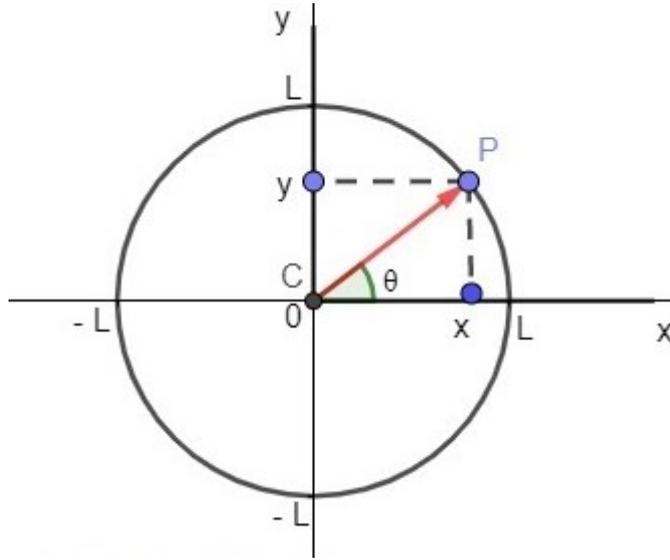
Mais uma vez, aplicamos o procedimento de separação de variáveis, escrevendo

$$\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \quad (337)$$

e obtendo as duas equações diferenciais,

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2\Theta \quad (338)$$

Figura 10 – Poço Circular Infinito



Fonte: Elaborada pelo autor.

e

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (339)$$

com  $k^2 = 2\mu E/\hbar^2$ . Para a equação angular, obtemos uma solução simples dada por

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta}, \quad (340)$$

cuja condição de contorno,  $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$ , nos impõe  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Quanto à parte radial, trata-se da equação de Bessel cilíndrica, com soluções  $J_m(kr)$  e  $N_m(kr)$ . As soluções  $N_m(kr)$  divergem para  $r \rightarrow 0$  e, portanto são descartadas. Ficamos com as funções de Bessel  $J_m(kr)$  de ordem  $m$ , que devem respeitar a condição de contorno  $J_m(kL) = 0$ . Chamamos  $\beta_{mn}$  à  $n$ -ésima raiz da função de Bessel de ordem  $m$ . Assim,  $k_{mn} = \beta_{mn}/L$ , de forma que as energias quantizadas para o poço circular serão dadas por

$$E_{mn} = \frac{\beta_{mn}^2 \hbar^2}{2\mu L^2}. \quad (341)$$

Os primeiros valores para os níveis de energia são dados por

$$\begin{aligned} E_{01} &\approx 5,78 \frac{\hbar^2}{2\mu L^2}, & E_{02} &\approx 30,47 \frac{\hbar^2}{2\mu L^2}, \\ E_{11} &\approx 14,68 \frac{\hbar^2}{2\mu L^2}, & E_{12} &\approx 49,22 \frac{\hbar^2}{2\mu L^2}. \end{aligned} \quad (342)$$

### 7.1.1 O Poço Circular e a Supersimetria

O tratamento do poço infinito circular pode ser realizado de uma maneira muito elegante usando os procedimentos da Mecânica Quântica Supersimétrica. Primeiramente, considerando a

equação radial (339), fazemos a substituição  $R(r) = u(r)/\sqrt{r}$  para obtermos

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{8\mu} \frac{(4m^2 - 1)}{r^2} \right] u_{mn}(r) = E_{mn} u_{mn}(r), \quad (343)$$

que se reduz a uma equação de Schroedinger unidimensional com potencial efetivo

$$V_m(r) = \frac{\hbar^2}{8\mu} \frac{(4m^2 - 1)}{r^2}. \quad (344)$$

Para um determinado valor de  $m$ , a energia do estado fundamental é dada por

$$E_{m1} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\beta_{m1}^2}{L^2}, \quad (345)$$

de forma que, para cada valor de  $m$ , este valor será subtraído do correspondente Hamiltoniano  $H_m$ , a fim de que a energia de ponto zero do Hamiltoniano  $H_m^{(1)}$  seja nula. Além disso, para simplificar, os fatores  $\frac{\hbar^2}{2\mu}$  serão ignorados. Posteriormente, eles poderão ser reinseridos por meio de uma análise dimensional. A fim de melhorar a notação, definimos o novo índice  $p = n - 1$ , tal que  $p = 0, 1, 2, \dots$ . A partir de agora, o segundo índice sempre se referirá a  $p$ . Ficamos com a equação

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(4m^2 - 1)}{4r^2} - \delta_{m0}^2 \right] u_{mp}(r) = \epsilon_{mp} u_{mp}(r), \quad (346)$$

em que  $\delta_{mp} = \frac{\beta_{mp}}{L}$ ,  $\epsilon_{mp} = E_{mp} - \delta_{m0}^2$  e na qual identificamos

$$V_m^{(1)} = \frac{(4m^2 - 1)}{4r^2} - \delta_{m0}^2. \quad (347)$$

Por sua vez, o superpotencial será dado por

$$W_m(r) = -\frac{u'_{m0}}{u_{m0}}, \quad (348)$$

em que  $u'_{m0} \equiv \frac{d}{dr} u_{m0}(r)$ , a partir do qual obtemos os operadores

$$A_m = \frac{d}{dr} + W_m(r) \quad \text{e} \quad A_m^\dagger = -\frac{d}{dr} + W_m(r). \quad (349)$$

Os Hamiltonianos e potenciais parceiros se relacionam com os operadores e o superpotencial, respectivamente, da seguinte forma:

$$H_m^{(1)} = A_m^\dagger A_m; \quad H_m^{(2)} = A_m A_m^\dagger \quad (350)$$

e

$$V_m^{(1)} = W_m^2 - W_m'; \quad V_m^{(2)} = W_m^2 + W_m'. \quad (351)$$

Chamamos a atenção para o fato de termos um par de potenciais parceiros para cada valor de  $m$ . Para iniciar o procedimento, precisamos do estado fundamental, que é a solução da Equação (346) para  $\epsilon_{mn} = 0$ , dada por

$$u_{m0}(r) = \sqrt{r} J_m(\delta_{m0} r). \quad (352)$$

Além disso, serão necessárias algumas relações entre as funções de Bessel cilíndricas e as suas derivadas em relação a  $r$ ,

$$J_{m+1}(ar) = \frac{m}{ar} J_m(ar) - J'_m(ar) \quad \text{e} \quad J_{m-1}(ar) = \frac{m}{ar} J_m(ar) + J'_m(ar), \quad (353)$$

e outras que delas podem ser obtidas. O superpotencial, então, é facilmente encontrado,

$$W_m(r) = -\frac{1}{2r} - \delta_{m0} \frac{J'_m(\delta_{m0} r)}{J_m(\delta_{m0} r)}, \quad (354)$$

e pode ser utilizado para a obtenção dos potenciais parceiros. O potencial  $V_m^{(1)}$ , já explicitado anteriormente, é facilmente recuperado com o auxílio das relações (353). O seu parceiro supersimétrico, por outro lado, pode ser obtido a partir de (vide equação (351))

$$V_m^{(2)}(r) = V_m^{(1)}(r) + 2W'_m(r). \quad (355)$$

Encontramos

$$V_m^{(2)}(r) = \frac{3}{4r^2} + \frac{J'_m}{J_m^2} \left( J'_m + \frac{1}{r} J_m \right), \quad (356)$$

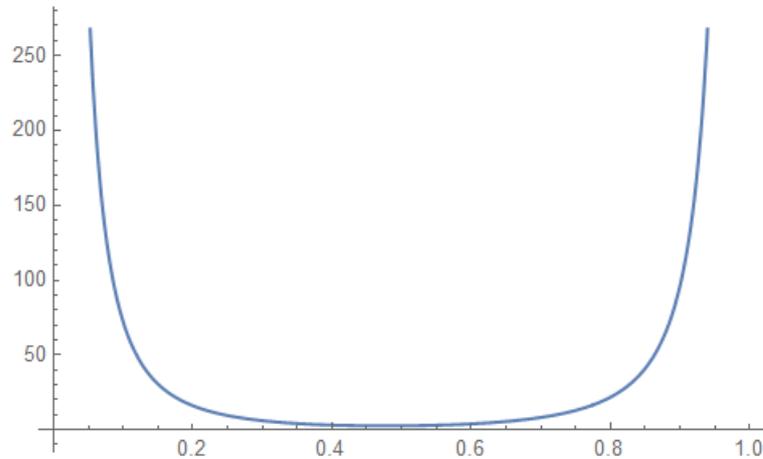
em que todas as funções de Bessel são calculadas em  $\delta_{m0} r$ . O gráfico da Figura 11, mostra o potencial parceiro  $V_m^{(2)}(r)$  para  $m = 0$ , com o raio do poço  $L = 1$ . Por sua vez, a Figura 12 apresenta o superpotencial para  $m = 0$ . Nota-se que as condições para supersimetria não quebrada são respeitadas, como, por exemplo, possuir um número ímpar de zeros no domínio sob estudo.

Os níveis de energia em unidades de  $\hbar^2/(2\mu)$ , com  $L = 1$ , serão dados por

$$\epsilon_{m,p}^{(1)} = \beta_{m,p}^2 - \beta_{m,0}^2 \quad \text{e} \quad \epsilon_{m,p}^{(2)} = \epsilon_{m+1,p}^{(1)}. \quad (357)$$

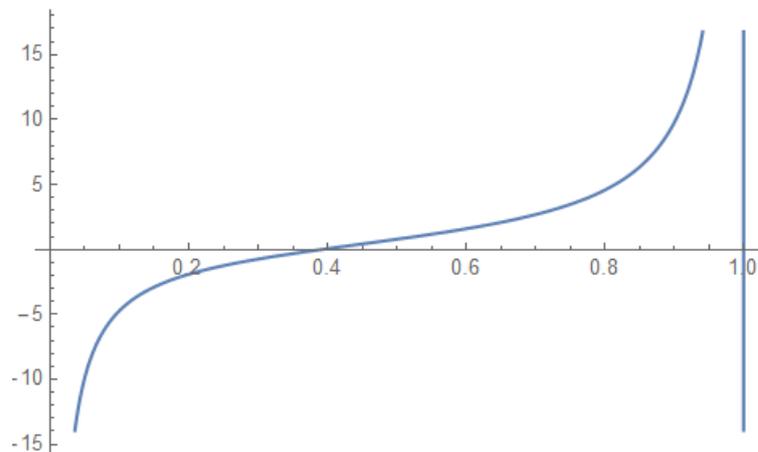
Os autoestados correspondentes poderão ser obtidos pelas sucessivas aplicações dos operadores  $A_m$  e  $A_m^\dagger$  nas autofunções de  $H_m^{(2)}$  e  $H_m^{(1)}$ , respectivamente.

Figura 11 – Potencial  $V_0^{(2)}(r)$  para  $L = 1$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Superpotencial para  $m = 0$  e  $L = 1$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 7.1.2 O Potencial Circular com Fluxo Magnético pelo Centro

É interessante estudar a influência de um fluxo magnético pelo centro do potencial circular na supersimetria quântica. Consideremos uma linha de fluxo perpendicular ao plano. Como  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  e  $A_r = 0$ , temos:

$$A_\varphi = \frac{\hbar c \alpha}{e r}, \quad (358)$$

sendo  $\alpha$  adimensional e parametrizando a intensidade do fluxo magnético.

O efeito da interação eletromagnética pode ser obtido pelo deslocamento no momento linear,

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} = \left( p_r, p_\varphi - \frac{e}{c} A_\varphi \right), \quad (359)$$

de forma que teremos, para efeito de determinação do Hamiltoniano,

$$p_r^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (360)$$

e

$$\left( p_\varphi - \frac{e}{c} A_\varphi \right)^2 = \frac{1}{r^2} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} - \hbar\alpha \right)^2. \quad (361)$$

Sendo  $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ , temos:

$$\frac{p^2}{2\mu} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2\mu r^2} (L_z - \hbar\alpha)^2, \quad (r < L). \quad (362)$$

Assim, o efeito do fluxo é substituir, nas soluções,  $m$  por  $m - \alpha$  e  $-m$  por  $\alpha - m$ .

Retornando à equação radial (343),

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{8\mu} \frac{(4m^2 - 1)}{r^2} \right] u_{mn}(r) = E_{mn} u_{mn}(r),$$

na qual se identifica o potencial efetivo,

$$V_m(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{r^2},$$

fazemos a substituição  $m \rightarrow m - \alpha$ . Ficamos, então, com o novo potencial

$$U_m = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{(m^2 - 2m\alpha + \alpha^2 - \frac{1}{4})}{r^2}. \quad (363)$$

Um caso interessante se dá quando admitimos um fluxo fracionário, tal que  $\alpha = \frac{1}{2}$ , que, em consequência, nos dará um potencial efetivo

$$U_m(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{m(m-1)}{r^2} \right]. \quad (364)$$

O quantum de fluxo magnético é uma quantidade física já conhecida. A quantização do fluxo aparece no contexto da física do estado sólido, nas teorias da supercondutividade (TINKHAM, 2004) e do efeito Hall quântico fracionário (JAIN, 2007). Em certas configurações, solenoides carregando um semifluxon podem ser usados como barreiras topológicas de energia para sistemas quânticos com carga. Este fenômeno pode ser interpretado como consequência do efeito Aharonov-Bohm (PAIVA et al., 2019). Ainda na área da supercondutividade, a quantização do fluxo magnético semi-inteiro ocorre em anéis mesoscópicos de filmes finos supercondutores de beta-Bi2Pd, e se manifesta como uma mudança de fase na oscilação quântica da temperatura crítica (LI et al., 2019).

Nesse caso especial de  $\alpha = \frac{1}{2}$ , a equação do potencial circular quântico se transforma na equação do potencial esférico de Bessel, como mostramos a seguir. Quando a equação de Helmholtz é separada em coordenadas esféricas, a equação radial tem a forma

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0, \quad (365)$$

em que o parâmetro  $k$  vem da equação original de Helmholtz. Pelo comportamento da função de ângulo polar (equações de Legendre), a constante de separação deve ter esta forma, com  $n$  um inteiro não negativo. A equação (365) tem a virtude de ser autoadjunta, mas claramente não é a equação diferencial ordinária de Bessel. No entanto, se substituirmos

$$R(r) = \frac{Z(r)}{(kr)^{\frac{1}{2}}}, \quad (366)$$

a equação (365) torna-se

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + r \frac{dZ}{dr} + \left[ k^2 r^2 - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0, \quad (367)$$

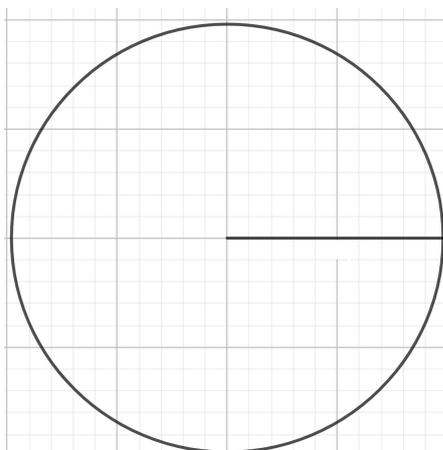
que é a equação de Bessel, tal que  $Z$  é uma função de Bessel de ordem  $n + \frac{1}{2}$ , e deve ser comparada com a equação (339) com a substituição  $m \rightarrow m + \frac{1}{2}$ . Devido à importância da simetria esférica, a combinação (366) ocorre frequentemente em problemas de física. Essa é a função esférica de Bessel, definida pela equação:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x). \quad (368)$$

Nas equações acima, as soluções  $y_n$  foram descartadas pela descontinuidade na origem. Em particular, para  $n = 0$ , podemos obter soluções supersimétricas  $V_1$  e  $V_2$  a partir da solução analítica do estado fundamental  $j_0 = \frac{\text{sen}(x)}{x}$  (o superpotencial será dado por  $\frac{j_0'}{j_0}$  e podemos obter supersimetria no potencial com fluxo).

Neste ponto, é interessante notar que a mesma solução pela equação esférica de Bessel é obtida por (ROBINETT, 2003), ao inserir uma “parede” refletora de 0 a  $R$  no eixo  $x$  do potencial circular quântico, conforme a figura 13. A possível interpretação física deste fenômeno está sob nossa investigação.

Figura 13 – Potencial circular com barreira refletora.



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 8 Discussão e Conclusões

Neste trabalho, verificamos, por meio do estudo de métodos de fatoração de Infeld e Hull, que consistem no método apresentado mais tarde por Erwin Schroedinger, podemos encontrar os potenciais e seus respectivos parceiros supersimétricos de forma mais eficiente e simples. A grande contribuição de Schroedinger na Mecânica Quântica foi fundamental para chegar ao que hoje temos de respostas adquiridas relativas a esses estudos. Schroedinger propõe uma solução de equações diferenciais de segunda ordem através de uma fatoração em duas equações de primeira ordem, elaborando, assim, um método muito eficaz.

Estudamos alguns potenciais através de aspectos da Mecânica Quântica Supersimétrica. Aspectos esses que vão desde os conceitos iniciais até uma estrutura mais bem elaborada, seja pelos ajustes de variáveis (parâmetros), seja pela separação de variáveis ou até mesmo por métodos mais abrangentes, tais como: invariância de forma; a álgebra que se aplica e as respectivas relações de comutação e anticomutação; relações de reflexão e transmissão; além da parte radial dadas pelas equações de Bessel. Fixamo-nos na apresentação dos diversos procedimentos da Mecânica Quântica Supersimétrica e na sua aplicação na solução alternativa de problemas bem conhecidos de Mecânica Quântica. Verificamos como são construídas soluções de forma elegante para problemas que se apresentam, muitas vezes, intrincados em sua formulação matemática convencional. Os estudos do átomo de hidrogênio, do potencial de Pöschl-Teller e da equação de Dirac foram trabalhados como exemplos na aplicação da supersimetria.

Vimos que, na maioria dos potenciais aqui estudados, suas interpretações não são tão simples. Ao explorarmos alguns campos da MQ SUSI, vimos que as aplicações de alguns métodos específicos auxiliam muito na obtenção de potenciais parceiros supersimétricos. Dentre eles podemos citar os estudos feitos pela fatoração de Hamiltonianos, matrizes de Pauli, e polinômios de Hermite, Laguerre e Jacobi. Esses estudos dão suporte ao entendimento e uma direção a seguir nos cálculos em busca de potenciais parceiros supersimétricos, utilizando como base a equação de Schroedinger. Deparamo-nos com situações em que encontrar soluções exatas para os sistemas estudados e para aqueles que por razões de alta complexidade de solubilidade (equações diferenciais de segunda ordem) permanecem em aberto.

Destacamos nesse trabalho uma discussão em torno de um potencial de poço infinito circular, que nos permitiu fazer uma pequena contribuição nessa área de estudo, com a apresentação do seu potencial parceiro supersimétrico. Em função de suas características de simetria, especial atenção foi dada à equação radial. Por meio de algumas substituições, recaímos em uma equação unidimensional de Schroedinger, a partir da qual fizemos diversas análises de consistência: na forma dos potenciais parceiros; nas propriedades do superpotencial; na supersimetria não quebrada. Foi também realizada uma análise do caso do sistema sob a influência de um fluxo magnético ortogonal ao plano circular. Sob determinadas condições, verificou-se uma redução ao problema de Bessel esférico, muito mais simples.

Por fim, deixamos claro que o objetivo deste trabalho não é o de esgotar o assunto em questão, mas sim, o de sugerir e contribuir para os estudos que se seguem e em uma direção no aprofundamento dos estudos realizados.

# Referências

BERNALD, L. G. D. **Uma discussão do espectro fóton-fotino em cenários com condensados fermiônicos e violação da simetria de Lorentz**. 2010. Tese (Doutorado) – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: [http://cbpfindex.cbpf.br/publication\\_pdfs/TesisLuis.2010\\_11\\_19\\_03\\_01\\_59.pdf](http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/TesisLuis.2010_11_19_03_01_59.pdf). Acesso em: 30 abr. 2023.

COOPER, F.; KHARE, A.; SUKHATME, U. **Supersymmetry in quantum mechanics**. Singapura: World Scientific Publishing Company, 2001.

FOCK, V. Verallgemeinerung und lösung der diracschen statistischen gleichung. **Zeitschrift für Physik**, Berlin, v. 49, n. 5, p. 339-357, 1928. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01337923>.

GANGOPADHYAYA, A.; MALLOW, J. V. Ab initio method for obtaining exactly solvable quantum mechanical potentials. **ArXiv**, Ithaca, 2007. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0708.2454>.

GANGOPADHYAYA, A.; MALLOW, J. V.; RASINARIU, C. **Supersymmetric quantum mechanics: an introduction**. Singapura: World Scientific Publishing Company, 2017.

GOMES, M. O. C. **Teoria quântica dos campos**. São Paulo: Edusp, 2002.

INFELD, L.; HULL, T. The factorization method. **Reviews of Modern Physics**, Hauppauge, v. 23, n. 1, p. 21, 1951. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.23.21>.

JAIN, J. K. **Composite fermions**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

JUNKER, G.; ROY, P. Conditionally exactly solvable potentials: a supersymmetric construction method. **Annals of Physics**, Amsterdam, v. 270, n. 1, p. 155-177, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1006/aphy.1998.5856>.

LABELLE, P. **Supersymmetry demystified**. New York: McGraw Hill Professional, 2010.

LI, Y. *et al.* Observation of half-quantum flux in the unconventional superconductor  $\beta$ -bi2pd. **Science**, New York, v. 366, n. 6462, p. 238-241, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.aau6539>.

MARKOVICH, T.; BIAMONTE, M.; KOURI, D. J. Supersymmetric quantum mechanics for atomic electronic systems. **ArXiv**, Ithaca, 2011. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1106.4603>.

NICOLAI, H. Supersymmetry and spin systems. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, New York, v. 9, n. 9, p. 1497, 1976. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/9/9/010>.

PAIVA, I. L. *et al.* Topological bound states for quantum charges. **Physical Review A**, College Park, v. 100, n. 4, p. 040101, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.040101>.

ROBINETT, R. Quantum mechanics of the two-dimensional circular billiard plus baffle system and half-integral angular momentum. **European Journal of Physics**, London, v. 24, n. 3, p. 231, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/24/3/302>.

SCHRÖDINGER, E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. **Proceedings of the Royal Irish Academy, Section A: Mathematical and Physical Sciences**, Dublin, v. 46, p. 9-16, 1940.

SILVA, A. J. **Mecânica quântica i-fma0403**. [São Paulo: Departamento de Física-Matemática USP, 2009].

STEDMAN, G. Simple supersymmetry: II. Factorisation method in quantum mechanics. **European Journal of Physics**, London, v. 6, n. 4, p. 225, 1985. DOI: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/6/4/002>.

SUKUMAR, C. Supersymmetry, factorisation of the schrodinger equation and a hamiltonian hierarchy. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, New York, v. 18, n. 2, p. L57, 1985. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/18/2/001>.

SUN, G. H.; DONG, S. H. New type shift operators for circular well potential in two dimensions. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 374, n. 40, p. 4112-4114, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.08.027>.

TANGERMAN, R.; TJON, J. Exact supersymmetry in the nonrelativistic hydrogen atom. **Physical Review A**, College Park, v. 48, n. 2, p. 1089, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.48.1089>.

TINKHAM, M. **Introduction to superconductivity**. Chelmsford: Courier Corporation, 2004.

WEINBERG, S. **The quantum theory of fields**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. v. 2.

WITTEN, E. Constraints on supersymmetry breaking. **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 202, n. 2, p. 253-316, 1982. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(82\)90071-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(82)90071-2).