CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

Modelagem baseada em equações diferenciais estocásticas não-lineares para dinâmica de preços

Qualificação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Solange Conceição de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Leonardo dos Santos Lima

Belo Horizonte - MG
28 de julho de 2023

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

"MODELAGEM BASEADA EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES ESTOCÁSTICAS PARA DINÂMICA DE PREÇOS".

Tese de Doutorado apresentada por **Solange Conceição de Oliveira**, em 23 de fevereiro de 2023, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

gov.br Documento assinado digitalmente
LEONARDO DOS SANTOS LIMA
Data: 24/02/2023 20:48:48-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Leonardo dos Santos Lima (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

gov.br Documento assinado digitalmente
ADELCIO CARLOS DE OLIVEIRA
Data: 01/03/2023 14:02:09-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira
Universidade Federal de São João del-Rei

gov.br Documento assinado digitalmente
FELIPE DIAS PAIVA
Data: 24/02/2023 21:23:09-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Felipe Dias Paiva
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

gov.br Documento assinado digitalmente
ADRIANO CESAR MACHADO PEREIRA
Data: 02/03/2023 13:04:11-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Adriano César Machado Pereira
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE LUIZ ACEBAL FERNANDES
Data: 27/02/2023 17:53:22-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. José Luiz Acebal Fernandes
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Modelagem Matemática e Computacional

Agradecimento

Agradeço a Deus, sem Ele nada seria possível.

Ao meu pai José e à minha querida mãe Lurdes (*in memorian*), meu muitíssimo obrigada pelo apoio, incentivo e o amor incondicional, durante toda a minha vida. À minha filha Jocasta, pelo companheirismo, amizade, apoio e paciência, amo você.

Aos meus irmãos, Cristina, José Roberto e Feliciana, e ao meu querido sobrinho Sérgio, sempre presentes em minha vida, obrigada por acreditarem em mim.

Ao meu amado namorado Jefferson, sou eternamente grata a você por ter estado ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis dessa caminhada.

Ao meu orientador Leonardo, obrigada pela paciência, pela amizade, sou grata por ter confiado em mim e ter me dado a oportunidade de realizar esse sonho.

Ao meu professor Allbens Attman, sou muito grata por ter me ajudado sempre que precisei, obrigada pelas práticas de yoga, aprendi muito com você.

Sou muito grata aos meus amigos, em especial a minha amiga Rafaela, que esteve sempre ao meu lado me apoiando e ajudando, obrigada por tudo, você é muito especial pra mim. Ao meu amigo e personal training, Henrique Tosatt, obrigada pelas conversas, pelos treinos animados e pelo apoio durante esses anos.

Ao CNPq, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, colaboraram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho serão estudados dois modelos, o primeiro é a equação diferencial estocástica de Ito com um potencial de interação polinomial não linear como um possível modelo para o mercado financeiro. A equação não linear de Langevin também foi proposta como modelo para flutuações e colisões no mercado de ações, onde esta equação é baseada na identificação de diferentes processos que influenciam a demanda e a oferta. Em geral dessa forma, a difusão de Itô tem sido muito utilizada como modelo bioeconômico com flutuações estocásticas. O segundo modelo é a Equação de Langevin do Vetor Girante, que pode ser usado para descrever o comportamento de um sistema de partículas rotativas com vetor girante, em um ambiente ruidoso com ruído branco estocástico, que se relaciona com o incremento de Wiener. Esse modelo pode representar um mercado financeiro sob condições extremas (mínimas e máximas) no processo, onde os preços tendem a ir para diferentes pontos fixos ou atratores. Será investigado o comportamento de distribuição da cauda longa das volatilidades para esses modelos e será aplicado o método da Análise de Flutuação destendenciada DFA (Detrended Fluctuation Analysis) às séries temporais obtidas.

Palavras-chave: Equação diferencial estocástica, DFA, distribuição da cauda longa.

Abstract

In this work two models will be studied, the first is the stochastic differential equation of Ito with a potential for nonlinear polynomial interaction as a possible model for the financial market. Langevin's nonlinear equation was also proposed as a model for fluctuations and collisions in the stock market, where this equation is based on the identification of different processes that influence demand and supply. In general, In this way, ItÃ´ diffusion has been widely used as a bioeconomic model with stochastic fluctuations. The second model is the Langevin Equation of the Rotating Vector, which can be used to describe the behavior of a rotating particle system with rotating vector, in a noisy environment with stochastic white noise, which relates to the Wiener increment. This model can represent a financial market under extreme conditions (minimum and maximum) in the process, where prices tend to go to different fixed or attractive points. The long-tail distribution behavior of volatilities will be investigated for these models and the Detrended Fluctuation Analysis (DFA) method will be applied to the time series obtained.

Keywords: Stochastic differential equation, DFA, long tail distribution

Lista de Abreviaturas e Siglas

DFA Detrended Fluctuation Analysis

AM amplitude modulada

EDE Equação Diferencial Estocástica

FDA Função de Distribuição Acumulada

FDP Função de densidade de probabilidade

dW(t) Integral de Ito

EDE Equação Diferencial Estocástica.

EDP Equação Diferencial Parcial.

FDA Função de Distribuição Acumulada.

FDP Função de Densidade de Probabilidade.

MB Movimento Browniano.

MMQ Método Mínimos Quadrados.

PE Processos Estocásticos.

Var Variância

r Retorno

$|\mathbf{r}|$ Volatilidade

Lista de Símbolos

α	Expoente de Correlação
γ	Expoente da Lei de Potência para Cauda Longa
ξ	Ruído Estocástico
ϵ	Sequência de variáveis aleatórias
ξ	ruido branco
Λ	Matriz Diagonal
σ	Desvio padrão.
Δt	Intervalo de Tempo

Sumário

1 Introdução **1**

2 Distribuição de lei de potência, escala, série temporal, aleatoriedade e mercados financeiros **3**

3 Dinâmica Estocástica **5**
3.1 Passeio Aleatório 5
3.2 Passeio Aleatório Unidimensional 6
3.3 Passeio Aleatório Bidimensional 9
3.4 Movimento Browniano 13
3.5 Ruído branco 14
3.6 Processo de Wiener 14
3.7 Equação de Langevin 15
3.8 Cálculo de Itô 18
3.8.1 Diferencial de Ito 21
3.8.2 Equação Diferencial Estocástica de Ito 21
3.9 Cálculo de Stratonovich 22
3.9.1 Equação Diferencial Estocástica de Stratonovich 23
3.10 Equação de Fokker Planck 25

4 Análise Estatística **27**
4.1 Volatilidade 27
4.2 Autocorrelação Temporal 28
4.3 Expoente de Hurst 28
4.4 Detrended Fluctuation Analysis - DFA 30
4.4.1 Passo 1 31
4.4.2 Passo 2 31
4.4.3 Passo 3 31
4.5 Lei cúbica inversa da distribuição de probabilidade acumulada para a volatilidade 31

5 Tópicos Sobre Mercados Financeiros **33**
5.1 Bolsa de Valores 33
5.1.1 Índice de Bolsa de Valores 34
5.1.2 As quedas do mercado de ações 35
5.2 Criptomoedas 37

6 Equação Diferencial Estocástica Não-Linear Como Modelo Para a Dinâmica De Preços **38**
6.1 Poço Duplo com Ruido Aditivo 38
6.2 Conclusões 44

7 Dinâmica Estocástica Bidimensional como Modelo para a Evolução Temporal do Mercado Financeiro **45**
7.1 Equação de Langevin do Vetor Girante 45
7.2 Conclusões 51

8 Cosiderações Finais **52**
8.1 Trabalhos futuros 53

Referências **54**

Lista de Figuras

3.1 Um corpo C imerso, sujeito aos choques das moléculas que compõem o líquido [1]. 5

3.2 - A figura publicada por Jean Perrin, mostra a trajetória de uma partícula executando movimento browniano. O movimento é extremamente irregular (a trajetória praticamente não apresenta tangentes), sendo mais ativo para temperaturas mais altas ou em fluidos menos viscosos. Observando-se uma mesma amostra por aproximadamente 20 anos concluiu-se que o movimento nunca cessa. [2] 13

5.1 Índice de preços das tulipas durante o período de 1636-1937. [1]. . . . 36

6.1 Potencial tipo poço duplo [3] 38

6.2 Série temporal gerada pelo modelo 6.5 com ruido aditivo, os parâmetros usados foram: $t = 100$; $\beta = 1$ e $\alpha = 1$. 39

6.3 Evolução no tempo de retorno $r(t) \approx S(t) = ln(X(t+\Delta t)) - ln(X(t))$, os intervalos de tempo utilizados na simulação são $\Delta t = 0,01$ 40

6.4 Série integrada $Y(i)$ 41

6.5 Ajunte Linear pelo Método dos Mínimos Quadrados. A série foi dividida em 10 janelas. 41

6.6 Função de Flutuação com 10 janelas. 42

6.7 Log Log do ajuste dos quadrados mínimos da lei da potência, que varia como $P(|r(t)|) \sim |r(t)|^{\gamma}$ para a distribuição de cauda longa. Foi obtido o expoente γ = -3,2508 42

7.1 Solução exata (X, Y) do conjunto de equações diferenciais estocásticas acopladas gerada pela equação Eq. 7.7 para $\beta = 0$ (linha azul) sem termo de ruído e para $\beta \neq 0$ (linha vermelha) caso com termo de ruído branco (Xi, Yi). Os parâmetros usados foram: $t = 100$; $w = 10$; $\beta = 1$, a condição inicial foi $X(0) = 1$ e $Y(0) = 0$. 47

7.2 Evolução no tempo de retorno $r(t) \approx S(t) = ln(X(t+\Delta t)) - ln(X(t))$. O gráfico mostra o comportamento dinâmico do retorno da série temporal $r(t)$. 47

7.3 Série integrada 48

7.4 Ajunte Linear pelo Método dos Mínimos Quadrados, a série foi dividida em 10 janelas. 49

7.5 Função de Flutuação: Gráfico de Log-Log usando o método DFA para log $(F(n))$ x $log(n)$ para as séries temporais de retornos. O expoente de correlação encontrado foi $\alpha \approx$ 0,36. 49

7.6 Densidade de probabilidade das volatilidades $P(|r(t)|)$ e $|r(t)|$. Foi obtido o expoente da lei de potência para cauda longa como $\gamma = 2{,}25$. 50

Capítulo 1

Introdução

A dinâmica dos preços do mercado financeiro foi estudada há algumas décadas por Black e Scholes com sua famosa equação para a dinâmica dos preços do mercado europeu [4]. Nas últimas décadas, houve uma grande quantidade de dados sobre este assunto [5]. A modelagem do mercado acionário deve simular a estrutura do mercado, o mecanismo de negociação e dinâmica de preços. Mike e Farmer [6] criaram um modelo comportamental empírico (o modelo MF) para simular o dinâmica de formação de preços das ações. Na sequência, Gu e Zhou [7] modificaram o modelo MF incorporando memória longa [8].

Em geral, os sistemas socioeconômicos são sistemas nos quais os eventos extremos ocorrem com mais frequência e exibem comportamentos complexos [9] [10]. Eles tem sido um excelente campo para a aplicação de conceitos e métodos matemáticos na física teórica para lidar com sistemas complexos [11]. Um modelo importante para o mercado financeiro é o modelo Ising bidimensional e suas extensões [12] [13]. Podemos considerar o preço s_i em um mercado como variável estocástica.

A "magnetização"do modelo Ising, $M = 1/N \sum_{i=1}^{N} s_i(t)$, pode ser interpretado como o retorno $r(t)$ e seu módulo como a volatilidade. O estudo da série temporal de volatilidade não é apenas crucial para revelar o sublinhado mecanismo da dinâmica dos mercados financeiros, mas também é útil para os investidores porque pode ajudá-los a estimar o risco e otimizar o portfólio [14]. Além disso, é bem sabido que as séries temporais financeiras parecem imprevisíveis e seus valores futuros são essencialmente impossíveis de prever [5]. As equações diferenciais estocásticas também são muitas empregadas no o mercado financeiro [13]. Além disso, um conjunto de equações diferenciais lineares também foi usado como um novo modelo de mercado onde cada variável corresponde a um único agente [14].

Outra coisa importante relacionada às finanças é a observação de leis de escala nos mercados financeiros, que é o comportamento generalizado da lei de potência exibido por grandes mudanças de preços. Isso é corroborado por praticamente todos os tipos de dados e mercados financeiros [15] [16]. A quantidade de interesse é a relativa mudança de preço ou retorno. A análise estatística dos retornos diários indica fortes evidências de comportamento hiperbólico das caudas da distribuição, sabendo que a distribuição de retornos é dado como $r(t) \approx S(t) = ln(X(t + \Delta t)) - ln(X(t))$ [5] e a distribuição de probabilidades cumulativas da cauda longa obedece a uma lei cúbica inversa $P(|r|) \approx |r|^{-\lambda}$, onde $\lambda \approx 3$ é o expoente da cauda. A

volatilidade é definida como o módulo do retorno, $g = |r(t)|$ [9].

Neste trabalho serão estudados dois modelos, sendo um deles uma equação diferencial estocástica de Ito como um possível modelo para o mercado financeiro. A equação não-linear de Langevin também foi proposta como modelo para flutuações e colisões no mercado de ações onde esta equação é baseada na identificação de diferentes processos que influenciam a demanda e a oferta [17]. O segundo modelo é a Equação de Langevin do Vetor Girante, que pode ser usado para descrever a comportamento de um sistema de partículas rotativas com vetor girante, em um ambiente ruidoso com ruido branco estocástico, que se relaciona com o incremento de Wiener. Assim esse modelo pode representar um mercado financeiro sob condições extremas (mínimas e máximas)no processo, onde os preços tendem a ir para diferentes pontos fixos ou atratores.

Pretende-se estudar esses modelos e verificar se eles são consistentes com fatos estilizados obedecidos pelos mercados e, portanto, se os modelos são adequados para os mercados financeiros.

A sequência do trabalho dá-se da seguinte forma: no capítulo 2 apresenta-se uma introdução sobre distribuição de lei de potência, escala, série temporal, aleatoriedade e mercados financeiros que foram os conceitos necessários para o desenvolvimento dessa pesquisa. No capítulo 3 foi apresentado alguns tópicos de dinâmica estocástica. No capítulo 4 foi feito uma análise estatística em alguns tópicos que foram relevantes para esse trabalho. Seguimos no capítulo 5 com uma breve revisão sobre mercado financeiro. Nos capítulos 6 e 7, foram apresentados os dois modelos que foram usados nesse trabalho, bem como os resultados obtidos. E por fim no capítulo 8 apresenta-se as considerações finais.

Capítulo 2

Distribuição de lei de potência, escala, série temporal, aleatoriedade e mercados financeiros

Eventos como terremotos, tempestades, tsunamis, ruptura de materiais de pontes e quebra de bolsas de valores ocorrem corriqueiramente ao redor do mundo e o desenvolvimento de ferramentas que possam prever esses eventos é algo de grande interesse por parte da comunidade científica. Há muito tempo os físicos vêm utilizando ferramentas oriundas da mecânica estatística e da física teórica para modelar sistemas complexos, mas as aplicações no mercado financeiro são mais recentes, diferentemente dos economistas e dos matemáticos os quais possuem longa tradição nos estudos financeiros [5].

Desde a década de 1970, tem-se observado uma série de mudanças no mundo financeiro. Com destaque para o ano 1973, que deu início a uma importante transformação nesse sistema, via unificação dos mercados financeiros, em escala global, e da inauguração das negociações de compra e venda de ações vinte e quatro horas por dia.

Nessa mesma época, Black-Scholes [4] publicaram o primeiro artigo que apresentava um modelo matemático do mercado financeiro, no qual o preço do ativo financeiro está inserido em um processo estocástico.

Já na década de 1980, uma segunda revolução foi iniciada, agora com a introdução do comércio eletrônico de ativos financeiros, onde o eixo central passou a ser a análise e interpretação de séries temporais financeiras (STF). Entre as características presentes nas séries temporais financeiras estão a volatilidade e não-estacionariedade [5].

A expressão *econofísica* surge com Mantegna e Stanley [18] em um congresso ocorrido em 1995, em Kalkuta, também é cunhado o termo. Essa expressão é um neologismo utilizado para o ramo da física dos sistemas complexos que procura fazer um levantamento completo das propriedades estatísticas dos mercados financeiros, usando o imenso volume de dados agora disponíveis e a metodologia de trabalho da física estatística [19].

Entretanto, antes do surgimento do termo econofísica, Mandelbroat [19] mostrou que o preço do algodão durante meio século se encaixava na distribuição no formato de lei de potência. Mandelbroat percebeu que distribuições normais não conseguiam

explicar as elevadas flutuações do preço do algodão, sendo que uma distribuição no formato de lei de potência se ajustava melhor aos dados. A lei de potência ou lei de Pareto foi originalmente estudada pelo economista Vilfredo Pareto que estava interessado na distribuição de renda na Itália em 1906. Ao invés de perguntar qual seria a enésima maior renda, ele perguntou quantas pessoas teriam uma renda maior do que x. Com isso, Pareto definiu sua distribuição da seguinte forma:

$$P[X > x] \approx (m/x)^{-k}, \tag{2.1}$$

onde m representa o menor salário, $m > 0$, $k > 0$, $x \geq m$, k é um índice de desigualdade, e quanto menor for este, mais desigual é a distribuição de renda. Essa expressão atesta que há muitos milionários e poucas pessoas modestas.

No caso de uma lei de potência a informação relevante não é quantas pessoas possuem salário maior do que x. Mas quantas pessoas recebem exatamente x. Neste contexto, a função de distribuição de probabilidade associada -FDP, associada com a FDA dada por Pareto.

$$P[X = x] \approx x^{-(k+1)} = x^{-\alpha} \tag{2.2}$$

Observe que no expoente da distribuição em lei de potência, $a = k + 1$, k é o parâmetro da distribuição de Pareto. De acordo com Gleria et al [20]:A lei de Pareto é uma lei de potência clássica. Graças a isso, algumas vezes as distribuições de Levy são chamadas de Pareto-Levy. Nos anos 2000, a econofísica amplia rapidamente sua abordagem e passa a estudar vários fenômenos que ocorrem não somente nos mercados financeiros, mas na economia em geral, suas aplicações vão desde o uso de análise fractal das distribuições dos retornos até modelos baseados em agentes evolucionários [21].

Capítulo 3

Dinâmica Estocástica

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias indexadas por elementos t pertencentes a determinado intervalo temporal. Intuitivamente, se uma variável aleatória é um número real que varia aleatoriamente, um processo estocástico é uma função temporal que varia aleatoriamente. De forma simplificada, podemos dizer que processos estocásticos são processos aleatórios que dependem do tempo [22].

3.1 Passeio Aleatório

Depois de muitas horas passadas num bar, um bêbado resolve voltar para casa. Só que ele não se lembra onde mora e começa a andar aleatoriamente pela cidade, a cada esquina, ele escolhe uma das quatro possíveis direções, sem preferência, e anda até o próximo quarteirão. No caminho, ele tenta calcular a probabilidade de passar em frente à sua casa. Intuitivamente, a ideia deste processo é descrever a trajetória de uma partícula que se move em apenas uma dimensão por meio de "passos aleatórios", com probabilidade P de avançar a próxima posição e probabilidade $1-p$ de retroceder a posição anterior.

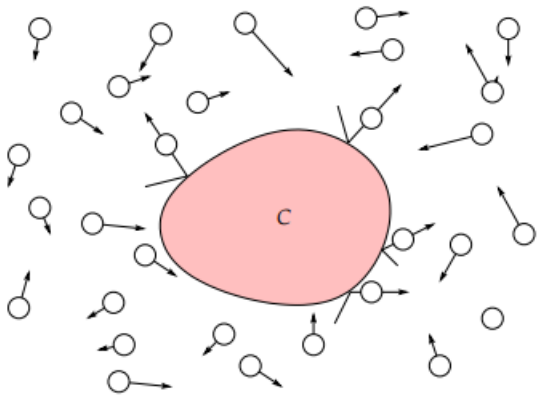

Figura 3.1: Um corpo C imerso, sujeito aos choques das moléculas que compõem o líquido [1].

Consideremos um corpo C imerso em um líquido e suponhamos que a densidade

de D seja igual à densidade do líquido, o que faz com que ele não afunde.

Do ponto de vista macroscópico, o líquido está em equilíbrio termodinâmico, em repouso, com pressão e temperatura fixa. Do ponto de vista microscópico, ele é composto de moléculas, cujas posições e velocidades mudam constantemente com o tempo. Portanto, o objeto está sob influência constante dos choques das moléculas contra a sua superfície, o que pode lhe comunicar alguma energia cinética.

Por um lado, se C for de tamanho muito maior do que o tamanho das moléculas, então os choques são uniformes na superfície do objeto: na média, eles se compensam e o corpo não ganha energia cinética. Por outro lado, se C for microscópico, porém mais pesado do que as moléculas, então, durante cada intervalo de tempo, a média dos choques não se compensa uniformemente na superfície e ele ganha um impulso. Já que as mudanças na escala molecular são muito mais rápidas do que o movimento do objeto, pode-se supor que o impulso ganho pelo objeto a cada instante é aleatório em direção e intensidade. Esse movimento aleatório foi observado pela primeira vez em 1826 pelo botânico Robert Brown, que observou partículas de pólen suspensas em um líquido. As partículas eram de massa bem maior do que as moléculas do líquido, mas leves o suficiente para sentir os choques [1].

O precursor destes modelos matemáticos foi o professor de francês, de nome Louis Bachelier (1870-1946), que estudou o passeio aleatório como modelo de comportamento dos mercados. Bachelier indicou corretamente que o passeio aleatório pode transformar-se em movimento browniano. Basta, para isso, considerar momentos cada vez mais curtos. Vistos de um Helicóptero, o bêbado comporta-se como os grãos de pólen de Brown.

Os trabalhos de Bachelier remontam a 1900, antecedendo assim os de Einstein, mas ficaram muito tempo esquecidos. O próprio estudo do passeio aleatório também teve os seus movimentos desordenados [23].

Apesar da importância das ideias apresentadas por Bachelier, que sustentam, direta ou indiretamente, todas as "grandes" teorias da Moderna Administração Financeira, elas apenas tornaram-se conhecidas do grande público acadêmico a partir da década de 1950. Período este que coincide com um dos principais estudos da citada corrente, que ainda hoje tem seus conceitos propagados de forma dominante.

Esse primeiro estudo aplicado é atribuído às pesquisas de Harry Max Markowitz. Em sua tese de doutorado em economia, Markowitz propôs um modelo de diversificação de ações, a partir do binômio risco-retorno, traduzida pelas medidas média e variância. A distribuição Gaussiana e o comportamento aleatório das ações, é pressuposto básico e essencial para a teoria de diversificação [24].

3.2 Passeio Aleatório Unidimensional

Considere uma partícula se movendo ao longo de uma reta, partindo da origem. A cada intervalo de tempo τ , ela salta uma distância h para a direita com probabilidade p e uma distância h para a esquerda com probabilidade $q = 1 - p$. Para descrever o movimento da partícula, introduzimos variáveis aleatórias independentes σ_1, σ_2, σ_3, ... que tomam os valores $+1$ ou -1 conforme o salto seja para a direita ou para a esquerda, respectivamente. A variável σ_j indica se no j - ésimo instante a partícula deve saltar para a direita ou para a esquerda e, portanto, ela toma o valor

$+1$ com probabilidade p e o valor -1 com probabilidade q. A posição da partícula no instante $t = n\tau$ será $x = hm$ onde $m = \sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma n$.

A média e variância de σ_j são dadas por

$$a = \langle \sigma_j \rangle = p - q \tag{3.1}$$

e

$$b = \left\langle {\sigma^2}_j \right\rangle - \langle \sigma_j \rangle^2 = 1 - (p-q)^2 = 4pq, \tag{3.2}$$

respectivamente. A função característica $g(k)$ da variável σ_j é

$$g(k) = \left\langle e^{ik\sigma_j} \right\rangle = pe^{ik} + qe^{ik}. \tag{3.3}$$

Para obter a probabilidade $P_n(m)$ de a partícula estar a m passos da origem após n intervalos de tempo, determinamos primeiro a correspondente função característica

Fazendo a expansão binomial

$$G_n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} p^l q^{n-l} e^{ik(2l-n)} \tag{3.4}$$

e comparando com a definição de $G_n(k)$, dada por

$$G_n(k) = \sum_{m=-n}^{n} P_n(m) e^{ikm}, \tag{3.5}$$

onde m toma os valores $-n, -n+2, \ldots, n-2$, e n, vemos que

$$P_n(m) = \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \left(\frac{n-m}{2}\right)!} p^{(n+m)/2} q^{(n-m)/2} \tag{3.6}$$

Para fazer a comparação acima é conveniente, primeiro, trocar de variável, no somatório, passando de ? para $m = 2l - n$. A média e a variância de m são dadas por

$$\langle m \rangle = na = n(p-q) \tag{3.7}$$

$$\left\langle m^2 \right\rangle - \langle m \rangle^2 = nb = 4npq. \tag{3.8}$$

Se desejarmos obter a distribuição de probabilidades para $n \geq 1$, basta utilizar o teorema central do limite já que as variáveis σ_1, σ_2, σ_3, ... são independentes.

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nb}} exp\left\{-\frac{(m-na)^2}{2nb}\right\}, \tag{3.9}$$

válido para $n \geq 1$. A densidade de probabilidade $\rho(x,t) = P_n(m)/h$ da variável x no instante t é dada por

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} exp\left\{-\frac{(x-ct)^2}{2Dt}\right\}, \tag{3.10}$$

$$c = \frac{ha}{\tau} = \frac{h(p-q)}{\tau} \tag{3.11}$$

e

$$D = \frac{h^2 b}{\tau} = \frac{h^2 4pq}{\tau}. \tag{3.12}$$

Obtemos ainda os resultados:

$$\langle x \rangle = ct \tag{3.13}$$

e

$$\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 = Dt, \tag{3.14}$$

que permitem dizer que c é a velocidade média da partícula e D o coeficiente de difusão.

que permitem dizer que c é a velocidade média da partícula e D o coeficiente de difusão. Vamos considerar em seguida um passeio aleatório unidimensional genérico. Suponha que a cada intervalo de tempo τ uma partícula se desloca de um valor x_j da posição onde se encontra. Supondo que ela parta da origem, a posição da partícula no instante $t = \tau n$ será $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Seja $P(x_j)$ a densidade de probabilidade de x_j e seja $g(k)$ a correspondente função característica, isto é,

$$g(k) = \left\langle e^{ikx_j} \right\rangle = \int P(x_j) e^{ikx_j} dx_j. \tag{3.15}$$

$$G(k) = [g(k)]^n. \tag{3.16}$$

Para obter a densidade de probabilidades da variável x para n grande, utilizamos a mesma técnica utilizada para a demonstração do teorema central do limite. Essa técnica equivale a expandir a função característica $g(k)$ em cumulantes até segunda ordem, isto é,

$$g(k) = e^{iAk - Bk^2/2} \tag{3.17}$$

desde que a média A e a variância B de x_j existam. Portanto,

$$G(k) = e^{inAk - nBk^2/2} \tag{3.18}$$

e lembrando que $t = n\tau$ e definindo $c = A/\tau$ e $D = B/\tau$, temos

$$G(k) = e^{ictk - Dtk^2/2} \tag{3.19}$$

de modo que a densidade de probabilidade $\rho(x,t)$ de x será

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} exp - \frac{(x-ct)^2}{2Dt} \tag{3.20}$$

É interessante notar que a densidade de probabilidade $\rho(x,t)$ para o problema do passeio aleatório unidimensional satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{3.21}$$

Essa é uma equação de difusão, com arrastamento, e é um caso particular das equações de Fokker-Planck. Os resultados 3.20 podem ser mais bem entendidos se examinarmos um sistema composto por um conjunto de muitas partículas que executam passeios aleatórios independentes. A densidade de partículas é proporcional à densidade de probabilidades ρ dada acima. Assim, se imaginamos que no instante inicial todas elas se encontram na origem, depois de algum tempo elas estarão espalhadas de acordo com a distribuição acima. Para tempos longos, a densidade de partículas será uma gaussiana centrada em $x = ct$ e com largura $\Delta = \sqrt{Dt}$.

3.3 Passeio Aleatório Bidimensional

Vamos considerar agora o caso de uma partícula se movimentando num espaço bidimensional. O caso de três ou mais dimensões pode ser tratado de modo semelhante. A cada intervalo de tempo τ , a partícula se desloca da posição anterior para uma nova posição. No j-ésimo intervalo de tempo denotamos o deslocamento por $r_j = (x_j, y_j)$. Supondo que no instante inicial a partícula esteja no origem do sistema de coordenadas, a posição da partícula no instante $t = n\tau$ será $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$. As variáveis $r_1, r_2, \cdots, r_n$ são pois consideradas variáveis aleatórias independentes, ou melhor, vetores aleatórios independentes, com um determinada distribuição de probabilidades $P(r_j) = P(x_j, y_j)$. A correspondente função característica $g(k) = g(k_1, k_2)$ será dada por

$$g(k) = \langle exp\left\{i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j\right\}\rangle = \langle exp\left\{i(k_1x_j + k_2y_j)\right\}\rangle \tag{3.22}$$

ou ainda por

$$g(k) = \int\int e^{i.\mathbf{k}.\mathbf{r}_j} P(\mathbf{r}_j)dx_jdy_j. \tag{3.23}$$

Notar que x_j e y_j podem não ser independentes. A função característica $G(k)$ correspondente ao vetor $\mathbf{r} = (x, y)$ é dada por

$$G(\mathbf{k}) = \left\langle e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}\right\rangle = \left\langle e^{i\mathbf{k}.(r_1+r_2+\cdots+r_n)}\right\rangle = \left\langle e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j}\right\rangle^n = \left[g(\mathbf{k})\right]^n. \tag{3.24}$$

Para obter a densidade de probabilidades do vetor aleatório $\mathbf{r}$ utilizamos a mesma técnica usada para demonstrar o teorema central do limite. Essa técnica equivale a usar a expansão de $g(k)$ em cumulantes até ordem k_2, isto é,

$$g(\mathbf{k}) = exp\left\{i(a_1k_1 + a_2k_2) - \frac{1}{2}(b_{11}k_1^2 + b_{12}k_1k_2 + b_{22}k_2^2)\right\}, \tag{3.25}$$

onde

$$a_1 = \langle x_j\rangle \;\; e \;\; a_2 = \langle y_j\rangle \tag{3.26}$$

são os cumulante de primeira ordem e

$$b_{11} = \left\langle x_j^2\right\rangle - \langle x_j\rangle^2, \tag{3.27}$$

$$b_{12} = \langle x_jy_j\rangle - \langle x_j\rangle\langle y_j\rangle \tag{3.28}$$

$$b_{12} = \langle x_jy_j\rangle - \langle x_j\rangle\langle y_j\rangle \tag{3.29}$$

$$b_{22} = \left\langle y_j^2\right\rangle - \langle y_j\rangle^2 \tag{3.30}$$

são os cumulantes de segunda ordem. Assim, para $t = n\tau$ grande temos

$$G(k) = exp\left\{in(a_1k_1 + a_2k_2) - \frac{n}{2}(b_{11}k_1^2 + 2b_{12}k_1k_2 + b_{22}k_2^2)\right\} \tag{3.31}$$

A densidade de probabilidade $P_n(r) = P_n(x, y)$ do vetor aleatório $r = (x, y)$ é obtida por

$$P_n(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int e^{-ik-r} G(k) dk_1 dk_2 \tag{3.32}$$

e será uma gaussiana bidimensional dada por

$$P_n(x, y) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{n^2 D}} \times exp\left\{-\frac{1}{2nD}\left[b_{22}(x - na_1)^2 + 2b_{12}(x - na_1)(y - na_2) + b_{11}(y - a_2)^2\right]\right\} \tag{3.33}$$

onde $D = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$

Exemplo. Suponha que a cada intervalo de tempo τ a partícula se desloque uma distância h na direção x ou na direção y com igual probabilidade. Nesse caso

$$P_n(x_j, y_j) = \frac{1}{4}\delta(x_j - h)\delta(y_j) + \frac{1}{4}\delta(x_j + h)\delta(y_j) + \frac{1}{4}\delta(x_j)\delta(y_j - h) + \frac{1}{4}\delta(x_j)\delta(y_j - h) \tag{3.34}$$

A função característica correspondente será

$$g(k_1 k2) = \left\langle e^{(k_1 x_j + k_2 y_j)} \right\rangle = \frac{1}{4}(e^{ihk_1} + e^{-ihk_1} + e^{ihk_2} + e^{-ihk_2}) \tag{3.35}$$

ou

$$g(k_1 k_2) = \frac{1}{2}(\cos hk_1 + \cos hk_2) \tag{3.36}$$

Para obter resultados válidos para n grande, utilizamos a expansão em cumulantes até ordem $\mathbf{k_2}$, dada por

$$g(k_1 k_2) = exp\left\{\frac{1}{4}h_2(k_1^2 + k_2^2)\right\} \tag{3.37}$$

Portanto

$$G(k_1 k_2) = exp\left\{-\frac{1}{4}nh_2(k_1^2 + k_2^2)\right\} \tag{3.38}$$

de modo que, tomando a anti-transformada de Fourier,

$$P_n(x, y) = \frac{1}{\pi n h_2} exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{nh^2}\right\} \tag{3.39}$$

Definindo o coeficiente de difusão $D = h^2/(2\pi)$, então a densidade de probabilidade $\rho(x, y, t)$ de x e y no instante t é dada por

$$\rho(x, y, t) = \frac{1}{2\pi Dt} exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2Dt}\right\} \tag{3.40}$$

É facil ver que $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = Dt$ e portanto $= \langle \mathbf{r^2} \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = 2Dt$.

Exemplo 2. Suponha que a cada intervalo de tempo τ a partícula se desloque uma distância fixa h em qualquer direção. Então, usando coordenadas polares, temos:

$$P(\mathbf{r}_j) dr_j d\theta_j = \frac{1}{2\pi} \delta(r_j - h) dr_j d\theta_j. \tag{3.41}$$

A função característica correspondente é dada por

$$g(\mathbf{k}) = \langle exp\left\{i(k_1 x_j + k_2 y_j)\right\}\rangle = \langle exp\left\{i(k_1 r_j \cos\theta_j + k_2 r_j \sin\theta_j)\right\}\rangle \tag{3.42}$$

ou

$$g(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} exp\left\{ih(k_1 \cos\theta_j + k_2 \sin\theta_j)\right\} d\theta_j. \tag{3.43}$$

Definindo k e ϕ de modo que $k_1 = k\cos\phi$ e $k_2 = k\sin\phi$ sejam as componentes cartesianas de $\mathbf{k}$, então

$$g(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} exp\left\{ihk\cos(\theta_j - \phi)\right\} d\theta_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} exp\left\{ihk\cos\theta_j\right\} d\theta_j \tag{3.44}$$

e portanto $g(k)$ só depende do módulo $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. A integral é a função de Bessel $J_0(hk)$. Entretanto, para obter o comportamento da densidade de probabilidade para n grande, necessitamos somente dos cumulantes de primeira e segunda ordem. Nesse caso temos $a_1 = a_2 = 0$,

$$b_{11} = \langle x_j^2 \rangle = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta_j P(\mathbf{r_j}) dr_j d\theta_j = \frac{1}{2} h^2, \tag{3.45}$$

$b_{12} = 0$ e $b_{22} = b_{11}$. Logo

$$g(\mathbf{k}) = exp\left\{-\frac{h^2}{4}(k_1^2 + k_2^2)\right\} \tag{3.46}$$

de modo que novamente obtemos a mesma distribuição de probabilidades do exemplo anterior.

3.4 Movimento Browniano

Existem diversos fenômenos biológicos, físicos, entre outros, baseados na aleatoriedade. Um exemplo clássico, de fundamental importância, em que podemos perceber a aleatoriedade está relacionado com o movimento dos preços de ativos e índices financeiros. Apesar disso, este não é o único exemplo em que temos significantes flutuações aleatórias. Por exemplo, em biologia, temos equações diferenciais que representam interações entre predadores e presas. Tais modelos, geralmente, são escritos utilizando modelos de equações diferenciais ordinárias. Entretanto, tais populações vivem em ambientes sujeitos a eventos aleatórios que não estão previstos nestas equações. A partir do teorema central do limite, assumimos que estas influências aleatórias dos processos são acumuladas de forma a tornarem-se uma distribuição normal. Neste sentido, um dos principais processos estocásticos é o movimento Browniano.

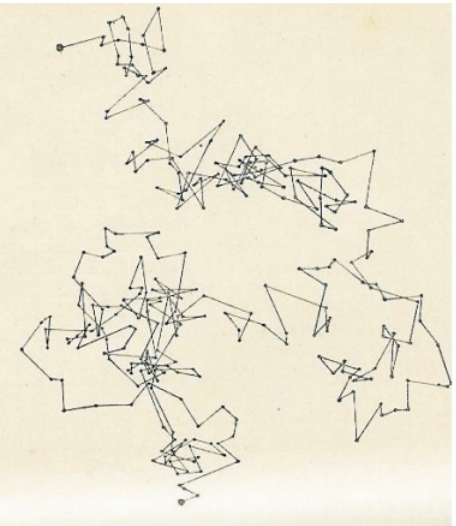

Figura 3.2: - A figura publicada por Jean Perrin, mostra a trajetória de uma partícula executando movimento browniano. O movimento é extremamente irregular (a trajetória praticamente não apresenta tangentes), sendo mais ativo para temperaturas mais altas ou em fluidos menos viscosos. Observando-se uma mesma amostra por aproximadamente 20 anos concluiu-se que o movimento nunca cessa. [2]

O movimento Browniano é um processo estocástico nomeado após o botânico Robert Brown observar em 1826 o movimento aleatório do pólen em seu microscópio. Inicialmente, ele imaginou que o pólen estivesse vivo e, por isso, estaria se movimentando [25]. Experimentos de laboratório mostraram que o movimento fica mais intenso quando se reduz a viscosidade do meio ou o tamanho das partículas brownianas, e também quando se eleva a temperatura da solução. Muitas causas possíveis foram aos poucos sendo eliminadas, tais como: atrações ou repulsões entre as partículas suspensas, ações capilares ou higrométricas, bolhas temporárias de ar, correntes de conveção no interior da solução, gradientes de temperatura ou algum tipo de perturbação mecânica, além de outros tipos de instabilidades no fluido. Somente a partir de 1860 começou a tomar forma o ponto de vista moderno de que o "zigue-zague" das partículas brownianas poderia ser devido ás colisões com as mo-

léculas do fluido. Verificou-se que suas trajetórias não apresentavam tangentes (ou seja, as curvas não seriam diferenciáveis), e também que o movimento randômico aparentemente nunca cessava. No entanto, a verdadeira causa do fenômeno permaneceu um mistério até 1905, quando finalmente foi elucidado por Einstein no seu artigo de 1905 [2].

3.5 Ruído branco

Um processo de ruído branco é definido como aquele que gera dados que parecem ser IID (Observações que parecem ser independentes e identicamente distribuídas). Recebe esse nome do fato de que nenhuma frequência ou padrão específico domina uma análise espectral de observações semelhante à luz branca, ou o ruído da estática emitida por um rádio AM que não está sintonizado em uma estação. O modelo para um processo de ruído branco é

$$W_t = \mu + \epsilon_t, \tag{3.47}$$

onde μ é uma constante, e ϵ_t é uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas distribuídas identicamente com média zero e variância finita para $t = 1, ..., T$. A distribuição de probabilidade de ϵ_t não é necessariamente normal, mas se for o processo é chamado de ruído branco gaussiano nomeado após o matemático do século XVIII, Carl F. Gauss, que estudou as propriedades da distribuição normal [26].

É claro que na natureza não existe ruido rigorosamente branco, pois todo PE tem um tempo de correlação finito. Existem, entretanto, circunstâncias em que o tempo de correlação de um PE é tão curto, na escala de tempo de interesse, que tratá-lo como ruido branco é uma boa aproximação. Consideremos, por exemplo, uma partícula coloidal num líquido. Esta partícula executará um movimento aleatório, chamado " movimento Browniano", em consequência dos incessantes choques ocorrem simultaneamente (ou quase), aplicando na partícula um impulso cuja intensidade e direção variam em tempos menores que nano-segundos, ou seja, muitas ordens de grandeza menores que as escalas de tempo de observação do movimento da partícula [3].

3.6 Processo de Wiener

Relacionado ao ruido branco $\xi(t)$ e de grande importância em cálculo estocástico, é o "Processo de Wiener" $W(t)$, que pode ser definido por

$$W(t) = \int_0^t \xi(t')dt'. \tag{3.48}$$

Algumas propriedades importantes $W(t)$ seguem facilmente de sua definição:

1. $\langle W(t) \rangle = 0$, que segue imediatamente de $\langle \xi(t) \rangle = 0$;

2. ⟨W(t)W(t')⟩ $= min(t, t')$, que se demonstra facilmente, usando a definição de $W(t)$ a função de correlação de $\xi(t)$;

3. $W(t)$ é um PE Markoviano, Gaussiano, pois sendo integral de um PE cujo tempo de correlação é zero, sua Markovianidade é imediata e sua Gaussianidade segue do teorema central de limite; tendo média zero e variância $\sigma^2 = t$, como segue da propriedade 2 acima, sua distribuição de probabilidade é, portanto,

$$Pw(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp \frac{-w^2}{2t} \tag{3.49}$$

3.7 Equação de Langevin

A equação de Langevin foi derivada em 1908 por Paul Langevin para estudar o movimento Brawniano e a difusão molecular como um método alternativo ao proposto por Einstein em 1905. A equação de Langevin de 1908 foi o primeiro exemplo de uma equação diferencial estocástica, mas uma base matemática adequada para resolve-la não esteve disponível até 40 anos mais tarde quando Ito formulou seu conceito para equações diferenciais estocásticas. A dinâmica de Langevin é a possibilidade mais simples na presença de flutuações estocásticas. Há um número crescente de aplicações contemporâneas, em vários problemas de física, química ou biologia, em que as flutuações desempenham papel relevante [27].

Supondo que o movimento browniano seja produzido pelas colisões das pequenas partículas com as moléculas do fluido, podemos escrever a equação de Langevin

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \alpha\vec{v} + \vec{F}_a(t), \tag{3.50}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade de uma partícula de massa m, $\vec{F}$ é uma força externa, α é a velocidade de atrito viscoso e $\vec{F}_a(t)$ é uma força aleatória (ou estocástica) que representa o bombardeamento incessante das moléculas do fluído. Vamos supor que $\vec{F}_a(t)$ seja independente da velocidade e que tenha uma variação muito rápida com o tempo (em relação às variações da partícula). Para simplificar a notação, vamos considerar uma situação unidimensional, com força externa nula (a generalização para três dimensões é imediata). Nesse caso, a equação de Langevin adquire a forma

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha v + F_a(t), \tag{3.51}$$

(i) Valor médio da força

A média amostral da força devido as colisões com as moléculas do meio deve ser nula, visto que, a probabilidade de passos para direita é igual a probabilidade de passos para esquerda.

$$\langle F_\alpha(t)\rangle = 0 \tag{3.52}$$

(ii) Correlação temporal

Para descrever a segunda propriedade, consideremos uma partícula imersa no líquido. Esta partícula é submetida a incessantes choques, adquirindo um impulso que varia aleatoriamente em módulo e direção característicos de um movimento browniano. Para uma escala de tempo de observação muito maior do que o tempo médio entre duas colisões consecutivas, as observações da partícula nos instantes t e t' podem ser consideradas independentes, ou seja, descorrelacionadas. Portanto, para colisões em tempos distintos t e t', podemos escrever a função de correlação na forma

$$\langle F_\alpha(t)F_\alpha(t')\rangle = B\delta(t-t') \tag{3.53}$$

onde B é uma constante indicando a independência das colisões.

Desta forma a equação 3.51 junto com as propriedades 3.52 e 3.53 constitui a denominada equação de Langevin. Dividindo a Equação por α, pode-se definir uma escala de tempo dependente da viscosidade definida por $\gamma = \dfrac{\alpha}{m}$. Sendo assim, a equação de Langevin pode ser escrita na forma

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \zeta'(t) \tag{3.54}$$

onde $\zeta'(t) = \dfrac{F_\alpha}{m}$ é a variável aleatória denominada ruido que varia em relação ao tempo de observação, sendo responsável pelo caráter estocástico da Equação 3.54,que possui as seguintes propriedades:

$$\langle \zeta'(t)\rangle = 0 \tag{3.55}$$

$$\langle \zeta'(t)\zeta'(t')\rangle = \Gamma'\delta(t-t') \tag{3.56}$$

onde $\Gamma' = \dfrac{B}{m^2}$.

Suponha que um sistema seja descrito por um conjunto de N variáveis $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$. A equação do movimento para esse sistema é dada pelo conjunto de equações

$$\frac{dx_i}{dt} = fi(x_1, x_2, ..., x_N) + \zeta_i(t) \tag{3.57}$$

para $i = 1, 2, ..., N$, onde as variáveis estocásticas $\zeta_1(t), \zeta_2(t), ..., \zeta_N(t)$ possuem as seguintes propriedades

$$\langle F(t) \rangle = 0 \tag{3.58}$$

$$\langle F(t)F(t') \rangle = B\delta(t - t') \tag{3.59}$$

As equações de Langevin 3.57 constituem, em geral, um conjunto acoplado de equações. O caso mais simples de um conjunto acoplado ocorre quando as funções f_i são lineares, isto é, quando

$$f_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j \tag{3.60}$$

Nesse caso as equações de Langevin são dadas por

$$\frac{d}{dt} x_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j + \zeta_i \tag{3.61}$$

e podem ser escritas na forma matricial

$$\frac{d}{dt} x = Ax + \zeta \tag{3.62}$$

onde x e ζ são matrizes colunas com elementos x_i e ζ_i, respectivamente, e A é a matriz quadrada, $N \times N$, cujos elementos são $A_i j$. Para resolver a equação matricial 3.62 determinamos, inicialmente, a matriz M que diagonaliza a matriz A (caso ela seja diagonalizável), isto é, determinamos M tal que

$$MAM^{-}1 = \Lambda, \tag{3.63}$$

onde Λ é a matriz diagonal cujos elementos Λ_i são os autovalores de A. Em seguida, construímos a matriz R(t) cujos elementos são

$$R_i j(t) = \sum_k M_{ik} e^{-\Lambda_k t} (M^{-}1)_{kj}, \tag{3.64}$$

ou seja,

$$R = MD(t)M^{-1}, \tag{3.65}$$

onde D(t) é a matriz diagonal cujos elementos são $D_k(t) = e^{-\Lambda_k t}$. Derivando ambos os membros de 3.64 com relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt}R(t) = M\Lambda D(t)M^{-1} \tag{3.66}$$

Mas, tendo em vista que $M\Lambda = AM$, o lado direito dessa equação se torna igual a $AR(t)$, de modo que

$$\frac{d}{dt}R(t) = AR(t) \tag{3.67}$$

A solução geral da equação 3.62 se obtém com a ajuda de $R(t)$. Para a condição inicial $x(0) = x_0$, a solução é dada por

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t-t')\zeta(t')dt' \tag{3.68}$$

que pode ser verificada por substituição direta em 3.62, usando a propriedade 3.67 e levando em conta que $R(0) = I$ onde I é a matriz identidade [28].

3.8 Cálculo de Itô

Para um bom entendimento do conceito de integral estocástica é necessário entender primeiro o conceito de convergência em média quadrática. Seja $X_1, X2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias. Se dissermos que esta sequência converge quando n tende a infinito, para a variável aleatória X, não estamos sendo claros. Como X_n convergir para X. Há, na teoria de variáveis aleatórias, muitas definições alternativas de convergência, como se pode encontrar, por exemplo, no livro do Gardiner [13]. Interessa-nos, para o cálculo estocástico, a convergência em média quadrática: Dizemos que X_n *converge em média quadrática* para X se

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle (X_n - X)^2 \right\rangle = 0 \tag{3.69}$$

Dizemos, então que o limite em média quadrática de X_n é X, o que representamos por

$$ms - \lim_{n\to\infty} X_n = X \tag{3.70}$$

Consideremos, em especial, situações em que as variáveis aleatórias da sequência são funções de processo estocásticos, isto é, $Xn = Xn(t)$ e $X = X(t)$. Neste caso a média indicada na equação 3.69 é uma média sobre realizações do PE,

$$\left\langle (X_n(t) - X(t))^2 \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{R=1}^{N}(x_{n,R}(t) - x_R(t))^2 \tag{3.71}$$

onde $x_{n,R}(t)$ é o valor que adquire a função x_n na realização R de X, no instante t. Como cada termo da equação 3.71 é positivo ou nulo, para que $\langle (X_n(t) - X(t))^2 \rangle$ seja nulo, realizações para as quais $x_{n,R}(t) \neq x_R(t)$, se houver, devem ser tão raras que sua contribuição para a média é nula. É claro que se os X_n forem variáveis não aleatórias, o limite em média quadráticas coincide com o limite usual do cálculo.

Seja $G(X(t), t)$ uma função do PE $X(t)$ e, possivelmente, função explícita de t. Por sua vez, $X(t)$ depende de $W(t)$, no sentido de que cada realização de $W(t)$ corresponde uma realização de $X(t)$. Geralmente, nas situações de interesse, $X(t)$ é solução de valor de $X(t)$ só é influenciado pelos valores de $W(t_0)$ como ruído. O valor de $X(t)$ só é influenciado pelos valores de de $W(t')$, com $t' \leq t$, ou seja, $X(t)$ e as variações de $W(t')$ em tempos posteriores a t são variáveis aleatórias independentes. Esta propriedade se expressa em cálculo estocástico pela qualificação "não antecipadora" para a variável $X(t)$. Defini-se a **Integral de Ito** de $G(X(t), t)$,de t_0 a t, por

$$\int_{t_0}^{t} G(X(t'), t') \bullet dW(t') = ms - \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=0}^{N} G(X(t_n, t_n) \Delta W(t_n) \tag{3.72}$$

onde

$$\begin{aligned} N &= (t - t_0)/\Delta t \\ t_n &= t_0 + n\Delta t \\ \Delta W(t_n) &= W(t_{n+1}) - W(t_n) \end{aligned} \tag{3.73}$$

O símbolo $\bullet dW(t')$ é usado na Equação 3.72 para indicar que a integral é a de Ito. Na próxima seção veremos a integral de Stratonovich, que tem uma definição diferente da de Ito. Algumas propriedades notáveis das integrais de Ito devem ser mencionadas:

1. As regras de integração são, geralmente, diferentes das regras de integração do cálculo usual; por exemplo,

$$\int_{t_0}^{t} W(t') \bullet dW(t') = \frac{1}{2} \left[W(t)^2 - W(t_0)^2 - (t - t_0) \right] \tag{3.74}$$

2. Integrais de potência inteiras de W(t) também têm solução conhecida:

$$\int_{t_0}^{t} W(t') \bullet dW(t') = \frac{1}{n+1} \left[W(t)^{n+1} - W(t_0)^{n+1} \right] - \frac{n}{2} \int_{t_0}^{t} W(t')^{n-1} dt', \tag{3.75}$$

onde a última integral, à direita, é uma usual integral de Riemann.

3. A média sobre realizações de qualquer integral de Ito é nula,

$$\left\langle \int_{t_0}^{t} G(X(t'), t') \bullet dW(t') = 0 \right\rangle \tag{3.76}$$

Com efeito, nas equações 3.72 e 3.73 está claro que $X(t_n)$ só depende dos valores assumidos por W entre t_0 e t_n enquanto que $\Delta W(t_n)$ é a variação de W no intervalo posterior a t_n, e portanto, independente da $X(t_n)$; logo, a média do produto é o produto das médias e como $\langle \Delta W(t_n) \rangle = 0$ segue a Equação 3.76.

4. Integrais de Ito cujas medidas de integração são potências do incremento de Wiener:

   A Integral de Ito também pode ser definida com qualquer potência de dW como medida de integração,

$$\int_{t_0}^{t} G(X(t'), t') \bullet (dW(t'))^m = ms - \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=0}^{N} G(X(t_n, t_n) \Delta W(t_n)^m \tag{3.77}$$

   Pode se demonstrar que

$$\int_{t_0}^{t} G(X(t'), t') \bullet (dW(t'))^2 = \int_{t_0}^{t} G(X(t'), t') dt' \tag{3.78}$$

$$\int_{t_0}^{t} G(X(t'), t') \bullet (dW(t'))^m = 0 \; para \; m > 2. \tag{3.79}$$

   Além disso,

$$\int_{t_0}^{t} G(X(t'), t') \bullet dW(t') dt = 0 \; para \; m > 2. \tag{3.80}$$

   Como $(dW(t))^m$ só é usada em integrais, pode-se escrever, por simplicidade, as seguintes relações diferenciais de Ito:

$$\begin{aligned} (dW(t))^2 \\ dW(t)dt = 0 \\ (dW(t))^m = 0, \; para \; m > 2. \end{aligned} \tag{3.81}$$

3.8.1 Diferencial de Ito

Consideremos uma função "bem comportada" de t e de W, $F(t) \equiv F(W(t);t)$ ou seja, F depende de t através de $W(t)$, podendo também depender explicitamente de t. Embora $W(t)$ depende de t de forma "não diferenciável", estamos supondo que F depende de W de forma diferenciável (por ex. $F = W^m$). A diferencial de F é obtida por expansão de Taylor até ordem $dt^1 = dt$,

$$dF(t) \equiv F(t+dt) - F(t) = \frac{\partial F}{\partial W} dW(t) + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial W^2}(dW(t))^2 \ldots \quad (3.82)$$

ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial W} dW(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial W^2}\right) dt, \quad (3.83)$$

3.8.2 Equação Diferencial Estocástica de Ito

Vamos considerar a equação de Langevin na forma integrada,

$$\Delta X(t) \equiv X(t+\Delta t) - X(t) = \int_t^{t+\Delta t} A(X(t'),t')dt' + \int_t^{t+\Delta t} B(X(t'),t')\xi(t')dt'. \quad (3.84)$$

Já vimos que, no limite $\Delta t \to dt$, $A(X(t'),t')$ pode ser substituído por $A((t),t)$ no integrando da primeira integral acima. O mesmo procedimento não pode ser empregado na integral, por causa do fator $\xi(t')$ que torna qualquer ponto do integrando descorrelacionado de qualquer outro ponto. Para esclarecer melhor este ponto vamos supor que em vez de substituirmos $B(X(t'),t')$ por $B(X(t),t)$ fazemos a substituição

$$B(X(t'),t') \Rightarrow B\left(\frac{X(t)+X(t+\Delta t)}{2}, t\right) \quad (3.85)$$

ou seja, tomamos como argumento de B a média entre os valores de X no início e no fim do intervalo de integração, o que certamente corresponde a uma aproximação melhor para a integral. Neste caso

$$\Delta X(t) = A(X(t),t)\Delta t + B\left(X(t) + \frac{1}{2}\Delta X(t), t\right)\Delta W(t), \quad (3.86)$$

pois

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \Delta X(t)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \xi(t')dt' = \Delta W(t).$$

Iterando a Equação 3.86 em ΔX, isto é, substituindo o ΔX que aparece no argumento de B pelo valor de ΔX dado pela própria Equação 3.86 e expandindo de B em série de Taylor segue

$$\Delta X(t) = A(X(t),t)\Delta t + B(X(t),t)\Delta W(t)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial X}\left[A(X(t),t)\Delta t + B(X(t),t)\Delta W(t) + \ldots\right]\Delta W(t) + \ldots$$

Tomando agora o limite infinitesimal, $\Delta t \to dt$, $\Delta X \to dX$, $\Delta W \to dW$ e desprezando os termos de ordem maior que dt^1, vem

$$dX(t) = A(X(t),t)dt + B(X(t),t) \bullet dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial X}B(X(t),t)(dW(t))^2, \quad (3.87)$$

ou seja

$$dX(t) = A^{(1)}(X(t),t)dt + B(X(t),t) \bullet dW(t), \quad (3.88)$$

onde definimos

$$A^{(1)}(X(t),t) + \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial X}B(X(t),t) \quad (3.89)$$

e usamos a Equação 3.81. A Equação 3.88 se chama " Equação Diferencial Estocástica de Ito (EDE-Ito)". Ela corresponde à forma usual de se substituir a equação de Langevin com ruído branco, não muito bem definida matematicamente, por uma equação diferencial bem definida, em cálculo de Ito. Por isso ela também é conhecida por " Equação de Ito-Langevin".

3.9 Cálculo de Stratonovich

A principal diferença entre os cálculos de Ito e de Stratonovich decorre das diferentes definições de integral estocástica. A integral de Stratonovich de uma função $G(X(t'),t')$ é definida por

$$\int_{t_0}^{t} G(X(t'),t')dW(t') = ms - \lim_{\Delta t \to 0}\sum_{n=0}^{N} G\left(\frac{X(t_n)+X(t_{n+1})}{2}, t_n\right)\Delta W(t_n) \quad (3.90)$$

Note que o argumento de B é a média aritmética entre valores de X no início e fim do intervalo $[tn, t_{n+1}]$.

Quando $X(t)$ pode ser escrito explicitamente como função de $W(t)$ as regras de integração são as mesmas que as das integrais de Riemann (cálculo usual).

$$\int_{t_0}^{t} W(t')dW(t') = \frac{1}{2}\left[W(t)^2 - W(t_{t_0})^2\right]. \tag{3.91}$$

O cálculo de Stratonovich foi construído como o limite branco (i.e., limite para tempo de correlação indo a zero) de processo estocástico com ruído colorido (i.e., ruído com tempo de correlação finito). Por isso quando os físicos escrevem uma equação de langevin para um sistema de Natureza, o ruído branco é usado neste sentido, ou seja, como o tempo de correlação do ruído é muito pequeno na escala de tempo característica do fenômeno que se quer descrever, ele é modelado por ruído branco. Baseado nisto se vê que, ressalvadas as exceções, uma equação de Langevin da Física deve ser interpretada no sentido de Stratonovich. Devemos enfatizar, entretanto, que o cálculo de Ito tem seus próprios méritos. Em primeiro lugar, ele está assentado sobre bases matemáticas mais sólidas e transparentes que o cálculo de Stratonovich. Por isso várias da propriedades de cálculo de Stratonovich são obtidas a partir do cálculo de Ito, fazendo-se as modificações apropriadas. E também deve-se levar em consideração que a programação numérica das soluções de equações estocásticas é muito mais simples com o cálculo de Ito, motivo pelo qual a ampla maioria dos pesquisadores utiliza-o em vez de Stratonovich nos casos de ruído multiplicativo.

3.9.1 Equação Diferencial Estocástica de Stratonovich

Voltemos a Equação 3.86. No limite $\Delta t \to 0$, ou seja, fazendo as substituições $\Delta t \to dt$, $\Delta X \to dX$ e $\Delta W \to dW$, já se tem uma equação diferencial estocástica de Stratonovich. Entretanto, não é usual escrever uma equação diferencial tendo diferenciais como argumentos de funções. Por isso usa-se o procedimento equivalente de escrever a equação diferencial simplesmente na forma

$$dX(t) = A(X(t), t)dt + B(X(t), t)dW(t), \tag{3.92}$$

ficado entendido que a integração desta equação deve ser feita segundo a integral de Stratonovich. As equações 3.88 e 3.92 são equivalentes, no sentido de que a primeira integrada por Ito e a segunda por Stratonoich devem resultar na mesma solução, ou seja, gerar as mesmas realizações $X_R(t)$. Semelhante, se tivermos uma equação diferencial estocástica de Ito na forma

$$dX(t) = A(X(t), t)dt + B(X(t), t) \bullet dW(t), \tag{3.93}$$

então a seguinte equação de Statonovich,

$$dX(t) = A(X(t), t) - \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial X}B(X(t), t)dt + B(X(t), t)dW(t), \tag{3.94}$$

lhe é equivalente.

Consideremos o Vetor Girante apresentado no capítulo 7. As correspondentes equações estocásticas de Stratonovich, como podemos verificar, são:

$$\begin{aligned} dX(t) &= -\omega_0 Y(t)dt - \beta Y(t)dW(t) \\ dY(t) &= \omega_0 X(t)dt - \beta X(t)dW(t), \end{aligned} \tag{3.95}$$

ou em notação de diferenças finitas,

$$\begin{aligned} \Delta X_j &= -\omega_0 Yj\Delta t - \beta\left(Y_j + \frac{1}{2}\Delta Y_j\right)\Delta W_j \\ \Delta Y_j &= \omega_0 Xj\Delta t + \beta\left(X_j + \frac{1}{2}\Delta X_j\right)\Delta W_j. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Melhora-se a qualidade da solução numérica substituindo-se, nos termos que multiplicam $\Delta t, X_j$ por $X_j + \frac{1}{2}\Delta X_j e Y_j$ por $y_j + \frac{1}{2}\Delta Y_j$. Em vez das Equações 3.96 escrevemos, portanto,

$$\begin{aligned} \Delta X_j &= -\omega_0\left(Yj + \frac{1}{2}\Delta Y_j\right)\Delta t - \beta\left(Y_j + \frac{1}{2}\Delta Y_j\right)\Delta W_j \\ \Delta X_j &= \omega_0\left(X_j + \frac{1}{2}\Delta X_j\right)\Delta t + \beta\left(Xj + \frac{1}{2}\Delta X_j\right)\Delta W_j. \end{aligned} \tag{3.97}$$

No capítulo 7, foi realizado um estudo sobre o Vetor Girante, observarmos que a versão de Stratonovich a convergência para o resultado exato, quando $\Delta t \to 0$ é muito mais rápida que a versão de Ito, isto é, Δt precisa ser muito menor na versão de Ito que na de Stratonovich para se ter o mesmo grau de precisão. Isto representa uma importante vantagem do cálculo de Stratonovich sobre Ito para integração numérica. Cabe então a pergunta, por que a ampla maioria dos trabalhos reportados na literatura sobre simulação numérica de equações de Langevin usam a versão de Ito? A resposta é simples: porque é muito mais fácil programar a integração por Ito que por Stratonovich. No caso do Vetor Girante foi possível isolar ΔX na equação discretizada de Stratonovich, por procedimento algébrico, e por isso foi mais simples programar a integração numérica. Em geral, em problemas menos triviais, esse procedimento não é possível. Com efeito, a forma geral, discretizada, de uma EDE de Stratonovich é

$$\Delta X(t) = A\left(X(t) + \frac{\Delta X(t)}{2}\right)\Delta t + B\left(X(t) + \frac{\Delta X(t)}{2}\right)\Delta W(t), \tag{3.98}$$

onde X e A são,em geral, vetores de n componentes, B é uma matriz n x m e ΔW é um vetor de m componentes.

Não existe, ao que sabemos, algoritmo geral para resolver a Equação 3.98. Os seguintes procedimentos funcionam bem em certos casos:

- Explicitar, algebricamente o vetor ΔX. Isto só funciona em caso especialmente simples.
- Uma solução tipo Runge-Kutta de segunda ordem: Calcula-se a primeira aproximação para ΔX usando apenas $X(t)$ nos argumentos de A e B; a seguir usa-se o ΔX assim calculado nos argumentos de A e B, obtendo-se ΔX em segunda ordem em ΔW. O resultado deste procedimento tende a ser semelhante ao cálculo de Ito.
- Continua-se o procedimento descrito no item b substituindo ΔX assim obtido novamente nos argumentos de A e B, e assim sucessivamente, até que se obtenha convergência, ou seja, até que o novo ΔX seja tão próximo do anterior como se estabeleceu a priori. O critério de precisão pode ser, por exemplo,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta X_i - \Delta X_i^a)^2}{\sum_{i=1}^{n}(\Delta X_i)^2} \leq \epsilon, \tag{3.99}$$

onde ΔX_i^a é o ΔX_i anterior ϵ é escolhido convenientemente.

3.10 Equação de Fokker Planck

As variáveis dinâmicas, ou observáveis, de um sistema físico de muitos corpos (sistema termodinâmico), correspondem a média sobre os possíveis micro-estados do sistema. No caso de processos estocásticos, as referidas médias são sobre as realizações. Conhecendo-se as equações que governam os processos estocásticos, é possível simular as realizações e calcular as médias desejadas. Uma maneira alternativa consiste em encontrar uma equação para distribuição de probabilidade do processo, em função do tempo, e calcular as médias desejadas integrando sobre o espaço das variáveis do sistema, tendo a distribuição de probabilidade como peso.

Ao sistema de equações diferenciais estocásticas, existe associada uma equação diferencial a derivadas parciais para distribuição de probabilidade das variáveis que se chama Equação de **Fokker-Planck**. Consideremos inicialmente o caso unidimensional. Seja $X(t)$ um processo estocástico de Ito:

$$dX(t) = A(X,t)dt + B(X,t) \bullet dW(t) \tag{3.100}$$

A correspondente equação de Fokker-Planck para distribuição de probabilidade $P_X(x,t)$, que passaremos a denotar, por simplicidade, por $P(x,t)$, é

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial\left[K(x,t)P(x,t)\right]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left[D(x,t)P(x,t)\right]}{\partial^2} \tag{3.101}$$

onde

$$K(x,t) = -A(x,t) \tag{3.102}$$

$$D(x,t) = B^2(x,t) \tag{3.103}$$

Para que a solução da Equação 3.101 seja a mesma distribuição de $x(t)$ como gerada por uma simulação da equação diferencial estocástica, Equação 3.100, a condição inicial $P(x,0)$ deve ser igual à distribuição inicial de valores de X usada na simulação. Em particular, para uma simulação de realizações a partir de $X(0) = x_0$ a condição inicial da Equação 3.101 é $P(x,0) = \delta(x - x_0)$. Neste caso a distribuição de probabilidade, solução da equação de **Fokker-Planck**, é denotada por $T(x,t|x_0,0)$, isto é,

$$T(x,t|x_0,0) = P(x,t) quando P(x,0) = \delta(x - x_0) \tag{3.104}$$

e é chamada de probabilidade de transição de x_0 em $t = 0$ para x em t.

Portanto, a equação de Fokker-Planck correspondente tem a mesma forma da Equação 3.101 mas com coeficientes dados por

$$K(x,t) = -A(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial X}B(X(t),t), \tag{3.105}$$

$$D(x,t) = B^2(x,t). \tag{3.106}$$

É claro que se a EDE for de ruído aditivo, ou seja, B independente de X, então não há diferença entre as versões de Ito e de Stratonovich.

Os coeficientes K e D da equação de Fokker-Planck são conhecidos como " coeficiente que deriva" (drift) e de "difusão", respectivamente [28].

Capítulo 4

Análise Estatística

4.1 Volatilidade

A volatilidade é uma medida da flutuação média do mercado dentro de um dado intervalo de tempo. Desta forma representa uma variável importante para análise econômica, pois quantifica o risco de um artigo financeiro e está relacionada com a quantidade de informação disponível no mercado num dado intervalo de tempo [4].

Prever a volatilidade de ativo de modo preciso é a chave para um bom sistema de gerenciamento de risco. Muitos sistemas de gerenciamento de risco possuem em seu âmago a necessidade dessas previsões [29].

A volatilidade nos indica se o preço de um ativo está variando pouco ou muito, ou seja, ela é uma medida da incerteza quanto às variações de preço. Os períodos em que a variabilidade dos preços está muito alta são aqueles que possibilitam os maiores lucros ou, também, as maiores perdas, isto é, são aqueles em que o risco é maior. Já quando a volatilidade é baixa, o risco é menor. A relação é óbvia e, naturalmente, um investidor somente assumiria uma posição de alto risco caso houvesse a possibilidade de um grande retorno.

Dados financeiros apresentam certas características peculiares, podemos ver por exemplo, Taylor (2008) [30] e Pagan (1996) [31]. Este é o caso dos retornos de ativos financeiros que podem se definidos por $y_t = logx_t - logx_{t-1}$ onde x_t é o preço do ativo no instante t. Os principais fatos estilizados (características) encontradas na literatura são os seguintes:

a) os retornos não são autocorrelacionados;

b) os quadrados dos retornos são autocorrelacionados, com uma pequena autocorrelação de primeira ordem e uma subsequente queda bastante lenta;

c) existem agrupamentos com diferentes níveis de volatilidade;

d) a distribuição não-condicional dos retornos possui caudas pesadas em relação à distribuição normal;

e) para alguns tipos de retornos, a volatilidade reage de maneira diferenciada se os preços estão aumentando ou declinando. Sabe-se que as subidas são lentas e as quedas são abruptas, mostrando que neste último caso deveríamos ter uma volatilidade maior.

Essas características guardam algumas relações entre si, dando origem a conclusões semelhantes. Por exemplo, se os retornos tivessem distribuição normal, a característica a inviabilizaria a b, pois a não-correlação para variáveis gaussianas implica independência de quaisquer função disjuntas dessas variáveis. Do mesmo modo, a característica d inviabiliza a distribuição normal. De fato, a autocorrelação dos quadrados dos retornos tem forte relação com as distribuições com caudas pesadas, pois quando surgem valores extremos, quer positivos ou negativos, devido à autocorrelação haverá tendência a que os próximos quadrados também sejam extremos, originando um agrupamento de valores extremos e, portanto, caudas pesadas.

De forma análoga, as características b e c estão intimamente relacionadas. Quando os quadrados dos retornos são aucorrelacionados, é de se esperar que os valores grandes, em módulo, serão seguidos por valores também grandes, enquanto valores pequenos estarão próximos de valores pequenos, causando assim os agrupamentos de volatilidade [32].

4.2 Autocorrelação Temporal

A série temporal dos retornos de um ativo denotada por $\{r_t\}_{t=1}^{T}$ é uma coleção de variáveis aleatórias coletadas ao longo do tempo (definição de processo estocástico). A modelagem econométrica de séries temporais univariadas tem como objetivo capturar a relação linear entre r_t e informações disponíveis antes de t.

Desta forma, os valores históricos de r_t podem ser úteis para modelar o seu comportamento ao longo do tempo. Neste caso, a correlação entre os retornos tem um papel importante. Chamamos tais correlações de autocorrelação e esta é uma ferramenta básica para estudar uma série temporal estacionária [33].

$$\rho_{x,y} = \frac{COV(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = \frac{E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]}{\sqrt{E(x-\mu_x)^2 E(y-\mu_y)^2}} \tag{4.1}$$

onde μ_x e μ_y são as média de x e y, respectivamente.

Algumas propriedades:

(i) $-1 \leq \rho_{x,y} \leq 1$

(ii) $\rho_{x,y} = \rho_{y,x}$

(iii) $\rho_{x,y} = 0$ quando as duas variáveis não são correlacionada

4.3 Expoente de Hurst

Harold E. Hurst (1880 - 1978) foi um hidrólogo que passou parte de sua vida dedicando-se a descrição dos problemas relacionados aos reservatórios de água do rio Nilo. Seu problema estava fundamentado na otimização dos fluxos de água do rio Nilo, de modo que a represa não transbordasse nem ficasse muito vazia. No decorrer

de seus estudos Hurst percebeu que as vazões e enchentes do rio Nilo caracterizavam-se como um processo estocástico. Com objetivo de descrever os problemas de dimensionamento das represas foi proposto por Hurst, a análise estatística R/S , descrita em detalhes no livro Long-Term Storage: An Experimental Study [34].

A estatística R/S consistia na mensuração dos volumes máximos e mínimos do reservatório (amplitude) e no cálculo do desvio-padrão dos fluxos de água em um período de tempo, de modo que R/S seria a razão entre o amplitude e o desvio padrão das vazões de água, que é um valor adimensional. Hust, ao realizar essa estatística para diversos períodos de tempo, através desse modelo, constatou que a estatística R/S apresentava uma função de relação com o número de observações do cálculo, inclusive para outros fenômenos naturais [34].

Hurst testou a hipótese de que o regime de chuvas seguia um tal processo e criou assim uma nova estatística, o expoente de Hurst (H), que distinguia uma série aleatória de uma não-aleatória, mesmo que a série aleatória não seguisse uma distribuição de probabilidades que tendesse para uma média central. Hurst descobriu que a maioria dos fenômenos naturais, tais como o fluxo dos rios, o regime das chuvas e a temperatura, seguiam um passeio ao acaso, ou seja, uma tendência com ruído. A força da tendência e o nível do ruído poderiam ser mensurados pelo valor da estatística H [24].

Para aplicação do modelo em séries temporais financeiras, apresenta-se a seguir, os passos sugeridos por Peters (1994).

1º - Calcula-se o retorno logaritmo da série financeira.

$$N_i = ln\left(\frac{M_{it}}{M_{it-1}}\right) \tag{4.2}$$

M_{it} representa o preço da ação i ao final do período t e M_{it-1} representa o preço da ação i no início do período t.

2º - Particiona-se a série financeira em frações temporais e calcula-se a média de cada conjunto de dados.

$$e_a = \left(\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} N_{k,a}\right) \tag{4.3}$$

e_a é o valor médio do log retorno do ativo financeiro e n = número de elementos por partição.

3º - Calcular o desvio acumulado de cada série particionada.

$$X_{k,a} = \sum_{j=1}^{k}(N_{i,a} - e_a) \tag{4.4}$$

Em cada retorno de uma série particionada I_a possui um grupo de retornos do ativo, representado por $k = 1, 2, 3, ..., n$ e $X_{k,a}$ representa os desvios acumulados em relação a e_a.

4º - Verificar quais são os pontos máximos e mínimos do conjunto I_a. Seguido da diferença entre eles.

$R_{I_a} = max(X_{k,a}) - min(X_{k,a})$, para $1 \leq k \leq n$.

5º - Calcula-se o desvio-padrão de cada partição.

$$S_{I,a} = \left(\left(\frac{1}{N} \right) \sum_{k=1}^{n} (N_{i,a} - e_a)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.5}$$

E $S_{I,a}$ é o desvio padrão de cada partição.

6º - A série A valores R_{I_a} é normalizada dividindo estes valores de amplitude pelos correspondentes desvios padrões S_{I_a}. A média destes valores padronizados mantém a relação entre H e n.

$$\left(\frac{R}{S} \right)_n = \left(\frac{1}{A} \right) \sum_{a=1}^{A} \left(\frac{R_{I_a}}{S_{I_a}} \right) \tag{4.6}$$

7º - Para concluir o processo de mensuração do expoente de Hurst, calcula-se uma regressão linear simples, atribuindo como variável dependente $\ln \left(\frac{R}{S_n} \right)$ e variável independente $ln(n)$. Os passos de 1 a 6 devem ser repetidos várias vezes, mas com tamanhos de partições diferentes, até que haja um número suficiente de dados para calcular a regressão e que a série tenha sido calculada numa ordem decrescente de partições, até o momento em que toda a série limite-se a duas partições apenas.

$$\ln \left(\frac{R}{S} \right)_n = \ln a + b \ln(n) \tag{4.7}$$

Os valores do expoente de Hurst estão entre 0 e 1. Um valor de H = 0.5 indica que a série se comporta como um caminhante aleatório (uma série temporal Browniana). Num caminhante aleatória não há correlação entre qualquer elemento e um elemento futuro. Para $0.5 < H \leq 1$, temos um comportamento de persistência (ou seja, uma autocorrelação positiva). Se há um aumento do passo de tempo t_{i-1} a t_i , provavelmente haverá um aumento de t_i para t_{i+1}. O mesmo é verdade para decrescimentos, onde um decrescimento tenderá a seguir um decrescimento. Para $0 \leq H < 0.5$, a série temporal apresenta comportamento de antipersistência (autocorrelação negativa). Aqui um aumento tenderá a ser seguido por um decrescimento, ou um decrescimento tenderá por um aumento [35].

4.4 Detrended Fluctuation Analysis - DFA

O método DFA (Detrended Fluctuation Analysis) foi proposto por Peng et al. em 1994 com o objetivo de detectar correlações de longo alcance em sequência de DNA. Consiste em um método de análise de escala utilizado para estimar expoentes que caracterizam as correlações de longo alcance, além de possuir a vantagem em relação a métodos como análise de autocorrelação, razões de variância e decomposições espectrais de permitir a identificação de auto semelhança em séries temporais

não estacionárias.

A análise de flutuação convencional, tal como a análise R/S de Hurst, não pode ser usada com confiabilidade para estudar dados não estacionários. Como vantagem o método DFA permite a detecção de correlações de longo alcance em sinais ruidosos com as tendências polinomiais embutidas, que podem mascarar as verdadeiras correlações nas flutuações de um sinal [36].

4.4.1 Passo 1

Inicialmente define-se a série integrada $Y(i)$, a partir da série temporal original conforme Equação 4.8 :

$$Y(i) = \sum_{i=1}^{N} x_i - \langle x \rangle, \tag{4.8}$$

Onde $\langle x \rangle$ é valor médio de x_i .

4.4.2 Passo 2

A série integrada será dividida em intervalos de igual amplitude n denominados "janela" ou "box". Para cada intervalo é feito um ajuste linear que representa a tendência local $Y_n(i)$, em que $Y_n(i) = a_n + b_n u(i)$, ou seja, os coeficientes são calculados para cada um dos intervalos.

4.4.3 Passo 3

Subtrai-se a tendência local da série integrada. Então calcula-se a raiz quadrática média, isto é, a função de flutuação $F(n)$, conforme a equação 4.9

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [y(i) - y_n(i)]^2} \tag{4.9}$$

Por fim, verificamos se a função $F(n)$ comporta-se como uma lei de potência, do tipo $F(n) \approx n_\alpha$ em que α é o expoente de correlação de longo alcance, esta relação pode ser linearizada em um gráfico $logF(n) \times log(n)$ e é representada por uma reta cuja inclinação α representa o expoente procurado.

4.5 Lei cúbica inversa da distribuição de probabilidade acumulada para a volatilidade

Vários fenômenos naturais seguem comportamentos descritos por leis de potência. Elas são descritas por expressões do tipo $Y = \alpha X^k$, em que α é uma constante de proporcionalidade e k é o expoente da escala. Em mercados financeiros diversos,

leis de potência também têm sido observadas através da distribuição acumulada da volatilidade, medida da flutuação média do mercado financeiro, a qual se relaciona diretamente à quantidade de informação disponível sobre o mercado financeiro. Através dela, se pode quantificar o risco de um ativo, sendo assim uma variável muito importante ao se analisar um determinado mercado ou ativo. A volatilidade pode ser determinada através do módulo do retorno [5].

Para se observar o comportamento de uma distribuição, define-se a distribuição acumulada da variável $g(t)$, na qual

$$g(t) = \left| \frac{s(t)}{\sigma} \right| \tag{4.10}$$

e σ é o desvio padrão da série obtida através do modelo.

A distribuição de probabilidade acumulada $F(g)$ segue uma lei de potência de potência de comportamento assintótico, definida por:

$$F(g) \sim g^{-\gamma} \tag{4.11}$$

O expoente γ pode ser estimado aplicando-se o logaritmo comum aos dois termos da lei acima, onde obtém-se:

$$\gamma = \frac{logF(g)}{logg} \tag{4.12}$$

Séries temporais de mercados financeiros, ações de empresas, cotação de moedas e índices como o $S\&P$ 500, entre outros, apresentam um padrão de comportamento semelhante, o qual mostra o valor $\gamma \approx 3$ [37], [5]. Tal observação é adotada como um fato estilizado das séries temporais financeiras.

Capítulo 5

Tópicos Sobre Mercados Financeiros

O mercado de ações está em evidência, e há cada vez mais investidores interessados nele. O potencial do mercado para ganhos generosos e seu caráter lúdico, tem se tornado mais atraente com o recente advento da internet, repercutindo no jogador que há em nós. Seu poder punitivo e seu imprevisível temperamento faz com que investidores temerosos olhem para ele às vezes com admiração, particularmente em momentos de queda. Histórias de pânico e suicídios após tais eventos tornaram-se parte do folclore do mercado. A riqueza dos padrões as exibições do mercado de ações podem atrair os investidores a esperar 'bater o mercado' usando a estratégia de hedge (estratégia de investimentos que tem o objetivo de proteger o valor de um ativo). No entanto, o mercado de ações não é um 'cassino' de jogadores brincalhões ou tolos. É, antes de mais nada, o veículo das trocas fluidas que permitem o funcionamento eficiente do sistema capitalista, mercados livres e competitivos [38].

5.1 Bolsa de Valores

As primeiras bolsas com características modernas surgiram com o desenvolvimento do comércio, em meados do século XV, e sua expansão no século XVI. Em decorrência da intensificação das atividades comerciais, cresceu o número de corporações de comerciantes, mercadores e banqueiros que, assim, criaram as primeiras instituições onde se encontravam para efetuar suas transações. Mas foi em Bruges, na Bélgica, que, em 1487, a palavra bolsa alcançou seu sentido comercial e financeiro, quando mercadores e comerciantes reuniam-se, a fim de realizar negócios, na casa do senhor Van der Burse, cujo brasão era ornamentado com o desenho de três bolsas. Mais tarde, em 1561, surgem as bolsas de Antuérpia e Amsterdam e, em 1595, as de Lyon, Bordéus e Marselha. A bolsa de Londres, Royal Exchange, foi criada na segunda metade do século XVI e, em Paris, a primeira bolsa surgiu em 1639. Assim, com o decorrer do tempo, todos os centros comerciais e industriais foram criando suas bolsas.

Tudo começa quando uma empresa decide lançar ações ao público. Isso se chama abrir o capital. Essa iniciativa atrai novos acionistas que injetam dinheiro na empresa. Em caso de lucro, bom para todos. Se houver prejuízo, as perdas também são divididas proporcionalmente. Mas para participar das apostas na bolsa, a companhia precisa primeiro credenciar-se em uma corretora de valores. Essas instituições

estão por trás de todas as negociações, fazendo as transações para quem quer investir em ações e mantendo a bolsa financeiramente [39].

Bolsas de valores são mercados organizados, em que operações de compra e de venda de ações e de títulos são realizadas a partir de um conjunto de regras. Para terem suas ações negociadas em bolsas de valores, as empresas precisam cumprir uma série de exigências que tornam mais transparentes as suas situações financeiras e as formas como se relacionam com seus acionistas. As operações com ações em bolsas de valores são realizadas por sociedades corretoras. Pessoas físicas ou jurídicas, fundos de investimento e outras instituições financeiras operam através das corretoras.

Algumas vezes, mais de um tipo de ação poderá estar disponível para uma dada empresa. Podem diferir em direitos de voto ou dividendos. Por exemplo, as ações preferenciais diferem das ações ordinárias na medida em que têm direito a um dividendo fixo que deve ser pago primeiro se a empresa pagar dividendo. As ações preferenciais também têm precedência sobre as ações ordinárias no caso de a empresa ser liquidada. Por outro lado, as ações ordinárias podem receber um montante ilimitado de dividendos e têm direito de voto.

Uma empresa que obtém lucro pode optar em reinvestir o lucro (construir infraestrutura, comprar outras empresas etc.) ou devolver o lucro aos seus proprietários na forma de pagamento de dividendos. As empresas que pagam dividendos o fazem regularmente, a frequência varia de país para país (por exemplo, trimestralmente nos EUA, anualmente na Itália). Como os acionistas de uma empresa de capital aberto mudam constantemente, existe um mecanismo para determinar quem receberá o próximo dividendo, o vendedor ou o comprador. Daí temos a data ex-dividendo: nesta data, a ação é negociada sem direito ao dividendo. Em outras palavras, nessa data ou após essa data, o novo comprador não tem direito ao próximo dividendo, e quem possuía a ação na noite anterior à data do ex-dividendo tem direito ao dividendo.

5.1.1 Índice de Bolsa de Valores

O primeiro índice de ações foi desenvolvido em 1884 nos Estados Unidos - Charles Dow começou a contar a variação média no valor de 12 grandes empresas industriais mercado. No ano de 1916, o índice Dow Jones foi atualizado incluindo 20 ações e em 1928 foi novamente atualizado para 30 ações. Essa regra permanece até os dias atuais, mesmo com o passar dos anos e mudanças na composição do índice.

Os índices de ações refletem os movimentos de preços dos mercados de ações. Eles são calculados e publicados pelas bolsas de valores (por exemplo, NYSE, Euronext), indicadores financeiros (por exemplo, Dow Jones, McGraw Hill (S&P), Financial Times), ou bancos de investimento (por exemplo, Morgan Stanley). Eles servem como benchmarks para os gestores de portfólio. O S&P 500 é um índice que mede o desempenho de 500 das maiores empresas americanas de capital aberto. Juntas, elas representam cerca de 80% do capital social por capitalização de mercado. Trata-se de um índice amplo que inclui setores econômicos como tecnologia da informação, saúde e consumo discricionário, bem como, grandes empresas nos setores financeiro, energético, industrial e de bens de consumo duráveis. Além disso, o S&P 500 é um dos indicadores mais antigos e confiáveis, fazendo a análise de como as empresas estão se saindo na economia dos EUA, mostrando o retorno médio do investimento

quando os investidores alocam capital em uma das empresas da lista.

A maioria dos índices de ações são médias de preços ponderadas pela capitalização de mercado, que representa o valor total de mercado de uma empresa, dado pelo preço atual das ações multiplicado pelo número de ações em circulação (ou seja, o número de ações necessárias para possuir 100% da empresa). O valor de tal índice é dado por:

$$I(t) = C \sum_{i=1}^{N} n_i x_i(t) \tag{5.1}$$

onde n_i representa o número de ações e x_i o preço atual da ação i. A constante C é escolhida de forma que o índice seja igual a um determinado valor de referência (digamos 100) em uma determinada data.

5.1.2 As quedas do mercado de ações

As quedas do mercado de ações são eventos financeiros importantes, que fascinam acadêmicos e profissionais. De acordo com a visão de mundo acadêmica de que os mercados são eficientes, apenas a revelação de uma informação dramática pode causar um crash, mas, na realidade, mesmo as análises post-mortem mais completas são tipicamente inconclusivas sobre o que essa informação poderia ter sido. Para comerciantes e investidores, o medo de um crash é uma fonte perpétua de estresse, e o início do evento em si sempre arruína a vida de alguns deles. A maioria das abordagens para explicar as falhas busca por possíveis mecanismos ou efeitos que operam em escalas de tempo muito curtas (horas, dias ou semanas no máximo).

A existência de mercados financeiros e especulativos remonta a Florença do século XIV, porém a primeira bolsa de valores moderna se estabeleceu em outra parte da Europa, em Amsterdã, no começo do século XVII, local também da primeira grande bolha financeira de que se têm registro, a Tulipomania [40]. A especulação foi de Novembro de 1636 até Fevereiro de 1637. Como é de costume entre os apostadores, a confiança começou alta, todos ganhavam. Um mesmo bulbo era vendido e revendido inúmeras vezes. Muitos ficaram ricos de repente e todos imaginavam que isso duraria para sempre. Pessoas venderam todas suas propriedades a preços abaixo do mercado para entrar na mania das Tulipas, porém, assim como começou, a histeria terminou subitamente. Tulipas que antes valiam milhares de florins, agora são negociadas por menos de um décimo do que antes fora comum. Quase quatrocentos anos depois, ninguém sabe ao certo o que começou nem que informação estourou a bolha e o mesmo é verdade para as especulações modernas, nas quais mesmo análises post-mortem são inconclusivas em relação ao que causou o crash. Para comerciantes e investidores, o medo de um crash é uma fonte perpétua de estresse, e o início do evento em si sempre arruína a vida de alguns deles [38].

A Figura 5.1 mostra o índice de preços das tulipas durante o período de 1636-1937.

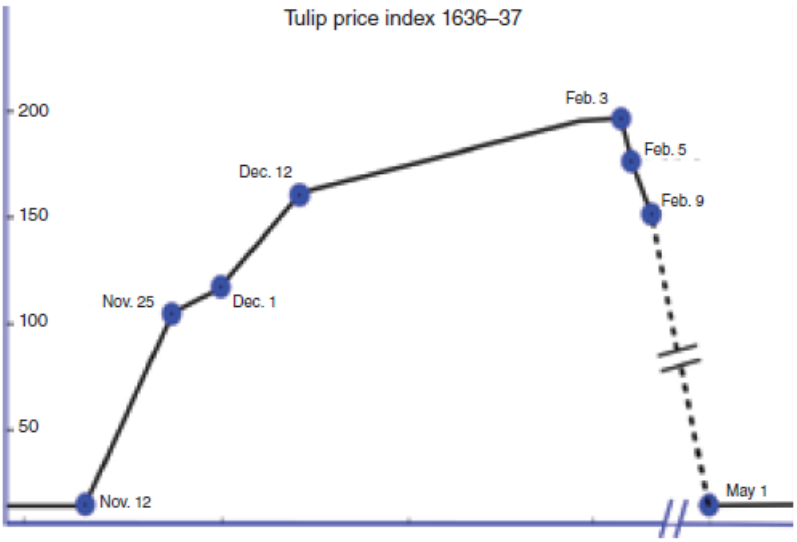

FIGURE 1. THE TULIP MANIA BUBBLE

Figura 5.1: Índice de preços das tulipas durante o período de 1636-1937. [1].

A população, mesmo em sua menor escória, embarcou no comércio de tulipas. Muitos indivíduos ficaram ricos de repente. Uma isca dourada pendurada tentadoramente diante do povo, e, um após o outro, eles correram para os mercados de tulipas, como moscas ao redor de um pote de mel. Todos imaginavam que a paixão pelas tulipas duraria para sempre, e que os ricos de todas as partes do mundo enviariam para a Holanda e pagariam o preço que fosse pedido por elas. As riquezas da Europa seriam concentradas nas margens do Zuyder Zee, e a pobreza banida do clima favorecido da Holanda. Nobres, cidadãos, fazendeiros, mecânicos, marinheiros, lacaios, servas, até mesmo limpa-chaminés e velhas costureiras, que se envolviam com tulipas.

Pesquisar e analisar o comportamento dos preços dos ativos financeiros permanece um anseio em diversos estudos. A pioneira análise de Markowitz [41] desencadeou uma linha de pensamento que propunha a mensuração do risco de ativos a partir do retorno esperado e sua variância. A difícil aplicabilidade inerente ao cálculo das covariâncias entre os ativos individuais motivou Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) a desenvolverem o Capital Asset Pricing Model (CAPM) que relaciona o retorno esperado de um ativo ao seu risco não diversificável e ao retorno do ativo livre de risco.

As empresas que possuem ações negociadas em bolsas de valores são influenciadas por fatores internos e externos que, por sua vez, influenciam nas oscilações dos preços de seus papéis (ações). Para a compreensão dessas oscilações e como elas influenciam no valor das ações negociadas nas bolsas de valores, são utilizados alguns tipos de análises. Existem dois tipos principais de análises que são realizados por operadores profissionais com a intenção de tomar decisões mais precisas no mercado financeiro: a Análise Fundamentalista (AF) e a Análise Técnica (AT) [42]. Um operador pode preferir um ou outro tipo de análise, de acordo com seu estilo [43].

Os adeptos da Análise Fundamentalista, acompanham dados financeiros da companhia, do setor e da economia para encontrar empresas subavaliadas pelo mercado.

Na Análise Técnica, por sua vez, os operadores baseiam-se em gráficos e dados históricos e acreditam que os fundamentos das empresas já estão precificados no valor das ações e que como mudanças no valor das ações se dão por tendências do mercado, as quais seguem certos padrões que se repetem, por isso busca-se interpretar e prever esses padrões,trabalhando com probabilidades [44] [42].

5.2 Criptomoedas

As criptomoedas são ativos digitais que possuem a mesma função que o dinheiro. Ou seja, elas podem ser utilizadas para realizar compras, trocas, transferências, acumular capital e muito mais, semelhante ao que moedas convencionais fazem. Porém, diferente de moedas como o dólar e o real, que são emitidas em papel-moeda, as criptomoedas existem somente no ambiente virtual. Isso limita a sua utilização às negociações realizadas pela internet entre pessoas e companhias que aceitam esses ativos como meio de pagamento.

As chamadas moedas virtuais, dentre as quais o exemplo mais conhecido é a bitcoin, são uma forma de transferir recursos financeiros entre pessoas pela internet. Essas moedas são desenvolvidas em um protocolo de informática chamado blockchain, uma tecnologia que permite a transferência de dados de maneira segura e, teoricamente, inviolável. A grande inovação da blockchain consiste em dispensar intermediários: os indivíduos têm a alternativa de fazer transações parte a parte, sem a necessidade de ninguém para validar ou assegurar a legitimidade dessas transações. Por consequência, quando há a transferência de recursos financeiros por meio de bitcoin, não há um banco para validar essa operação.

Além de dispensar o intermediário para validar suas operações, as moedas virtuais não têm uma característica que tradicionalmente é atribuída às moedas: criptomoedas não têm curso legal em nenhum país. Por consequência, seu valor liberatório de obrigações não é assegurado por nenhuma autoridade estatal. E é exatamente em virtude da falta de curso legal que muitos autores vêm defendendo que moedas virtuais não podem ser consideradas moedas.

Contudo, a análise de operações que vêm sendo feitas com bitcoin permite concluir que seus usuários empregam as moedas virtuais como se moedas fossem. Há diversos estabelecimentos comerciais que aceitam pagamento em bitcoin e uma parcela substancial dos usuários realiza operações de compra e venda de bitcoin como forma de se beneficiar das flutuações cambiais que ocorrem entre a moeda virtual e a moeda de curso forçado em seu país. Em outras palavras, esses usuários realizam operações de câmbio em bitcoin. [45]

Capítulo 6

Equação Diferencial Estocástica Não-Linear Como Modelo Para a Dinâmica De Preços

6.1 Poço Duplo com Ruido Aditivo

$$dX = (\alpha X - X^3)dt + \beta dW(t) \tag{6.1}$$

Para interpretar esta equação, Consideremos uma partícula em um poço de potencial com dois mínimos, em presença de ruido aditivo, como mostra a figura 6.1.

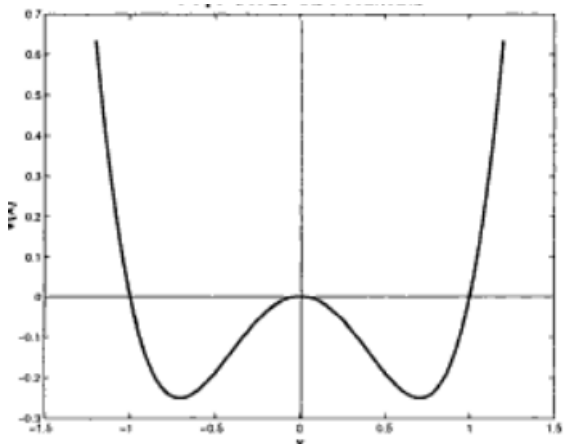

Figura 6.1: Potencial tipo poço duplo [3]

O potencial da figura, chamado de "poço duplo", tem a seguinte forma:

$$V(x) = \alpha x^4 - bx^2 \tag{6.2}$$

A força derivada a este potencial é:

$$F = -\frac{dV}{dx} = -4\alpha x^3 + 2bx \tag{6.3}$$

Considerando ainda uma força dissipativa $-\gamma\dot{x}$ e uma força de ruido $\beta\xi(t)$ a equação de movimento fica

$$m\ddot{X} = -\gamma\dot{x} - 4\alpha X^3 + 2bX + \beta\xi(t) \tag{6.4}$$

No limite em que o termo de inércia é desprezível ($m \approx 0$) e escolhendo $\gamma = 1$; 4 $\alpha = 1$ e $2b = \alpha$ obtemos a equação 6.1 [3].

Nesse trabalho será estudado o modelo para o potencial ϕ^6 que é definido como

$$dX(t) = \left[\alpha X(t) - \sigma(X(t))^3 - \delta(X(t))^5\right] dt + \beta(X(t), t)dW(t) \tag{6.5}$$

onde $W(t)$ é um processo Wiener. A equação 6.5 pode ser usado para descrever o comportamento de um partícula sob ação de um potencial ϕ^6 dado por $V(x) = Ax^6 + Bx^4 + Cx^2$, onde A, B e C são constantes. Além disso, temos uma força dissipativa $-\gamma x$, e um ruído estocástico $\xi(t)$. Consequentemente, temos $\delta = 6A/\gamma$, $\sigma = 4B/\gamma$ e $\alpha = -2C/\gamma$. Podemos considerar insignificante o limite do termo inercial ($m \approx 0$). Esse modelo pode representar um mercado financeiro em diferentes condições extremas no processo, em que o preço tende a ir para diferentes máximos e mínimos locais no potencial. O caso de δ e $\sigma = 0$ foi apresentado em [46] nomeado como o modelo Bouchaud-Cont Langevin para o mercado de ações flutuações e falha [47].

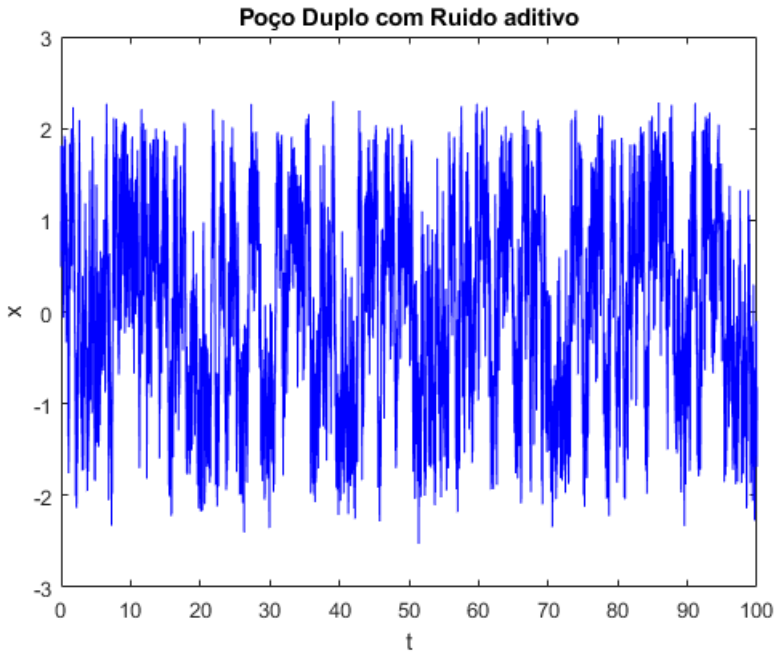

Figura 6.2: Série temporal gerada pelo modelo 6.5 com ruido aditivo, os parâmetros usados foram: $t = 100$; $\beta = 1$ e $\alpha = 1$.

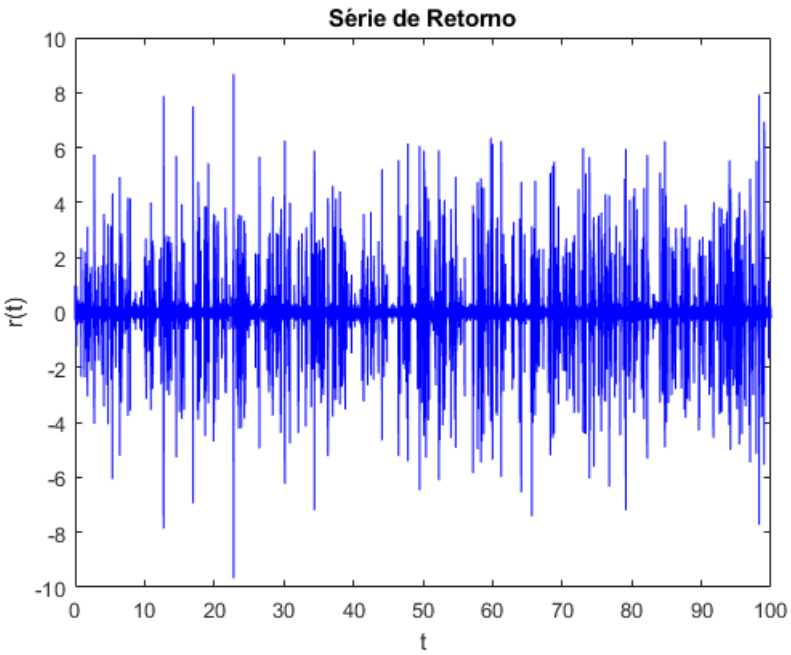

Figura 6.3: Evolução no tempo de retorno $r(t) \approx S(t) = ln(X(t + \Delta t)) - ln(X(t))$, os intervalos de tempo utilizados na simulação são $\Delta t = 0,01$

A série temporal de preços oscila rapidamente em um intervalo conforme o esperado. O intervalo de tempo usado na simulação é $\Delta t = 0,01$ e t percorrendo as unidades escolhidas (digamos segundos ou minutos, dias ou anos).

Em geral, existem duas maneiras de estudar o comportamento dos preços, como preços de títulos derivativos usando a simulação de Monte Carlo para gerar os caminhos (os passos) do título subjacente ou resolver numericamente as equações diferenciais estocásticas. As soluções de equações diferenciais estocásticas em geral, têm a propriedade Markoviana e se relacionam entre si [48].

O método estatísticos DFA foi aplicado as séries temporais geradas pelo modelo 6.5. Para realizar uma análise DFA, quatro passo devem ser seguidos, como foi apresentado no capítulo 4.

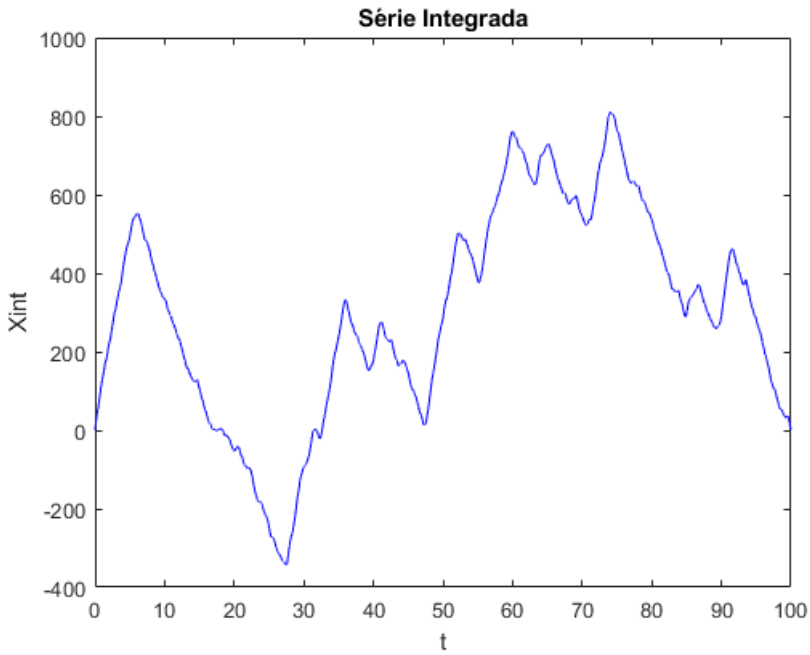

Figura 6.4: Série integrada $Y(i)$

A Figura 6.4 apresenta o perfil associado a série considerada anteriormente, calculado pela diferença entre a série temporal e sua média. Esse procedimento permite eliminar o grande número de oscilações e assim obter uma série estacionária, portanto, apropriada para aplicar o método.

A Figura6.5 mostra o ajunte linear usando o método dos mínimos quadrados. A série foi dividida em 10 janelas.

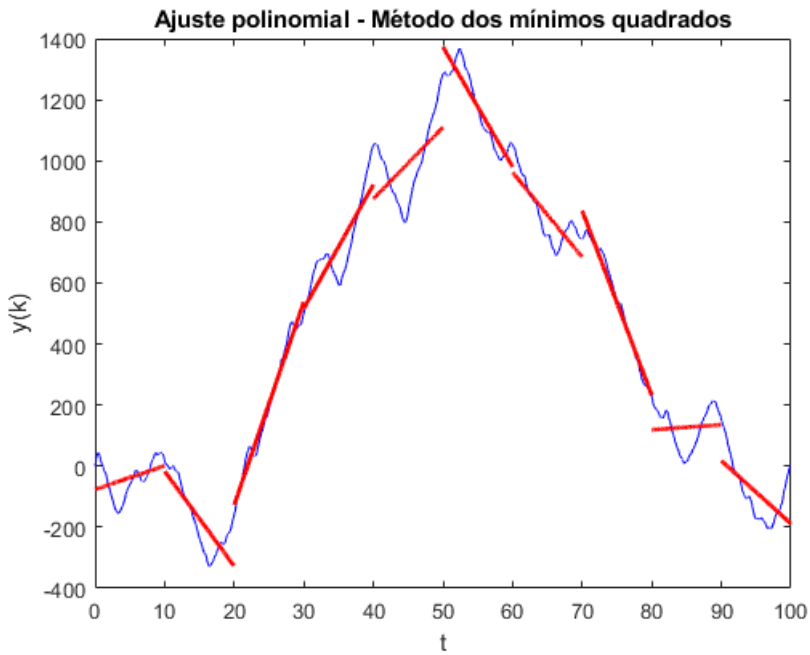

Figura 6.5: Ajunte Linear pelo Método dos Mínimos Quadrados. A série foi dividida em 10 janelas.

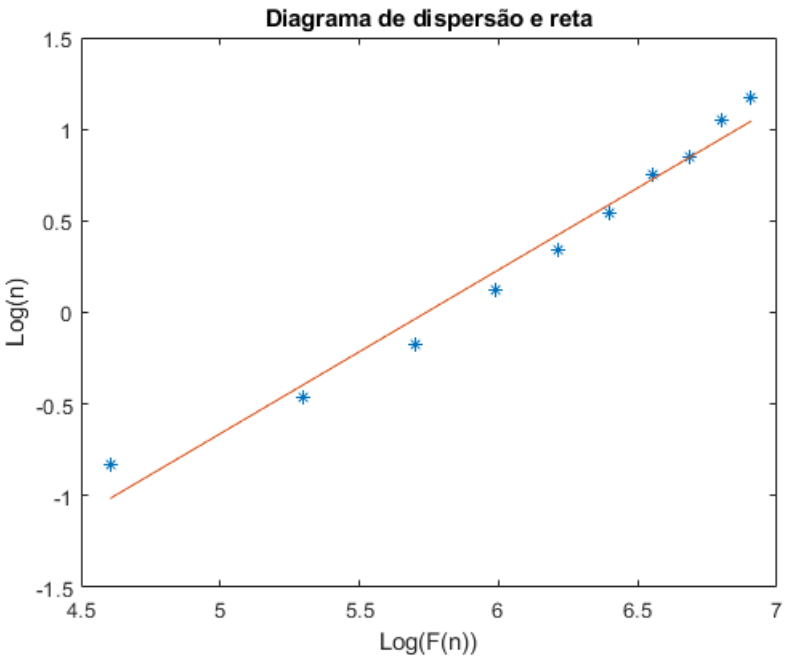

Figura 6.6: Função de Flutuação com 10 janelas.

A Figura 6.6 mostra o comportamento da memória longa do modelo usando o método de análise de flutuações destendenciadas (DFA). O expoente de correlação obtido foi $\alpha \approx 0{,}76$. O expoente α é o parâmetro que quantifica o tipo de correlação, lembrando que $\alpha \in (0{,}5;\ 1)$ pode-se inferir que a série apresenta persistência.

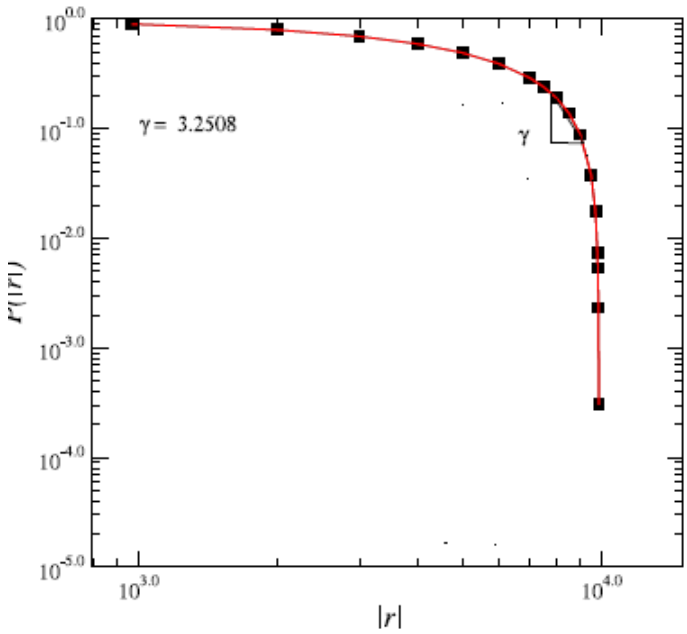

Figura 6.7: Log Log do ajuste dos quadrados mínimos da lei da potência, que varia como $P(|r(t)|) \sim |r(t)|^{\gamma}$ para a distribuição de cauda longa. Foi obtido o expoente γ = -3,2508

A Figura 6.7 mostra o comportamento da distribuição de cauda longa para a distribuição acumulada $P(> |r|)$ das volatilidades $|r(t)|$, que é conhecido por obedecer à lei da potência: $P(|r(t)|) \sim |r(t)|^{\gamma}$, onde γ é o índice da cauda, com $\gamma \sim 3$ [49] [50] [50] [51]. Foi obtido o expoente da curva ajustada como $\gamma \approx 3,2508$. O valor está próximo de 3,0 da curva ajustada para distribuição de cauda longa. Portanto, um valor próximo de 3 para a distribuição cumulativa, que é conhecida por obedecer à inversa da lei cúbica.

6.2 Conclusões

Propomos um modelo não linear estocástico de Itô como modelo para a dinâmica de preços e mostramos que ele reproduz o comportamento da lei de potência frequentemente observado nos mercados financeiros. Calculamos o índice de Hurst para o modelo e verificamos o comportamento da distribuição de cauda longa do volatilidades que devem obedecer a uma lei cúbica inversa.

Nossos resultados mostram que o modelo satisfaz os conhecidos fatos estilizados ou regularidades estatísticas dos retornos e volatilidades financeiras. Assim, foi observado que o modelo é adequado para os mercados financeiros. No entanto, a lei de potência é uma lei empírica e, em geral, não podemos conhecer o comportamento exato do mercado.

Obtivemos o comportamento da série temporal para a dinâmica de preços $X(t)$ e investigado o comportamento de distribuição da cauda longa das volatilidades. Além disso, determinamos o índice de Hurst para este modelo que é usado como uma medida de memória de longo prazo das séries temporais.

Foi aplicado o método da Análise de Flutuação destendenciada DFA (Detrended Fluctuation Analysis) as séries temporais obtidas para estudar a memória de longo alcance do sistema, obtendo o expoente $\alpha \approx 0{,}76$. O expoente α é o parâmetro que quantifica o tipo de correlação, lembrando que $\alpha \in (0,5;1)$ pode-se inferir que a série apresenta persistência.

Foi obtido o expoente da curva ajustada como $\gamma \approx 3,2508$. O valor está próximo de 3,0 da curva ajustada para distribuição de cauda longa. Portanto, um valor próximo de 3 para a distribuição cumulativa, que é conhecida por obedecer à inversa da lei cúbica.

Capítulo 7

Dinâmica Estocástica Bidimensional como Modelo para a Evolução Temporal do Mercado Financeiro

7.1 Equação de Langevin do Vetor Girante

Consideremos uma grandeza vetorial μ, em duas dimensões, com módulo constante e direção que varia no tempo, sob a ação de um torque com componente estocástica. Um exemplo pode ser o momento magnético de uma partícula superparamagnética com alta anisotropia uniaxial, de maneira que μ fique confinado ao plano x x y, em presença de um campo magnético H_0 paralelo ao eixo de simetria ($eixo\ z$). Pondo, por simplicidade, $|\mu| = 1$, podemos escrever

$$\mu = (X(t), Y(t)) \tag{7.1}$$

com

$$\begin{aligned} X(t) &= cos\Phi(t) \\ Y(t) &= sen\Phi(t) \end{aligned} \tag{7.2}$$

onde a fase $\Phi(t)$ obedece a seguinte equação diferencial estocástica de ruido aditivo:

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \beta dW(t) \tag{7.3}$$

No caso do μ ser o momento magnético, mencionado acima, a equação 7.3 pode ser interpretada como rotação causada por um torque sistemático devido ao campo H_0, que resulta na frequência angular $w_0 = \gamma H_0$,sendo γ o fator giro-magnético, e um torque estocástico tipo ruido branco, de intensidade β, causado pelas vibrações térmicas da rede cristalina (fónons). A equação 7.3, por ser de ruido aditivo, pode ser integrada trivialmente. Escolhendo como condição inicial $\phi(0) = 0$ segue

$$\Phi(t) = \omega_0 dt + \beta W(t), \tag{7.4}$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned} X(t) &= cos(\omega_0 dt + \beta W(t)) \\ Y(t) &= sen(\omega_0 dt + \beta W(t)) \end{aligned} \tag{7.5}$$

Usando a regra de diferenciação de Ito,

$$dF(t) = \frac{\partial F}{\partial W} dW(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial W^2} \right) dt, \tag{7.6}$$

no par de variáveis (X,Y) dado pela equação 7.5 obtém-se o seguinte sistema de equações de Ito-Langevin:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(-\omega_0 Y(t) - \frac{\beta^2}{2} X(t) \right) dt - \beta Y(t).dW(t) \\ dY(t) &= \left(\omega_0 X(t) - \frac{\beta^2}{2} Y(t) \right) dt + \beta X(t).dW(t) \end{aligned} \tag{7.7}$$

Onde $W(t)$ é o processo de Wiener ou movimento browniano. A equação acima é um exemplo particular de um random walk. Não se pode resolvê-lo para fornecer um caminho determinístico para o preço das ações, mas pode fornecer informações interessantes e importantes relativas ao comportamento de X e Y em um sentido probabilístico. Além disso, pode ser usado para descrever a comportamento de um sistema de partículas rotativas com vetor girante $\vec{\mu} = (cos\phi(t)), sen\phi(t))$, onde considera-se cada partícula em rotação como $\phi(t) = \alpha dt + \beta W(t)$, em um ambiente ruidoso com ruido branco estocástico $\zeta(t)$, que se relaciona com o incremento de Wiener como $\Delta W(t) = W(t+\Delta t) - W(t)$, onde W(t) = $\int_{t_0}^{t} \zeta(t')dt'$. Além disso $W(t)$ é um processo markoviano com distribuição normal. Assim, o modelo acima pode representar um mercado financeiro sob condições extremas (mínimas e máximas) no processo, onde os preços tendem a ir para diferentes pontos fixos ou atratores.

Foi resolvido numericamente o conjunto de equações acima, considerando o termo $\beta W(t)$, um incremento de Wiener, como um ruído branco aditivo de largura $\sigma = \sqrt{\Delta t}$, onde $\beta dW(t) \approx \sqrt{dt}\beta R_G$. RG é um gerador de números aleatório de media zero, variância $\sigma_2 = 1$, e portanto uma distribuição gaussiana.

A figura 7.1 mostra a solução do conjunto de equações diferenciais estocásticas acopladas dada pela Equação 7.7 para o caso de ausência e presença de ruído branco, respectivamente. Para $\beta = 0$ e na ausência de ruído estocástico, o sistema é um sistema dinâmico simples, reduzindo-o a um oscilador harmônico simples: $dx/dt = -y$, $dy/dt = x$. A adição de termos de ruído branco no sistema afeta as propriedades de rotação do modelo, afetando a periodicidade do modelo. Assim, o parâmetro de acoplamento estocástico β força a tendência de um comportamento idiossincrático ser governado pela amplitude do termo ruído. Portanto, o valor de β determina uma batalha ou competição entre ordem e desordem no sistema e, eventualmente, deve refletir a estrutura de um mercado com tais anomalias.

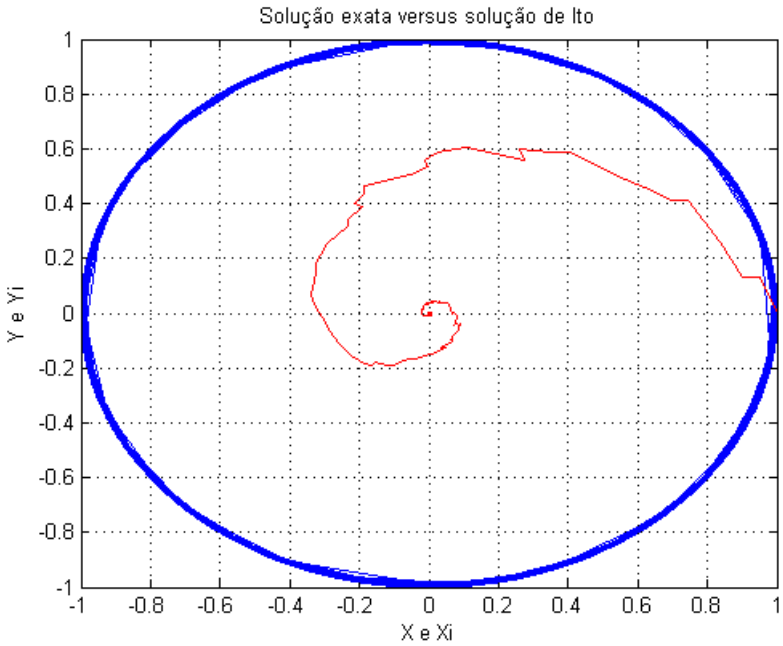

Figura 7.1: Solução exata (X, Y) do conjunto de equações diferenciais estocásticas acopladas gerada pela equação Eq. 7.7 para $\beta = 0$ (linha azul) sem termo de ruído e para $\beta \neq 0$ (linha vermelha) caso com termo de ruído branco (Xi, Yi). Os parâmetros usados foram: $t = 100$; $w = 10$; $\beta = 1$, a condição inicial foi $X(0) = 1$ e $Y(0) = 0$.

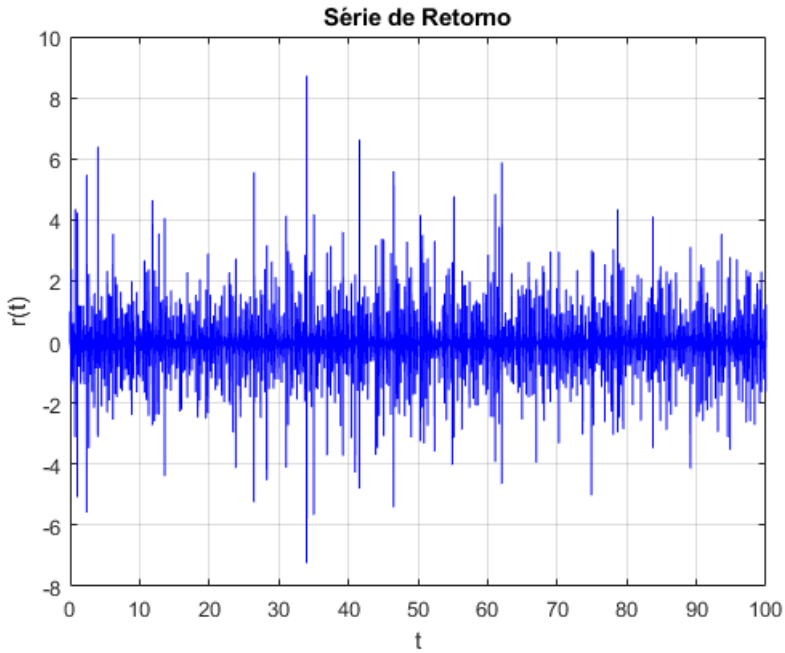

Figura 7.2: Evolução no tempo de retorno $r(t) \approx S(t) = ln(X(t + \Delta t)) - ln(X(t))$. O gráfico mostra o comportamento dinâmico do retorno da série temporal $r(t)$.

A figura 7.2 mostra a série temporal de preços oscilando rapidamente dentro

de um intervalo conforme o esperado. O intervalo de tempo usado na simulação é $\Delta t = 0,01$.

O método estatístico DFA foi aplicado as séries temporais geradas pelo conjunto de equações diferenciais estocásticas acopladas dada pela Equação 7.7. Lembrando que para realizar uma análise DFA, quatro passo devem ser seguidos, como foi apresentado no capítulo 4.

Calcula-se a série integrada conforme mostrado na figura 7.3, a partir da série temporal original.

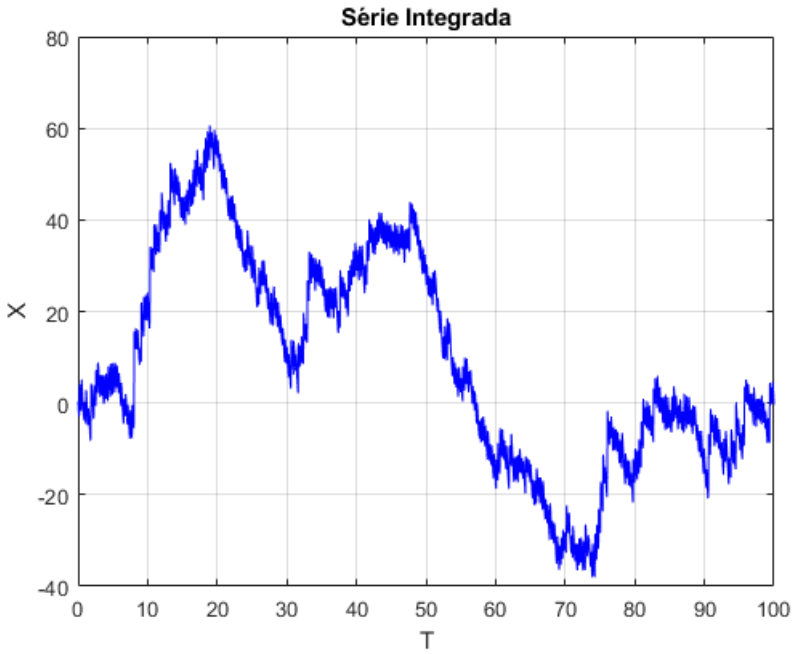

Figura 7.3: Série integrada

A Figura7.4 mostra o ajunte linear usando o método dos mínimos quadrados. A série foi dividida em 10 janelas.

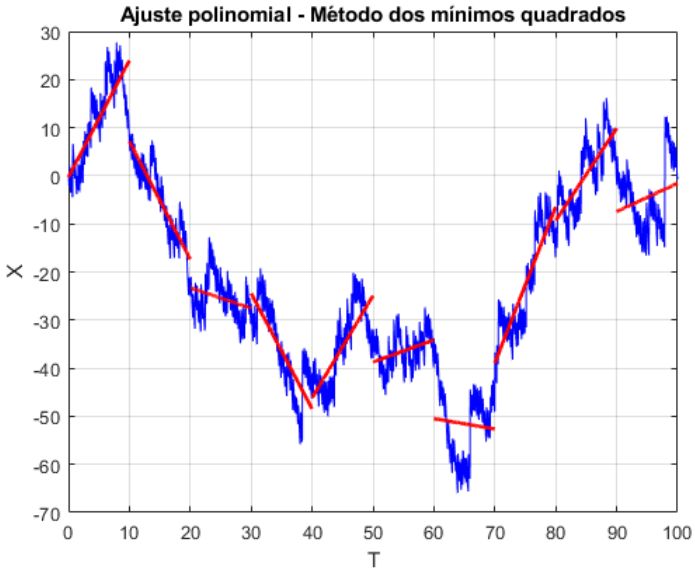

Figura 7.4: Ajunte Linear pelo Método dos Mínimos Quadrados, a série foi dividida em 10 janelas.

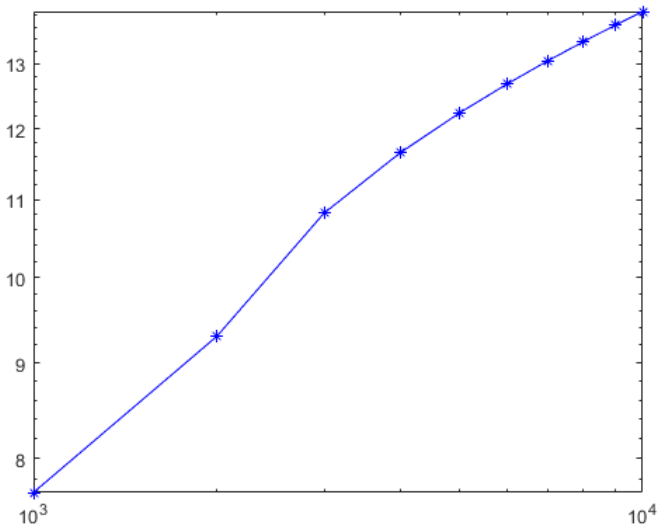

Figura 7.5: Função de Flutuação: Gráfico de Log-Log usando o método DFA para log $(F(n))$ x $log(n)$ para as séries temporais de retornos. O expoente de correlação encontrado foi $\alpha \approx 0{,}36$.

A figura 7.5 mostra o comportamento da memória de longa do modelo. O expoente de correlação obtido foi $\alpha \approx$0,36. O expoente α é o parâmetro que quantifica o tipo de correlação, lembrando que $\alpha \in (0;0{,}5)$ pode-se inferir que a série apresenta anti-persistência.

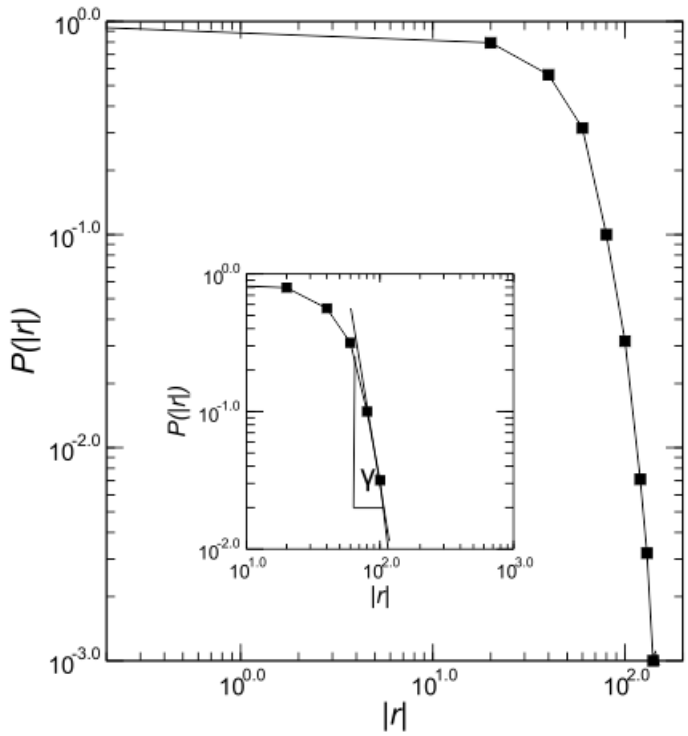

Figura 7.6: Densidade de probabilidade das volatilidades $P(|r(t)|)$ e $|r(t)|$. Foi obtido o expoente da lei de potência para cauda longa como $\gamma = 2{,}25$.

A figura 7.6 mostra o comportamento da cauda longa para a distribuição acumulada $P(> |r|)$ das volatilidades $|r(t)|$, que é conhecido por obedecer à lei da potência: $P(|r(t)|) \sim |r(t)|^{\gamma}$, onde γ é o índice da cauda, com $\gamma \sim 3$ [49] [50]. Foi obtido o expoente da curva ajustada como $\gamma \approx 2,25$.

7.2 Conclusões

Estudamos o modelo dinâmico de preços acoplados no mercado financeiro com base no conjunto de equações diferenciais estocásticas acopladas onde assumimos a existência de duas ações. Interpretamos as variáveis no modelo na Equação 7.7 como os preços do título-ativo no tempo t . Analisamos fatos estilizados do mercado financeiro como memória de longo alcance do modelo e verificamos o comportamento da distribuição de densidade de probabilidade de cauda longa dos retornos que deve obedecer a uma lei de potência. Nossos resultados mostram que o modelo deve satisfazer a fatos estilizados ou regularidades estatísticas aumentando a força dos parâmetros α e β na Equação 7.7. Esta lei de potência se aplica quase universalmente a todos os mercados (para escalas de tempo suficientemente curtas), incluindo Forex, commodities e, recentemente, até mesmo criptomoedas [52].

Também determinamos o índice de Hurst que é usado como medida de autocorrelações da série temporal. O valor dentro da faixa obtida para o expoente de Hurst pelo método DFA dos retornos indica um comportamento não estacionário e ilimitado para a série temporal.

Foi aplicado o método da Análise de Flutuação destendenciada DFA (Detrended Fluctuation Analysis) as séries temporais obtidas para estudar a memória de longo alcance do sistema, obtendo o expoente $\alpha \approx 0{,}36$. O expoente α é o parâmetro que quantifica o tipo de correlação, lembrando que $\alpha \in (0;0{,}5)$ pode-se inferir que a série apresenta anti-persistência.

Foi obtido o expoente da curva ajustada como $\gamma \approx 2,25$. Para $\gamma > 2$, esse resultado também está de acordo com a conclusão de que o segundo momento da mudança de preço é finito [50] [51].

Capítulo 8

Cosiderações Finais

Em síntese, neste trabalho foram estudados dois modelos, o primeiro é a equação diferencial estocástica de Ito com um potencial de interação polinomial não linear (Poço Duplo) como um possível modelo para o mercado financeiro. O segundo modelo é a Equação de Langevin do Vetor Girante, que pode ser usado para descrever a comportamento de um sistema de partículas rotativas com vetor girante, em um ambiente ruidoso com ruido branco estocástico, que se relaciona com o incremento de Wiener.

Uma das tarefas mais importantes em finanças é a compreensão e previsão dos preços dos ativos. Uma das formas encontradas para compreender o comportamento do preço de um ativo é a observação das suas oscilações ao longo do tempo, entendendo quais são suas características. Vários estudos foram desenvolvidos e muitos fatos estilizados foram detectados nos retornos das séries temporais financeiras, como: estacionariedade, não normalidade e caudas mais pesadas.

Nesse trabalho o retorno foi obtida por $r(t) \approx S(t) = ln(X(t + \Delta t)) - ln(X(t))$, esta é uma das variáveis mais importantes no estudo de mercados financeiros e a sua distribuição tem grande impacto nos preços de ativos [53]. Os intervalos de tempo utilizados na simulação são $\Delta t = 0,01$, esses intervalos de tempo podem ser considerados como dias, horas, minutos, etc. A partir do retorno, foi obtida a volatilidade, dada por $|r(t)|$. A série temporal obtida oscilou rapidamente dentro de uma faixa, assim como observado em mercados financeiros reais, como o $S\&P500$.

Atualmente existem muitos métodos empregando modelos matemáticos com o objetivo de descrever a dinâmica dos preços (buscando evidências gerais), mas são poucos os modelos adequados para situações reais. Além disso, existem muitos tipos de ativos nos mercados financeiros, como ações, futuros e outras ferramentas financeiras, cada um com um comportamento diferente. Nossos resultados mostraram que os dois modelos satisfazem as regularidades estatísticas dos retornos e volatilidades financeiras, com isso foi possível observar que ambos são adequados para os mercados financeiros.

8.1 Trabalhos futuros

Construir um modelo empírico para modelar alguns índices $S\&P500$. Ou mesmo testar o poder das equações estocásticas e ver se ela se enquadraria a algum índice.

Referências Bibliográficas

[1] S Friedli. Dinâmica estocástica: três exemplos. *Universidade Federal de Minas Gerais*, 2011.

[2] J.M. Silva e J.A.S. Lima. Four approaches to the brownian motion. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:25–35, September 2007.

[3] Claudio Scherer. *Métodos Computacionais da Física*. Editora Livraria da Física, 2005.

[4] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654, 1973.

[5] R. N. Mantegna and H. E. Stanley. *An Introduction to Econophysics Correlations and Complexity in Finance*, volume 1. Cambridge University Press, 2000.

[6] Szabolcs Mike and J Doyne Farmer. An empirical behavioral model of liquidity and volatility. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(1):200–234, 2008.

[7] Gao-Feng Gu and Wei-Xing Zhou. Emergence of long memory in stock volatility from a modified mike-farmer model. *EPL (Europhysics Letters)*, 86(4):48002, 2009.

[8] Xiaotao Zhang, Jing Ping, Tao Zhu, Yuelei Li, and Xiong Xiong. Are price limits effective? an examination of an artificial stock market. *PloS one*, 11(8):e0160406, 2016.

[9] Hao Meng, Fei Ren, Gao-Feng Gu, Xiong Xiong, Yong-Jie Zhang, Wei-Xing Zhou, and Wei Zhang. Effects of long memory in the order submission process on the properties of recurrence intervals of large price fluctuations. *EPL (Europhysics Letters)*, 98(3):38003, 2012.

[10] Didier Sornette. *Critical phenomena in natural sciences: chaos, fractals, selforganization and disorder: concepts and tools*. Springer Science & Business Media, 2006.

[11] Tiziana Assenza, Domenico Delli Gatti, and Jakob Grazzini. Emergent dynamics of a macroeconomic agent based model with capital and credit. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 50:5–28, 2015.

[12] L.S. Lima. Modeling of the financial market using the two-dimensional anisotropic ising model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 482:544–551, 2017.

[13] Crispin Gardiner. *Stochastic methods*, volume 4. Springer Berlin, 2009.

[14] Paloma OC Xavier, APF Atman, and AR Bosco de Magalhães. Equation-based model for the stock market. *Physical Review E*, 96(3):032305, 2017.

[15] Thomas Lux and Michele Marchesi. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. *Nature*, 397(6719):498, 1999.

[16] Benoit B Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. In *Fractals and scaling in finance*, pages 371–418. Springer, 1997.

[17] L.S. Lima and LLB Miranda. Price dynamics of the financial markets using the stochastic differential equation for a potential double well. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 490:828–833, 2018.

[18] H Eugene Stanley, Viktor Afanasyev, Luis A Nunes Amaral, SV Buldyrev, AL Goldberger, Steve Havlin, Harry Leschhorn, P Maass, Rosario N Mantegna, C-K Peng, et al. Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from dna and physiology to econophysics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 224(1-2):302–321, 1996.

[19] Rosario N Mantegna and H Eugene Stanley. *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge university press, 1999.

[20] Iram Gleria, Raul Matsushita, and Sérgio da Silva. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26(2):99–108, 2004.

[21] Eder Pereira. Breve contribuição das redes complexas para a econofísica. 2015.

[22] E Montroll. *Fluctuation phenomena*, volume 7. Elsevier, 2012.

[23] N. Crato. *Passeio Aleatório Pela ciência do dia a dia*. Livraria da Física, 2009.

[24] Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso, Bruno Cândido Barroso, and Felipe Dias Paiva. Uma ferramenta computacional eficiente para identificação de melhores gatilhos de compra e venda de ativos financeiros. In *IX Semana de Ciência & Tecnologia-CEFET-MG*, 2013.

[25] Jalves S. Figueira. Movimento browniano: uma proposta do uso das novas tecnologias no ensino de física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, September 2011. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

[26] Charnes John. *Financial Modeling with Crystal Ball and Excel*. 2016.

[27] Silvio RA Salinas. Einstein e a teoria do movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27:263–269, 2005.

[28] Mário José de Oliveira. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35.* EdUSP, 2001.

[29] Carol Alexander. *The handbook of risk management and analysis.* John Wiley & Sons, 1996.

[30] Stephen J Taylor. *Modelling financial time series.* world scientific, 2008.

[31] Adrian Pagan. The econometrics of financial markets. *Journal of empirical finance*, 3(1):15–102, 1996.

[32] Flávio A Ziegelmann and PV PEREIRA. Modelos de volatilidade estocástica com deformação temporal: um estudo empírico para o índice ibovespa. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, 27(2):353–376, 1997.

[33] Hudson Chaves Costa, João Henrique Gonçalves Mazzeu, and Newton Carneiro Affonso da Costa Jr. O comportamento dos componentes da volatilidade das açoes no brasil. *Revista Brasileira de Finanças*, 14(2):225–268, 2016.

[34] Sergio RS Souza, Benjamin M Tabak, and Daniel O Cajueiro. Investigação da memória de longo prazo na taxa de câmbio no brasil. *Revista Brasileira de Economia*, 60(2):193–209, 2006.

[35] Cardoso Rodrigo Tomas Nogueira Paiva, Felipe Dias, Ricardo Pereira Reis, Estevão Felipe Gomes Finamora, Precificação De Um Ativo Financeiro Baseado, and Em Redes Neurais. Área temática: Finanças.

[36] F Shayeganfar. Levels of complexity in turbulent time series for weakly and high reynolds number. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(11):3151–3158, 2012.

[37] Xavier Gabaix, Parameswaran Gopikrishnan, Vasiliki Plerou, and H Eugene Stanley. Quantifying and understanding the economics of large financial movements. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(1):303–319, 2008.

[38] Didier Sornette. Why stock markets crash. In *Why Stock Markets Crash.* Princeton university press, 2017.

[39] Fátima Rocha Gomes. A bolsa de valores brasileira como fonte de informações financeiras. *Perspectivas em ciência da informação*, 2(2), 1997.

[40] Pengfei Wang and Yi Wen. Speculative bubbles and financial crises. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 4(3):184–221, 2012.

[41] Harry Markowitz. The utility of wealth. *Journal of political Economy*, 60(2):151–158, 1952.

[42] Ahmad Bagheri, Hamed Mohammadi Peyhani, and Mohsen Akbari. Financial forecasting using anfis networks with quantum-behaved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 41(14):6235–6250, 2014.

[43] Henrik Cronqvist, Stephan Siegel, and Frank Yu. Value versus growth investing: Why do different investors have different styles? *Journal of Financial Economics*, 117(2):333–349, 2015.

[44] Adilson de Lima Tavares and César Augusto Tibúrcio Silva. A análise financeira fundamentalista na previsão de melhores e piores alternativas de investimento. *Revista Universo Contábil*, 8(1):37–52, 2012.

[45] Melissa Guimarães Castello. Bitcoin é moeda? classificação das criptomoedas para o direito tributário. *Revista Direito GV*, 15, 2019.

[46] J-P Bouchaud and Rama Cont. A langevin approach to stock market fluctuations and crashes. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 6(4):543–550, 1998.

[47] LS Lima, SC Oliveira, and AF Abeilice. Modelling based in stochastic nonlinear differential equation for price dynamics. *Pioneer J. Math. Math. Sci*, 23:93–103, 2018.

[48] Leonardo S. Lima, S.C. Oliveira, AF Abeilice, and JHC Melgaço. Breaks down of the modeling of the financial market with addition of non-linear terms in the itô stochastic process. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 526:120932, 2019.

[49] Yue Zhang, Yan Zheng, Xi Liu, Qingling Zhang, and Aihua Li. Dynamical analysis of a differential algebraic bio-economic model with stage-structured and stochastic fluctuations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 462:222–229, 2016.

[50] Parameswaran Gopikrishnan, Vasiliki Plerou, Luis A Nunes Amaral, Martin Meyer, and H Eugene Stanley. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical Review E*, 60(5):5305, 1999.

[51] Federico Botta, Helen Susannah Moat, H Eugene Stanley, and Tobias Preis. Quantifying stock return distributions in financial markets. *PloS one*, 10(9):e0135600, 2015.

[52] Salim Lahmiri and Stelios Bekiros. Cryptocurrency forecasting with deep learning chaotic neural networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 118:35–40, 2019.

[53] Gao-Feng Gu, Wei Chen, and Wei-Xing Zhou. Empirical distributions of chinese stock returns at different microscopic timescales. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(2-3):495–502, 2008.