



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

EFICIÊNCIA DE MERCADO: UM ESTUDO NOS MERCADOS BRASILEIRO E ESTADUNIDENSE

RODRIGO COIMBRA PEREIRA ALVES

Orientador: Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
CEFET-MG

Coorientadora: Charlene Cássia de Resende
CEFET-MG

BELO HORIZONTE
JUNHO DE 2023

RODRIGO COIMBRA PEREIRA ALVES

EFICIÊNCIA DE MERCADO: UM ESTUDO NOS MERCADOS BRASILEIRO E ESTADUNIDENSE

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
CEFET-MG

Coorientadora: Charlene Cássia de Resende
CEFET-MG

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
JUNHO DE 2023

A474e Alves, Rodrigo Coimbra Pereira
Eficiência de mercado: um estudo nos mercados brasileiro e estadunidense /
Rodrigo Coimbra Pereira Alves. – 2023.
xii, 108 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães.

Coorientador: Charlene Cássia de Resende.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas
Gerais.

1. Preços – Estatísticas – Teses. 2. Mercado financeiro – Brasil – Teses.
3. Mercado financeiro – Estados Unidos – Teses. 4. Finanças – Teses. 5. Expoente de
Hurst – Teses. 6. Teoria espectral (Matemática) – Teses. 7. Distribuição (Teoria da
probabilidade) – Teses. I. Magalhães, Arthur Rodrigo Bosco de. II. Resende, Charlene
Cássia de. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 519.5

Agradecimentos

Aos meus pais, por toda a estrutura que me permitiu chegar até aqui e realizar este trabalho.

Ao meu orientador e à minha coorientadora, pelo acompanhamento e guia.

Aos meus amigos, pela motivação e descontração.

Ao CEFET-MG e à FAPEMIG, pelo apoio financeiro e toda estrutura necessária.

“Se escolhermos a posição na vida a qual podemos trabalhar pela humanidade, nenhum encargo irá nos pôr para baixo, pois esses encargos são sacrifícios pelo bem de todos, então não experimentaremos alegria mesquinha, limitada e egoísta, mas nossa felicidade irá pertencer à milhões, viveremos de ações silenciosas mas em constante trabalho, e sobre nossas cinzas serão derramadas quentes lágrimas de pessoas nobres.”

Karl Marx

Resumo

A hipótese de mercado eficiente é um conceito central na teoria econômica contemporânea. Embora desvios da eficiência venham sendo associados a diferentes estatísticas observadas em séries financeiras, em última instância o que os define é a possibilidade de ganhos consistentes acima da média do mercado por meio de arbitragem. A presente pesquisa consiste em um estudo em que essa questão é abordada por múltiplos ângulos. Tendo como dados de entrada séries de preços de ações dos mercados brasileiro e estadunidense, este estudo examina estatísticas encontradas em séries de preços ou de retornos que se afastam de comportamentos análogos ao de um caminhante aleatório. Utilizamos como ferramentas o expoente de Hurst e sua generalização multifractal, distribuições cumulativas inversas e um modelo de previsão de tendências de retornos de ativos financeiros baseado em um sistema de equações diferenciais acopladas. Buscamos analisar correlações entre as estatísticas encontradas de forma a identificar desvios da hipótese de mercado eficiente: tais correlações fornecem informações a respeito de possibilidades de arbitragem. Ainda com o objetivo de identificar oportunidades de arbitragem, conduzimos uma análise abrangendo diversas faixas de horário. Além disso, desenvolvemos um índice que relaciona o potencial de lucro teórico com a liquidez dos ativos.

Palavras-chave: Tendências de Preço. Hipótese de Mercado Eficiente. Séries Financeiras. Expoente de Hurst. Espectro de Singularidade. Distribuição de Caudas Pesadas.

Abstract

The Efficient Market Hypothesis is a central concept in contemporary economic theory. While deviations from efficiency have been associated with various observed statistics in financial time series, their defining characteristic is ultimately the possibility of consistently earning above-average market returns through arbitrage. This research constitutes a comprehensive study approaching this issue from multiple angles. Using price series of stocks from the Brazilian and American markets as input data, this study examines statistics found in price or return series that deviate from behaviors analogous to a random walk. We employ tools such as the Hurst exponent and its multifractal generalization, inverse cumulative distributions, and a trend forecasting model for financial asset returns based on a system of coupled differential equations. The aim is to analyze correlations among the identified statistics to identify deviations from the Efficient Market Hypothesis, as these correlations provide insights into potential arbitrage opportunities. Additionally, we conduct an analysis across various time intervals to identify further arbitrage opportunities. Furthermore, we develop an index that relates the theoretical profit potential to the liquidity of assets.

Keywords: Price Trends. Efficient Market Hypothesis. Financial Time Series. Hurst Exponent. Singularity Spectrum. Heavy-Tailed Distribution.

Lista de Figuras

Figura 1 – Imagem ilustrativa de uma sequência de <i>candlesticks</i>	15
Figura 2 – Exemplo de Modelo de Histograma.	22
Figura 3 – Exemplo de um ajuste linear na cauda da distribuição de retorno de um ativo do Ibovespa. Foram usados preços de fechamento de candles de 5 minutos de ABEV3.	23
Figura 4 – Variação do Expoente de Hurst generalizado $h(q)$, entre -3 e 3 , referente ao ativo WEGE3, do índice Ibovespa	36
Figura 5 – Comportamento da função de flutuação do ativo WEGE3, do índice Ibovespa, com o parâmetro q variando de -3 a 3 . A curva inferior corresponde a $q = -3$ e a superior a $q = 3$	37
Figura 6 – Espectro de singularidade do ativo WEGE3, do índice Ibovespa para q variando de -3 a 3	41
Figura 7 – Distribuições de Retornos para os ativos que compõem o índice Ibovespa ABEV3, BBAS3, BBDC3 e BBDC4, onde BBDC3 e BBDC4 são o mesmo ativo, mas o primeiro se refere às ações ordinais e o último às ações preferenciais.	42
Figura 8 – Distribuições de Retornos para os ativos que compõem o índice Dow Jones GE UN, IBM UN, NKE UN e UTX UN.	43
Figura 9 – Regressão linear em gráfico de dispersão para o índice Ibovespa. Cada ponto corresponde a uma ação.	54
Figura 10 – Regressão linear em gráfico de dispersão para o índice Dow Jones. Cada ponto corresponde a uma ação.	55
Figura 11 – Relação entre Retorno e Acurácia por horário para o índice Ibovespa. Cada ponto de cor diferente corresponde a uma ação.	64
Figura 12 – Relação entre Retorno e Acurácia por horário para o índice Dow Jones. Cada ponto de cor diferente corresponde a uma ação.	64
Figura 13 – Correlação entre Retorno e Acurácia para o índice Ibovespa na faixa de horários de 13 horas. Cada ponto corresponde a uma ação.	66
Figura 14 – Correlação entre Lucro por Unidade Monetária Investida e Volume de Negociações para o índice Ibovespa. Cada ponto corresponde a uma ação.	67

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Expoentes de Hurst para o índice IBOVESPA	33
Tabela 2 – Expoentes de Hurst para o índice Dow Jones	34
Tabela 3 – Largura dos espectros de singularidade para o índice IBOVESPA	38
Tabela 4 – Largura dos espectros de singularidade para o índice Dow Jones	39
Tabela 5 – Coeficientes de decaimento para o índice IBOVESPA	43
Tabela 6 – Coeficientes de decaimento para o índice Dow Jones	45
Tabela 7 – Acurácias para o índice IBOVESPA	47
Tabela 8 – Acurácias para o índice Dow Jones	48
Tabela 9 – Retornos médios para o índice Ibovespa para velas de 5 minutos.	50
Tabela 10 – Retornos médios para o índice Dow Jones para velas de 5 minutos.	52
Tabela 11 – Coeficiente de Pearson para os índices IBOVESPA e Dow Jones	53
Tabela 12 – Coeficientes de Pearson $h(q)$ versus Acurácia para os índices Ibovespa e Dow Jones	56
Tabela 13 – Coeficientes de Pearson: $h(q)$ versus Retorno Médio para os índices Ibovespa e Dow Jones	56
Tabela 14 – Coeficientes de Pearson Largura do Espectro de Singularidade versus Retorno Médio para os índices Ibovespa e Dow Jones	57
Tabela 15 – Coeficiente de Pearson Largura do Espectro de Singularidade versus Acurácia para os índices Ibovespa e Dow Jones	57
Tabela 16 – Acurácia por Hora e Ativo para o Índice Ibovespa. Os horários relatados correspondem ao horário de início dos intervalos.	58
Tabela 17 – Acurácia por Hora e Ativo para o Índice Dow Jones. Os horários relatados correspondem ao horário de início dos intervalos.	60
Tabela 18 – Retornos médios por horário para o índice IBOVESPA	61
Tabela 19 – Retornos médios por horário para o índice Dow Jones	62
Tabela 20 – Coeficientes de Pearson Acurácia versus Retorno Médio para os índices Ibovespa e Dow Jones	65
Tabela 21 – Experimento 1: Coeficiente de Pearson Lucro versus Volume de Negociações para o índice Ibovespa	66
Tabela 22 – Experimento 2: Coeficiente de Pearson Lucro versus Volume de Negociações para o índice Ibovespa	67
Tabela 23 – Experimento 3: Coeficiente de Pearson Lucro versus Volume de Negociações para o índice Ibovespa	68
Tabela 24 – Experimento 1: Coeficiente de Pearson Acurácia versus Volume de Negociações para o índice Ibovespa	68

Tabela 25 – Experimento 2: Coeficiente de Pearson Acurácia <i>versus</i> Volume de Negociações para o índice Ibovespa	68
Tabela 26 – Experimento 3: Coeficiente de Pearson Acurácia <i>versus</i> Volume de Negociações para o índice Ibovespa	69
Tabela 27 – Lucro por Unidade Monetária Investida Médio por Ativo e Volume Médio de Negociações por Ativo. Na coluna mais à direita são apresentados os valores dos Índices de Desvios de cada ativo.	69

Lista de Abreviaturas e Siglas

DFA	<i>Detrended Fluctuation Analysis</i>
DMA	<i>Detrending Moving Average</i>
BOVESPA	Bolsa de Valores de São Paulo
MF-DFA	<i>Multifractal Detrended Fluctuation Analysis</i>

Sumário

1 – Introdução	1
1.1 Objetivos	5
1.1.1 Objetivo Geral	5
1.1.2 Objetivos Específicos	5
1.2 Motivação e Justificativa	5
1.3 Organização do trabalho	6
2 – Trabalhos Relacionados	8
2.1 Previsão de Tendências de Preço	8
2.2 Expoente de Hurst	9
2.3 Distribuição de Retornos	10
3 – Fundamentação Teórica	12
3.1 Mercado Financeiro	12
3.2 Hipótese de Mercado Eficiente	13
3.3 Candlestick	14
3.4 Random Walk	15
4 – Metodologia	17
4.1 DFA Multifractal Generalizada e Espectro de Singularidade	17
4.1.1 DFA Multifractal Generalizada	17
4.1.2 Espectro de Singularidade	19
4.2 Caudas Pesadas na Distribuição de Retornos	21
4.3 Descrição do Modelo de Previsão	23
4.3.1 Estimação da matriz de coeficientes	26
4.4 Análise Sobre Lucros e Liquidez	30
5 – Análise e Discussão dos Resultados	32
5.1 Expoentes de Hurst	32
5.2 Espectros de Singularidade	37
5.3 Distribuição de Retornos	41
5.4 Análise das Acurácias por Ativos	46
5.5 Análise das Correlações	50
5.5.1 Análise das Correlações por Horário	57
5.5.2 Análise sobre Lucro, Liquidez e Acurácia	66
5.6 Índice de Desvios	69

6 – Conclusão	72
Referências	76

Capítulo 1

Introdução

A humanidade tenta compreender o funcionamento das dinâmicas de mercado há milênios. De acordo com o livro *Free Market: The History of an Idea* (SOLL, 2022), de Jacob Soll, a própria ideia de livre mercado remonta à República Romana, com o filósofo, político e escritor, Senador Marco Túlio Cícero. Essas primeiras ideias acerca do livre mercado propostas por Cícero estavam intimamente ligadas a um código moral estóico e como ele poderia moldar as trocas entre “agentes amigos” e criar um mercado perfeito, equilibrado e próspero. As ideias de Cícero se baseiam na concepção idealista que se escora, e depende, da moralidade dos agentes envolvidos. Os pensadores que discorreram sobre o livre mercado daí em diante tiveram alguma influência dos escritos do senador romano.

Mas a compreensão de como esse “mercado perfeito” funcionaria foi se moldando ao longo do tempo. A própria interpretação cristã de sua realidade teológica começa a se Emaranhar nas ideias de Cícero, onde os cristãos argumentavam que a abdicação de seus prazeres carnis e materiais os garantiria um lugar no paraíso, em uma espécie de mercado perfeito espiritual. Curiosamente, ainda de acordo com Soll, em *Free Market: The History of an Idea* (SOLL, 2022), o primeiro a usar o termo *mão invisível*¹ foi Santo Agostinho, referindo-se à deidade que agiria de forma imperceptível sobre a relação de troca de prazeres pela salvação.

Avançando um pouco mais no tempo, nos deparamos com mais situações em que as ideias de livre mercado incorporam compreensões de outras áreas do conhecimento a fim de buscar sua sustentação. Após o desenvolvimento das leis de Kepler, que versa sobre a órbita dos planetas, a comunidade científica e, por consequência, as interpretações a respeito do livre mercado, são tomadas pela busca de leis que expliquem o funcionamento de fenômenos. O livre mercado é colocado na prateleira de lei natural do universo e não de um produto de relações sociais. O próprio Isaac Newton, intimamente envolvido com a

¹Termo posteriormente utilizado pelo economista Adam Smith para se referir à dinâmica que regiria o mercado. A mão invisível do mercado, então, regularia o mercado automaticamente, ajustando os preços dos produtos de acordo com sua necessidade.

Casa da Moeda Real da Inglaterra, acreditava que o livre mercado era uma lei natural.

Em contraponto, como dito no livro *Why Stock Markets Crash* (SORNETTE, 2002), durante o Século de Ouro dos Países Baixos, período em que Amsterdã se tornou o centro comercial do noroeste europeu, as coloridas tulipas que eram importadas da Turquia se tornaram um artigo de luxo e alvo de grande desejo da classe mais abastada da sociedade holandesa. As tulipas acabaram se tornando um mecanismo de especulação da riqueza dos envolvidos nesse ramo, de forma que o crescimento desse mercado fez com que as tulipas alcançassem preços exorbitantes em comparação com outros bens e serviços e depois perdessem abruptamente seu valor. A atmosfera otimista e de confiança, produto da prosperidade econômica, das possibilidades atreladas às colônias e uma moeda pujante, acabaram levando à crise econômica que ficou conhecida como Mania das Tulipas.

Outra bolha econômica² bem conhecida é a Bolha do Mar do Sul. No início do século 18, investidores enxergaram potencial na Companhia dos Mares do Sul em cobrar juros de empréstimos, além de lucros com ouro, prata e escravos. Uma grande confiança do mercado pairava sobre a companhia e as ações tomadas pelo governo. Os lucros esperados nunca chegaram a acontecer, o que fez com que os ativos comercializados previamente ficassem muito supervalorizados. Os preços dos ativos logo despencaram e causaram uma séria crise econômica.

Ainda se tratando de crises no mercado, a maior crise do capitalismo financeiro se deu nos EUA, na chamada Grande Depressão, em 1929. Lucrando com a exportação de alimentos e produtos industrializados para os países aliados no período entreguerras, a produção estadunidense deu um salto estrondoso. Mas, com a reestabilização da economia européia, a importação de produtos dos norte-americanos caiu drasticamente. Como resultado disso, houve uma queda de produção, que levou ao aumento do desemprego e à redução dos lucros das empresas. A economia retraiu, paralisando o comércio e levando à queda da bolsa de valores, resultando em sua quebra. Uma gigantesca crise econômica estava instaurada.

Nos dias de hoje, as ideias de livre mercado são profundamente difundidas na nossa sociedade, apesar de terem passado e ainda passarem por inúmeras provas, como a crise financeira de 2007-2008, ainda tão fresca em nossas memórias. Além disso, tais ideias passaram por muitas reformulações e discussões, como a respeito de intervenções estatais e das próprias crises econômicas: vide as contraposições de autores não-liberais, como Karl Marx, que argumentava que as crises do capitalismo são cíclicas devido à irracionalidade de seus processos produtivos.

²Bolhas econômicas são situações em que um ativo é comercializado acima de seu valor real. Quando o mercado se dá conta do erro, a bolha "estoura", causando queda dos preços e elevados prejuízos.

Neste trabalho, buscaremos investigar e comparar aspectos importantíssimos dessa ideia que permeia o pensamento coletivo de nosso tempo e de tempos passados, que nos levam a intermináveis debates e questionamentos. Para isso, precisamos de um pouco mais de contexto, como apresentamos no restante desta introdução.

Mercados financeiros são sistemas com propriedades complexas em que um grande número de agentes interage entre si a partir de informações externas diversas de forma a determinar o melhor preço para um ativo (MANTEGNA; STANLEY, 1999). Os mercados seriam, então, eficientes, pois seus preços caminhariam para um estado estacionário no longo prazo. De acordo com a teoria econômica clássica, não seria possível obter informações sobre dados futuros levando-se em conta dados passados e conseguir grandes retornos financeiros de forma consistente (SAMUELSON, 1965; MALKIEL; FAMA, 1970). Esse aspecto da teoria clássica é conhecido como Hipótese de Mercado Eficiente (HME), que essencialmente diz que um mercado é eficiente se toda a informação disponível é instantaneamente processada ao chegar no mercado e imediatamente refletida nos preços dos ativos negociados (MANTEGNA; STANLEY, 1999).

Interessados na melhor compreensão da HME, pesquisadores se ocuparam da tarefa de conduzir estudos utilizando ferramentas estatísticas diversas (BARKOULAS; BAUM, 1996; GRECH; MAZUR, 2004; CAJUEIRO; TABAK, 2004; ZUNINO et al., 2007; CHORDIA; ROLL; SUBRAHMANYAM, 2008; BELAIRE-FRANCH; OPONG, 2010; CAGINALP; DESANTIS, 2011; CHARLES; DARNÉ; KIM, 2012; LAZAR; TODEA; FILIP, 2012; CHOUDHRY; JAYASEKERA, 2012; CHOUDHRY; JAYASEKERA, 2014; NTIM et al., 2015; CURME; STANLEY; VODENSKA, 2015; PODOBNIK et al., 2006; RESENDE et al., 2017; AL-KHAZALI; PYUN; KIM, 2012; KATUSIIME; SHAMSUDDIN; AGBOLA, 2015). Em muitos deles, concluiu-se que os mercados não são perfeitamente eficientes, mas que se aproximam dos resultados esperados, tendendo para a eficiência teorizada.

Essa não-perfeição dos mercados deixa brechas para investigações com foco em investimentos. Motivados pelo desafio da aquisição de grandes retornos financeiros com baixos riscos envolvidos, algo que contradiz a HME, analistas de mercado e outros estudiosos buscam formas de encontrar informações que se relacionem com a hipótese (CHORDIA; ROLL; SUBRAHMANYAM, 2008; LIU, 2010; CHUNG; HRAZDIL, 2010; ROSS, 1989; HEALY; PALEPU, 2001; BRUNNERMEIER, 2005; RAFFERTY; TOMLJANOVICH, 2002; BORDO; LANDON-LANE, 2013; CHEN; HUANG; SU, 2014; PASQUARIELLO; ZAFEIRIDOU, 2014; ALONSO-RIVERA; CRUZ-AKÉ; VENEGAS-MARTÍNEZ, 2014; LIM; BROOKS; KIM, 2008), nas quais poderíamos identificar desvios da HME e, assim, oportunidades de investimentos com retornos consistentes acima da média do mercado.. As causas encontradas para os desvios da hipótese são variadas, podendo ser baixa liquidez, custos operacionais, intervenções de bancos centrais, incertezas políticas, crises financeiras e o fluxo de informações. A

identificação e compreensão desses comportamentos é de grande interesse nesta pesquisa e pode nos ajudar a entender melhor a própria HME, bem como colocá-la à prova.

Entretanto, por muitas vezes, as conclusões tiradas nos estudos citados acima não estão diretamente relacionadas com a possibilidade de arbitragem, não correspondendo exatamente às ideias originais que compõem a HME. Mesmo quando desvios da gaussianidade e correlações não previstas nos modelos econômicos canônicos são encontrados em dados financeiros, a presença de desvios da HME é inconclusiva se não for apontada a possibilidade de arbitragem. Nos preocuparemos dessas questões durante o desenvolvimento e conclusão do presente estudo.

Uma forma de se encontrarem desvios da HME e, assim, se identificarem possíveis oportunidades de investimentos é por meio do estudo de previsão de dinâmicas de mercado (RESENDE et al., 2017; RESENDE, 2021; FONSECA et al., 2021; ATSALAKIS; VALAVANIS, 2013; BURY, 2014; ATSALAKIS; VALAVANIS, 2009). Os modelos matemáticos e computacionais utilizados nesses estudos podem nos oferecer valiosas informações a respeito dos mercados, sobre o comportamento dos agentes envolvidos (PREIS; MOAT; STANLEY, 2013; MOAT et al., 2013), e sobre a HME. Usualmente, as classificações de tendências para preços são aplicadas simultaneamente a diversos ativos levando em conta não apenas sua acurácia, mas também o retorno e o volume de negociação médios em um mesmo instante de tempo. Essas acurácias são altas, mas decaem dramaticamente para instantes futuros. Casos em que, mesmo para instantes futuros, obtemos boas acurácias para as previsões de tendências indicam a possibilidade de desvios da HME.

Nesta pesquisa, investigamos a eficiência de mercado a partir de múltiplos pontos de vista, utilizando como dados de entrada séries de preços de ações dos mercados brasileiro e estadunidense. Começamos por examinar estatísticas encontradas em séries de preços ou de retornos que demonstram que as dinâmicas analisadas fogem do comportamento análogo ao de um caminhante aleatório com passos descorrelacionados distribuídos segundo uma gaussiana. Tal exame foi realizado utilizando-se como ferramentas o expoente de Hurst e sua generalização multifractal, bem como distribuições cumulativas inversas que explicitam caudas pesadas. Não há como se construir estratégias de negociação com ganhos consistentes para séries de preços descritas pela dinâmica desse caminhante. Assim, o distanciamento entre os dados empíricos e tal modelo é fator que, embora não garanta, aponta para a possibilidade de desvios em relação ao que determina a Hipótese de Mercado Eficiente. Em seguida, para uma análise mais focalizada na eficiência de mercado, exploramos as acurácias de um modelo de previsão de tendências inspirado em equações diferenciais. O potencial de ganho financeiro em uma operação definida num dado intervalo de tempo tem relação não apenas com a acurácia do modelo de previsão, mas também com muitos outros fatores, entre eles, o retorno médio associado, o qual calculamos para

as diferentes ações. Investigamos correlações entre as diversas estatísticas computadas. Visando um estudo mais detalhado das possibilidades de arbitragem, calculamos as acurácias e retornos médios para cada ação para diferentes faixas de horário e examinamos as correlações entre as estatísticas encontradas. Na etapa seguinte, aproximamos ainda mais nossa investigação de um teste efetivo da validade da Hipótese de Mercado Eficiente. Calculamos o lucro obtido a partir de operações realizadas segundo nosso modelo de previsão de tendência, considerando custos de operação. Esse cálculo não leva em conta perdas relacionada à falta de liquidez. Para incluir tal elemento na investigação, computamos correlações entre volumes de negociação, tomados como indicadores de liquidez, e lucros. Buscando evidenciar oportunidades de arbitragem, realizamos esse estudo considerando diferentes faixas de horário e propuzemos um Índice que relaciona o lucro teórico e a liquidez. O estudo aqui apresentado foi efetuado na forma de aproximações sucessivas tendo como alvo o cerne da questão da eficiência de mercado: a possibilidade de arbitragem.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo geral investigar a Hipótese de Mercado Eficiente através de um modelo de previsão de tendências de mercado baseado em equações diferenciais acopladas.

1.1.2 Objetivos Específicos

Buscamos encontrar e categorizar relações entre retornos e volumes médios associados a operações com ativos financeiros, acurácias de previsões de tendências, distribuições de retornos, expoentes de Hurst e espectros de singularidade dos ativos e investigá-las de forma a quantificar rendimentos ao aplicar o método em um cenário de investimentos na B3, levando em conta custos de operação, volume e retornos, e traduzir os resultados encontrados em um melhor entendimento da eficiência de mercado e seus vínculos com as variáveis de interesse.

1.2 Motivação e Justificativa

O presente trabalho se justifica pela necessidade de se compreender leis de mercado de certa forma invisíveis e um tanto abstratas, principalmente em um contexto em que o número de cadastros na B3 cresceu 56% de dezembro de 2020 a fevereiro de 2022, se fazendo assim um tema cada vez mais frequente e popular.

Utilizamos, então, um modelo estudado no ambiente de exploração deste trabalho, surgindo de um modelo base (RESENDE et al., 2017) e sendo atualizado posteriormente para o utilizado aqui em (FONSECA et al., 2021). Na presente contribuição, uma análise mais aprofundada da eficiência de mercado, levando em conta a relação entre retornos, acurácias e outras variáveis de interesse, é feita. A originalidade da presente proposta em relação às contribuições em (RESENDE et al., 2017) e (FONSECA et al., 2021) está na investigação da relação entre liquidez, retornos, acurácias, expoentes de Hurst generalizados e espectros de singularidade visando analisar a eficiência do mercado de ações brasileiro, bem como na discussão a respeito do conceito de eficiência de mercado e sua relação com a possibilidade de arbitragem em determinados cenários.

1.3 Organização do trabalho

O trabalho consiste em 6 capítulos, divididos de acordo com o que segue:

No capítulo 1, que é o capítulo atual, introduzimos o tema por meio de breve contextualização histórica e apresentação de conceitos fundamentais, bem como alinhamos as expectativas com o leitor, expondo os objetivos, motivações e a forma de organização do trabalho.

No capítulo 2, apresentamos trabalhos relacionados ao nosso objeto de estudo, de forma a oferecer uma melhor compreensão de investigações feitas anteriormente sobre previsão de tendências de preços, bem como apresentar ideias relacionadas ao conhecimento de finanças e conceitos envolvidos, como distribuições com caudas pesadas, o expoente de Hurst e o espectro de singularidade.

No capítulo 3, expomos a fundamentação teórica para o entendimento de conceitos como mercado financeiro, caminhante aleatório, Hipótese de Mercado Eficiente, análise de flutuações sem tendências e outros.

No capítulo 4, toda a metodologia é apresentada, o modelo de previsão de tendências baseado em equações diferenciais é descrito e seus aspectos mais importantes são evidenciados e explicados, os métodos de análise sobre lucro são evidenciados, bem como as metodologias de análise de flutuações sem tendências, espectro de singularidade e distribuição de retornos.

No capítulo 5, após a exploração do modelo, expomos os resultados iniciais e as etapas de análise de resultados que possam nos fornecer inferências importantes acerca da Hipótese de Mercado Eficiente nos mercados brasileiro e estadunidense. Nele são feitas as análises dos expoentes de Hurst, dos espectros de singularidade, da distribuição de retornos, das acurácias e das correlações de interesse.

No capítulo 6, o último, traçamos as considerações finais do que foi feito, listando e elaborando as conclusões alcançadas tendo em vista uma melhor compreensão de comportamentos relacionados à Hipótese de Mercado Eficiente.

Capítulo 2

Trabalhos Relacionados

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão de trabalhos relacionados ao tema da presente pesquisa, tais como previsão de tendências de preço, distribuição de retornos, expoente de Hurst e multifractalidade para séries de preços do mercado de ações.

2.1 Previsão de Tendências de Preço

Muitos trabalhos são voltados ao estudo de desvios da HME. Em suas variadas formas de investigação, nestes trabalhos busca-se frequentemente obter estimativas para preços futuros.

Em ([RESENDE et al., 2017](#)), é apresentado um modelo baseado em equações diferenciais para a previsão de tendências de preços de ativos como uma ferramenta para a investigação da eficiência de mercados emergentes e desenvolvidos. Pesquisas sugerem que desvios da HME são mais observados em mercados emergentes e, com isso, maiores oportunidades de arbitragens são esperadas ([SORNETTE, 2002](#)). Para tal investigação, foram analisados os mercados americano (Dow Jones) e o brasileiro (B3). Nos resultados de ([RESENDE et al., 2017](#)), constatou-se que as acurácias das previsões do modelo testado eram consistentemente maiores do que a de um modelo completamente aleatório, como, por exemplo, uma moeda justa.

Seguindo na mesma linha, em ([FONSECA et al., 2021](#)) e em ([RESENDE, 2021](#)), são apresentados modelos com outra abordagem para a previsão com base em equações diferenciais. Novas técnicas de otimização e de tratamento dos preços de referência são aplicadas, resultando em acurácias consistentemente maiores, que evidenciam desvios da HME.

Em ([GARCIA et al., 2020](#)), um modelo de previsão de preços baseado em osciladores harmônicos é apresentado. O modelo se inspira na ideia de que uma força restauradora

tende a manter os preços em torno de um preço justo e que essa força restauradora, juntamente com inércia e dissipação, poderia ser aproximada por aquela encontrada em um oscilador harmônico amortecido. O modelo é aplicado a séries de preços de ações da B3. Nesse mercado são esperados maiores desvios da HME. Esse modelo também se mostra consistentemente melhor do que um modelo completamente aleatório.

Já na contribuição de (RECHENTHIN; STREET, 2013), foi investigada a probabilidade condicional para identificar continuidade e reversão de tendências de preços, aplicando o estudo para altas e variadas frequências. A conclusão apresentada pelos autores indica que o mercado apresenta ineficiência até aproximadamente 30 minutos e, a partir daí, começa a caminhar em direção à eficiência.

Em (OLIVEIRA; NOBRE; ZARATE, 2013), um modelo baseado em redes neurais artificiais é apresentado. Como entrada da rede foi utilizada a série de preços das ações preferenciais da Petrobras (PETR4) e aspectos técnicos e fundamentalistas. Já como saída da rede, tem os preços previstos. As taxas de acerto de preço obtidas ao fim do estudo, para a base de dados utilizada, se mostraram, de acordo com os autores, satisfatórias.

2.2 Expoente de Hurst

O Expoente de Hurst é uma medida que quantifica a natureza de persistência ou as correlações de longo alcance em uma série temporal. Ele é frequentemente usado para avaliar a tendência ou aleatoriedade em dados sequenciais.

O coeficiente de Hurst é denotado por " h " e varia geralmente entre 0 e 1. $h = 0,5$: Indica um comportamento completamente aleatório. Não há correlações de longo alcance e nenhum padrão discernível na série temporal. $h > 0,5$: Sugere que a série possui persistência ou tendência de apresentar correlações de longo alcance. Valores maiores que 0,5 indicam que o padrão observado em um determinado ponto no tempo tem maior probabilidade de se manter no futuro. $h < 0,5$: Indica que a série possui reversão à média ou anti persistência. Valores menores que 0,5 sugerem que a série tende a retornar à sua média ou valor de referência ao longo do tempo.

O Expoente de Hurst tem suas origens no campo da hidrologia, onde, em meados de 1951, o hidrólogo Harold Edwin Hurst verificou, no projeto de uma represa no rio Nilo, que alguns fenômenos da natureza não se comportavam de maneira completamente aleatória. Tais fenômenos, como o estudado das flutuações do rio Nilo, possuíam uma dependência de longo alcance.

Além das aplicações em hidrologia, (CARBONE; CASTELLI; STANLEY, 2004) e (CAJUEIRO; TABAK, 2004), testaram as aplicações da metodologia desenvolvida por Hurst em modelos

econômicos para investigar a Hipótese de Mercado Eficiente. Utilizando dados dessas séries temporais, é calculado o expoente de Hurst, que, em geral, assume valores entre 0 e 1. Enquanto em (CAJUEIRO; TABAK, 2004) foi utilizado o método R/S^1 , em (CARBONE; CASTELLI; STANLEY, 2004) o expoente foi estimado pelo método de análise de flutuações sem tendência (*detrended fluctuation analysis*, ou DFA) e o método de média móvel sem tendência (*detrended moving average*, ou DMA).

Em (CARBONE; CASTELLI; STANLEY, 2004), foi calculado o expoente de Hurst para séries artificiais de fractais e em séries de retornos logarítmicos utilizando DFA e DMA. Encontraram, assim, indicativos de que o mercado não segue o movimento browniano, pois as séries de preços reais de ativos divergiam dos valores esperados para a faixa de variabilidade local. Os expoentes de Hurst distantes de 0,5 sugerem, desta forma, um desvio da Hipótese de Mercado Eficiente.

No trabalho apresentado por (CAJUEIRO; TABAK, 2004), foram explorados mercados emergentes e desenvolvidos. Para a análise, foram utilizadas séries de dados de 4 anos, índices de mercados emergentes da Ásia e América Latina, bem como índices de outros 2 mercados desenvolvidos. Foi observado, ao calcular seus expoentes de Hurst, que os mercados desenvolvidos encontram-se mais próximos da ausência de tendência, com expoentes em torno de 0,5, o que não se observa para os mercados emergentes. De acordo com as conclusões desse artigo, tal diferença se deve à velocidade de propagação das informações, à eficiência no processo de negociação e ao fluxo de capitais. A ideia por trás dessa afirmação é que os três pontos citados têm suas influências reduzidas pela competição do mercado, devido principalmente à atividade de grandes fundos.

2.3 Distribuição de Retornos

Alguns dos artigos que inspiraram a construção deste trabalho e das ideias que foram desenvolvidas nele se ocupam da análise da distribuição de retornos cumulativa inversa, a fim de investigar os comportamentos apresentados no decaimento das caudas analisadas, nos fornecendo valiosas informações sobre as flutuações de preço em ativos.

Em (GOPIKRISHNAN et al., 1999), calcula-se a distribuição de probabilidade dos retornos em escalas de tempo variando de 1 minuto até mais de 1 mês. Assim, chegam ao resultado de que as distribuições para menores escalas de tempo são consistentes com um comportamento assintótico de lei de potências caracterizado por um expoente $\alpha \approx 3$. Uma possível explicação para a forma que as distribuições escalam é a longa persistência da função de

¹O método R/S , também conhecido como método de reescalamento (*rescaled range*), é uma técnica utilizada para analisar a natureza de tendência ou aleatoriedade em séries temporais e foi proposta por Hurst no início do século XX.

autocorrelação da volatilidade. Para escalas de tempo maiores, os resultados se aproximam cada vez mais de um comportamento gaussiano.

De forma parecida ([DROZDZ et al., 2007](#)) mostra que flutuações recentes dos ativos no mercado são caracterizadas por distribuições cumulativas cujas caudas, em escalas de tempo da ordem de minutos, apresentam índices $\alpha > 3$ com comportamento de lei de potência.² Esse índice decai rapidamente se diminuirmos a frequência das amostras. Os resultados do artigo sugerem que as dinâmicas dos mercados contemporâneos diferem das encontradas no passado, levando-nos a crer que os mercados estão continuamente tendendo à eficiência.

Em ([BOTTA et al., 2015](#)), os autores se ocupam da tarefa de quantificar a probabilidade de grandes mudanças de preço no mercado de ações. Nesse trabalho são analisados dados do mercado de ações do índice Dow Jones em uma frequência de segundo em segundo, em um período de dois anos e meio, de forma a quantificar as mudanças de distribuição nos preços de mercado em escalas de tempo variadas. Os resultados do experimento mostraram que as caudas das distribuições de retorno se comportam com um decaimento em lei de potência para escalas de tempo de 300 a 3600 segundos e, para escalas de tempo maiores, as caudas apresentam decaimento exponencial.

²Denotamos aqui por α o oposto do coeficiente angular da reta que ajusta a cauda de distribuição numa escala log-log, quando tal ajuste é válido.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

Neste capítulo, descrevemos alguns conceitos financeiros basilares para a compreensão do trabalho, concentrando nossa atenção especialmente no mercado de ações.

3.1 Mercado Financeiro

O mercado financeiro é um fenômeno emergente e muito vasto, que engloba diversos tipos de mercados. Ações são títulos do mercado de renda variável cujos retornos sobre os investimentos não podem ser medidos com antecedência. Esses títulos conferem aos seus detentores a participação na sociedade da empresa.

Cada empresa tem seu código de negociação na bolsa de valores e, no Brasil, tais negociações são realizadas na B3, que atua no segmento BM&FBOVESPA. A negociação dos ativos é feita através de uma plataforma (PUMA Trading System) gerida pela B3, conhecida como B3 (Bolsa de Valores de São Paulo), através da qual são realizados variados tipos de operações ([BMFBOVESPA, 2020](#)). As operações realizadas envolvem custos transacionais, divididos em taxa de liquidação, negociação e registro.

Dentro da B3, existem índices de ações, sendo o Ibovespa o mais conhecido e importante indicador de desempenho dessas empresas. O Ibovespa é composto por uma carteira teórica de ações de, em média, sessenta ações principais, que são reavaliadas, incluídas e excluídas periodicamente, de acordo com o número de negócios e o volume financeiro ([BMFBOVESPA, 2015](#)).

A negociação das ações na bolsa é feita por meio de ordens, que são enviadas às corretoras e, posteriormente, à bolsa. Essas ordens podem ser do tipo a mercado, ordem limitada, ordem *take profit*, ordem *stop loss*, ordem *start* ou ordem casada. Na ordem a mercado, a negociação ocorre imediatamente, pois é feita no preço disponível no mercado do ativo no presente momento. Na ordem limitada, a negociação só é feita se um preço limite

preestabelecido for atingido, tanto para a compra quanto para a venda. Na ordem *take profit*, a negociação só ocorre quando um retorno preestabelecido for atingido, neste caso, a ordem é disparada no momento em que isso acontece. Na ordem *stop loss*, por outro lado, a sua posição será liquidada quando as suas perdas na operação atingirem um preço predeterminado. Na ordem *start*, a compra é programada para ser realizada apenas quando o preço estiver acima de um valor predeterminado, isso é feito estabelecendo um preço de disparo, que representa o valor em que sua ordem será enviada, e um preço limite, que determina o máximo que deve ser pago por uma ação. Na ordem casada, a ordem é feita quando há paridade entre os preços de compra e venda.

Tratando-se de mercado de ações, o *retorno* é dado pela diferença percentual de preço no tempo t e no tempo $t - 1$. Usualmente, consideramos a diferença entre os logaritmos dos preços no intervalo para determinar o retorno. Grandes variações nesses retornos apontam para maiores chances de ganhos ou perdas nas operações. A amplitude dessa variação dos retornos define sua volatilidade, que pode ser utilizada como um indicador de risco em variadas estratégias de investimento. Outro conceito importante é o da liquidez, que representa a facilidade de recuperação dos valores investidos em dinheiro, com o mínimo de perdas no processo.

Tratando-se da análise em mercado de ações, existem duas escolas de metodologias, uma de análise técnica e outra de análise fundamentalista. A metodologia de análise técnica se baseia na ideia de que preços do passado podem auxiliar na previsão de oscilações futuras, não utilizando de informações fundamentalistas, pois acredita-se que estas já são contempladas pelos gráficos gerados com os dados passados. Em outras palavras, nesse tipo de análise, não se faz uso de interpretações subjetivas, pois estas seriam desnecessárias para a análise (que já conteria todas as informações necessárias em seus dados passados). A análise fundamentalista, por outro lado, utiliza de informações financeiras para projetar resultados futuros de médio e longo prazo. Isso faz com que esse tipo de análise dependa de quesitos interpretativos, não presentes em dados e gráficos do passado.

3.2 Hipótese de Mercado Eficiente

A Hipótese de Mercado Eficiente (HME) determina que toda e qualquer informação relevante sobre os ativos é automaticamente assimilada pelos preços. Nesta hipótese, não existe arbitragem¹ nas séries de preços e os investidores são completamente racionais, como primeiro proposto por (SAMUELSON, 1965). Em teoria, flutuações nos preços são aleatórias e estes caminham para um estado estacionário, não possibilitando ganhos demasiados sem

¹Operação de compra e venda de certo ativo, cujos preços divergem em mercados distintos, geralmente com o objetivo de lucrar com essa diferença de preços.

que se corram grandes riscos para obtê-los. A precificação dos ativos seria, desta forma, perfeita e instantânea.

Entretanto, a HME, como apresentada acima, é idealizada e não encontra respaldo completo na realidade. Em se tratando da materialidade, os mercados reais são apenas aproximações de um mercado eficiente (MANTEGNA; STANLEY, 1999), com divisões categóricas em três níveis de eficiência, de acordo com sua aproximação da idealidade. O primeiro nível é o fraco, onde o mercado é dito eficiente se todas as informações públicas disponíveis são absorvidas imediatamente. Mais próximo da hipótese ideal, temos o nível semi-forte, no qual o mercado é dito eficiente se reflete todas as informações disponíveis imediatamente e leva em conta demonstrações contábeis publicadas e o histórico das informações. O terceiro e último é o nível forte, onde o mercado é considerado eficiente se, além de refletir as informações públicas disponíveis imediatamente e os históricos das informações, também inclui informações privadas, ou seja, engloba todas as informações existentes sobre um ativo, sejam públicas ou privadas.

Alguns problemas podem ser encontrados, e que corroboram com a ideia de que a HME não condiz exatamente com a realidade, quando olhamos para eventos reais que fogem da forma como se espera que os mercados funcionem na teoria. Acesso a informações privilegiadas, intervenções e manipulações de políticas de bancos centrais, crises financeiras, limitações na veiculação de informações e a irracionalidade dos atores envolvidos são possíveis desvios da HME nos mercados globais.

3.3 Candlestick

O *candlestick* (vela) é a ferramenta de análise gráfica utilizada no mercado de ações que representa o preço de um ativo (e suas variações) em determinado período de tempo. Os *candlesticks* apresentam quatro informações principais: o preço de abertura (preço pelo qual foi fechado o primeiro negócio no intervalo), o preço de fechamento (preço pelo qual foi fechado o último negócio no intervalo), preço máximo (maior preço negociado no intervalo) e preço mínimo (menor preço negociado no intervalo). A cor também é um aspecto importante para a interpretação de um *candlestick*, onde frequentemente a cor vermelha é indicativo de que um *candlestick* teve preço de fechamento menor que o preço de abertura e a cor verde é indicativo de que um *candlestick* teve preço de fechamento maior do que de abertura. Os pavios, ou sombras, superiores e inferiores representam os valores máximos e mínimos na frequência analisada, respectivamente. A Figura 1 ilustra uma sequência genérica de *candlesticks* de ações imaginárias na B3 em determinado período.

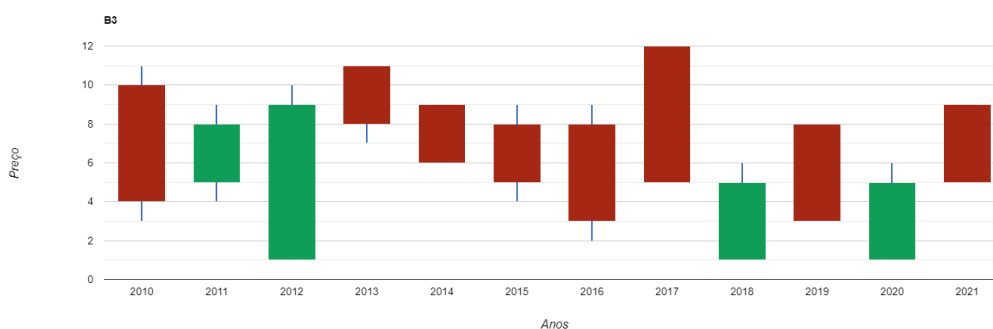


Figura 1 – Imagem ilustrativa de uma sequência de *candlesticks*

Candlesticks com diferentes intervalos de tempo são utilizados para diferentes tipos de análise, cada qual com suas finalidades.

3.4 Random Walk

O *random walk* (caminhante aleatório) é um conceito simples e com aplicações em finanças. Colocando de maneira simplificada, se joga uma moeda e, se o resultado do lançamento for cara, anda-se um passo para cima e, se o resultado for coroa, anda-se um passo para baixo. Após vários lançamentos, gostaríamos de saber "em que ponto estaríamos?". Existem múltiplas respostas para essa pergunta: primeiro, é intuitivo pensar que, na média, nos mantemos na mesma posição, visto que a média de um passo para cima e um passo para baixo é o mesmo que não se mover. Entretanto, existem flutuações que desviam a posição da média zero e esse comportamento cresce com o número de lançamentos. Para chegar a essas flutuações, Louis Bachelier, que primeiro propôs o conceito de *random walk* em sua tese de doutorado em matemática pela Academia de Paris em 29 de março de 1900, considerou que o resultado do lançamento da moeda determinava se o preço de uma ação subia ou descia, e os passos possuíam sinais e amplitudes aleatórias, distribuídas de acordo com uma distribuição gaussiana (SORNETTE, 2002).

Bachelier reconheceu que o processo de Wiener, como hoje é conhecido, satisfazia a equação de difusão (MANTEGNA; STANLEY, 1999). Nele, diz-se que, sabendo-se o preço de um ativo em $t = 0$, o Teorema Central do Limite nos diz que, após um grande número de passos independentes em um random walk, a posição do caminhante tem distribuição normal de acordo com a variância

$$\sigma^2 = \frac{t}{\delta t} \varepsilon^2, \quad (1)$$

onde t é o tempo transcorrido desde o início do random walk, δt é o tempo transcorrido entre dois passos sucessivos e ε é o tamanho do passo.

Porém, o trabalho de Bachelier carece de certos rigores. A determinação gaussiana para as distribuições de preço não é suficientemente justificável, do ponto de vista matemático. Além disso, a não utilização de escala logarítmica na investigação das variações de preços é questionável do ponto de vista econômico ([MANTEGNA; STANLEY, 1999](#)), pois faz aparecer problemas de escala durante a evolução dos preços.

Capítulo 4

Metodologia

Este capítulo apresenta a fundamentação empregada no presente trabalho, explicitando as origens e a evolução do modelo de previsão baseado em equações diferenciais utilizado a fim de se obter uma ideia geral de seu funcionamento, fornecendo conhecimento acerca da análise de tendência de preços a ser utilizada, uma introdução aos temas análise de flutuação sem tendência (DFA) multifractal generalizada, espectro de singularidade, distribuição de retorno e caudas pesadas, bem como um método de análise para lucro e liquidez.

4.1 DFA Multifractal Generalizada e Espectro de Singularidade

Ambos os métodos descritos nesta seção estão intimamente ligados com a obtenção do expoente de Hurst, citado na Seção 2.2.

4.1.1 DFA Multifractal Generalizada

De acordo com (KANTELHARDT et al., 2002), o método DFA multifractal generalizado (MF-DFA) pode ser aplicado para a detecção de correlações de longo alcance em séries temporais não estacionárias em cinco passos.

Suponhamos uma série x_k com comprimento N e que esta série seja de suporte compacto. Suporte é definido como um conjunto de índices k com valores não-nulos para x_k . Uma série é considerada compacta se $x_k = 0$ para uma fração desprezível dos elementos da série. Para esses $x_k = 0$, consideramos que não existe um valor para este k .

Considerando a finitude das séries temporais reais, de comprimento finito N , queremos, explicitamente, determinar a multifractalidade de séries finitas, apenas. Seguindo de perto o descrito em (KANTELHARDT et al., 2002), temos:

Passo 1:

Determinar o "perfil"

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

A subtração da média $\langle x \rangle$ não é exatamente necessária, visto que sua eliminação ocorre de qualquer maneira pela retirada da tendência no *Passo 3*.

Passo 2:

Dividir o perfil $Y(i)$ em $N_s \equiv \text{int}(N/s)$ segmentos não superpostos de tamanho s . Como o comprimento N nem sempre é múltiplo inteiro de s , uma parte ao final do perfil pode ficar sobrando, por isso, fazemos o mesmo procedimento começando do final e seguindo até o início. Assim, obtemos $2N_s$ segmentos.

Passo 3:

Calcular a tendência local para cada um dos $2N_s$ segmentos, utilizando um ajuste polinomial realizado pelo método dos mínimos quadrados. Em seguida, determinar a variância

$$F^2(v, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (3)$$

para cada segmento, onde $v = 1, \dots, N_s$ e

$$F^2(v, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (4)$$

para $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$. Aqui, $y_v(i)$ é o ajuste polinomial no segmento v . Considerando que a retirada das tendências das séries é feita pela subtração do ajuste polinomial feito no perfil, diferentes ordens de DFA terão diferentes capacidades de eliminação de tendências. Em MF-DFA de ordem m , tendências de ordem m são eliminadas.

Passo 4:

Calcular a média de todos os segmentos para determinar a função de flutuação de q -ésima ordem

$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)^{q/2}] \right\}^{1/q}, \quad (5)$$

onde q pode assumir qualquer valor real. Para $q = 2$, temos o processo padrão da DFA.

Passo 5:

Determinar o comportamento no qual a função de flutuação escala analisando gráficos logarítmicos (*log-log*) de $F_q(s)$ versus s para cada valor de q . Se a série x_i tem

correlações de longo alcance da forma de lei de potência, $F_q(s)$ aumenta, para valores de s grandes, como na lei de potência

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}. \quad (6)$$

O valor de $h(0)$, que corresponde ao limite $h(q)$ para $q \rightarrow 0$, não pode ser determinado usando-se diretamente o procedimento do *Passo 4* por conta de seu expoente divergente. É necessário, então, um procedimento logarítmico

$$F_0(s) \equiv \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln[F^2(v, s)] \right\} \sim s^{h(0)}. \quad (7)$$

Para valores muito grandes ($s > N/4$), $F_q(s)$ se torna estatisticamente irrelevante, visto que a quantidade de N_s para os procedimentos do *Passo 4* se torna muito pequena. Esses valores de s são desconsiderados para a determinação do expoente de Hurst, $h(q)$.

O método MF-DFA só consegue determinar expoentes de Hurst generalizados *positivos*, tornando-se pouco acurado para sinais com anti-correlação forte à medida que $h(q)$ se aproxima de zero. Uma versão modificada da MF-DFA deve ser, então, utilizada. Uma maneira simples de se analisar esses dados é integrando a série temporal antes do procedimento. Trocamos o somatório simples na equação (2) por um somatório duplo

$$\tilde{Y}(i) \equiv \sum_{k=1}^i [Y(k) - \langle Y \rangle]. \quad (8)$$

Seguindo os procedimentos descritos nos passos anteriores, então, temos as funções de flutuação generalizadas $\tilde{F}(s)$ dadas por (6), mas com expoentes maiores $\tilde{h}(q) = h(q) + 1$

$$\tilde{F}(s) \sim s^{\tilde{h}(q)} = s^{h(q)+1}. \quad (9)$$

Desta forma, o comportamento no qual a função escala pode ser bem determinado mesmo para $-1 < h(q) < 0$, para certos valores de q .

4.1.2 Espectro de Singularidade

Suponhamos um caso onde uma série x_k normalizada, positiva, estacionária e de comprimento N não possui tendências a serem eliminadas. Desta forma, o *Passo 3* da MF-DFA não precisa ser aplicado e a DFA se resume à análise de flutuações padrão (FA), que é idêntica à DFA, exceto pela definição de variância presente na equação (3) para cada segmento v , dada por $v = 1, \dots, N_s$, no *Passo 3*:

$$F_{FA}^2(v, s) \equiv [Y(vs) - Y((v-1)s)]^2. \quad (10)$$

Inserindo essa definição simplificada em (5) e utilizando (6), temos

$$\left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} |Y(vs) - Y((v-1)s)|^q \right\}^{1/q} \sim s^{h(q)}. \quad (11)$$

Assumimos então que o comprimento N é um múltiplo inteiro da escala s , assim, $N_s = N/s$ e então

$$\sum_{v=1}^{N/s} |Y(vs) - Y((v-1)s)|^q \sim s^{qh(q)-1}. \quad (12)$$

É evidente que o termo $Y(vs) - Y((v-1)s)$ em (12) é idêntico ao somatório dos x_k em cada segmento v de tamanho s . Esse somatório é conhecido como a caixa de probabilidade $p_s(v)$, ou *box probability*, no formalismo multifractal padrão para séries x_k normalizadas,

$$p_s(v) \equiv \sum_{k=(v-1)s+1}^{vs} x_k = Y(vs) - Y((v-1)s). \quad (13)$$

O expoente escalante (scaling exponent) $\tau(q)$ é usualmente definido pela função partição $Z_q(s)$

$$Z_q(s) \equiv \sum_{v=1}^{N/s} |p_s(v)|^q \sim s^{\tau(q)}, \quad (14)$$

onde q é um parâmetro real, como em MD-DFA. Usando (13), vemos que (14) é igual a (12) e obtemos, analiticamente, a relação entre dois conjuntos de expoentes escalantes multifractais

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (15)$$

É perceptível, então, que o $h(q)$ apresentado em (6) para MF-DFA está diretamente relacionado com os expoentes escalantes multifractais clássicos $\tau(q)$. Outra forma de se caracterizar uma série multifractal, e de nosso interesse, é pelo espectro de singularidade $f(\alpha)$, relacionado a $\tau(q)$ nos trabalhos (FEDER, 1988; PEITGEN; JÜRGENS; SAUPE, 1992),

$$\alpha = \tau'(q) \quad e \quad f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1, \quad (16)$$

onde α é a força da singularidade ou expoente de Hölder e $f(\alpha)$ é a dimensão do subconjunto da série descrita em termos de α . Usando (15), podemos relacionar, então, α e $f(\alpha)$ a $h(q)$, na forma

$$\alpha = h(q) + qh'(q) \quad e \quad f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1. \quad (17)$$

Com base nos valores obtidos para a construção de um espectro de singularidade, podemos obter a sua largura (diferença entre o menor e o maior valor no eixo das abscissas). Essa largura está relacionada com o comportamento multifractal envolvido e as correlações não lineares em séries de preços e distribuições de retorno de caudas pesadas também estão intimamente ligadas com a largura do espectro.

4.2 Caudas Pesadas na Distribuição de Retornos

Caudas pesadas, ou, alternativamente, caudas longas ou caudas gordas, é um termo utilizado na estatística para caracterizar distribuições de probabilidade de dados de lento decaimento. Comparada a uma distribuição normal, a distribuição de cauda pesada possui uma quantidade muito maior de dados ao longo da cauda, caracterizando maior variabilidade e desvio da média. Distribuições ou funções de leis de potências possuem como característica apresentarem decaimentos de caudas pesadas, o que pode ser observado em séries financeiras, como as com que nos ocupamos neste trabalho.

Queremos investigar o comportamento das distribuições de retorno das séries analisadas, mais especificamente a ocorrência de caudas pesadas em sua forma. Para realizar essa investigação, seguiremos alguns passos.

Passo 1:

Primeiramente, precisamos encontrar o retorno logarítmico normalizado. O retorno desejado é dado por

$$g_t = \frac{G_t - \langle G \rangle}{\sigma_G}, \quad (18)$$

onde G_t é o retorno logarítmico,

$$G_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}), \quad (19)$$

onde $\langle G \rangle$ é a média sobre toda a série e σ_G é seu respectivo desvio padrão. Para cada um dos ativos, tomaremos as distribuições de probabilidade acumuladas complementares de retornos logarítmicos normalizados a partir das séries de retorno.

Passo 2:

Tomamos $\log_{10} g_t$ e transformamos os dados tratados em um histograma que reflete a ocorrência de retornos logarítmicos em cada intervalo de valores de $\log_{10} g_t$. Um histograma foi construído a partir do conjunto dos $\log_{10} g_t$.

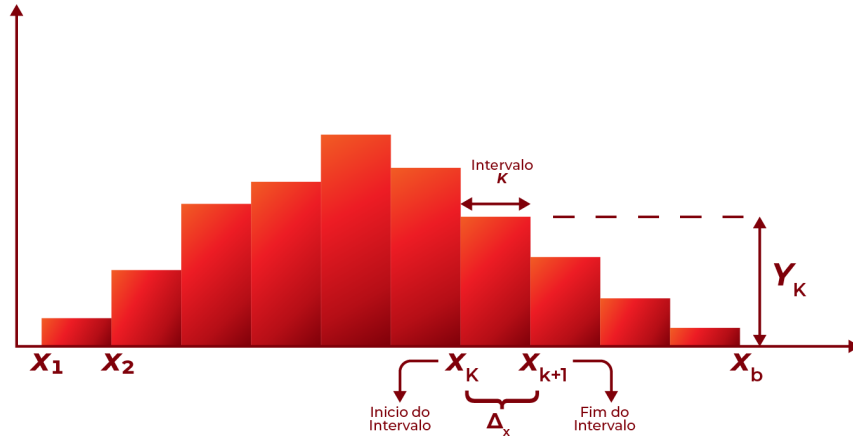


Figura 2 – Exemplo de Modelo de Histograma.

Passo 3:

Para obtermos uma estimativa da probabilidade de que um valor de $\log_{10}g$ caia no intervalo de índice k , dividimos o número de elementos Y_k de cada intervalo k pelo número total da série analisada N :

$$P_t = \frac{Y_k}{N}. \quad (20)$$

A probabilidade de que um valor de $\log_{10}g$ seja maior do que X_k é igual ao somatório das probabilidades associadas a cada um dos intervalos subsequentes, como segue:

$$P(\log_{10}g > X_k) = \sum_{j=k}^{b-1} P_k = \sum_{j=k}^{b-1} \frac{Y_k}{N}, \quad (21)$$

onde $b - 1$ é a quantidade de intervalos de tamanho k . Sendo ambas as funções, logarítmica e exponencial, crescentes em toda a reta real, podemos dizer que a probabilidade de encontrarmos um valor de g maior que 10^{X_k} é dada pela mesma expressão:

$$P(g > 10^{X_k}) = P(\log_{10}g > X_k) = \sum_{j=k}^{b-1} \frac{Y_k}{N}. \quad (22)$$

Dessa forma, utilizamos a fórmula acima para calcular a distribuição acumulada complementar para cada valor de $x = 10^{X_k}$.

Passo 4:

De posse da distribuição, determinamos a região em que calcularemos, por meio de regressão linear, o coeficiente de decaimento da cauda (10^0 a 10^1), onde o decaimento se aproxima de uma reta, como mostra a [Figura 3](#).

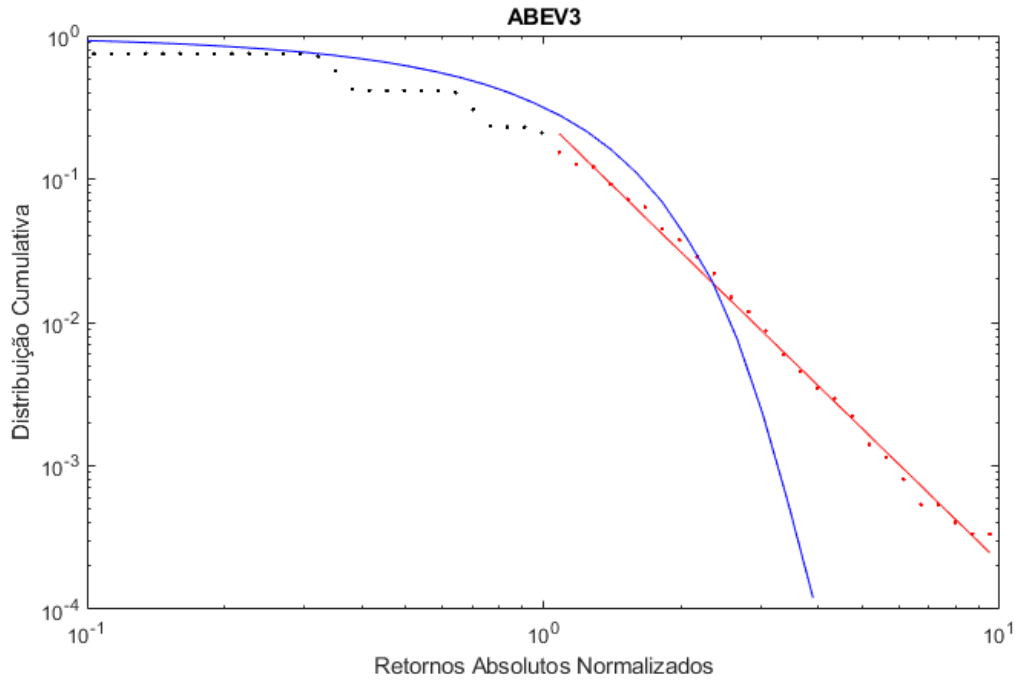


Figura 3 – Exemplo de um ajuste linear na cauda da distribuição de retorno de um ativo do Ibovespa. Foram usados preços de fechamento de candles de 5 minutos de ABEV3.

4.3 Descrição do Modelo de Previsão

É apresentado um modelo para a previsão de tendências de preços em (RESENDE et al., 2017), que faz uso de uma média móvel linear para a determinação do preço de referência de um ativo a cada novo passo de tempo. Uma evolução deste modelo é desenvolvida em (FONSECA et al., 2021), que propõe a utilização de uma média móvel exponencial e uma mudança na técnica de otimização, o que leva a uma redução dos custos computacionais, permitindo-nos investigar uma quantidade maior de ativos ao mesmo tempo, assim como um aumento substancial dos intervalos utilizados para a aquisição de parâmetros de interesse. Seguindo esse modelo mais atualizado, podemos calcular o preço de referência no tempo t definido pela equação que segue:

$$\overline{x}_s(t) = \frac{2(x_s(t) - \overline{x}_s(t-1))}{L+1} + \overline{x}_s(t-1), \quad (23)$$

onde L é um número real positivo. O parâmetro L também determina o tamanho da janela de preços para a aquisição da primeira média móvel: $\overline{x}_s(1)$ corresponde à média aritmética dos preços na janela. Utilizamos essa média móvel exponencial para chegar aos preços de referência para cada instante de tempo de cada um dos ativos avaliados a fim de obter valores mais relevantes para nossas análises. O preço de referência funciona aqui

como um proxy¹ para o preço justo do ativo, cujo cálculo é complexo e sujeito a diferentes metodologias e interpretações. A aquisição do desvio do preço de referência se dá pela fórmula

$$X_s(t) = \ln x_s(t) - \ln \bar{x}_s(t), \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

Essa escolha se dá na tentativa de simular com maior precisão o comportamento do mercado de ações, que é não-linear. Isso vai nos ajudar a obter informações a respeito da variação do preço praticado em relação ao preço de referência, que é de grande interesse, visto que nos diz se a ação analisada está em alta ou em baixa em relação a um preço considerado justo.

A escolha da escala logarítmica se justifica pela necessidade de se reduzir eventuais problemas de escala nesses desvios. O modelo utilizado, de (FONSECA et al., 2021), assim como o utilizado em (RESENDE et al., 2017), se originam da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t), \quad (25)$$

onde

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_N(t) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

A equação (25) pode ser discretizada, como segue:

$$\frac{\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t - \Delta t)}{\Delta t} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t), \quad (27)$$

que equivale a

$$\mathbf{X}(t - \Delta t) = \mathbf{X}(t) - \Delta t \mathbf{A}\mathbf{X}(t), \quad (28)$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{X}(t - \Delta t) = (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A})\mathbf{X}(t), \quad (29)$$

levando a

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t - \Delta t), \quad (30)$$

onde Δt é o intervalo de tempo do candlestick e

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A})^{-1}, \quad (31)$$

sendo que $\mathbf{I}$ corresponde à matriz identidade $N \times N$. Assumiremos que $\Delta t = 1$, que corresponde à escolha da escala de tempo. Agora, assumindo que a matriz de coeficientes

¹Um proxy é algo que atua como algo correlacionado que substituirá uma outra coisa, mas é mais fácil de se obter.

C existe, queremos determiná-la a partir da relação expressa em (25). Como **C** possui N^2 elementos e (25) possui apenas N equações, precisamos de N equações do tipo (25) para equilibrar o número de equações com a quantidade de parâmetros a ser determinada. Segue, então, que

$$\mathbf{X}_N(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}_N(t-1), \quad (32)$$

onde

$$\mathbf{X}_N(t) = \begin{pmatrix} X_1(t-N+1) & \cdots & X_1(t-1) & X_1(t) \\ X_2(t-N+1) & \cdots & X_2(t-1) & X_2(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_N(t-N+1) & \cdots & X_N(t-1) & X_N(t) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Se $\mathbf{X}_N(t-1)$ é invertível, teremos, para cada tempo t_0

$$\mathbf{C}(t_0) = \mathbf{X}_N(t_0)\mathbf{X}_N^{-1}(t_0-1). \quad (34)$$

A fim de encontrar valores mais estáveis para $\mathbf{C}(t_0)$, aplicamos a equação (30) para $M > N$ passos de tempo adjacentes, para t de t_0 até $t_0 - M + 1$. Utilizando o método dos mínimos quadrados², chegamos ao estimador

$$\hat{\mathbf{C}}(t_0) = (\mathbf{X}_M(t_0)\mathbf{X}_M^T(t_0-1))(\mathbf{X}_M(t_0-1)\mathbf{X}_M^T(t_0-1))^{-1}, \quad (35)$$

onde

$$\mathbf{X}_M(\tau) = (X(\tau-M+1) \cdots X(\tau-1) X(\tau)) \quad (36)$$

é uma matriz de dimensão $N \times M$. Utilizaremos $\hat{\mathbf{C}}(t_0)$ para estimar os desvios $\hat{X}_s(t_0+1)$ de acordo com

$$\hat{\mathbf{X}}(t_0+1) = \hat{\mathbf{C}}(t_0)\mathbf{X}(t_0). \quad (37)$$

Tais desvios serão convertidos em preços previstos e comparados com os preços reais, fornecendo informações a respeito de suas tendências. Assim, a partir do preço de referência estimado, temos o preço do ativo em $t_0 + 1$ de acordo com o descrito abaixo:

$$\hat{X}_s(t+1) = \ln \hat{x}_s(t+1) - \ln \bar{x}_s(t), \quad (38)$$

logo

$$\hat{X}_s(t+1) = \ln \frac{\hat{x}_s(t+1)}{\bar{x}_s(t)}, \quad (39)$$

o que leva a

$$e^{\hat{X}_s(t+1)} = e^{\ln \frac{\hat{x}_s(t+1)}{\bar{x}_s(t)}} \quad (40)$$

e, como consequência,

$$e^{\hat{X}_s(t+1)} = \frac{\hat{x}_s(t+1)}{\bar{x}_s(t)}, \quad (41)$$

²Uma descrição detalhada do método pode ser encontrada na próxima subseção deste capítulo.

portanto

$$\bar{x}_s(t)e^{\hat{X}_s(t+1)} = \hat{x}_s(t+1) \quad (42)$$

e, finalmente,

$$\hat{x}_s(t+1) = \bar{x}_s(t)e^{\hat{X}_s(t+1)}. \quad (43)$$

A acurácia do modelo é dada pela proporção entre as previsões de tendência corretas n_r (quando a variação prevista e a real têm o mesmo sentido) e o total de previsões n realizadas:

$$a = 100 \frac{n_r}{n}, \quad (44)$$

definida aqui na forma de percentual.

As acurácias do modelo serão comparadas com as de um preditor completamente aleatório, semelhante a uma moeda justa, que prevê tendência de alta ou de baixa, mas nunca de estabilidade. Portanto, quando o módulo da variação real é igual a zero, não consideramos a previsão associada a esse passo de tempo para a computação da acurácia.. Também não consideramos uma previsão como válida quando não possuir módulo maior do que o do quartil superior dos valores previstos dentro de uma janela de previsões imediatamente anteriores (o tamanho dessa janela é um dos parâmetros do modelo). Ou seja, para uma previsão ser considerada válida, o módulo de seu retorno deve ser superior a 75% dos retornos previstos da janela que o antecede. Essas considerações aumentam a acurácia do modelo e nos permitem alcançar melhores resultados.

4.3.1 Estimação da matriz de coeficientes

Na seção anterior foi apresentada uma equação que define o estimador $\hat{\mathbf{C}}(t_0)$ sem maiores detalhes acerca de sua origem. Esta seção se ocupa de demonstrar os passos que nos levaram à sua dedução. Partamos da relação

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t-1), \quad (45)$$

sendo

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Desta forma, a equação pode ser escrita como

$$X_i(t) = \begin{pmatrix} X_1(t-1) & X_2(t-1) & \cdots & X_n(t-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (47)$$

Observemos o comportamento da equação acima para múltiplos tempos:

$$\begin{aligned}
X_i(t) &= \begin{pmatrix} X_1(t-1) & X_2(t-1) & \cdots & X_n(t-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix}, \\
X_i(t-1) &= \begin{pmatrix} X_1(t-2) & X_2(t-2) & \cdots & X_n(t-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix}, \\
&\vdots \\
X_i(t-N+1) &= \begin{pmatrix} X_1(t-N) & X_2(t-N) & \cdots & X_n(t-N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix}. \tag{48}
\end{aligned}$$

Assumimos aqui que, dentro da faixa de tempo em questão, o vetor de parâmetros não muda. Escrevemos, então, as equações (48) como

$$\begin{pmatrix} X_i(t-N+1) \\ \vdots \\ X_i(t-1) \\ X_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(t-N) & X_2(t-N) & \cdots & X_n(t-N) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_1(t-2) & X_2(t-2) & \cdots & X_n(t-2) \\ X_1(t-1) & X_2(t-1) & \cdots & X_n(t-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Em seguida, definiremos os vetores de parâmetros estimados e de resíduos, pois é natural que cometamos erros ao estimar os parâmetros c_{ij} , principalmente porque, para $N > n$, teremos mais equações a serem resolvidas do que valores de c_{ij} a serem estimados:

$$\hat{\mathbf{c}}_i = \begin{pmatrix} \hat{c}_{i1} \\ \hat{c}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{c}_{in} \end{pmatrix} \quad e \quad \xi_i = \begin{pmatrix} \xi_i(t) \\ \xi_i(t-1) \\ \vdots \\ \xi_i(t-N+1) \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, n, \tag{50}$$

sendo $\hat{c}_{in}$ os parâmetros estimados e ξ_i os resíduos. Isso nos leva então a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_i(t-N+1) \\ \vdots \\ X_i(t-1) \\ X_i(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_1(t-N) & X_2(t-N) & \cdots & X_n(t-N) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_1(t-2) & X_2(t-2) & \cdots & X_n(t-2) \\ X_1(t-1) & X_2(t-1) & \cdots & X_n(t-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{i1} \\ \hat{c}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{c}_{in} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \xi_i(t) \\ \xi_i(t-1) \\ \vdots \\ \xi_i(t-N+1) \end{pmatrix}, \tag{51}
\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}\hat{\mathbf{c}}_i + \xi_i, \quad (52)$$

onde

$$\mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} X_i(t - N + 1) \\ \vdots \\ X_i(t - 1) \\ X_i(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1(t - N) & X_2(t - N) & \cdots & X_n(t - N) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_1(t - 2) & X_2(t - 2) & \ddots & X_n(t - 2) \\ X_1(t - 1) & X_2(t - 1) & \cdots & X_n(t - 1) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Calculamos, em seguida, a transposta em ambos os lados da equação, chegando a

$$\begin{pmatrix} X_i(t - N + 1) & \cdots & X_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{c}_{i1} & \cdots & \hat{c}_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t - N) & \cdots & X_1(t - 1) \\ X_2(t - N) & \cdots & X_2(t - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n(t - N) & \cdots & X_n(t - 1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_i(t - N + 1) & \cdots & \xi_i(t) \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Agregando agora as múltiplas equações, correspondentes a cada valor de i , obtemos

$$\begin{pmatrix} X_1(t - N + 1) & \cdots & X_1(t) \\ X_2(t - N + 1) & \cdots & X_2(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n(t - N + 1) & \cdots & X_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{c}_{11} & \cdots & \hat{c}_{1n} \\ \hat{c}_{21} & \cdots & \hat{c}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}_{n1} & \cdots & \hat{c}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t - N) & \cdots & X_1(t - 1) \\ X_2(t - N) & \cdots & X_2(t - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n(t - N) & \cdots & X_n(t - 1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1(t - N + 1) & \cdots & \xi_1(t) \\ \xi_2(t - N + 1) & \cdots & \xi_2(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n(t - N + 1) & \cdots & \xi_n(t) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Explicitando a matriz de resíduos, teremos

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t - N + 1) & \cdots & \xi_1(t) \\ \xi_2(t - N + 1) & \cdots & \xi_2(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n(t - N + 1) & \cdots & \xi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(t - N + 1) & \cdots & X_1(t) \\ X_2(t - N + 1) & \cdots & X_2(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n(t - N + 1) & \cdots & X_n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{c}_{11} & \cdots & \hat{c}_{1n} \\ \hat{c}_{21} & \cdots & \hat{c}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}_{n1} & \cdots & \hat{c}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t - N) & \cdots & X_1(t - 1) \\ X_2(t - N) & \cdots & X_2(t - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n(t - N) & \cdots & X_n(t - 1) \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Percebemos que, para um dado i , os resíduos dependem apenas dos coeficientes $\hat{c}_{ij}$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Dessa forma, podemos buscar valores para $\hat{c}_{ij}$ que minimizem $\xi_i(\tau)$ utilizando o critério dos mínimos quadrados,

$$S_i = \sum_{\tau=t-N+1}^t (\xi_i(\tau))^2, \quad (56)$$

para cada i fixo, independentemente. Assim, utilizando os valores de $\hat{c}_{ij}$ calculados para todos os valores de i , podemos minimizar a soma dos quadrados dos resíduos, que se dá na forma

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, \quad (57)$$

minimizando S_i separadamente. Para essa minimização, utilizaremos a equação

$$\hat{\mathbf{c}}_i = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_i, \quad (58)$$

conforme descrito em (Aguirre, 2007). Definimos, então, outra matriz de interesse

$$\mathbf{M} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nN} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Podemos então escrever a relação

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{11} & \cdots & \hat{c}_{n1} \\ \hat{c}_{12} & \cdots & \hat{c}_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}_{1n} & \cdots & \hat{c}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-N+1) & \cdots & X_n(t-N+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1(t-1) & \cdots & X_n(t-1) \\ X_1(t) & \cdots & X_n(t) \end{pmatrix}, \quad (60)$$

onde a matriz do lado esquerdo da equação representa a matriz transposta de $\hat{\mathbf{C}}$, que corresponde ao valor estimado para a matriz $\mathbf{C}$ que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos. Definimos em seguida

$$\mathbf{X}_N(t) = \begin{pmatrix} X_1(t-N+1) & \cdots & X_1(t-1) & X_1(t) \\ X_2(t-N+1) & \cdots & X_2(t-1) & X_2(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_n(t-N+1) & \cdots & X_n(t-1) & X_n(t) \end{pmatrix}, \quad (61)$$

podendo, dessa forma, representar a equação de interesse como

$$\hat{\mathbf{C}}^T = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X}_N^T(t). \quad (62)$$

Sendo

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_N^T(t-1), \quad (63)$$

chegamos finalmente a uma expressão para $\hat{\mathbf{C}}$:

$$\hat{\mathbf{C}} = (\mathbf{X}_N(t)\mathbf{X}_N^T(t-1))(\mathbf{X}_N(t-1)\mathbf{X}_N^T(t-1))^{-1}, \quad (64)$$

que é a matriz equivalente a $\hat{\mathbf{C}}$ da equação (35) e que queríamos encontrar.

4.4 Análise Sobre Lucros e Liquidez

Consideremos K ativos. O retorno monetário referente à operação envolvendo uma unidade do ativo k ($k = 1, 2, \dots, K$) que ocorra no intervalo de t a $t + 1$ é

$$R_{k,t} = \gamma (P_{k,t+1} - P_{k,t}), \quad (65)$$

onde $\gamma = 1$ para um sinal de compra no tempo t , e $\gamma = -1$ para um sinal de venda. Se α é o custo de transação por unidade monetária transacionada, o custo dessa operação será

$$C_{k,t} = \alpha (P_{k,t+1} + P_{k,t}). \quad (66)$$

Custos fixos não serão considerados, uma vez que podem ser tornados irrelevantes mediante o aumento no volume de negociação. O lucro é

$$L_{k,t} = R_{k,t} - C_{k,t}, \quad (67)$$

quando $L_{k,t} > 0$. Quando $L_{k,t} < 0$, corresponde a prejuízo; apesar disso, para melhor fluidez do texto, chamaremos $L_{k,t}$ de lucro em qualquer situação. O lucro por unidade monetária investida é

$$l_{k,t} = \frac{R_{k,t} - C_{k,t}}{P_{k,t}} = \frac{(\gamma - \alpha) P_{k,t+1} - (\gamma + \alpha) P_{k,t}}{P_{k,t}}, \quad (68)$$

onde consideramos que o valor investido é o capital imobilizado no intervalo de t a $t + 1$, que é exatamente $P_{k,t}$. A equação (68) é válida somente quando há transação; quando não há, $l_{k,t} = 0$. Assim, tomando $\gamma = 0$ como o sinal para não operar, podemos escrever:

$$l_{k,t} = \begin{cases} \frac{(\gamma - \alpha) P_{k,t+1} - (\gamma + \alpha) P_{k,t}}{P_{k,t}}, & \text{para } \gamma = \pm 1, \\ 0, & \text{para } \gamma = 0. \end{cases} \quad (69)$$

As médias de $l_{k,t}$ mencionadas abaixo podem ser calculadas considerando-se ou não considerando-se os casos em que $l_{k,t} = 0$.

Os lucros teóricos calculados acima podem se distanciar de lucros efetivos devido ao que costuma ser chamado de *slippage*³ (derrapagem): frequentemente não conseguimos comprar ou vender pelos valores correspondentes aos de abertura e fechamento dos

³ *Slippage* é a diferença entre o preço no momento em que a sinalização de entrada ou saída de uma negociação foi feita pelo computador e o preço em que os clientes entraram ou saíram efetivamente do mercado.

candles que usamos como base, mas sim por valores desfavoráveis em relação àqueles. Quanto menor a liquidez, maior tende a ser o slippage. Assim, tendo em vista a Hipótese de Mercado Eficiente, um maior lucro teórico deve ser contrabalanceado por uma menor liquidez. Consideraremos as séries de volumes $v_{k,t}$ (dadas em dinheiro) como proxies da liquidez e as compararemos aos lucros teóricos.

Agrupemos os tempos t em H faixas de horário indexadas por h ($h = 1, 2, \dots, H$). Investigaremos as correlações entre $l_{k,t}$ e $v_{k,t}$ agrupando dados por ativo e por faixa de horário. Algumas formas de investigar tais correlações são descritas a seguir.

- Experimento 1: Calculam-se as médias de $l_{k,t}$ e de $v_{k,t}$, para cada ativo, agregando-se os dados de todas as faixas de horário. Para cada ativo k , obtemos um valor $\bar{l}_k$ e $\bar{v}_k$. O coeficiente de Pearson e o respectivo p-valor são calculados considerando-se os conjuntos $\{\bar{l}_k\}$ e $\{\bar{v}_k\}$, que possuem cada um K elementos.
- Experimento 2: Calculam-se as médias de $l_{k,t}$ e de $v_{k,t}$ para cada ativo k e para cada horário h . Para cada ativo k e horário h , obtemos um valor $\bar{l}_{k,h}$ e $\bar{v}_{k,h}$. O coeficiente de Pearson e o respectivo p-valor são calculados considerando-se os conjuntos $\{\bar{l}_{k,h}\}$ e $\{\bar{v}_{k,h}\}$, que possuem cada um $K \times H$ elementos.
- Experimento 3: A partir dos conjuntos $\{\bar{l}_{k,h}\}$ e $\{\bar{v}_{k,h}\}$, constroem-se H conjuntos $\{\bar{l}_{k,h}|h = h_0\}$ e H conjuntos $\{\bar{v}_{k,h}|h = h_0\}$ ($h_0 = 1, 2, \dots, H$). Cada conjunto desses refere-se a dados de um horário apenas, tendo K elementos. Para cada par $\{\bar{l}_{k,h}|h = h_0\}$ e $\{\bar{v}_{k,h}|h = h_0\}$, calcula-se um coeficiente de Pearson e seu respectivo p-valor (H coeficientes são calculados).

Experimentos análogos podem ser realizados a partir de comparações entre valores de $\bar{v}_{k,h}$ e de $\bar{a}_{k,h}$, em que $\bar{a}_{k,h}$ é definida como a acurácia média calculada para o ativo k tomando apenas sinais referentes à faixa de horário h . A quantidade de candles sem valor pode ser um indicativo de falta de liquidez. A partir dessa quantidade, podemos definir outro proxy para liquidez.

Capítulo 5

Análise e Discussão dos Resultados

Neste capítulo, investigamos a eficiência de mercado partindo de abordagens diversas, utilizando séries de preços de ações dos mercados brasileiro e estadunidense como dados de entrada. Em um primeiro momento, abordamos o tópico a partir do cálculo do expoente de Hurst, sua generalização multifractal e a distribuição cumulativa inversa dos retornos, de forma a identificar caudas pesadas. Em seguida, nos ocupamos da análise da eficiência de mercado de forma mais incisiva, explorando o modelo de previsão de tendências baseado em equações diferenciais. Avaliamos as possíveis correlações por diferentes ângulos de análise, analisando o comportamento dos mercados por uma ótica que visasse o comportamento por ativos, por horários ou por uma combinação dos fatores, analisando as correlações dos resultados com o lucro e o volume das negociações, de forma a identificar possíveis desvios da Hipótese de Mercado Eficiente capazes de indicar oportunidades de investimentos. Por último, propomos um Índice que, apesar de não conseguir contruir uma estratégia de negociação com ganhos consistentes, pode ser capaz de evidenciar indicativos de possibilidades de arbitragem.

O modelo descrito no capítulo (4) foi implementado em dois conjuntos de preços de fechamento dos ativos que compõem os índices Ibovespa ($N = 58$) e Dow Jones ($N = 30$) para candlesticks de 5 minutos. Foram determinados os parâmetros $L = 12$ e $M = 1000$ e o modelo foi utilizado com 13887 previsões para o Índice Ibovespa e 12091 para o Índice Dow Jones, correspondentes ao período de 02/01/2017 à 31/08/2017. O horário de referência ao longo de todo o trabalho é o de Brasília (BRT).

5.1 Expoentes de Hurst

Durante a realização do trabalho, também foram calculados os expoentes de Hurst generalizados de $q = -3$ até $q = 3$ para ambos os índices estudados. A Tabela (1) e a Tabela (2) indicam seus valores para cada um dos ativos em determinados expoentes críticos, para ambos os índices estudados.

Tabela 1 – Expoentes de Hurst para o índice IBOVESPA

Ativo	Expoente q = -3	Expoente q = -2	Expoente q = 2	Expoente q = 3
ITUB4	0,5376	0,5232	0,4568	0,3644
BBDC4	0,5679	0,5553	0,4802	0,3883
ABEV3	0,5047	0,5102	0,4847	0,4369
PETR4	0,6018	0,5912	0,5038	0,4294
PETR3	0,5274	0,5658	0,4916	0,4144
VALE5	0,5942	0,5749	0,5067	0,4898
VALE3	0,6142	0,5843	0,5095	0,4954
BRFS3	0,6124	0,5955	0,4981	0,4461
BBAS3	0,6399	0,6186	0,5229	0,4220
ITSA4	0,5051	0,5001	0,4813	0,4043
BVMF3	0,5289	0,5096	0,4008	0,3082
UGPA3	0,5894	0,5716	0,4499	0,3699
CIEL3	0,6325	0,6112	0,4938	0,4393
BBSE3	0,5805	0,5510	0,4418	0,3830
KROT3	0,5892	0,5748	0,4879	0,4247
VIVT4	0,4926	0,4753	0,3891	0,3447
JBSS3	0,6487	0,6256	0,5409	0,4982
BBDC3	0,5354	0,5204	0,4534	0,3814
LREN3	0,5482	0,5280	0,4542	0,3966
CCRO3	0,5901	0,5587	0,4668	0,4054
RADL3	0,5674	0,5411	0,4599	0,4197
EMBR3	0,5768	0,5539	0,4547	0,4256
SANB11	0,5782	0,5694	0,5080	0,4332
EQTL3	0,5414	0,5261	0,4454	0,4027
HYPE3	0,6205	0,5899	0,4418	0,3462
SBSP3	0,5676	0,5529	0,4535	0,3843
GGBR4	0,5689	0,5543	0,4754	0,4342
BRKM5	0,6100	0,5823	0,4753	0,4404
LAME4	0,5959	0,5847	0,5177	0,4369
WEGE3	0,5262	0,5086	0,4417	0,4039
PCAR4	0,5776	0,5694	0,4990	0,4109
CPFE3	0,2989	0,3081	0,2957	0,2637
KLBN11	0,5448	0,5246	0,4385	0,4134
FIBR3	0,6083	0,5928	0,5189	0,4797
EGIE3	0,4801	0,4521	0,3608	0,2974
BRML3	0,5363	0,5205	0,4552	0,3944

Continua na próxima página

Tabela 1 – Continuação da tabela

Ativo	Expoente q = -3	Expoente q = -2	Expoente q = 2	Expoente q = 3
CSNA3	0,5986	0,5803	0,4959	0,4718
CMIG4	0,6257	0,6112	0,4804	0,3793
TIMP3	0,5102	0,4991	0,4111	0,3395
ELET3	0,6436	0,6259	0,5269	0,4168
CSAN3	0,5381	0,5298	0,4599	0,3873
SUZB5	0,6236	0,6022	0,4919	0,4475
RENT3	0,6845	0,6214	0,4880	0,4225
ESTC3	0,5539	0,5484	0,4915	0,4389
MULT3	0,5108	0,4946	0,4377	0,3647
RAIL3	0,5794	0,5609	0,4826	0,3906
QUAL3	0,5393	0,5233	0,4294	0,3565
NATU3	0,6108	0,5878	0,5080	0,4479
BRAP4	0,5932	0,5789	0,4941	0,4295
ENBR3	0,4944	0,4788	0,3979	0,3457
MRVE3	0,5695	0,5511	0,4437	0,3749
GOAU4	0,5657	0,5527	0,4711	0,4195
CPLE6	0,5703	0,5536	0,4477	0,3902
SMLE3	0,6472	0,6152	0,5131	0,4461
CYRE3	0,5243	0,5086	0,4396	0,3657
MRFG3	0,5770	0,5670	0,5357	0,5029
USIM5	0,5842	0,5712	0,4831	0,4384
ECOR3	0,5369	0,5234	0,4522	0,3627

Tabela 2 – Expoentes de Hurst para o índice Dow Jones

Ativo	Expoente q = -3	Expoente q = -2	Expoente q = 2	Expoente q = 3
BA UN	0,6232	0,6169	0,5625	0,4877
GS UN	0,6152	0,6010	0,5132	0,4825
MMM UN	0,6106	0,5999	0,4910	0,3752
UNH UN	0,5969	0,5776	0,4847	0,4497
AAPL UW	0,6373	0,6193	0,4815	0,3969
HD UN	0,5739	0,5646	0,5006	0,4587
MCD UN	0,5229	0,5177	0,4504	0,3784
IBM UN	0,6019	0,5944	0,4886	0,4010

Continua na próxima página

Tabela 2 – Continuação da tabela

Ativo	Expoente $q = -3$	Expoente $q = -2$	Expoente $q = 2$	Expoente $q = 3$
JNJ UN	0,6187	0,6012	0,5207	0,4837
TRV UN	0,5705	0,5591	0,4817	0,4407
UTX UN	0,5603	0,5481	0,4706	0,4343
CAT UN	0,6252	0,6101	0,5056	0,4508
CVX UN	0,5854	0,5706	0,4851	0,4555
DIS UN	0,5625	0,5548	0,5196	0,3452
V UN	0,5445	0,5374	0,4411	0,3659
JPM UN	0,6202	0,6051	0,5126	0,4808
PG UN	0,5828	0,5708	0,4678	0,3956
AXP UN	0,5461	0,5327	0,4773	0,4572
WMT UN	0,6201	0,6106	0,4925	0,4025
DD UN	0,6150	0,6132	0,5049	0,3332
XOM UN	0,5670	0,5455	0,4360	0,4009
MSFT UW	0,5486	0,5452	0,5124	0,4922
MRK UN	0,5731	0,5625	0,3727	0,3574
NKE UN	0,6409	0,6351	0,5141	0,4182
VZ UN	0,666	0,6497	0,5355	0,4694
KO UN	0,5183	0,5163	0,4868	0,4603
INTC UW	0,6090	0,5892	0,4937	0,4620
PFE UN	0,5244	0,5222	0,4995	0,4793
CSCO UW	0,5903	0,5852	0,5036	0,3901
GE UN	0,6140	0,6025	0,4991	0,4308

Percebemos que a maioria dos valores encontrados se encontra acima de $0,5^1$, denotando certa persistência, um comportamento característico de mercados emergentes, segundo (CAJUEIRO; TABAK, 2004). Podemos perceber também que, à medida que q aumenta, $h(q)$ diminui. A Figura 4 ilustra a relação linear encontrada, que se repete para todos os ativos estudados.

¹Valores diferentes de $0,5$ indicam a existência de correlações de longo alcance, podendo estas serem persistentes, que indicam maior probabilidade de manter sua tendência em um futuro próximo, para valores maiores do que $0,5$, ou anti persistentes, que indicam uma maior probabilidade de mudança de direção em um futuro próximo, para valores menores do que $0,5$. Ambos os casos indicam possibilidade de arbitragem.

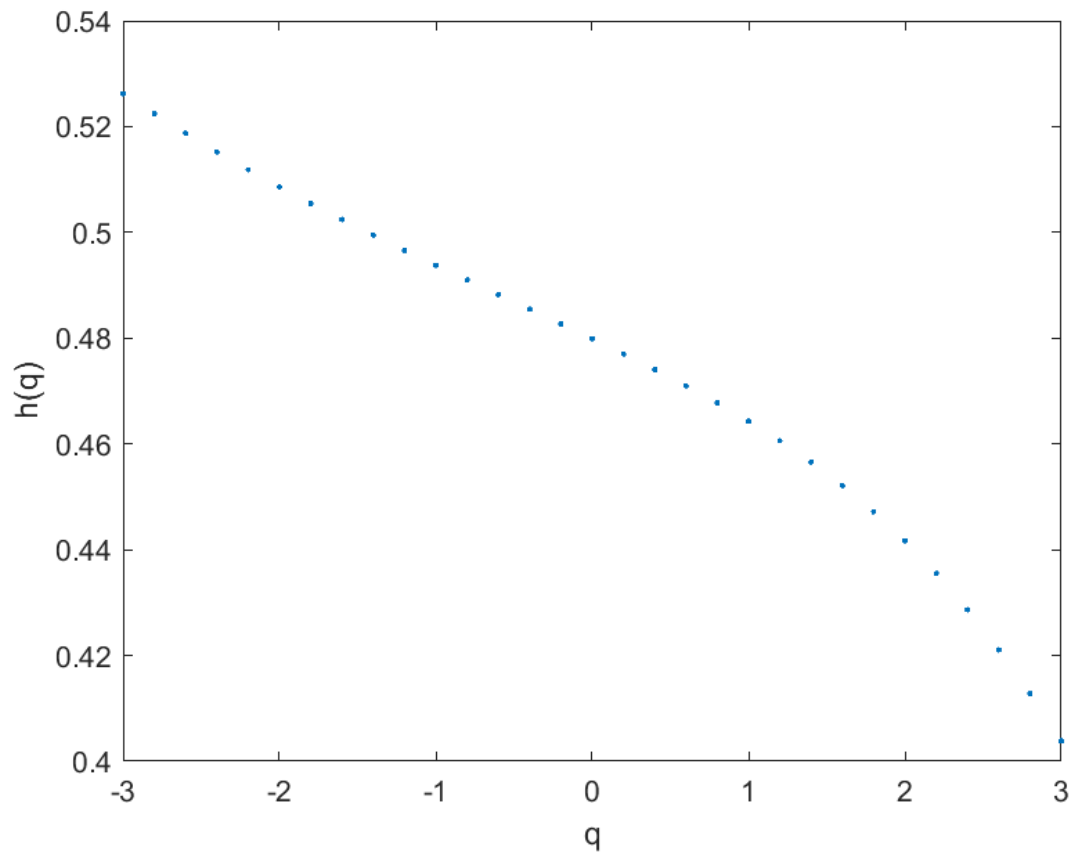


Figura 4 – Variação do Expoente de Hurst generalizado $h(q)$, entre -3 e 3 , referente ao ativo WEGE3, do índice Ibovespa

Aliado a isso, o comportamento no qual a função de flutuação, F_s , de q -ésima ordem, escala é apresentado na [Figura 5](#) e contempla valores de q entre -3 (mais abaixo) e 3 (mais acima) para o ativo WEGE3.

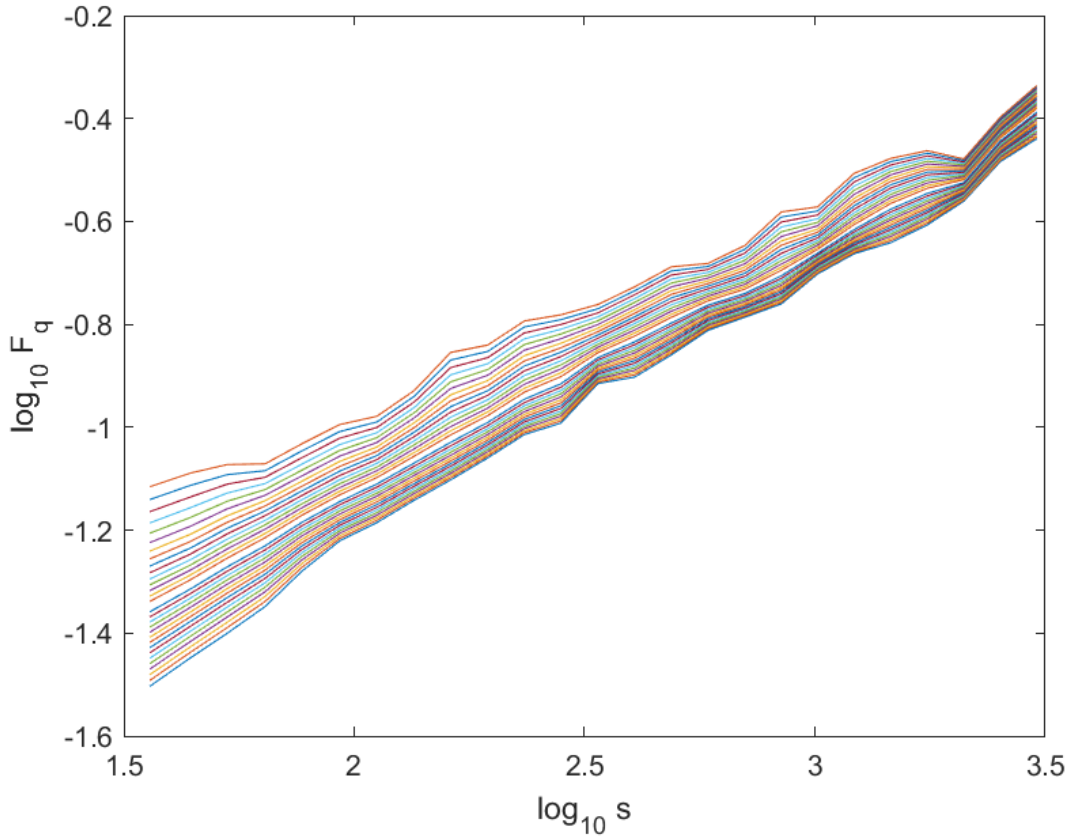


Figura 5 – Comportamento da função de flutuação do ativo WEGE3, do índice Ibovespa, com o parâmetro q variando de -3 a 3 . A curva inferior corresponde a $q = -3$ e a superior a $q = 3$.

Percebemos que as linhas para cada valor de q no gráfico logarítmico acima se aproximam de uma reta. A função de flutuação aumenta à medida que s aumenta, como era de se esperar, de acordo com a equação (5). As variações visíveis para valores maiores de s se distanciam do comportamento de uma reta, porém, isso também é esperado, visto que maiores valores de s implicam menores quantidades de segmentos sobre os quais a estatística é calculada, o que leva a maiores flutuações em torno do comportamento ideal.

Para valores positivos de q , $h(q)$ descreve a variação dos segmentos com grandes variações. Para valores negativos de q , os segmentos v com pequena variância $F^2(v, s)$ dominarão a média $F_q(s)$. Logo, para valores negativos de q , $h(q)$ descreve a variação dos segmentos para pequenas flutuações. De toda forma, variações positivas ou negativas não interferem no comportamento de reta da função.

5.2 Espectros de Singularidade

Juntamente com os cálculos dos expoentes de Hurst realizados, foram tomados os espectros de singularidade para cada um dos ativos de ambos os índices estudados. A largura para

o índice Ibovespa é apresentada na Tabela (3) e a largura para o índice Dow Jones é apresentada na Tabela (4).

Tabela 3 – Largura dos espectros de singularidade para o índice IBOVESPA

Ativo	Largura
ITUB4	0,4719
BBDC4	0,4665
ABEV3	0,2209
PETR4	0,4105
PETR3	0,3957
VALE5	0,1990
VALE3	0,2379
BRFS3	0,3518
BBAS3	0,5479
ITSA4	0,3429
BVMF3	0,5308
UGPA3	0,4831
CIEL3	0,3994
BBSE3	0,4465
KROT3	0,3863
VIVT4	0,3197
JBSS3	0,3262
BBDC3	0,4011
LREN3	0,3777
CCRO3	0,4500
RADL3	0,3375
EMBR3	0,2876
SANB11	0,3859
EQTL3	0,2989
HYPE3	0,6194
SBSP3	0,4165
GGBR4	0,2899
BRKM5	0,3379
LAME4	0,4183
WEGE3	0,2825
PCAR4	0,4375
CPFE3	0,1485

Continua na próxima página

Tabela 3 – Continuação da tabela

Ativo	Largura
KLBN11	0,2509
FIBR3	0,2813
EGIE3	0,4461
BRML3	0,3631
CSNA3	0,2371
CMIG4	0,5555
TIMP3	0,4030
ELET3	0,5644
CSAN3	0,3858
SUZB5	0,3513
RENT3	0,6178
ESTC3	0,2798
MULT3	0,4044
RAIL3	0,4967
QUAL3	0,4252
NATU3	0,4206
BRAP4	0,3878
ENBR3	0,3417
MRVE3	0,4373
GOAU4	0,3303
CPLE6	0,3806
SMLE3	0,4799
CYRE3	0,4145
MRFG3	0,2020
USIM5	0,3051
ECOR3	0,4677
Média	0,3837
Desvio Padrão	0,1012

Tabela 4 – Largura dos espectros de singularidade para o índice Dow Jones

Ativo	Largura
BA UN	0,3984

Continua na próxima página

Tabela 4 – Continuação da tabela

Ativo	Largura
GS UN	0,2490
MMM UN	0,5728
UNH UN	0,2931
AAPL UW	0,5100
HD UN	0,2577
MCD UN	0,3587
IBM UN	0,4569
JNJ UN	0,2857
TRV UN	0,2725
UTX UN	0,2559
CAT UN	0,3637
CVX UN	0,2468
DIS UN	0,8278
V UN	0,4101
JPM UN	0,2608
PG UN	0,4169
AXP UN	0,1805
WMT UN	0,4873
DD UN	0,7266
XOM UN	0,3136
MSFT UW	0,1213
MRK UN	0,4411
NKE UN	0,4839
VZ UN	0,4193
KO UN	0,1421
INTC UW	0,2825
PFE UN	0,1081
CSCO UW	0,5139
GE UN	0,3991
Média	0,3685
Desvio Padrão	0,0261

A [Figura 6](#) ilustra um gráfico de espectro de singularidade, que nos fornece informações a respeito da fractalidade da série de preços do ativo WEGE3.

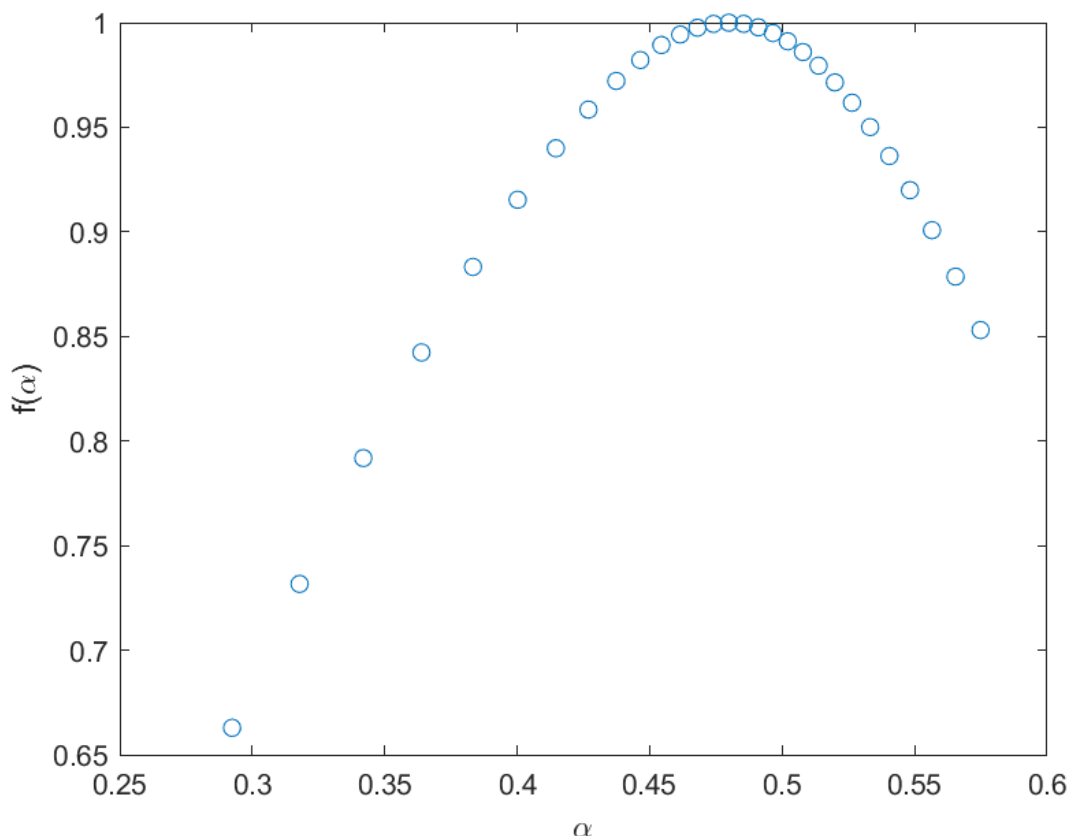


Figura 6 – Espectro de singularidade do ativo WEGE3, do índice Ibovespa para q variando de -3 a 3 .

A análise da Tabela (3) e da Tabela (4) nos mostra que, na média, os ativos da B3 apresentam maior largura do espectro de singularidade quando comparados com as larguras dos ativos de Dow Jones. A maior largura do espectro de singularidade pode ser um indicativo da presença de correlações não lineares na série. Essas correlações costumam estar associadas com clusterização de volatilidade, que, por sua vez, indica a tendência da ocorrência de um movimento grande após outro movimento grande.

5.3 Distribuição de Retornos

Utilizando os passos descritos na seção 4.2, obtivemos os gráficos referentes à distribuição de retornos para as ações estudadas no trabalho, como exemplificado na Figura 7 e na Figura 8.

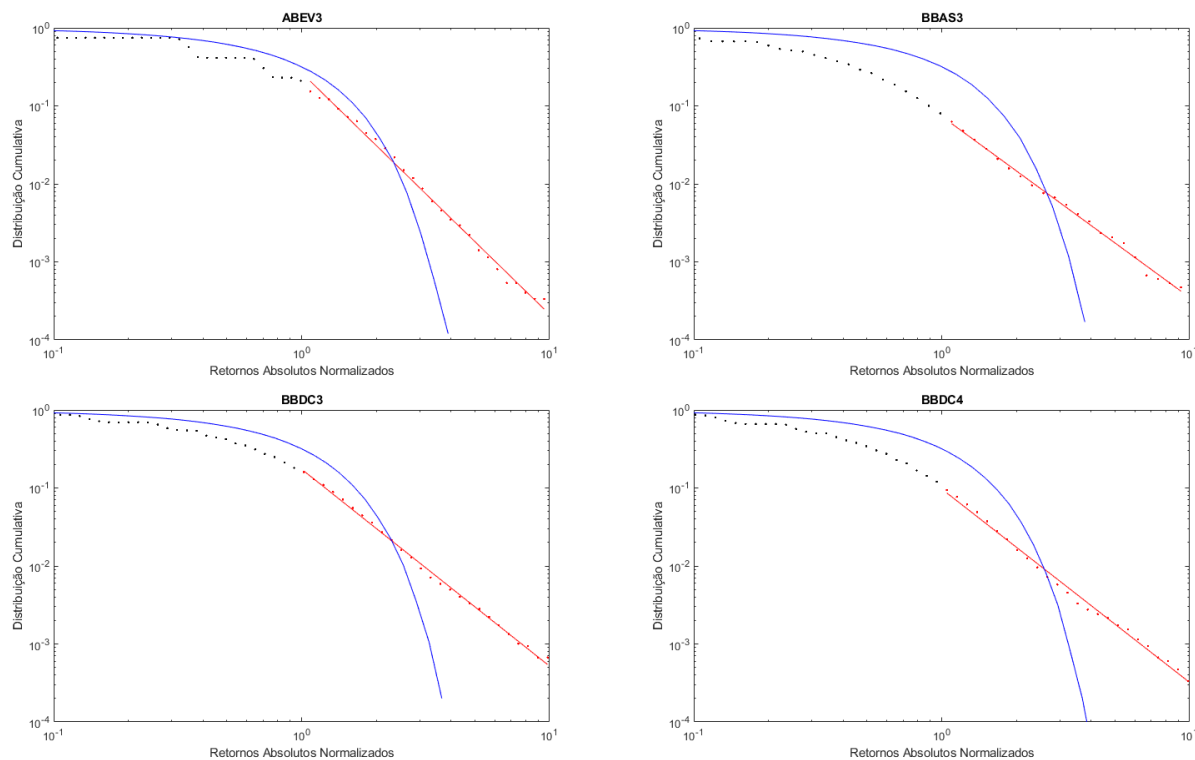


Figura 7 – Distribuições de Retornos para os ativos que compõem o índice Ibovespa ABEV3, BBAS3, BBDC3 e BBDC4, onde BBDC3 e BBDC4 são o mesmo ativo, mas o primeiro se refere às ações ordinais e o último às ações preferenciais.

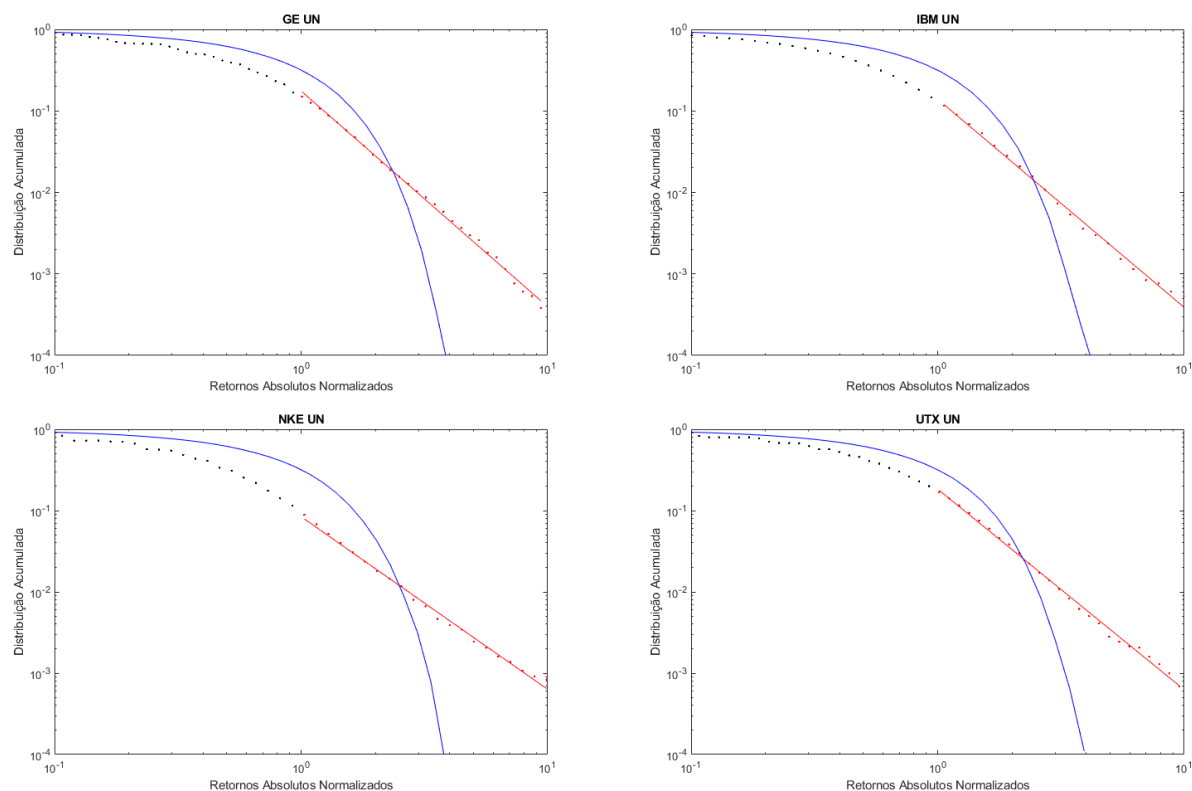


Figura 8 – Distribuições de Retornos para os ativos que compõem o índice Dow Jones GE UN, IBM UN, NKE UN e UTX UN.

As retas de regressão linear evidentes nos gráficos acima representam o comportamento característico de uma cauda pesada que decai em lei de potência. Os coeficientes de decaimento de cada ativo investigado, para os índices Ibovespa e Dow Jones, são apresentados na Tabela (5) e na Tabela (6), respectivamente, bem como seu R-quadrado ajustado correspondente.

Tabela 5 – Coeficientes de decaimento para o índice IBOVESPA

Ativo	Coeficiente de Decaimento	R^2
ITUB4	-2,4987	0,9937
BBDC4	-2,4804	0,9949
ABEV3	-3,0970	0,9949
PETR4	-2,5078	0,9951
PETR3	-2,5397	0,9970
VALE5	-2,1344	0,9936
VALE3	-2,3598	0,9971
BRFS3	-2,6004	0,9937

Continua na próxima página

Tabela 5 – Continuação da tabela

Ativo	Coefficiente de Decaimento	R^2
BBAS3	-2,3231	0,9956
ITSA4	-2,6509	0,9918
BVMF3	-2,4456	0,9950
UGPA3	-2,6044	0,9979
CIEL3	-2,5606	0,9963
BBSE3	-2,8034	0,9957
KROT3	-2,7459	0,9947
VIVT4	-2,5748	0,9958
JBSS3	-2,1114	0,9991
BBDC3	-2,5243	0,9979
LREN3	-2,7571	0,9973
CCRO3	-2,8390	0,9931
RADL3	-2,7651	0,9924
EMBR3	-2,7573	0,9965
SANB11	-2,7217	0,9937
EQTL3	-2,8050	0,9946
HYPE3	-2,3181	0,9980
SBSP3	-2,5128	0,9963
GGBR4	-2,8440	0,9933
BRKM5	-2,6498	0,9950
LAME4	-2,5924	0,9976
WEGE3	-2,9665	0,9961
PCAR4	-2,7360	0,9940
CPFE3	-2,8949	0,9883
KLBN11	-3,3052	0,9790
FIBR3	-2,8396	0,9917
EGIE3	-2,8683	0,9962
BRML3	-2,7692	0,9977
CSNA3	-2,8014	0,9972
CMIG4	-2,3261	0,9928
TIMP3	-2,4416	0,9879
ELET3	-2,5892	0,9982
CSAN3	-2,7480	0,9967
SUZB5	-2,7087	0,9973
RENT3	-2,9765	0,9897
ESTC3	-2,5234	0,9971

Continua na próxima página

Tabela 5 – Continuação da tabela

Ativo	Coefficiente de Decaimento	R^2
MULT3	-2,7745	0,9948
RAIL3	-2,5072	0,9972
QUAL3	-2,5915	0,9950
NATU3	-2,5974	0,9976
BRAP4	-2,4019	0,9978
ENBR3	-2,5624	0,9953
MRVE3	-2,5848	0,9978
GOAU4	-2,7801	0,9962
CPLE6	-2,7242	0,9937
SMLE3	-2,7668	0,9957
CYRE3	-2,6245	0,9984
MRFG3	-2,6240	0,9948
USIM5	-2,6494	0,9985
ECOR3	-2,6420	0,9979
Média	-2,6457	-
Desvio Padrão	0,2104	-

Tabela 6 – Coeficientes de decaimento para o índice Dow Jones

Ativo	Coefficiente de Decaimento	R^2
BA UN	-2,3067	0,9988
GS UN	-2,2581	0,9939
MMM UN	-2,3632	0,9981
UNH UN	-2,3917	0,9956
AAPL UW	-2,2370	0,9983
HD UN	-2,3125	0,9983
MCD UN	-2,4745	0,9984
IBM UN	-2,5542	0,9956
JNJ UN	-2,5450	0,9982
TRV UN	-2,5566	0,9961
UTX UN	-2,4687	0,9969
CAT UN	-2,2666	0,9965
CVX UN	-2,5697	0,9967

Continua na próxima página

Tabela 6 – Continuação da tabela

Ativo	Coefficiente de Decaimento	R^2
DIS UN	-1,6094	0,8410
V UN	-2,4409	0,9984
JPM UN	-2,2137	0,9912
PG UN	-2,5967	0,9944
AXP UN	-2,3973	0,9984
WMT UN	-2,1449	0,9989
DD UN	-1,8365	0,9832
XOM UN	-2,5777	0,9979
MSFT UW	-2,4261	0,9981
MRK UN	-2,2027	0,9954
NKE UN	-2,1240	0,9955
VZ UN	-2,4051	0,9963
KO UN	-2,5882	0,9984
INTC UW	-2,4685	0,9978
PFE UN	-2,6429	0,9985
CSCO UW	-2,4169	0,9969
GE UN	-2,6453	0,9972
Média	-2,3680	-
Desvio Padrão	0,2272	-

Comparando a Tabela (5) com a Tabela (6), podemos perceber que os coeficientes de decaimento da B3 são, na média, maiores em módulo do que os vistos em Dow Jones. Isso indica o maior distanciamento do índice Dow Jones do modelo canônico para séries de preços, se afastando do comportamento de uma gaussiana, se comparado aos resultados encontrados para Ibovespa. De acordo com o observado, esse afastamento aparenta ser maior no mercado desenvolvido, mas não necessariamente significa uma possibilidade de arbitragem.

5.4 Análise das Acurácias por Ativos

Tratamos de encontrar as acurácias para os dados do Ibovespa. Os resultados estão expostos na Tabela (7).

Tabela 7 – Acurácias para o índice IBOVESPA

Ativo	Acurácia	Acurácia com Quartil
ITUB4	52,14	54,06
BBDC4	51,35	52,72
ABEV3	53,96	56,58
PETR4	53,03	55,95
PETR3	51,77	52,66
VALE5	52,15	53,76
VALE3	50,99	52,11
BRFS3	51,11	51,95
BBAS3	51,66	53,39
ITSA4	57,78	61,33
BVMF3	51,77	54,74
UGPA3	52,61	55,31
CIEL3	53,02	56,86
BBSE3	51,06	53,95
KROT3	53,50	55,96
VIVT4	51,87	54,16
JBSS3	52,99	55,72
BBDC3	52,96	55,89
LREN3	52,20	53,44
CCRO3	52,34	53,10
RADL3	52,41	54,98
EMBR3	52,93	54,64
SANB11	52,56	51,14
EQTL3	52,25	53,18
HYPE3	52,00	54,10
SBSP3	52,17	53,90
GGBR4	51,43	54,06
BRKM5	52,18	52,74
LAME4	53,41	55,64
WEGE3	52,45	54,16
PCAR4	51,65	54,49
CPFE3	66,94	76,44
KLBN11	53,02	56,40
FIBR3	51,26	53,25
EGIE3	53,77	57,77
BRML3	52,21	53,20

Continua na próxima página

Tabela 7 – Continuação da tabela

Ativo	Acurácia	Acurácia com Quartil
CSNA3	52,66	55,12
CMIG4	52,84	55,13
TIMP3	53,91	57,49
ELET3	50,81	51,84
CSAN3	52,16	53,50
SUZB5	52,72	54,23
RENT3	50,91	53,43
ESTC3	52,73	55,38
MULT3	52,87	53,21
RAIL3	54,40	57,63
QUAL3	52,11	54,27
NATU3	51,56	55,52
BRAP4	51,72	53,99
ENBR3	53,78	56,23
MRVE3	53,39	56,01
GOAU4	56,47	60,43
CPLE6	50,97	53,47
SMLE3	51,97	54,80
CYRE3	52,40	54,45
MRFG3	54,18	58,14
USIM5	56,35	61,60
ECOR3	52,67	54,38
Média	52,85	55,24

Observe que foram calculadas duas acurácias diferentes, em uma delas foi aplicado o que chamamos aqui de *critério dos quartis*, onde considera-se que só há uma nova previsão válida se o valor previsto a cada novo instante de tempo é maior do que o do terceiro quartil dos 100 últimos valores previstos. Para o índice Dow Jones teremos as acurácias descritas na Tabela (8).

Tabela 8 – Acurácias para o índice Dow Jones

Ativo	Acurácia	Acurácia com Quartil
BA UN	50,80	50,21

Continua na próxima página

Tabela 8 – *Continuação da tabela*

Ativo	Acurácia	Acurácia com Quartil
GS UN	50,02	50,15
MMM UN	51,38	52,61
UNH UN	51,22	52,08
AAPL UW	51,58	52,05
HD UN	50,97	52,52
MCD UN	51,54	52,59
IBM UN	51,18	52,42
JNJ UN	51,07	52,10
TRV UN	50,82	51,82
UTX UN	50,99	51,42
CAT UN	50,60	50,00
CVX UN	50,00	50,30
DIS UN	51,06	51,82
V UN	52,15	51,75
JPM UN	50,43	50,56
PG UN	50,84	52,66
AXP UN	50,88	51,23
WMT UN	51,64	53,74
DD UN	51,44	52,90
XOM UN	50,53	51,88
MSFT UW	49,95	50,57
MRK UN	51,10	51,87
NKE UN	50,97	51,63
VZ UN	51,18	51,28
KO UN	51,37	52,63
INTC UW	50,69	53,34
PFE UN	52,35	53,61
CSCO UW	50,38	51,00
GE UN	50,21	51,26
Média	50,95	51,72

Observamos, ao fim da aquisição desses resultados, como era de se esperar, que a aplicação do critério dos quartis melhora consideravelmente as acurácias, que podemos considerar suficientemente satisfatórias, considerando os resultados encontrados em outros previsões e o que é proposto pela HME ([RESENDE, 2021](#); [FONSECA et al., 2021](#)). Também

notamos que os ativos do índice Ibovespa apresentam maiores acurácias, e este não é um resultado surpreendente, tendo em vista que mercados bem estabelecidos, como o estadunidense, tendem a se aproximar mais de uma eficiência de mercado ideal, com menor possibilidade de arbitragem (CAJUEIRO; TABAK, 2004).

5.5 Análise das Correlações

Buscando investigar a Hipótese de Mercado Eficiente a partir do modelo utilizado, traçamos um paralelo entre os retornos médios brutos² de cada ativo e suas respectivas acurácias. Observemos que os ganhos em uma estratégia de negociação crescem tanto com a acurácia quanto com o retorno médio. Tais ganhos só serão consistentes caso suplantem as perdas inevitáveis nas operações. Olhando desta forma para todas as ações analisadas, esperamos encontrar uma correlação de inversa proporcionalidade, visto que, pela Hipótese de Mercado Eficiente, não é possível se obter ganhos significativos sem se correrem riscos significativos. Portanto, é esperado que um aumento no retorno médio de um investimento seja acompanhado de uma perda de acurácia. Para encontrar tal correlação, utilizaremos um teste de coeficiente de correlação de Pearson³, em que os conjuntos comparados são as acurácias e retornos médios de cada ação, empregando um intervalo de confiança de 95%. O teste será feito considerando as ações que compõem cada índice, Ibovespa ou Dow Jones, separadamente.

A Tabela (9) e a Tabela (10) mostram os retornos médios (em reais), bem como as acurácias encontradas (após a aplicação do critério dos quartis) por ação, para os dois casos da seção anterior.

Tabela 9 – Retornos médios para o índice Ibovespa para velas de 5 minutos.

Ativo	Retorno Médio
ITUB4	0,0117
BBDC4	0,0110
ABEV3	0,0051
PETR4	0,0062
PETR3	0,0067

Continua na próxima página

²Cada novo preço é comparado com o preço do instante de tempo anterior. A diferença entre esses preços indica o retorno bruto para aquele instante. O retorno médio bruto corresponde à média simples destes retornos.

³Coeficiente encontrado por meio de um teste que mede a relação linear estatística entre duas variáveis contínuas. Valores positivos (negativos) para o coeficiente indicam uma correlação linear positiva (negativa). O coeficiente varia entre -1 e 1 e quanto maior for seu módulo, mais forte é essa correlação. Coeficientes de Pearson iguais a 0 indicam a ausência de correlação entre as variáveis analisadas.

Tabela 9 – *Continuação da tabela*

Ativo	Retorno Médio
VALE5	0,0149
VALE3	0,0161
BRFS3	0,0179
BBAS3	0,0130
ITSA4	0,0033
BVMF3	0,0084
UGPA3	0,0230
CIEL3	0,0092
BBSE3	0,0111
KROT3	0,0071
VIVT4	0,0150
JBSS3	0,0059
BBDC3	0,0123
LREN3	0,0113
CCRO3	0,0073
RADL3	0,0234
EMBR3	0,0072
SANB11	0,0130
EQTL3	0,0188
HYPE3	0,0110
SBSP3	0,0144
GGBR4	0,0065
BRKM5	0,0171
LAME4	0,0068
WEGE3	0,0082
PCAR4	0,0269
CPFE3	0,0030
KLBN11	0,0069
FIBR3	0,0149
EGIE3	0,0132
BRML3	0,0059
CSNA3	0,0062
CMIG4	0,0057
TIMP3	0,0039
ELET3	0,0111
CSAN3	0,0175

Continua na próxima página

Tabela 9 – *Continuação da tabela*

Ativo	Retorno Médio
SUZB5	0,0072
RENT3	0,0185
ESTC3	0,0104
MULT3	0,0252
RAIL3	0,0052
QUAL3	0,0142
NATU3	0,0133
BRAP4	0,0128
ENBR3	0,0058
MRVE3	0,0063
GOAU4	0,0034
CPLE6	0,0149
SMLE3	0,0315
CYRE3	0,0068
MRFG3	0,0040
USIM5	0,0030
ECOR3	0,0048

Tabela 10 – Retornos médios para o índice Dow Jones para velas de 5 minutos.

Ativo	Retorno Médio
BA UN	0,0427
GS UN	0,0651
MMM UN	0,0314
UNH UN	0,0364
AAPL UW	0,0329
HD UN	0,0292
MCD UN	0,0238
IBM UN	0,0297
JNJ UN	0,0202
TRV UN	0,0206
UTX UN	0,0191
CAT UN	0,0280

Continua na próxima página

Tabela 10 – Continuação da tabela

Ativo	Retorno Médio
CVX UN	0,0233
DIS UN	0,0166
V UN	0,0172
JPM UN	0,0207
PG UN	0,0127
AXP UN	0,0161
WMT UN	0,0160
DD UN	0,0201
XOM UN	0,0155
MSFT UW	0,0141
MRK UN	0,0123
NKE UN	0,0150
VZ UN	0,0096
KO UN	0,0065
INTC UW	0,0083
PFE UN	0,0066
CSCO UW	0,0065
GE UN	0,0057

Após a aplicação do teste, temos os coeficientes de Pearson dados na Tabela (11).

Tabela 11 – Coeficiente de Pearson: retorno *versus* acurácia para os índices IBOVESPA e Dow Jones.

-	Ibovespa	Dow Jones
Coeficiente de Pearson	-0,41	-0,33
p-valor	0,0015	0,0751

Podemos ver que existe uma relação linear negativa média nos dados do índice Ibovespa (e um p-valor que comprova a afirmativa, não rejeitando a hipótese nula de que existem evidências estatísticas que comprovem a correlação entre as variáveis) e uma relação negativa média nos dados do índice Dow Jones, mas com um coeficiente de Pearson superior ao nível de significância: neste caso, rejeitamos a hipótese nula de que existem evidências estatísticas que comprovem a correlação entre as variáveis. Entretanto, para um nível de significância um pouco maior, ainda aceitável, podemos tirar conclusões para o índice Dow Jones. Analisando os coeficientes encontrados, chegamos a um resultado

num primeiro momento inesperado: a correlação negativa de maior módulo para Ibovespa é fator que, tomado isoladamente, aponta para uma maior eficiência do mercado brasileiro. Chega-se a essa conclusão ao notar que, em B3, a correlação indica que o aumento na acurácia indica uma maior queda nos retornos quando comparado com Dow Jones. A [Figura 9](#) e a [Figura 10](#) ilustram as relações.

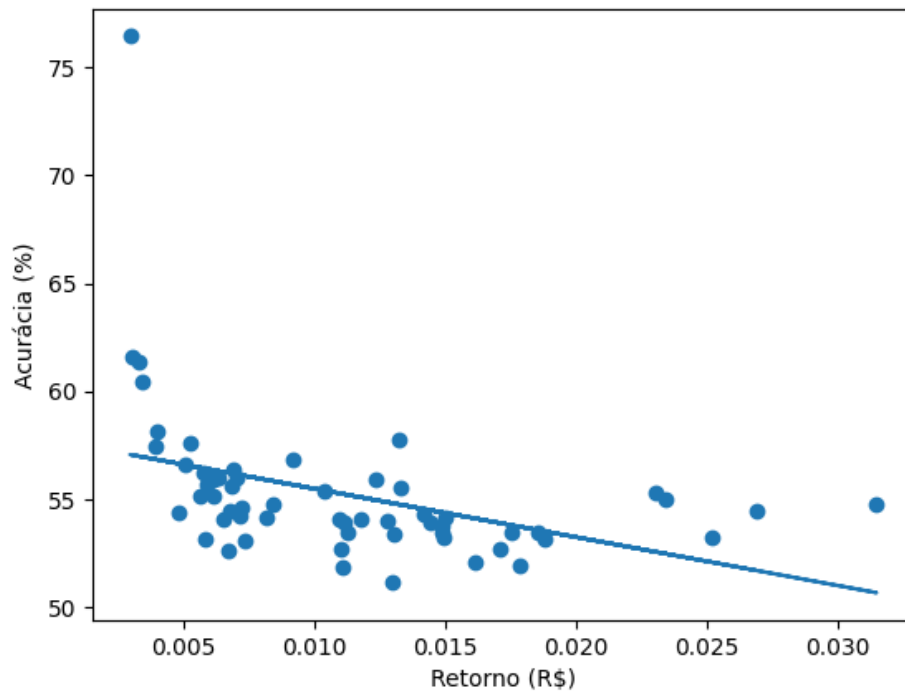


Figura 9 – Regressão linear em gráfico de dispersão para o índice Ibovespa. Cada ponto corresponde a uma ação.

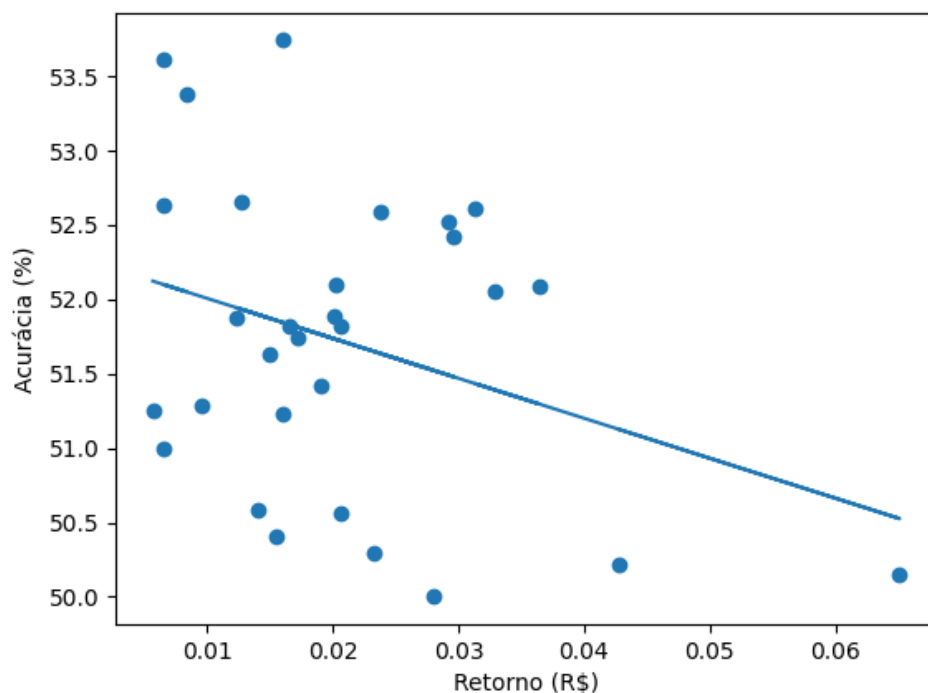


Figura 10 – Regressão linear em gráfico de dispersão para o índice Dow Jones. Cada ponto corresponde a uma ação.

A menor correlação encontrada para Dow Jones deve-se, muito provavelmente, ao fato de que as acurácias são menores para o índice, ou seja, a menor capacidade preditiva do modelo nos leva mais perto de um preditor completamente aleatório, onde não seria esperada nenhuma correlação. Essa baixa acurácia prejudica os testes para se encontrar correlações, em certa medida, sendo difícil dizer que existem maiores possibilidades de arbitragem em Dow Jones. A multiplicidade de fatores a se considerar na tarefa de apontar a maior possibilidade de arbitragem no índice americano em relação ao brasileiro nos impede de afirmar com assertividade que a possibilidade seja verdadeira.

Buscando novas possíveis correlações entre as variáveis de interesse, calculamos os coeficientes de Pearson ligados a cada par delas. A Tabela (12) mostra os resultados aproximados dos coeficientes encontrados, para os índices Ibovespa e Dow Jones, para a correlação entre $h(q)$ e a acurácia.

Tabela 12 – Coeficientes de Pearson: $h(q)$ versus Acurácia para os índices Ibovespa e Dow Jones.

-	q=-3	q=-2	q=2	q=3
Coef. de Pearson (Ibovespa)	-0,61	-0,60	-0,47	-0,34
Coef. de Pearson (Dow Jones)	-0,23	-0,21	-0,26	-0,36
p-valor (Ibovespa)	$3,84 \times 10^{-7}$	$5,01 \times 10^{-7}$	0,0001	0,0086
p-valor (Dow Jones)	0,2290	0,2616	0,1630	0,0478

Observemos que os resultados para Ibovespa apresentam correlações fortes em alguns casos e, também, uma variação significativa à medida que alteramos o valor de q investigado. Esses resultados para múltiplos valores de q (múltiplas fractalidades), nos indicam que o modelo utilizado é mais eficiente em regimes anti persistentes: o crescimento de $h(q)$ (que aponta no sentido da persistência) leva à diminuição da acurácia. Por outro lado, para Dow Jones, os p-valores não corroboram a hipótese de que essas relações, indicadas por coeficientes de Pearson sempre negativos, são estatisticamente relevantes.

Continuando nossas investigações, compararemos os valores de $h(q)$ encontrados com os retornos médios calculados anteriormente, também na tentativa de encontrarmos correlações significativas. A Tabela (13) contém os resultados encontrados para os índices Ibovespa e Dow Jones.

Tabela 13 – Coeficientes de Pearson $h(q)$ versus Retorno Médio para os índices Ibovespa e Dow Jones.

-	q=-3	q=-2	q=2	q=3
Coef. de Pearson (Ibovespa)	0,26	0,20	0,10	0,07
Coef. de Pearson (Dow Jones)	0,28	0,27	0,22	0,17
p-valor (Ibovespa)	0,0533	0,1269	0,4391	0,6092
p-valor (Dow Jones)	0,1277	0,1533	0,2356	0,3746

Conclusões bem diferentes às da análise anterior podem ser traçadas. Para Ibovespa, os valores dos coeficientes de Pearson apontam para correlações fracas e positivas para todos os valores de q , e para Dow Jones, as relações seguem aproximadamente o mesmo comportamento. Entretanto, os p-valores encontrados para ambos indicam uma não confiabilidade estatística para os valores obtidos. Em situações assim, vale relembrar que a não relevância estatística das correlações entre variáveis de interesse indica justamente o comportamento que se espera para um mercado mais desenvolvido, onde temos uma menor possibilidade de arbitragem devido ao comportamento mais aproximado de um caminhante aleatório.

Continuamos para identificar correlações entre as larguras do espectro de singularidade e os retornos médios calculados. A Tabela (14) mostra os resultados encontrados. Os

resultados apresentados não são estatisticamente significativos, nos levando a crer que as variáveis em questão não são efetivamente correlacionáveis.

Tabela 14 – Coeficientes de Pearson: Largura do Espectro de Singularidade *versus* Retorno Médio para os índices Ibovespa e Dow Jones.

-	Ibovespa	Dow Jones
Coef. de Pearson	0,22	0,02
p-valor	0,1007	0,9322

Por último, estamos interessados nas correlações entre as larguras dos espectros de singularidade e as acurácias. A Tabela (15) mostra os resultados encontrados.

Tabela 15 – Coeficiente de Pearson: Largura do Espectro de Singularidade *versus* Acurácia para os índices Ibovespa e Dow Jones.

-	Ibovespa	Dow Jones
Coef. de Pearson	-0,35	0,16
p-valor	0,0071	0,4132

Para a Tabela (15), encontramos fracas correlações para ambos os índices, além disso, também não encontramos significância estatística para o índice Dow Jones. Entretanto, podemos inferir algumas informações dos resultados para B3. Tais resultados nos mostram que quanto maior a largura do espectro, menor a acurácia de certo ativo. É razoável afirmar que essa correlação deve se mostrar com maior facilidade e confiança estatística em mercados emergentes, onde há maior acurácia. As conclusões anteriores podem nos trazer pistas sobre a relação do nosso modelo com correlações não lineares, características de grandes larguras de espectros de singularidade: tais correlações tendem a diminuir sua acurácia.

5.5.1 Análise das Correlações por Horário

Além da análise das acurácias obtidas com base nos ativos estudados, também nos ocupamos da tarefa de obter as acurácias por horário e por horário e ativo, ou seja, qual é a acurácia do modelo estudado para cada um dos horários onde previsões foram feitas e qual é a sua acurácia por horário para cada um dos ativos envolvidos no estudo.

Essa análise foi feita para os mesmos dados dos índices Dow Jones e Ibovespa anteriormente abordados. A Tabela (16) e a Tabela (17) mostram os resultados obtidos.

Tabela 16 – Acurácia por Hora e Ativo para o Índice Ibo-
vespa. Os horários relatados correspondem
ao horário de início dos intervalos.

Ativo	10Hrs	11Hrs	12Hrs	13Hrs	14Hrs	15Hrs	16Hrs	17Hrs
ITUB4	53,47	51,72	53,74	54,24	54,75	58,74	55,19	49,45
BBDC4	51,22	51,87	49,47	51,94	51,63	56,51	58,12	59,77
ABEV3	53,93	54,33	57,87	58,56	59,33	52,26	64,62	52,43
PETR4	56,70	56,14	57,49	52,74	57,71	57,97	51,98	53,39
PETR3	51,27	50,30	52,34	51,76	60,07	51,60	53,36	56,63
VALE5	55,04	49,22	54,79	56,30	54,90	53,85	51,50	57,61
VALE3	50,99	48,57	52,40	55,62	53,18	55,48	51,72	53,66
BRFS3	54,36	50,47	47,30	54,49	55,56	52,52	49,86	41,46
BBAS3	53,03	53,55	54,20	55,67	54,78	53,53	50,00	50,00
ITSA4	56,86	59,76	61,01	62,06	62,26	62,55	67,93	65,38
BVMF3	55,24	53,99	55,58	53,57	56,45	50,14	57,76	54,52
UGPA3	53,86	52,10	54,42	51,69	62,96	57,54	55,33	61,39
CIEL3	55,40	55,55	53,09	62,32	59,06	55,72	60,56	58,88
BBSE3	51,66	50,00	54,02	60,24	53,41	54,13	59,76	45,74
KROT3	57,10	53,17	55,76	58,79	52,33	57,60	56,54	51,09
VIVT4	53,62	50,09	51,83	54,59	55,70	57,41	56,45	56,34
JBSS3	55,17	54,27	53,28	61,13	59,56	53,73	53,02	60,53
BBDC3	56,32	54,64	54,91	55,77	55,29	53,89	58,49	59,17
LREN3	53,45	50,11	52,61	51,61	54,33	53,22	54,68	64,44
CCRO3	49,61	53,86	54,12	50,00	55,10	52,15	57,86	57,32
RADL3	53,49	53,45	56,00	53,13	58,67	51,70	60,87	52,17
EMBR3	56,25	52,51	49,89	57,80	54,98	55,27	57,45	56,34
SANB11	56,17	46,29	49,90	51,99	48,59	46,99	53,38	52,81
EQTL3	56,72	51,30	50,63	50,76	52,99	58,00	49,31	55,29
HYPE3	52,85	51,08	54,98	51,86	56,16	57,71	53,44	64,00
SBSP3	53,99	52,20	54,15	54,06	54,49	54,15	53,73	62,50
GGBR4	54,99	51,94	54,03	53,13	54,96	52,03	55,56	58,44
BRKM5	50,46	53,39	52,28	54,34	52,88	54,13	53,29	46,36
LAME4	55,80	54,44	55,82	54,80	54,14	56,66	56,63	63,79
WEGE3	54,59	49,58	54,79	54,01	55,52	53,29	54,75	59,14
PCAR4	56,09	51,25	52,32	53,59	59,51	55,56	53,74	53,85
CPFE3	71,93	76,69	77,42	77,56	78,21	80,16	81,11	77,89
KLBN11	57,17	53,97	56,66	60,59	51,48	53,41	57,51	56,73
FIBR3	51,41	51,96	52,82	52,85	55,23	52,96	55,52	54,72

Continua na próxima página

Tabela 16 – Continuação da tabela

Ativo	10Hrs	11Hrs	12Hrs	13Hrs	14Hrs	15Hrs	16Hrs	17Hrs
EGIE3	56,93	52,74	57,88	54,66	60,13	57,27	60,77	69,61
BRML3	50,45	50,12	55,61	55,17	58,05	49,18	52,05	60,40
CSNA3	54,74	54,68	52,56	58,70	58,75	53,69	53,55	51,11
CMIG4	52,29	53,59	55,37	56,68	64,66	53,28	57,09	53,85
TIMP3	54,49	51,91	59,17	60,32	59,44	60,74	58,02	64,56
ELET3	53,23	47,97	50,65	55,62	54,76	50,00	53,40	48,24
CSAN3	56,83	54,74	50,35	54,91	50,65	56,44	51,96	45,24
SUZB5	52,27	54,29	54,98	56,83	57,65	54,02	51,40	52,27
RENT3	54,83	51,37	55,40	49,10	51,68	57,69	50,82	63,95
ESTC3	54,74	56,95	53,78	55,14	57,43	53,57	54,29	63,41
MULT3	52,17	53,02	53,40	54,59	52,55	54,63	51,14	56,19
RAIL3	56,34	52,93	57,32	57,23	65,00	63,40	56,29	59,77
QUAL3	53,64	54,17	53,36	56,51	52,84	58,64	51,63	54,63
NATU3	60,56	49,31	52,93	55,21	54,46	53,59	56,72	63,74
BRAP4	52,64	54,42	53,32	59,09	53,11	52,20	53,75	54,74
ENBR3	52,66	55,13	52,97	58,09	59,63	59,36	55,42	58,10
MRVE3	59,85	50,56	53,30	53,61	58,57	57,73	55,86	50,00
GOAU4	58,30	56,86	61,73	66,82	66,26	58,17	62,80	48,78
CPLE6	56,21	52,57	50,54	53,41	59,80	50,31	50,15	50,83
SMLE3	57,10	50,67	57,35	54,50	56,29	56,20	52,27	51,67
CYRE3	56,22	56,98	50,93	53,21	52,26	56,10	54,29	51,02
MRFG3	56,64	56,57	52,07	63,40	62,96	59,51	64,26	49,32
USIM5	60,42	62,36	61,49	59,02	64,98	67,20	58,14	57,14
ECOR3	55,40	49,36	49,43	51,77	58,63	59,40	54,28	61,19
Média	54,84	52,91	54,14	55,67	56,79	55,51	55,65	56,07

As maiores acurácias encontradas foram para a ação CPFE3 nas faixas de horários de 16, 15 e 14 horas, respectivamente. Em média, as maiores acurácias são encontradas, para ações que compõem o índice Ibovespa, nas seguintes faixas de horário: 14, 17, 13, 16 e 15 horas, em ordem decrescente. A [Figura 11](#) ilustra a Tabela (16), para Ibovespa.

Tabela 17 – Acurácia por Hora e Ativo para o Índice Dow Jones. Os horários relatados correspondem ao horário de início dos intervalos.

Ativo	10Hrs	11Hrs	12Hrs	13Hrs	14Hrs	15Hrs	16Hrs	17Hrs
BA UN	48,31	51,09	45,79	49,55	53,37	51,74	53,54	56,76
GS UN	48,56	49,11	50,00	45,15	52,69	55,05	53,69	46,75
MMM UN	54,22	50,16	53,37	55,68	51,14	55,44	48,43	58,33
UNH UN	52,28	51,34	50,98	57,18	53,97	49,50	53,62	44,94
AAPL UW	51,03	52,97	50,32	49,01	51,79	56,42	57,01	45,71
HD UN	53,63	52,60	48,88	54,55	47,75	53,50	57,14	54,76
MCD UN	49,87	54,55	52,94	50,00	52,60	52,34	56,21	52,05
IBM UN	48,79	55,73	55,73	48,98	51,41	52,19	54,46	45,24
JNJ UN	54,29	55,51	54,03	48,77	49,86	48,20	54,43	53,85
TRV UN	50,40	53,09	53,18	50,90	48,46	53,92	51,59	49,28
UTX UN	48,56	50,10	49,81	48,58	57,36	51,36	55,59	54,55
CAT UN	47,18	50,35	45,49	48,97	54,87	55,96	52,77	51,43
CVX UN	47,19	49,91	52,06	48,95	50,57	50,88	50,93	55,38
DIS UN	52,33	53,52	49,41	53,42	52,26	52,54	52,88	41,33
V UN	55,33	49,31	52,59	49,49	50,15	52,96	52,84	59,76
JPM UN	52,93	50,92	48,96	48,88	48,97	52,19	49,43	50,65
PG UN	51,60	49,45	54,42	52,55	56,52	52,79	52,57	51,43
AXP UN	50,62	48,93	49,69	52,59	52,12	54,01	52,22	53,85
WMT UN	54,09	49,57	55,44	55,83	51,50	56,11	56,75	53,85
DD UN	50,49	49,42	53,96	50,70	55,52	54,04	50,65	56,47
XOM UN	45,52	48,09	54,35	52,77	51,15	53,21	51,90	47,14
MSFT UW	49,64	50,28	51,12	45,60	49,74	55,46	54,58	45,59
MRK UN	49,04	52,60	51,24	55,28	50,77	52,71	52,45	49,33
NKE UN	50,57	49,57	48,91	53,75	54,03	51,78	56,37	52,17
VZ UN	54,36	50,55	49,09	50,93	50,96	50,18	53,85	53,73
KO UN	52,55	52,11	53,32	52,79	54,21	56,51	48,78	46,74
INTC UW	56,69	49,00	54,12	50,39	57,51	55,36	53,57	57,97
PFE UN	50,96	50,54	53,28	53,57	56,06	55,21	56,25	69,35
CSCO UW	53,66	50,53	48,67	52,19	51,43	49,71	54,06	41,98
GE UN	51,30	49,44	55,94	50,13	50,45	53,33	49,10	39,39
Média	51,18	51,00	51,5	51,17	52,23	53,06	53,19	51,23

As maiores acurácias encontradas foram no horário de 17 horas para as ações V UN, MMM UN e INTC UN, mas vale ressaltar que, nesse horário, as negociações são do tipo leilão. Para além do horário das 17 horas, que opera em uma dinâmica diferente, as ações UNH UN (13 horas), AAPL UW (15 horas), HD UN (16 horas), UTX UN (14 horas), INTC UW (14 horas) apresentam as maiores acurácias. Em média, as maiores acurácias são encontradas, para ações que compõem o índice Dow Jones, nas seguintes faixas de horário: 16, 15 e 14 horas, em ordem decrescente. A [Figura 12](#) ilustra a Tabela (17), para Dow Jones.

Além das acurácias, foram tomados também os retornos médios por horário e ativo. A Tabela (18) e a Tabela (19) mostram os dados obtidos.

Tabela 18 – Retornos médios por horário para o índice IBOVESPA

Ativo	10Hrs	11Hrs	12Hrs	13Hrs	14Hrs	15Hrs	16Hrs	17Hrs
ITUB4	0,023574	0,013769	0,011406	0,008790	0,006486	0,007335	0,006534	0,006990
BBDC4	0,021932	0,013723	0,010616	0,006992	0,005217	0,006055	0,005666	0,005932
ABEV3	0,008206	0,005790	0,004868	0,003938	0,003280	0,003211	0,003116	0,003575
PETR4	0,011535	0,007258	0,004815	0,003556	0,002808	0,003700	0,004188	0,004269
PETR3	0,012748	0,008876	0,006516	0,004820	0,003381	0,003360	0,003694	0,003907
VALE5	0,024929	0,016081	0,013875	0,007553	0,006226	0,006858	0,007420	0,006107
VALE3	0,029226	0,021151	0,017225	0,009326	0,007431	0,007144	0,007166	0,005847
BRFS3	0,036258	0,021441	0,017016	0,009644	0,007829	0,009268	0,009023	0,005818
BBAS3	0,024994	0,014935	0,012721	0,007123	0,007224	0,006900	0,007463	0,006860
ITSA4	0,005366	0,002988	0,003261	0,002193	0,002111	0,002199	0,002530	0,001978
BVMF3	0,013265	0,009425	0,008041	0,006019	0,005058	0,005950	0,005122	0,004501
UGPA3	0,044787	0,028274	0,021197	0,016847	0,012128	0,012611	0,011815	0,015065
CIEL3	0,014662	0,009504	0,008316	0,005960	0,005344	0,005280	0,006031	0,006709
BBSE3	0,015626	0,014903	0,011530	0,008079	0,005334	0,007930	0,007946	0,006122
KROT3	0,010594	0,009312	0,006334	0,004347	0,004050	0,004337	0,004459	0,004486
VIVT4	0,027290	0,020581	0,017466	0,010966	0,007712	0,008036	0,006741	0,008104
JBSS3	0,009535	0,006387	0,005303	0,003519	0,002946	0,003333	0,004034	0,002489
BBDC3	0,015898	0,015674	0,011532	0,007754	0,007282	0,007298	0,007882	0,010886
LREN3	0,018043	0,011507	0,009310	0,006502	0,006091	0,008756	0,007959	0,007022
CCRO3	0,010735	0,008269	0,006779	0,005027	0,004363	0,004820	0,005074	0,004385
RADL3	0,041187	0,032935	0,022662	0,016890	0,011306	0,012611	0,014331	0,010897
EMBR3	0,015832	0,008957	0,007375	0,004947	0,003588	0,003604	0,003392	0,003082
SANB11	0,023316	0,016602	0,013269	0,007866	0,006396	0,008126	0,005600	0,007221
EQTL3	0,029148	0,020527	0,017407	0,013790	0,009676	0,010064	0,012909	0,011187
HYPE3	0,018013	0,014543	0,008492	0,006921	0,005764	0,004697	0,006120	0,007221
SBSP3	0,025548	0,018952	0,014026	0,011980	0,007511	0,005982	0,007320	0,005427
GGBR4	0,011316	0,008161	0,006178	0,004533	0,003110	0,003493	0,003700	0,003719
BRKM5	0,033445	0,023774	0,015384	0,009570	0,008079	0,008577	0,008450	0,009161
LAME4	0,011303	0,009468	0,005658	0,005101	0,003132	0,004294	0,004889	0,002142
WEGE3	0,012284	0,009683	0,007601	0,005924	0,004798	0,004740	0,006035	0,004776
PCAR4	0,046968	0,041366	0,025792	0,019384	0,013015	0,013901	0,016762	0,012836

Continua na próxima página

Tabela 18 – Continuação da tabela

Ativo	10Hrs	11Hrs	12Hrs	13Hrs	14Hrs	15Hrs	16Hrs	17Hrs
CPFE3	0,003858	0,003323	0,002695	0,002128	0,002335	0,001985	0,002219	0,002344
KLBN11	0,010581	0,008220	0,005679	0,004671	0,003721	0,005064	0,005732	0,005152
FIBR3	0,033961	0,017661	0,011471	0,009161	0,008514	0,008158	0,006592	0,006802
EGIE3	0,017574	0,014581	0,011261	0,010255	0,007627	0,008174	0,011088	0,010709
BRML3	0,007400	0,006442	0,006160	0,004131	0,002988	0,004169	0,004721	0,004687
CSNA3	0,009639	0,007145	0,006227	0,004809	0,003540	0,002818	0,003259	0,003603
CMIG4	0,012813	0,006871	0,005185	0,003790	0,002553	0,003142	0,002999	0,002533
TIMP3	0,006452	0,006366	0,003977	0,002728	0,002049	0,001895	0,001677	0,002388
ELET3	0,019948	0,016194	0,010649	0,006720	0,005632	0,006932	0,006040	0,005832
CSAN3	0,028413	0,024403	0,014160	0,012288	0,011258	0,010876	0,011141	0,012069
SUZB5	0,012142	0,008081	0,005727	0,004628	0,004199	0,004395	0,004416	0,003560
RENT3	0,026285	0,027339	0,015690	0,013912	0,010175	0,011142	0,012734	0,010262
ESTC3	0,012748	0,012054	0,010188	0,006476	0,005770	0,006566	0,007113	0,004703
MULT3	0,043781	0,032527	0,024799	0,018041	0,013779	0,013620	0,017442	0,021274
RAIL3	0,007768	0,005435	0,004616	0,003737	0,002887	0,003482	0,003466	0,003082
QUAL3	0,025368	0,019957	0,010923	0,009920	0,007808	0,007038	0,008365	0,010058
NATU3	0,023071	0,017333	0,010977	0,010563	0,007665	0,006996	0,007643	0,005514
BRAP4	0,023084	0,015446	0,011036	0,007872	0,005610	0,005674	0,006752	0,006874
ENBR3	0,008000	0,006495	0,005250	0,003928	0,003174	0,003328	0,004697	0,006093
MRVE3	0,008774	0,008011	0,005384	0,004034	0,002866	0,003684	0,004055	0,002547
GOAU4	0,004994	0,003860	0,002936	0,001959	0,001975	0,002288	0,002373	0,002272
CPLE6	0,026155	0,017656	0,015233	0,009639	0,006624	0,007760	0,007967	0,011520
SMLE3	0,046735	0,042769	0,031379	0,020786	0,016465	0,018673	0,017128	0,022417
CYRE3	0,008839	0,009113	0,005598	0,004268	0,003933	0,004098	0,005170	0,004993
MRFG3	0,005484	0,005000	0,003924	0,002622	0,002102	0,002542	0,002909	0,002489
USIM5	0,004206	0,003167	0,002700	0,001868	0,001852	0,001921	0,001943	0,001910
ECOR3	0,008168	0,005833	0,004353	0,003047	0,002919	0,002479	0,003572	0,002808
Média	0,018857	0,014071	0,010347	0,007480	0,005840	0,0062650	0,006665	0,006504

Os maiores retornos médios são das ações UGPA3, RADL3, PCAR4, MULT3 e SMLE3 no horário de 10 horas. As maiores médias para os retornos médios são nos horários de 10, 11 e 12 horas, resultado bem diferente do que encontramos para a acurácia. A ação CPFE3, que mostrava as maiores acurácias, apresenta retornos muito pequenos, de acordo com o que é esperado pela HME.

Tabela 19 – Retornos médios por horário para o índice Dow Jones

Ativo	10Hrs	11Hrs	12Hrs	13Hrs	14Hrs	15Hrs	16Hrs	17Hrs
BA UN	0,159884	0,073393	0,052031	0,030221	0,018792	0,021030	0,020082	0,013186
GS UN	0,244030	0,115545	0,076385	0,049798	0,034999	0,027770	0,028524	0,031877

Continua na próxima página

Tabela 19 – Continuação da tabela

Ativo	10Hrs	11Hrs	12Hrs	13Hrs	14Hrs	15Hrs	16Hrs	17Hrs
MMM UN	0,115876	0,055650	0,034916	0,023109	0,016287	0,012726	0,016678	0,012377
UNH UN	0,150215	0,069241	0,043143	0,023760	0,016445	0,020509	0,016443	0,017208
AAPL UW	0,125562	0,054147	0,034052	0,026538	0,017008	0,015067	0,017347	0,009020
HD UN	0,119460	0,054205	0,032959	0,021138	0,014717	0,012076	0,013674	0,012154
MCD UN	0,091836	0,042081	0,028326	0,018540	0,014186	0,011106	0,009933	0,009387
IBM UN	0,111451	0,047346	0,034256	0,024704	0,014422	0,012829	0,013433	0,015110
JNJ UN	0,074931	0,033712	0,025229	0,013659	0,010563	0,010032	0,010802	0,006370
TRV UN	0,083587	0,037428	0,024239	0,014110	0,010795	0,009232	0,011241	0,008407
UTX UN	0,070650	0,028717	0,025930	0,013126	0,010347	0,009061	0,011300	0,010882
CAT UN	0,110245	0,048215	0,036963	0,020026	0,014331	0,012323	0,010412	0,014855
CVX UN	0,078696	0,039076	0,031100	0,018449	0,012273	0,009991	0,013738	0,009958
DIS UN	0,057858	0,026919	0,020701	0,010856	0,009875	0,008514	0,009030	0,008181
V UN	0,066909	0,028584	0,022691	0,011170	0,008594	0,007573	0,009097	0,008370
JPM UN	0,082580	0,031234	0,023479	0,015244	0,009658	0,010504	0,011758	0,008713
PG UN	0,045102	0,020469	0,015522	0,009106	0,006781	0,006028	0,008454	0,006630
AXP UN	0,058428	0,027337	0,019180	0,013006	0,008459	0,006560	0,009448	0,006728
WMT UN	0,060390	0,029692	0,018575	0,010485	0,008792	0,007473	0,008018	0,009914
DD UN	0,084579	0,035318	0,023180	0,015379	0,010220	0,007527	0,009074	0,009105
XOM UN	0,056709	0,025849	0,017958	0,011417	0,008036	0,005929	0,009615	0,007735
MSFT UW	0,049752	0,021243	0,015879	0,010435	0,008659	0,008199	0,007449	0,006397
MRK UN	0,047331	0,019592	0,015270	0,008626	0,006054	0,005925	0,007180	0,006434
NKE UN	0,064466	0,025374	0,016481	0,009379	0,007038	0,006301	0,004938	0,005944
VZ UN	0,038498	0,014775	0,012702	0,007326	0,005174	0,004171	0,004191	0,004890
KO UN	0,023299	0,011385	0,007866	0,004191	0,003170	0,002669	0,003917	0,003627
INTC UW	0,031008	0,013086	0,010181	0,005855	0,004215	0,004317	0,004441	0,004216
PFE UN	0,021997	0,011112	0,008227	0,005035	0,003746	0,003484	0,003869	0,002973
CSCO UW	0,023157	0,010641	0,006716	0,003957	0,002978	0,003914	0,004040	0,004265
GE UN	0,021815	0,009459	0,005760	0,004240	0,003505	0,002966	0,002865	0,002395
Média	0,079010	0,0353608	0,024663	0,015096	0,010671	0,009527	0,010366	0,009244

Os maiores retornos médios são das ações BA UN, UNH UN e GS UN no horário de 10 horas. As maiores médias para os retornos médios são nos horários de 10, 11 e 12 horas. É interessante notar que ação UNH UN apresenta alta acurácia para o horário das 13 horas, mas baixo retorno. O contrário acontece para o mesmo ativo às 10 horas.

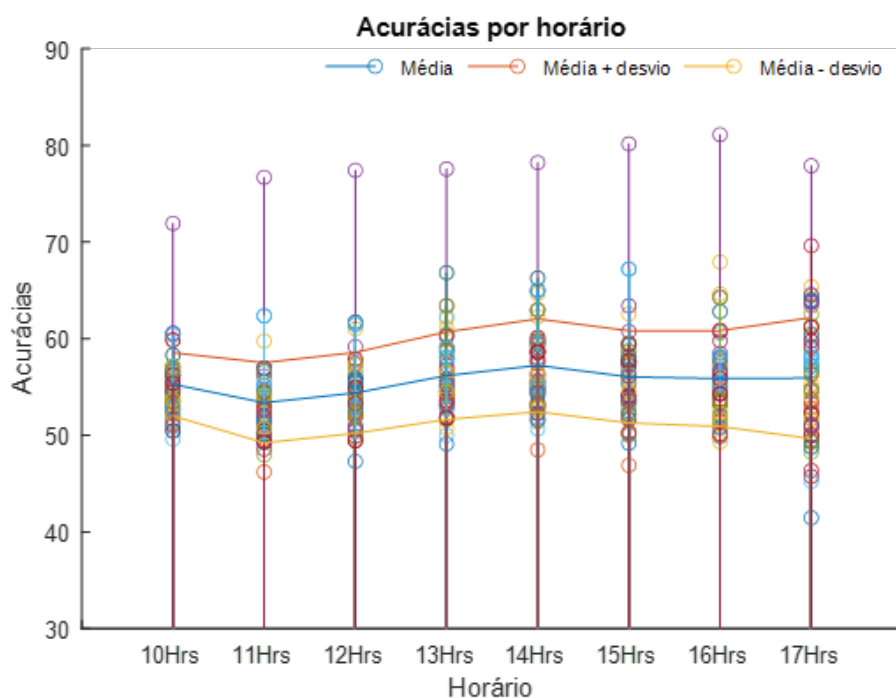


Figura 11 – Relação entre Retorno e Acurácia por horário para o índice Ibovespa. Cada ponto de cor diferente corresponde a uma ação.

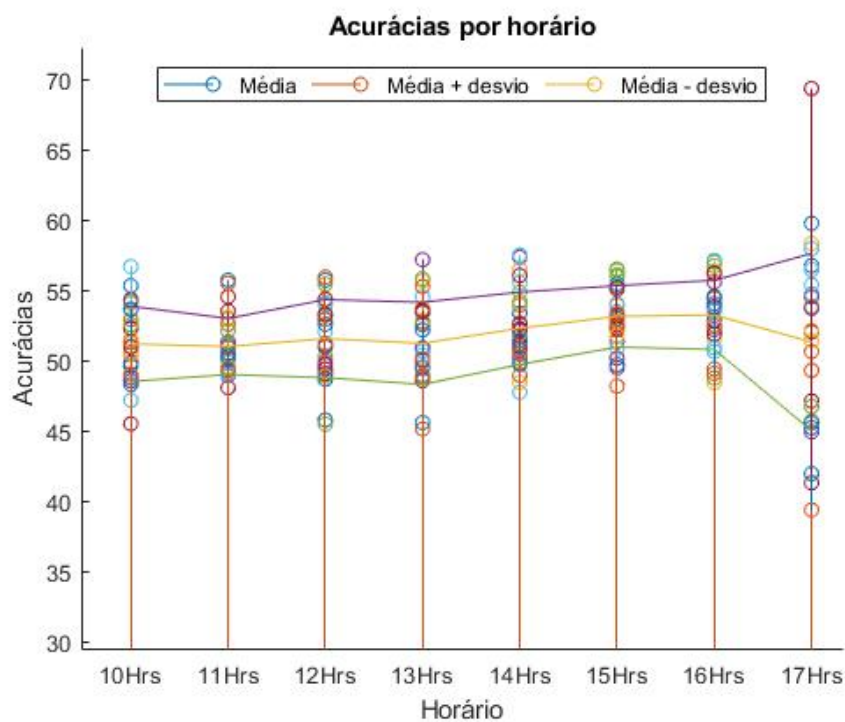


Figura 12 – Relação entre Retorno e Acurácia por horário para o índice Dow Jones. Cada ponto de cor diferente corresponde a uma ação.

Agora, de posse dos resultados encontrados para a análise das acurácias filtradas por faixas de horário e ativo, buscamos encontrar correlações entre os retornos médios e as acurácias encontrados desta forma. A Tabela (20) mostra os resultados de coeficiente de Pearson⁴, bem como seus p-valores, de ambos os índices.

Tabela 20 – Coeficientes de Pearson: Acurácia *versus* Retorno Médio para os índices Ibovespa e Dow Jones.

-	10 Hrs	11 Hrs	12 Hrs	13 Hrs	14 Hrs	15 Hrs	16 Hrs	17 Hrs
Coef. de Pearson (Ibovespa)	-0,26	-0,35	-0,31	-0,44	-0,37	-0,26	-0,38	-0,13
Coef. de Pearson (Dow Jones)	-0,29	0,11	-0,35	-0,34	-0,09	-0,04	0,06	-0,11
p-valor (Ibovespa)	0,0458	0,0064	0,0191	0,0005	0,0045	0,0451	0,0032	0,3198
p-valor (Dow Jones)	0,1245	0,5751	0,0607	0,0675	0,6300	0,8352	0,7594	0,5682

Os resultados apresentados acima denotam uma correlação de força média para o índice Ibovespa em todos os horários, exceto às 17 horas, intervalo que apresenta, inclusive, resultados estatisticamente inconclusivos, como mostra seu p-valor correspondente. Isso se deve, provavelmente, por ser um horário de leilão, onde as dinâmicas de compra e venda não se comportam de maneira convencional. Além disso, os resultados para o índice Dow Jones são todos estatisticamente não significativos (para o nível de significância de 5% utilizado em todo o trabalho). Já para B3, podemos reparar correlações negativas, já esperadas. Menores correlações, em módulo, são indicativos de possibilidades de arbitragem, pois significam que um aumento na acurácia é menos contrabalanceado por uma diminuição no retorno: os horários associados são candidatos a apresentarem desvios da eficiência de mercado. A Figura 13 ilustra a correlação para o índice Ibovespa às 13 horas, horário onde encontramos a correlação mais forte.

⁴Cada coeficiente de Pearson é computado a partir dos conjuntos de acurácias e conjuntos de retornos médios referentes aos ativos do Ibovespa ou do Dow Jones, calculados para uma dada faixa de horário.

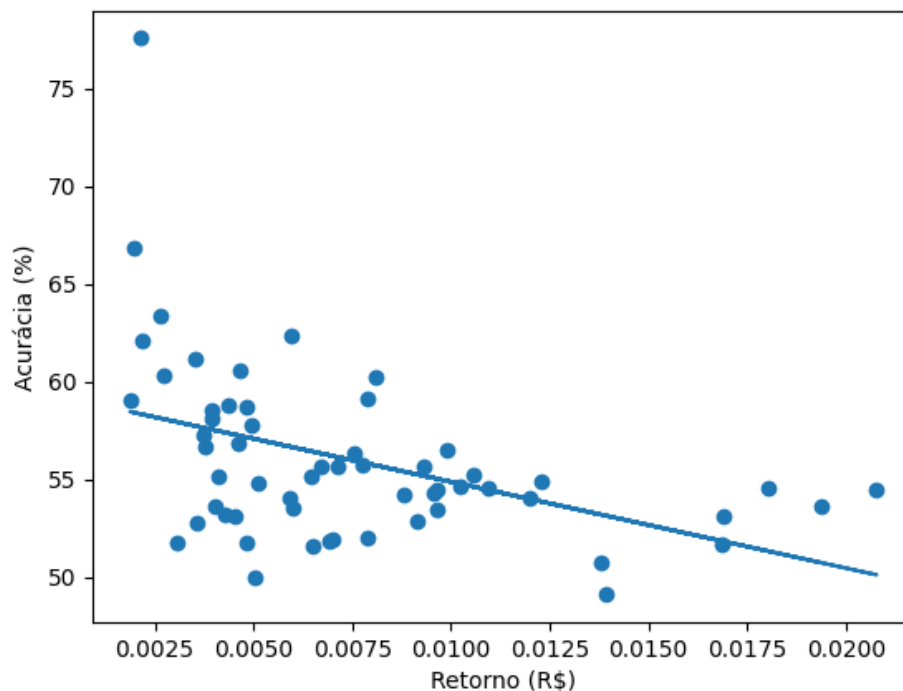


Figura 13 – Correlação entre Retorno e Acurácia para o índice Ibovespa na faixa de horários de 13 horas. Cada ponto corresponde a uma ação.

5.5.2 Análise sobre Lucro, Liquidez e Acurácia

Motivados pela busca de possibilidades de arbitragem, seguimos as análises testando os experimentos descritos no Capítulo (4) com foco no lucro e na acurácia. As acurácias mais relevantes foram encontradas para as ações do Ibovespa, o que indica maiores chances de encontrarmos oportunidades de arbitragem no mercado emergente. Nesta seção, nos concentramos nesse mercado. Primeiramente avaliaremos os resultados para o lucro.

O experimento 1 propõe o seguinte: Calculam-se as médias de $l_{k,t}$ e de $v_{k,t}$, para cada ativo, agregando-se os dados de todas as faixas de horário. Para cada ativo k , obtemos um valor $\bar{l}_k$ e $\bar{v}_k$. O coeficiente de Pearson e o respectivo p-valor são calculados considerando-se os conjuntos $\{\bar{l}_k\}$ e $\{\bar{v}_k\}$, que possuem, cada um, K elementos. O resultado para os índice Ibovespa segue na Tabela (21).

Tabela 21 – Experimento 1: Coeficiente de Pearson: Lucro *versus* Volume de Negociações para o índice Ibovespa.

-	Ibovespa
Coef. de Pearson	0,25
p-valor	0,0615

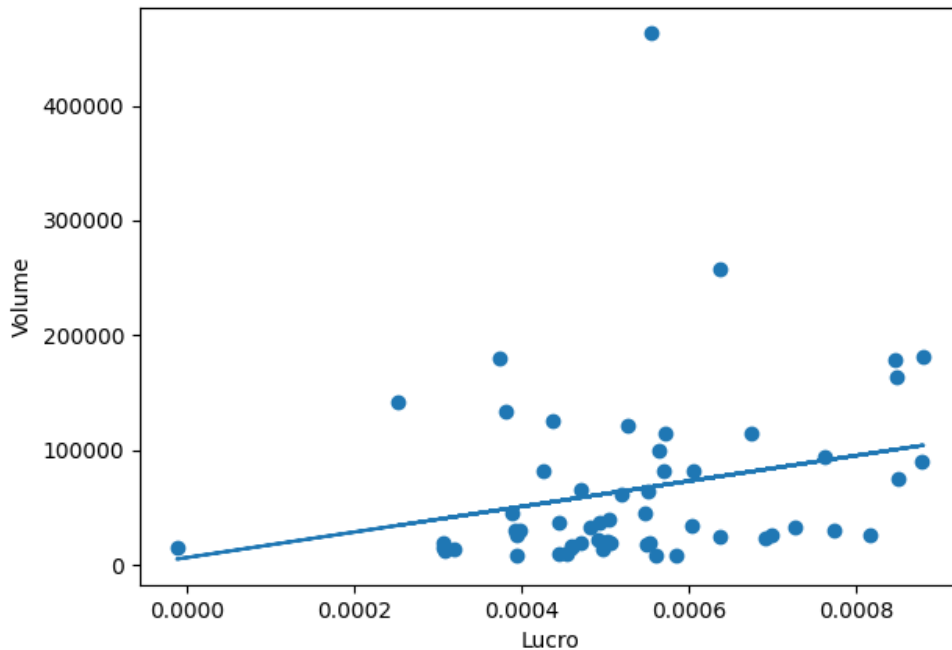


Figura 14 – Correlação entre Lucro por Unidade Monetária Investida e Volume de Negociações para o índice Ibovespa. Cada ponto corresponde a uma ação.

A análise da [Figura 14](#) parece apontar para uma evidência de desvio da Hipótese de Mercado Eficiente, visto que evidencia uma reta crescente, apontando para oportunidades de negócio, com o lucro por unidade monetária crescendo à medida que cresce o volume de negociações, sendo este um *proxy* da liquidez. Ou seja, o aumento do lucro teórico não é contrabalanceado por uma queda na liquidez (que tende a levar a perdas).

O experimento 2 propõe: Calculam-se as médias de $l_{k,t}$ e de $v_{k,t}$ para cada ativo k e para cada horário h . Para cada ativo k e horário h , obtemos um valor $\bar{l}_{k,h}$ e $\bar{v}_{k,h}$. O coeficiente de Pearson e o respectivo p-valor são calculados considerando-se os conjuntos $\{\bar{l}_{k,h}\}$ e $\{\bar{v}_{k,h}\}$, que possuem, cada um, $K \times H$ elementos. A Tabela (22) mostra os resultados da experimentação.

Tabela 22 – Experimento 2: Coeficiente de Pearson: Lucro *versus* Volume de Negociações para o índice Ibovespa.

-	Ibovespa
Coef. de Pearson	0,10
p-valor	0,0250

Analisando os resultados encontrados, vemos que existe uma fraca correlação positiva, o que aponta para a possibilidade de desvio da eficiência de mercado.

O experimento 3, por sua vez, propõe: A partir dos conjuntos $\{\bar{l}_{k,h}\}$ e $\{\bar{v}_{k,h}\}$, constroem-se H conjuntos $\{\bar{l}_{k,h}|h = h_0\}$ e H conjuntos $\{\bar{v}_{k,h}|h = h_0\}$ ($h_0 = 1, 2, \dots, H$). Cada conjunto desses refere-se a dados de um horário apenas, tendo K elementos. Para cada par $\{\bar{l}_{k,h}|h = h_0\}$ e $\{\bar{v}_{k,h}|h = h_0\}$, calcula-se um coeficiente de Pearson e seu respectivo p-valor (H coeficientes são calculados). A Tabela (23) expõe os resultados.

Tabela 23 – Experimento 3: Coeficiente de Pearson: Lucro *versus* Volume de Negociações para o índice Ibovespa.

Horário	Coef. de Pearson	p-valor
10 Horas	0,29	0,0272
11 Horas	0,18	0,1743
12 Horas	0,19	0,1565
13 Horas	0,22	0,0970
14 Horas	0,21	0,1095
15 Horas	0,18	0,1762
16 Horas	0,31	0,0182
17 Horas	0,27	0,0387

Neste caso, apenas os horários de 10 e 16 horas são estatisticamente significativos. Como nos casos anteriores, os coeficientes calculados são todos positivos.

Além do apresentado para o lucro, realizamos também os experimentos para a acurácia, como segue.

Tabela 24 – Experimento 1: Coeficiente de Pearson: Acurácia *versus* Volume de Negociações para o índice Ibovespa.

-	Ibovespa
Coef. de Pearson	0,13
p-valor	0,3466

Tabela 25 – Experimento 2: Coeficiente de Pearson: Acurácia *versus* Volume de Negociações para o índice Ibovespa.

-	Ibovespa
Coef. de Pearson	0,08
p-valor	0,0884

Tabela 26 – Experimento 3: Coeficiente de Pearson: Acurácia *versus* Volume de Negociações para o índice Ibovespa.

Horário	Coef. de Pearson	p-valor
10 Horas	0,06	0,6502
11 Horas	0,15	0,2505
12 Horas	0,23	0,0825
13 Horas	0,13	0,3358
14 Horas	0,16	0,2158
15 Horas	0,08	0,5326
16 Horas	0,00	0,9995
17 Horas	-0,06	0,6457

Nenhum dos experimentos feitos para a acurácia apresentou relevância estatística. Observamos, entretanto, que os coeficientes de Pearson encontrados são todos positivos, com exceção do correspondente à faixa de horário a partir das 17 horas, onde a negociação, por leilão, é atípica.

5.6 Índice de Desvios

A fim de avaliar as possíveis oportunidades de negócio apresentadas no índice Ibovespa, vamos propor uma análise por meio de um índice novo, o Índice de Desvios, que relaciona as variáveis volume médio de negociações e lucro por unidade monetária investida médio, por meio de seus produtos para cada ativo. A equação (70) demonstra o cálculo do Índice de Desvios:

$$I_d = \bar{l}_k \bar{v}_k, \quad (70)$$

onde I_d é o Índice de Desvios. A Tabela (27) mostra o volume e o lucro para as ações estudadas do índice.

Tabela 27 – Lucro por Unidade Monetária Investida Médio por Ativo e Volume Médio de Negociações por Ativo. Na coluna mais à direita são apresentados os valores dos Índices de Desvios de cada ativo.

Ativo	Lucro	Volume	Índice
ITUB4	3.82e-04	134245	51,3
BBDC4	4.37e-04	125563	54,9
ABEV3	2.52e-04	142350	35,9
PETR4	5.55e-04	462817	257,0
PETR3	5.658e-04	100468	56,7

Continua na próxima página

Tabela 27 – Continuação da tabela

Ativo	Lucro	Volume	Índice
VALE5	6.37e-04	257512	164,0
VALE3	6.05e-04	81772	49,5
BRFS3	4.45e-04	37747	16,8
BBAS3	5.70e-04	82465	47,0
ITSA4	3.75e-04	180073	67,4
BVMF3	5.27e-04	121022	63,8
UGPA3	3.08e-04	15381	4,73
CIEL3	4.26e-04	81986	34,9
BBSE3	3.89e-04	45640	17,7
KROT3	5.73e-04	115017	65,9
VIVT4	3.06e-04	19559	5,99
JBSS3	8.49e-04	164350	140,0
BBDC3	4.61e-04	17309	7,98
LREN3	4.82e-04	33526	16,2
CCRO3	4.71e-04	66385	31,3
RADL3	3.19e-04	14528	4,63
EMBR3	3.99e-04	30891	12,3
SANB11	5.07e-04	19361	9,82
EQTL3	3.09e-04	13295	4,11
HYPE3	3.93e-04	30536	12,0
SBSP3	5.54e-04	20083	11,1
GGBR4	6.75e-04	114904	77,6
BRKM5	5.50e-04	17595	9,68
LAME4	5.20e-04	61613	32,0
WEGE3	4.91e-04	21626	10,6
PCAR4	4.45e-04	9972	4,44
CPFE3	-1.18e-05	15912	-18,8
KLBN11	3.94e-04	26923	10,6
FIBR3	5.04e-04	20267	10,2
EGIE3	4.55e-04	9763	4,44
BRML3	5.51e-04	64138	35,4
CSNA3	8.50e-04	74982	63,8
CMIG4	8.79e-04	90042	79,2
TIMP3	4.93e-04	37297	18,4
ELET3	8.18e-04	26255	21,5
CSAN3	4.97e-04	13587	6,75

Continua na próxima página

Tabela 27 – Continuação da tabela

Ativo	Lucro	Volume	Índice
SUZB5	5.48e-04	45896	25,1
RENT3	4.60e-04	15759	7,25
ESTC3	7.28e-04	32847	23,9
MULT3	3.95e-04	8872	3,51
RAIL3	7.63e-04	94563	72,2
QUAL3	6.37e-04	24338	15,5
NATU3	4.99e-04	19257	9,60
BRAP4	7.74e-04	30589	23,7
ENBR3	4.70e-04	19238	9,05
MRVE3	5.04e-04	40246	20,3
GOAU4	8.81e-04	181243	160,0
CPLE6	5.61e-04	8159	4,58
SMLE3	5.86e-04	7995	4,69
CYRE3	6.91e-04	23917	16,5
MRFG3	6.70e-04	26674	18,7
USIM5	8.46e-04	178824	151,0
ECOR3	6.04e-04	34536	20,9

A fim de identificar as melhores ações para se investir, bastaria selecionar quaisquer ativos com índices cujo valor se destaca, sendo muito acima dos outros. Vale ressaltar que esse índice não deveria ser usado como uma ferramenta inquestionável e deve ser confrontado com outras formas de se identificar tais oportunidades, de forma a tomar decisões mais acertadas com base em múltiplos aspectos e interpretações do comportamento de um ativo.

Capítulo 6

Conclusão

O trabalho teve como objetivo investigar a eficiência dos mercados brasileiro e estadunidense por meio de um modelo fundamentado em sistemas de equações diferenciais para previsão de tendências de preços, bem como pela análise de distribuições de retornos e da investigação de comportamento multifractal nas séries de preços. Com isso, buscamos uma melhor compreensão da dinâmica de preços do mercado financeiro, de forma a contribuir com o melhor entendimento da evolução dos mercados brasileiro e estadunidense rumo à eficiência, como se espera teoricamente.

Diversos autores defendem que séries de preços carregam informações (correlações) ao longo do tempo, tornando possível a identificação de tendências, potencialmente apontando para ineficiências no mercado. Pensando nisso, utilizamos como focos os mercados brasileiro e estadunidense para conduzir nossas investigações, tendo em vista comparar as características de um mercado emergente com as de um mercado desenvolvido. Seguindo nessa toada, começamos examinando estatísticas presentes nas séries de preços ou de retornos utilizando o expoente de Hurst como ferramenta para tal.

Nos expoentes de Hurst canônicos para B3 foram percebidos resultados majoritariamente acima de 0,5, denotando persistência, comportamento característico de mercados emergentes. Entretanto, para Dow Jones, também foram encontrados resultados majoritariamente acima de 0,5 para os expoentes de Hurst.

Na exploração das estatísticas das séries analisadas por meio do espectro de singularidade, encontramos, na média, maiores larguras de espectros para o índice Ibovespa, indicando um comportamento multifractal mais evidente no mercado brasileiro se comparado ao estadunidense. Essa maior multifractalidade está relacionada com a presença de correlações não lineares na série, costumeiramente associada com clusterização de volatilidade. A clusterização de volatilidade indica a presença de intervalos em que um grande movimento tende a ser sucedido por outro grande movimento. Em outras palavras, intervalos em que

se concentram movimentos com grandes valores absolutos em sequência.

Como esperado, o decaimento das distribuições cumulativas inversas de retorno demonstraram comportamento característico de caudas pesadas, decaindo em lei de potência. Os coeficientes de decaimento encontrados para B3 foram, na média, maiores do que os encontrados para Dow Jones, que se afastam mais do comportamento gaussiano. Assim, o mercado estadunidense, mais desenvolvido, segundo esse critério, para um maior distanciamento de modelos canônicos, o que é surpreendente.

De posse dos resultados obtidos na Seção (5.4), onde nos ocupamos da análise das acurácias por ativos para ambos os índices investigados, podemos notar o que já era esperado, as acurácias no mercado menos desenvolvido (B3) são consistentemente maiores do que no mercado bem consolidado. Quando tratamos das análises das correlações entre as diferentes estatísticas calculadas sobre as séries, chegamos ao resultado de que a correlação encontrada para retorno e acurácia, por meio de um teste de Pearson, para o índice Ibovespa, parece, à primeira vista, apontar para uma maior eficiência do mercado brasileiro: para Ibovespa, o aumento de acurácia leva a uma maior queda nos retornos quando comparamos com Dow Jones, ou seja, o incremento no lucro potencial oriundo da elevação da acurácia é mais fortemente contrabalanceado pela queda no retorno médio. Esse resultado, num primeiro momento inesperado, pode ser entendido observando-se que as menores acurácias de Dow Jones o aproximam de um preditor completamente aleatório, prejudicando a capacidade preditiva do modelo e, conseqüentemente, a capacidade de analisar as correlações entre as séries.

Concentrado a atenção nas correlações encontradas para os expoentes de Hurst generalizados e as acurácias, para cada um dos índices, encontramos correlações mais fortes para os expoentes $h(q)$ com valores de q negativos. Essa constatação nos indica um aspecto interessante sobre o modelo utilizado, que poderia ser investigado em trabalhos futuros que busquem encontrar oportunidades de arbitragem. Além disso, podemos atentar ao expoente canônico, $q = 2$, para perceber um fato importante: à medida que $h(q)$ cresce, a acurácia diminui, ou seja, o modelo utilizado funciona melhor para séries anti persistentes. Em seguida, correlacionando o expoente de Hurst com o retorno médio dos índices, encontramos apenas resultados de fraca correlação e sem significância estatística, indicando que as duas variáveis muito pouco ou em nada se relacionam. Por último, nas correlações buscadas por ativo dos índices, a análise da largura do espectro de singularidade não resultou em coeficientes estatisticamente relevantes em sua comparação com acurácia e com retorno médio.

Abordando o problema por outro ângulo, focamos em analisá-lo não apenas por ativo compondo o índice, mas sim por ativo e faixa de horário de negociação. Utilizando os intervalos de 1 hora iniciados às 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17 horas, calculamos as

acurácias e os retornos médios de cada um dos ativos de ambos os índices. Para Ibovespa, foi fácil observar que, geralmente, as ações que apresentam maiores acurácias num dado horário apresentam menores retornos no mesmo horário. Esse resultado está de acordo com a HME, visto que indica uma compensação entre acurácia e tamanho médio do retorno no que se refere às possibilidades de arbitragem. Entretanto, análises mais profundas, em trabalhos futuros, devem ser conduzidas de forma a melhor embasar conclusões dessa sorte. Para além disso, notamos que as correlações entre acurácias e retornos médios por horário no índice Dow Jones não são estatisticamente significativas. Voltando à B3, além de serem significativas, podem nos dizer os horários em que há maior afastamento ou aproximação da eficiência de mercado, sendo o horário das 13 horas o mais eficiente, apontando para uma menor possibilidade de arbitragem, enquanto o horário de 17 horas é o menos eficiente, apontando para uma maior possibilidade de arbitragem.

Buscando analisar com maior profundidade as oportunidades de investimentos, partimos para uma análise sobre lucro, liquidez e acurácia. Como proxy para liquidez, utilizamos o volume de negociações. Em três experimentos distintos, correlacionamos lucros com volumes de negociações e acurácias com volumes de negociações. Em nossas investigações, concluímos que os experimentos conduzidos para as acurácias não forneceram resultados estatisticamente significativos. Os resultados para os lucros, por outro lado, evidenciam desvios da HME, para o experimento 1, conduzido agregando-se, para cada ativo, os dados de todas as faixas de horário, e para o experimento 2, conduzido com dados de cada ativo e horário sem agregamento. Essa constatação surge da correlação positiva encontrada entre lucro teórico e volume de negociações, indicando que o lucro aumenta com o aumento do volume de negociações. Isso acontece de forma que o lucro teórico (sem *slippage*) não é contrabalanceado por uma queda na liquidez que leve a perdas. Por último, o experimento 3, em que correlações são calculadas considerando-se os dados de cada horário, separadamente, apresenta relevância estatística apenas para os horários de 10 e 16 horas, onde podemos fazer as mesmas afirmações que fizemos para os experimentos 1 e 2.

Em um último momento, propomos o Índice de Desvios, que leva em conta o lucro teórico por unidade monetária investida médio por ativo e o volume de negociações por ativo. Esse índice surge da ideia de combinar os indicadores de lucro e volume envolvidos, sendo o último um proxy da liquidez, de forma a gerar um índice que possa auxiliar na decisão (mas nunca ser utilizado como um fator definitivo) de qual ação investir em determinado mercado. Nessa investigação, baseando-se puramente no Índice de Desvios, encontramos que as melhores ações para se investir no mercado brasileiro buscando oportunidades de arbitragem são PETR4, VALE5, GOAU4 e USIM5. É importante lembrar o leitor que aqui não se está fazendo recomendação de investimento. O índice não deve ser utilizado cegamente e é apenas uma busca por desvios da HME, trabalhando em regimes ideais.

Durante a realização do trabalho, buscamos examinar estatísticas encontradas em séries de preços e de retornos de ações que se afastam de comportamentos aproximados de um caminhante aleatório dos mercados brasileiro e estadunidense. Utilizando variadas ferramentas, nossa análise, que tinha como objetivo a identificação de desvios da HME foi bem sucedida, trazendo, em diversas conclusões de suas experimentações, indicativos de possibilidade de arbitragem. A proposição do Índice de Desvios segue nessa linha de pensamento, como uma possível ferramenta de identificação de oportunidades de investimento.

Muitas variáveis se emaranham em qualquer tentativa de identificação formal de oportunidades de investimento. Sendo formado por agentes com comportamentos quase que aleatórios, dotados de motivações pessoais, políticas e sociais, o estudo do comportamento de mercados financeiros, mais especificamente da Hipótese de Mercado Eficiente, se mostra uma tarefa complexa. A ampliação do nosso entendimento das dinâmicas que compõem o mercado financeiro se apresenta como uma tarefa instigante, passível de incontáveis opções para melhoria, tanto em seus métodos quanto em suas interpretações.

Referências

- AL-KHAZALI, O. M.; PYUN, C. S.; KIM, D. Are exchange rate movements predictable in asia-pacific markets? evidence of random walk and martingale difference processes. **International Review of Economics Finance**, Elsevier, v. 21, n. 1, p. 221–231, 2012. Citado na página 3.
- ALONSO-RIVERA, A.; CRUZ-AKÉ, S.; VENEGAS-MARTÍNEZ, F. Impact of monetary policy on financial markets efficiency and speculative bubbles: A non-linear entropy-based approach. **MPRA (56127)**, 2014. Citado na página 3.
- ATSALAKIS, G.; VALAVANIS, K. **Surveying stock market forecasting techniques–Part I, “Conventional methods in Computation Optimization in Economics and Finance Research Compendium”**. [S.l.]: Nova Science Publishers, New York, 2013. Citado na página 4.
- ATSALAKIS, G. S.; VALAVANIS, K. P. Surveying stock market forecasting techniques – part ii: Soft computing methods. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 36, p. 5932–5941, 2009. Citado na página 4.
- BARKOULAS, J. T.; BAUM, C. F. Long-term dependence in stock returns. **Economics Letters**, Elsevier, v. 53, n. 3, p. 253–259, 1996. Citado na página 3.
- BELAIRE-FRANCH, J.; OPONG, K. K. Testing for random walk in euro exchange rates using the subsampling approach. **Applied Economics Letters**, Taylor Francis, v. 17, n. 12, p. 1145–1151, 2010. Citado na página 3.
- BMFBOVESPA. **Metodologia do índice Bovespa**. [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 12.
- BMFBOVESPA. **Negociação- Segmento BMFBOVESPA**. [S.l.: s.n.], 2020. Citado na página 12.
- BORDO, M. D.; LANDON-LANE, J. **Does expansionary monetary policy cause asset price booms; some historical and empirical evidence**. [S.l.], 2013. Citado na página 3.
- BOTTA, F. et al. Quantifying stock return distributions in financial markets. **PLOS ONE**, American Physical Society, v. 10, p. 1–10, 2015. Citado na página 11.
- BRUNNERMEIER, M. K. Information leakage and market efficiency. **The Review of Financial Studies**, Oxford Academic, v. 18, p. 417–457, 2005. Citado na página 3.
- BURY, T. Predicting trend reversals using market instantaneous state. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 404, p. 79–91, 2014. Citado na página 4.
- CAGINALP, G.; DESANTIS, M. A paradigm for quantitative behavioral finance. **American Behavioral Scientist**, Sage Publications, v. 55, n. 8, p. 1014–1034, 2011. Citado na página 3.

CAJUEIRO, D. O.; TABAK, B. M. The hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 336, n. 3, p. 521–537, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 3, 9, 10, 35 e 50.

CARBONE, A.; CASTELLI, G.; STANLEY, H. E. Time-dependent hurst exponent in financial time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 344, n. 1-2, p. 267–271, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

CHARLES, A.; DARNÉ, O.; KIM, J. H. Exchange-rate return predictability and the adaptive markets hypothesis: Evidence from major foreign exchange rates. **Journal of International Money and Finance**, Elsevier, v. 31, n. 6, p. 1607–1626, 2012. Citado na página 3.

CHEN, P. wen; HUANG, H. ching; SU, Y. chern. The central bank in market efficiency: The case of taiwan. **Pacific-Basin Finance Journal**, Elsevier, v. 29, p. 239–260, 2014. Citado na página 3.

CHORDIA, T.; ROLL, R.; SUBRAHMANYAM, A. Liquidity and market efficiency. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 87, n. 2, p. 249–268, 2008. Citado na página 3.

CHOUDHRY, T.; JAYASEKERA, R. Comparison of efficiency characteristics between the banking sectors of us and uk during the global financial crisis of 2007–2011. **International Review of Financial Analysis**, Elsevier, v. 25, p. 106–116, 2012. Citado na página 3.

CHOUDHRY, T.; JAYASEKERA, R. Market efficiency during the global financial crisis: Empirical evidence from european banks. **Journal of International Money and Finance**, Elsevier, v. 49, p. 299–318, 2014. Citado na página 3.

CHUNG, D.; HRAZDIL, K. Liquidity and market efficiency: A large sample study. **Journal of Banking Finance**, Elsevier, v. 34, p. 2346–2357, 2010. Citado na página 3.

CURME, C.; STANLEY, H. E.; VODENSKA, I. Coupled network approach to predictability of financial market returns and news sentiments. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, World Scientific, v. 18, n. 7, p. 1550043, 2015. Citado na página 3.

DROZDZ, S. et al. Stock market return distributions: From past to present. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 383, p. 59–64, 2007. Citado na página 11.

FEDER. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988. Citado na página 20.

FONSECA, C. L. G. et al. Is the choice of the candlestick dimension relevant in econophysics? **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 582, p. 126233, 2021. Citado 6 vezes nas páginas 4, 6, 8, 23, 24 e 49.

GARCIA, M. M. et al. Forecast model for financial time series: An approach based on harmonic oscillators. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 549, p. 124365, 2020. Citado na página 8.

GOPIKRISHNAN, P. et al. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. **Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics**, American Physical Society, v. 60, p. 5305, 1999. Citado na página 10.

GRECH, D.; MAZUR, Z. Can one make any crash prediction in finance using the local hurst exponent idea? **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 336, n. 1, p. 133–145, 2004. Citado na página 3.

HEALY, P. M.; PALEPU, K. G. Information asymmetry, corporate disclosure, and the capital markets: A review of the empirical disclosure literature. **Journal of Accounting and Economics**, Elsevier, v. 31, p. 405–440, 2001. Citado na página 3.

KANTELHARDT, J. W. et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 316, n. 1, p. 87–114, 2002. Citado na página 17.

KATUSIIME, L.; SHAMSUDDIN, A.; AGBOLA, F. W. Foreign exchange market efficiency and profitability of trading rules: Evidence from a developing country. **International Review of Economics Finance**, Elsevier, v. 35, p. 315–332, 2015. Citado na página 3.

LAZAR, D.; TODEA; FILIP. Martingale difference hypothesis and financial crisis: ~ empirical evidence from european emerging foreign exchange markets. **Economic Systems**, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 338–350, 2012. Citado na página 3.

LIM, K.-P.; BROOKS, R. D.; KIM, J. H. Financial crisis and stock market efficiency: Empirical evidence from asian countries. **International Review of Financial Analysis**, Elsevier, v. 17, p. 571–591, 2008. Citado na página 3.

LIU, S. Transaction costs and market efficiency: Evidence from commission deregulation. **The Quarterly Review of Economics and Finance**, Elsevier, v. 50, p. 352–360, 2010. Citado na página 3.

MALKIEL, B. G.; FAMA, E. F. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. **The journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970. Citado na página 3.

MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. **An Introduction to Econophysics**: Correlations and complexity in finance. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 3, 14, 15 e 16.

MOAT, H. S. et al. Quantifying wikipedia usage patterns before stock market moves. **Scientific Reports**, Nature, v. 3, p. 1801, 2013. Citado na página 4.

NTIM et al., C. G. On the efficiency of the global gold markets. **International Review of Financial Analysis**, Elsevier, v. 41, p. 218–236, 2015. Citado na página 3.

OLIVEIRA, F. A.; NOBRE, C. N.; ZARATE, L. E. Applying artificial neural networks to prediction of stock price and improvement of the directional prediction index—case study of petr4, petrobras, brazil. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 40, n. 18, p. 7596–7606, 2013. Citado na página 9.

PASQUARIELLO, P.; ZAFEIRIDOU, C. Political uncertainty and financial market quality. **Ross School of Business**, SSRN, 2014. Citado na página 3.

PEITGEN, H.-O.; JÜRGENS, H.; SAUPE, D. **Chaos and Fractals**. New York: Springer, 1992. Citado na página 20.

PODOBNIK et al., B. Fractionally integrated process for transition economics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 362, n. 2, p. 465–470, 2006. Citado na página 3.

PREIS, T.; MOAT, H. S.; STANLEY, H. E. Quantifying trading behavior in financial markets using google trends. **Scientific Reports**, Nature, v. 3, p. 1684, 2013. Citado na página 4.

RAFFERTY, M.; TOMLJANOVICH, M. Central bank transparency and market efficiency: An econometric analysis. **Journal of Economics and Finance**, Springer Link, v. 26, p. 150–161, 2002. Citado na página 3.

RECHENTHIN, M.; STREET, W. N. Using conditional probability to identify trends in intra-day high-frequency equity pricing. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 392, n. 24, p. 6169–6188, 2013. Citado na página 9.

RESENDE, C. C. de. **Modelo Matematico-Computacional para Previsão de Tendência de Preços**: Abordagem com multiplos ativos buscando oportunidades em desvios da hipotese de mercado eficiente. Fevereiro 2021. 122 f. Tese (Doutorado em Modelagem Matematica e Computacional) — Departamento de Pos-Graduação em Modelagem Matematica e Computacional, Belo Horizonte, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 4, 8 e 49.

RESENDE et al., C. C. Investigating market efficiency through a forecasting model based on differential equations. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 474, n. C, p. 199–212, 2017. Citado 6 vezes nas páginas 3, 4, 6, 8, 23 e 24.

ROSS, S. A. Information and volatility: The no-arbitrage martingale approach to timing and resolution irrelevancy. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 44, p. 1–17, 1989. Citado na página 3.

SAMUELSON, P. A. **Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly**. S.I.: s.n., 1965. 41-45 p. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 13.

SOLL, J. **Free Market: The History of an Idea**. New York: Basic Books, 2022. Citado na página 1.

SORNETTE, D. **Why Stock Markets Crash**: Critical events in complex financial systems. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 2, 8 e 15.

ZUNINO et al., L. Inefficiency in latin-american market indices. **The European Physical Journal B**, Springer, v. 60, n. 1, p. 111–121, 2007. Citado na página 3.