



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE \mathcal{H}_∞ ROBUSTO DISCRETO
BASEADO EM FORMULAÇÕES LMI E
OTIMIZAÇÃO EVOLUTIVA

Pauliana Rufino de Almeida Lima Oliveira

Belo Horizonte
Setembro de 2023



CONTROLE \mathcal{H}_∞ ROBUSTO DISCRETO BASEADO EM FORMULAÇÕES LMI E OTIMIZAÇÃO EVOLUTIVA

Pauliana Rufino de Almeida Lima Oliveira

Texto da Dissertação de Mestrado submetido à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Modelagem e Controle de Sistemas

Linha de Pesquisa: Sistemas de Controle

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves

Belo Horizonte
Setembro de 2023

O48c Oliveira, Pauliana Rufino de Almeida Lima
Controle \mathcal{H}^∞ robusto discreto baseado em formulações LMI e
otimizaçãoevolutiva / Pauliana Rufino de Almeida Lima Oliveira. – 2023.
85 f.: il., gráfs, tabs.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica em associação ampla entre a UFSJ e o CEFET-MG.
Orientador: Eduardo Nunes Gonçalves.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas
Gerais.

1. Teoria de controle e sistemas – Teses. 2. Desigualdades matriciais – Teses.
3. Sistemas de controle por realimentação – Teses. 4. Controle robusto – Teses.
5. Sistemas de controle linear – Teses. I. Gonçalves, Eduardo Nunes. II. Centro
Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Universidade Federal de
São João del-Rei. IV. Título.

CDD 621.317



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA - NG



ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO Nº 18/2023 - PPGEL (11.52.08)

Nº do Protocolo: 23062.048483/2023-07

Belo Horizonte-MG, 25 de setembro de 2023.

Pauliana Rufino de Almeida Lima Oliveira

“Controle H robusto discreto baseado em formulações LMI e otimização evolutiva.”

Dissertação nº 305 apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Associação Ampla entre a Universidade Federal de São João Del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais em 15 de Setembro de 2023 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves (Orientador)

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda

Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Prof^a. Dra. Cecília de Freitas Moraes

(Assinado digitalmente em 26/09/2023 09:36)

EDUARDO NUNES GONCALVES

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR

DEE (11.56.08)

Matrícula: ###15#7

(Assinado digitalmente em 25/09/2023 16:49)

CECÍLIA DE FREITAS MORAIS

ASSINANTE EXTERNO

CPF: ###.###.491-##

(Assinado digitalmente em 26/09/2023 14:39)

MARCIO J LACERDA

ASSINANTE EXTERNO

CPF: ###.###.186-##

*Dedico este trabalho aos meus pais Edna
Adriana e Paulo Roberto.*

Agradecimentos

Com certeza o percurso caminhado até aqui não foi fácil, exigiu bastante esforço, paciência, dedicação, persistência e muita resiliência para cruzar a linha de chegada. Mas esta conquista só foi possível, porque contei com o apoio de pessoas extraordinárias nos quais foram extremamente essenciais para atingir o êxito.

Primeiramente agradeço à Deus, por ser o autor da minha história, por permitir o início e fim desta jornada, por não ter deixado desistir em meio as dificuldades e adversidades encontradas, e por sempre me mostrar o quanto sou capaz de enfrentar as guerras e vencer as batalhas.

Aos meus pais Paulo Roberto e Edna Adriana por suas existências, por me fazer crescer e reconhecer o maior esforço que tiveram para criar suas duas filhas da melhor forma possível e conseguir nos formar em faculdades federais mesmo não tendo completado o ensino regular, por ser o meu maior exemplo de vida e inspiração, por aprender que devemos dar valor nas pequenas coisas e por me fazer enxergar que jamais devemos desistir daquilo que almejamos.

A minha irmã Franciely por sempre me apoiar e acompanhar em todos os momentos da vida e ao meu esposo Alam pelo carinho, compreensão e incentivo constante.

Minha gratidão em especial ao professor e orientador Dr. Eduardo Nunes Gonçalves, pela orientação, competência, profissionalismo, paciência e disponibilidade em estar sempre ajudando até mesmo em período de férias, não só no projeto de dissertação, como em outras disciplinas, artigos, publicações, estágio, e demais conselhos e auxílio de ideias. Meus sinceros agradecimentos pela grande contribuição, sem sua ajuda não teria chegado até aqui.

Ao Cefet-MG, funcionários, a PPGEL, pelo privilégio de fazer parte desta instituição, pelas oportunidades, receptividade e pelo apoio financeiro.

Aos membros da banca examinadora por ter aceitado o convite, por ter contribuído e agregado mais conhecimentos e experiências. Por fim, agradeço a todos que contribuíram e estiveram envolvidos diretamente ou indiretamente.

“Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes for necessário. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista. Se você quer chegar a onde a maioria não chega, faça o que a maioria não faz.”

Bill Gates

Resumo

Desigualdades matriciais lineares (LMI) são uma poderosa ferramenta na área de análise e síntese de sistemas de controle robusto. Este trabalho apresenta novas formulações baseadas em desigualdades matriciais lineares para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados e por realimentação estática de saída para sistemas lineares invariantes no tempo discretos. O controle robusto por realimentação de estados geralmente é mais utilizado pelo fato do seu controlador ser mais eficiente que o controle por realimentação de saída, sendo mais fácil de obter formulações LMI para síntese. Porém, nem sempre é possível ter todas as variáveis de estados disponíveis para implementação dessa ação de controle. A síntese de controle robusto por realimentação estática ou dinâmica de saída é mais complicada de ser formulada como problemas de otimização convexos baseados em desigualdades matriciais lineares. Uma estratégia para obter formulações para síntese de controladores por realimentação estática de saída é transformar uma formulação de síntese de controle por realimentação de estados por meio de uma mudança de variáveis. Essa mudança de variáveis requer a escolha de uma matriz. A escolha desta matriz afeta o desempenho do controlador resultante ou até mesmo a existência de uma solução factível para o problema. Desse modo é importante ter um método para determinação dessa matriz que resulte no controlador com desempenho otimizado. As formulações propostas para síntese de controle robusto por realimentação de estados incluem uma variável matricial adicional, que permite que a função de Lyapunov seja dependente de parâmetros, além de dois parâmetros escalares que devem ser escolhidos pelo projetista. É proposto neste trabalho aplicar otimização evolucionária para determinação dos valores otimizados destes dois parâmetros, no caso de realimentação de estados, e desses dois parâmetros mais a matriz adicional da mudança de variáveis, no caso de realimentação estática de saída, para obter o sistema de controle \mathcal{H}_∞ robusto ótimo. As caracterizações propostas englobam formulações existentes na literatura para valores específicos dos dois parâmetros escalares. São apresentados estudos de caso para demonstrar a possibilidade de obter sistemas de controle com melhor desempenho utilizando as formulações propostas.

Palavras-chave: Controle \mathcal{H}_∞ robusto, desigualdade matricial linear, controle por

realimentação de estados, controle por realimentação estática de saída.

Abstract

Linear matrix inequalities (LMI) are a powerful tool in the field of analysis and synthesis of robust control systems. This work presents new formulations based on linear matrix inequalities for robust \mathcal{H}_∞ control synthesis by state-feedback and static output-feedback for discrete time-invariant linear systems. State-feedback robust control is usually more widely applied because its controller is more efficient than the output-feedback controller and it is easier to obtain LMI formulations for the synthesis. However, it is not always possible to have all the state variables available for implementation of this control action. The synthesis of robust control by static output-feedback or dynamic output-feedback is more complicated to be formulated as convex optimization problems based on linear matrix inequalities. One strategy for obtaining formulations for static output-feedback control synthesis is to transform a state-feedback control synthesis formulation through a change of variables. This change of variables requires the choice of a matrix. The choice of this matrix affects the performance of the resulting controller or even the existence of a feasible solution to the problem. The proposed formulations for robust state-feedback control synthesis include an additional matrix variable, which allows the Lyapunov function to be parameter dependent, as well as two scalar parameters that must be chosen by the designer. This work proposes applying evolutionary optimization to determine the optimized values of these two parameters, in the case of state-feedback control, and of these two parameters plus the additional matrix of the variable change, in the case of static output-feedback control, to obtain the optimal robust \mathcal{H}_∞ control system. The proposed characterizations encompass existing formulations in the literature for specific values of the two scalar parameters. Case studies are presented to demonstrate the possibility of achieving better control system performance by means of the proposed formulations.

Keywords: Robust \mathcal{H}_∞ control, linear matrix inequality, state-feedback control, output-feedback control.

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Valores máximos de ρ para o qual é obtida uma solução com $\sigma > -10^{-12}$ para as diferentes formulações LMI para o estudo de caso 1.....	44
Tabela 2.2 – Comparação entre os custos garantidos \mathcal{H}_∞ das formulações LMI para o estudo de caso 1 com $k = 1,3448$	45
Tabela 2.3 – Valores máximos de κ para o qual é obtida uma solução com $\sigma > -10^{-12}$ para as diferentes formulações LMI para o estudo de caso 2	47
Tabela 2.4 – Comparação entre os custos garantidos \mathcal{H}_∞ das formulações LMI para o estudo de caso 2 com $k = 1,2480$	48
Tabela 3.1 – Comparação entre os custos garantidos \mathcal{H}_∞ dos métodos de síntese para o estudo de caso do controle de nível do sistema de Quatro Tanques.....	64
Tabela 3.2– Comparação entre os custos garantidos \mathcal{H}_∞ das formulações LMI para o estudo de caso da destilaria	73

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Diagrama de blocos do sistema de controle generalizado.....	28
Figura 3.1 – Representação do modelo do sistema de Quatro Tanques (Johansson, 2000)	62
Figura 3.2 – Respostas temporais dos níveis nos tanques inferiores, para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 3 (Agulhari et al.,2010)	66
Figura 3.3 – Respostas temporais das tensões aplicadas nas bombas para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 3 (Agulhari et al., 2010)	66
Figura 3.4 – – Respostas temporais dos níveis nos tanques inferiores, para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 4 (Chang et al., 2015).....	67
Figura 3.5 – Respostas temporais das tensões aplicadas nas bombas para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 4 (Chang et al., 2015).....	67
Figura 3.6 – – Respostas temporais dos níveis nos tanques inferiores, para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 2.9 proposto no trabalho.....	68
Figura 3.7 – Respostas temporais das tensões aplicadas nas bombas para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 2.9 proposto no trabalho.....	68
Figura 3.8– Respostas temporais dos níveis nos tanques inferiores, para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 4 (Chang et al., 2015) e o Teorema 2.9 no processo de Quatro Tanques	69
Figura 3.9– Respostas temporais das tensões aplicadas nas bombas em u_1 , para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 4 (Chang et al., 2015) e Teorema 2.9 proposto no processo de Quatro Tanques.....	70
Figura 3.10– Respostas temporais das tensões aplicadas nas bombas em u_2 , para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema (4 Chang et al., 2015) e Teorema 2.9 proposto no processo de Quatro Tanques.....	70
Figura 3.11 – Respostas temporais das variáveis manipuladas com o controlador obtido pelo Lema 8 (Chang et al., 2015), para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria	74
Figura 3.12 – – Respostas temporais das variáveis de processo com o controlador obtido pelo Lema 8 (Chang et al., 2015), para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria	75
Figura 3.13 – Respostas temporais das variáveis manipuladas com o controlador obtido	

pelo Teorema 2.9 proposto para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria 76

Figura 3.14 – Respostas temporais das variáveis de processo com o controlador obtido pelo Teorema 2.9 proposto, para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria ... 76

Figura 3.15 – Comparativo entre as respostas temporais das variáveis manipuladas com os controladores obtidos pelo Lema 8 (Chang et al., 2015) e pelo Teorema 2.9, para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria 77

Figura 3.16 – Comparativo entre as respostas temporais das variáveis de processo com os controladores obtidos pelo Lema 8 (Chang et al., 2015) e pelo Teorema 2.9 proposto, para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria..... 77

Lista de Abreviações

Abreviação	Significado
BMI	Desigualdade Matricial Bilinear <i>Bilinear Matrix Inequality</i>
BRL	Lema Real Limitado <i>Bounded Real Lemma</i>
DE	Evolução Diferencial <i>Differential Evolution</i>
ILMI	Desigualdade Matricial Linear Iterativa <i>Iterative Linear Matrix Inequality</i>
ISE	Integral do Erro ao Quadrado <i>Integral of Squared Error</i>
LMI	Desigualdade Matricial Linear <i>Linear Matrix Inequality</i>
MIMO	Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas <i>Multiple-Input, Multiple-Output</i>
PID	Proporcional Integral Derivativo <i>Proportional Integral Derivative</i>
SISO	Única entrada, única saída <i>Single-input, single-output</i>
SEDUMI	<i>Self- Dual - Minimization</i>
SDP	Programação Semi-Definida <i>Semidefinite-Programming</i>

SDPT3 Programação Semidefinida Quadrática Linear
Semidefinite- Quadractic- Linear Programming

YALMIP Mais um interpretador LMI
Yet Another LMI Parser

ZOH Segurador de ordem zero
Zero-order hold

Lista de Símbolos

Símbolo	Significado
---------	-------------

α	Coeficiente da combinação convexa para modelo politópico.
T_{zw}	Função de transferência relacionando o vetor de entradas exógenas, w , com o vetor de saídas de desempenho, z .
μ	Variável de otimização para cálculo do custo garantido \mathcal{H}_∞ .
ξ	Parâmetro escalar de ajuste (Morais et al., 2013).
β_1 e β_2	Parâmetros escalares de ajuste das LMIs propostas.
Ω	Conjunto simplex unitário.
γ	Custo garantido \mathcal{H}_∞ .
σ	Resíduo que permite avaliar o atendimento das restrições LMI, capaz de atestar a factibilidade da solução.
l_2	Espaço dos sinais absolutamente somáveis ao quadrado.
\mathcal{H}_∞	Norma \mathcal{H}_∞ de sistemas.
\mathcal{H}_2	Norma \mathcal{H}_2 de sistemas.
γ_{cg}	Custo garantido calculado com determinada precisão.
N_g	Número de gerações.
Δ_{cg}	Variação percentual do custo garantido em relação a melhor solução obtida.
K	Controlador.

Sumário

1	Introdução	20
1.1	Contextualização e relevância	20
1.2	Objetivos	24
1.3	Organização do texto	25
2	Controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados.....	26
2.1	Introdução.....	26
2.2	Controle robusto por realimentação de estados	31
2.3	Novas formulações de cálculo de norma \mathcal{H}_∞	35
2.4	Novas formulações de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados.....	37
2.5	Novas formulações de síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados.....	38
2.6	Determinação dos parâmetros de ajuste das formulações LMI por otimização.....	39
2.7	Estudo de casos.....	41
2.7.1	Estudo de caso 1.....	42
2.7.2	Estudo de caso 2.....	44
2.8	Considerações finais.....	46
3	Realimentação estática de saída.....	48
3.1	Introdução.....	48
3.2	Determinação dos parâmetros de ajuste das formulações LMI por otimização.....	52
3.3	Estudo de casos.....	54
3.3.1	Estudo de caso 3- Destilaria.....	55
3.3.2	Estudo de caso 4- Quatro Tanques.....	66
3.4	Considerações finais.....	73
4	Conclusão	74

4.1	Conclusões gerais.....	74
4.2	Propostas de trabalhos futuros	75
4.3	Publicações associadas a este trabalho	75
	Apêndice A.....	77
	Referências Bibliográficas	83

1 Introdução

1.1 Contextualização e relevância

No projeto de sistemas de controle é importante considerar as incertezas do modelo do sistema, o que requer o uso dos métodos de análise e síntese da teoria de controle robusto. Na área de controle robusto, uma das possíveis formas para a representação de sistemas incertos é o uso de modelo politópico. Modelos politópicos são adequados para a utilização de formulações de análise e síntese baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*) (Boyd et al., 1994). As formulações LMI são problemas de programação semi-definida (SDP, do inglês *Semidefinite Programming*), uma importante ferramenta matemática em que a função objetivo é linear e as restrições são LMIs. Além disso, estas formulações podem ser implementadas por programas interpretadores, conhecidos como *parsers*, como por exemplo o YALMIP (do inglês *Yet Another LMI Parser*) (Lofberg, 2004). A função do *parser* é disponibilizar comandos básicos para implementação das formulações LMI e realizar a *interface* com os resolvidores de otimização linear, ou *solvers*, tais como os *solvers* gratuitos SeDuMi (*Self-Dual-Minimization*) (Sturm, 1999) ou SDPT3 (*Semidefinite-Linear-Quadratic-Programming*) (Toh et al., 1999).

Atualmente a maioria dos controladores são implementados em formato digital seja por microcontroladores, controladores lógicos programáveis ou controladores digitais *multi-loop*. Aplicar técnicas de síntese para sistemas contínuos no tempo com o objetivo de implementação na forma digital requer o uso de períodos de amostragem muito menores que o necessário. Desse modo, é importante desenvolver técnicas de síntese de controladores robustos para sistemas discretos no tempo que resultem em resultados melhores que os métodos já existentes.

Vários problemas da área de controle, começando pelo teorema de estabilidade de Lyapunov, passando pelas equações de Riccati, dos anos 60, e pelo controle \mathcal{H}_∞ , nos anos 80, podem ser colocados na forma de SDP (Boyd et al., 2004). Através da teoria de estabilidade de Lyapunov é possível obter formulações baseadas em LMI para análise robusta tanto de estabilidade quanto de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas em tempo contínuo e no tempo discreto. Ao se considerar as matrizes do sistema em malha-

fechada, em função das matrizes do controlador que se deseja calcular, nas formulações LMI de análise, aparece o produto das matrizes do controlador pela variável de Lyapunov resultando em uma desigualdade matricial bilinear (BMI, do inglês *Bilinear Matrix Inequality*). Por meio da mudança de variáveis linearizante proposta em Bernussou et al. (1989), é possível transformar formulações LMI de análise robusta em formulações LMI de síntese de controle robusto por realimentação de estados. As formulações LMI baseadas no conceito de estabilidade quadrática, em que é utilizado uma variável de Lyapunov constante para todo o domínio de incerteza, conduz a resultados conservadores, especialmente quando o sistema é invariante no tempo. Em De Oliveira et al. (1999), é apresentada uma nova formulação de análise de estabilidade robusta que inclui uma variável adicional. Uma das vantagens dessa formulação é que, quando aplicada para síntese, faz com que o cálculo do controlador passe a depender dessa variável adicional, ao invés da variável de Lyapunov, não requerendo que essa variável seja simétrica e definida positiva. Além disso, como o cálculo do controlador não depende da variável de Lyapunov, podem ser consideradas funções de Lyapunov dependente de parâmetros. Essa estratégia foi posteriormente estendida para síntese de controladores por realimentação de estados com desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , denominadas formulações estendidas (De Oliveira et al., 2002). Em De Oliveira et al. (2004) são apresentadas novas formulações LMI para o cálculo de custos garantidos \mathcal{H}_∞ baseadas em funções de Lyapunov dependente de parâmetros, menos conservadoras do que formulações já existentes até aquele momento. Em Pipeleers et al. (2009) é aplicado o lema da projeção para mostrar uma abordagem geral de como se obtêm as formulações estendidas estudadas até o momento em sistemas contínuos e sistemas discretos. Em Morais et al. (2013), é proposta uma nova formulação de síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados que inclui uma variável escalar adicional, que deve ser definida a *priori* pelo projetista, que inclui a formulação estendida proposta em De Oliveira et al. (2002) como caso particular. De acordo com a escolha desta variável escalar, é possível obter melhor desempenho do que a formulação estendida apresentada em De Oliveira et al. (2002). É necessária uma forma de determinação dessa variável escalar de modo a obter o controlador ótimo.

Na teoria de controle moderno, é mais atrativo projetar um controlador por realimentação de estados do que por realimentação de saída uma vez que existem várias

técnicas de síntese, como as mencionadas no parágrafo anterior, para atender a diferentes objetivos, e o controlador resultante pode ser mais eficiente do que o controlador por realimentação de saída uma vez que a ação de controle é baseada em uma maior quantidade de informações (estados). Entretanto, existem casos em que não se tem disponíveis todas as variáveis de estados para a realimentação, seja por inviabilidade técnica ou por questões de custo. Nesses casos, deve ser utilizado um controlador por realimentação de saída. Desse modo, é interessante desenvolver métodos de síntese de controle robusto por realimentação de saída, em especial o controle por realimentação estática de saída. Vale lembrar que outros problemas, tais como sintonia de controlador proporcional integral derivativo (PID, do inglês *Proportional Integral Derivative*) (Lim e Lee, 2008) ou síntese de controlador por realimentação dinâmica de saída de qualquer ordem (Gahinet e Apkarian, 1994), também podem ser obtidos através da síntese de controle por realimentação estática de saída. A simples mudança de variáveis linearizante, utilizada no caso da síntese de controladores por realimentação de estados, não pode ser aplicada para síntese por realimentação estática de saída. Existem diversos trabalhos que apresentam pesquisas sobre as várias formas de síntese de realimentação estática de saída como Syrmos et al. (1997) ou Sadabadi e Peaucelle (2016). Nesses trabalhos, são relacionadas diferentes formas de síntese de controladores por realimentação estática de saída. Uma delas é resolver o problema BMI por meio de um método de desigualdade matricial linear iterativa (ILMI, do inglês *Iterative Linear Matrix Inequality*). No método ILMI, os problemas não convexos são solucionados através de algoritmos iterativos baseados em dois passos, onde cada passo é um problema LMI. Porém, este método apresenta algumas dificuldades, como a obtenção de um valor inicial para iniciar as iterações, uma vez que, estes valores interferem na convergência, o que pode tornar o algoritmo muito lento. Em Mehdi et al. (2004) é proposta uma formulação LMI para síntese de controle robusto estabilizante que requer o cálculo prévio de um controlador por realimentação de estados. Baseado nessa ideia, formulações LMI de síntese de controle robusto por realimentação estática de saída com desempenho \mathcal{H}_∞ , que inclui um controlador por realimentação de estados, que pode ser fixo ou dependente de parâmetros, foram desenvolvidas para tratar tanto sistemas discretos (Agulhari et al., 2010) quanto sistemas contínuos (Agulhari et al., 2012). Nessas formulações, o controlador por

realimentação de estados, ou as matrizes utilizadas para seu cálculo, afetam o desempenho do controlador por realimentação estática de saída resultante. Desse modo, é necessário avaliar diferentes formas para obtenção desse controlador por realimentação de estados, que pode ser um controlador estabilizante somente ou com desempenho ótimo ou sub-ótimo (atende um determinado limitante do desempenho sem otimizá-lo). Em Chang et al. (2015), são propostas diferentes formulações LMI para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto com funções de Lyapunov dependente de parâmetros, sendo que algumas delas requer definir *a priori* uma ou duas variáveis escalares. A escolha dessas variáveis escalares afetam o desempenho do controlador resultante, sendo necessária uma forma de determinação das mesmas para obtenção do controlador ótimo.

Além dos métodos mencionados no parágrafo anterior para síntese de controle robusto por realimentação estática de saída, é possível aplicar uma mudança de variáveis para transformar formulações LMI para síntese de controle robusto por realimentação de estados em formulações LMI para síntese de controle robusto por realimentação estática de saída (Rubió-Massegú et al., 2013). A mudança de variáveis proposta em Rubió-Massegú et al. (2013) apresenta uma variável matricial adicional que deve ser fixada *a priori*. O valor dessa matriz afeta o desempenho do controlador resultante e até mesmo a factibilidade do problema. No trabalho de Rubió-Massegú et al. (2013), essa matriz é considerada nula. Em Palacios-Quiñonero et al. (2014) é apresentada uma forma de cálculo dessa matriz adicional baseada na matriz de Lyapunov utilizada para gerar um controlador por realimentação de estados. Nesses dois trabalhos, é considerada uma formulação quadrática para a formulação de síntese e a mudança de variável é baseada em uma variável matricial simétrica, definida positiva e bloco diagonal. Em Gopmandal e Ghosh (2021), essa mudança de variáveis é estendida para formulações com função de Lyapunov dependente de parâmetros e a mudança de variáveis é modificada para considerar uma matriz não simétrica, bloco triangular, ao invés da matriz bloco diagonal. Além disso, em Gopmandal e Ghosh (2021), é apresentada uma forma de otimizar a matriz adicional que deve ser escolhida *a priori*, usando a fórmula apresentada em Palacios-Quiñonero et al. (2014), para diferentes projetos do controlador sub-ótimo por realimentação de estados.

Considerando o que foi colocado nos parágrafos anteriores, é importante

desenvolver métodos de síntese de controle robusto para sistemas lineares invariantes no tempo, em tempo discreto, incertos, baseados em formulações LMI. A primeira contribuição desse trabalho é propor novas formulações LMI para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados que sejam mais eficientes que formulações LMI já existentes. Partindo do desenvolvimento apresentado em Morais et al. (2013), será considerado o lema da projeção e a inclusão de variáveis adicionais que devem ser fixadas a *priori*, o que melhora o desempenho do sistema de controle mas complica o procedimento de escolha dessas variáveis. A segunda contribuição é estender, para sistemas discretos, a mudança de variáveis proposta em Rubió-Massegú et al. (2013), aprimorada em Gopmandal e Ghosh (2021), que permite transformar as formulações LMI propostas para síntese de controle robusto por realimentação de estados em formulações LMI para síntese de controle robusto por realimentação estática de saída. A terceira contribuição é adaptar, para o caso de sistemas discretos, o método proposto em Gonçalves e Gonçalves (2021) para obter por otimização evolucionária os parâmetros de ajuste das formulações LMI e, no caso de realimentação estática de saída, a matriz existente na transformação de variáveis.

1.2 Objetivos

O objetivo principal dessa dissertação de mestrado é desenvolver novas técnicas de síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados e realimentação de saída, para sistema discretos no tempo, baseadas em formulações LMI e otimização evolucionária.

Os objetivos específicos que serão buscados ao longo do desenvolvimento do trabalho, são:

- Propor novas formulações LMI para controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados para sistemas discretos incertos, com parâmetros de ajuste escalares que devem ser fixados a *priori*, que inclui as formulações já existentes como casos particulares;
- Formular um problema de otimização para determinação desses parâmetros de ajuste escalares;

- Adotar uma técnica de otimização para determinar a mais adequada para solução do problema de otimização;
- Comparar o método proposto de síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados com outras técnicas existentes na literatura;
- Aplicar uma mudança de variáveis que permite transformar as formulações LMI para síntese de realimentação de estados desenvolvidas nesse trabalho em formulações LMI para síntese de realimentação estática de saída;
- Formular um problema de otimização para determinação conjunta dos parâmetros de ajuste escalares adicionais e da matriz adicional associada com a mudança de variáveis para o caso do controle por realimentação estática de saída;
- Comparar o método proposto de síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída com outras técnicas existentes na literatura.

1.3 Organização do texto

A seguir, é apresentada a organização da dissertação de mestrado descrevendo os conteúdos de cada capítulo.

No capítulo 2 são apresentadas novas formulações LMI de síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados para sistemas lineares invariantes no tempo discretos. É apresentado o problema de otimização para determinação dos parâmetros de ajuste das formulações LMI. São realizados estudos de caso para avaliar as formulações LMI propostas e a otimização dos parâmetros de ajuste.

No capítulo 3, as novas formulações LMI para controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados, apresentadas no capítulo anterior, são adaptadas para realimentação estática de saída. É reproduzida a técnica de mudança de variáveis utilizada. O problema de otimização é modificado para otimizar de forma conjunta os parâmetros de ajuste das formulações LMI e a matriz da mudança de variáveis. São realizados estudos de caso para comparar o método proposto de síntese com outros métodos existentes na literatura.

O capítulo 4 finaliza com as conclusões relativas aos estudos realizados, consolidando o que foi desenvolvido ao longo dos capítulos anteriores, e apresenta possibilidades de trabalhos futuros.

2 Realimentação de Estados

Este capítulo trata de formulações LMI para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados de sistemas lineares invariantes no tempo, em tempo discreto. Serão apresentadas algumas formulações existentes e serão propostas novas caracterizações LMI que incluem as existentes como casos particulares de acordo com a escolha de dois parâmetros escalares de ajuste. Será proposto um problema de otimização para a determinação ótima desses dois parâmetros de ajuste. A solução desse problema será realizada por um algoritmo de otimização evolucionária. Em seguida, serão apresentados estudos de casos para demonstrar a importância das novas caracterizações LMI e do uso de otimização para determinação de seus parâmetros de ajuste. A motivação para desenvolver essas formulações será a transformação das mesmas em novas LMI para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída, como será visto no próximo capítulo.

2.1 Introdução

A Figura 2.1 apresenta o diagrama de blocos de um sistema de controle generalizado. O bloco do sistema a ser controlado, P , possui dois tipos de entradas: o vetor de variáveis exógenas, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, que inclui os sinais de referência, perturbações e ruídos de medição, e o vetor de variáveis manipuladas, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, que são as entradas calculadas pelo controlador, o bloco K . Existem também dois tipos de saídas: o vetor de variáveis de desempenho ou controladas, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, que pode ser, por exemplo, o erro de rastreamento, e o vetor de variáveis medidas, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, que são utilizadas pelo controlador para calcular a ação de controle. Considerando sistemas lineares invariantes no tempo, em tempo discreto, o bloco P pode ser modelado no espaço de estados como:

$$P(z) = \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k) \\ z(k) = C_z x(k) + D_{zw} w(k) + D_{zu} u(k) \\ y(k) = C_y x(k) + D_{yw} w(k) + D_{yu} u(k) \end{cases}, \quad (2.1)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados no instante $t = kh$, para $k = 0, 1, 2, \dots$ e h o período de amostragem.

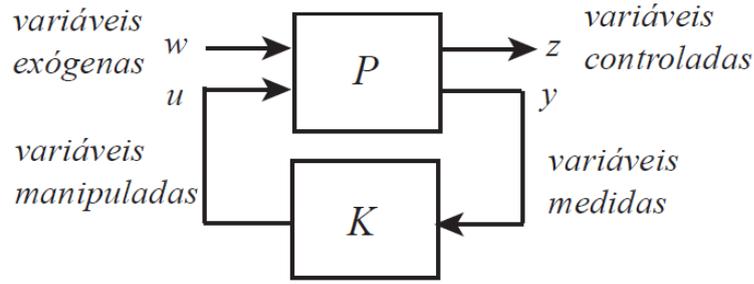


Figura 2.1 – Diagrama de blocos do sistema de controle generalizado.

O bloco do controlador, K , determina os valores das variáveis manipuladas a partir das variáveis medidas de acordo com a ação de controle. No caso do controle por realimentação de estados, $y(k) = x(k)$, e a ação de controle é dada por:

$$u(k) = Kx(k), \quad (2.2)$$

sendo K a matriz de ganhos de dimensão $n_u \times n$. O sistema em malha-fechada, $T_{zw}(z)$, que relaciona o vetor de variáveis exógenas com o vetor de variáveis de desempenho é dado por:

$$T_{zw}(z) = \begin{cases} x(k+1) = (A + B_u K)x(k) + B_w w(k) \\ z(k) = (C_z + D_{zu} K)x(k) + D_{zw} w(k) \end{cases}. \quad (2.3)$$

O objetivo de projeto do sistema de controle é determinar o controlador, K , que garante que o sistema em malha fechada seja estável e apresente um bom desempenho. O desempenho do sistema de controle pode ser determinado através de normas de sinais e de sistemas. A norma ℓ_2 de um vetor de sinais, ou desempenho (ISE, do inglês *Integral Squared Error*), relacionada com a energia, é dada por:

$$\|w(k)\|_2 = \sqrt{h \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)}, \quad (2.4)$$

sendo h o período de amostragem. Quando a norma ℓ_2 é limitada, isto é, sinais de energia limitada, o sinal é dito pertencer ao espaço de sinais absolutamente integráveis ao quadrado, ℓ_2 . A norma \mathcal{H}_∞ do sistema T_{zw} relaciona o pior caso de ganho entre a norma ℓ_2 do vetor de variáveis exógenas e a norma ℓ_2 do vetor de variáveis de desempenho:

$$\|T_{zw}\|_\infty = \max_{w \in \ell_2, w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}. \quad (2.5)$$

Minimizar $\|T_{zw}\|_\infty$ significa minimizar o efeito das variáveis exógenas, com energia limitada, sobre as variáveis de desempenho. No controle \mathcal{H}_∞ , o objetivo é projetar o controlador que minimiza a norma $\|T_{zw}(z)\|_\infty$.

Existem diferentes formas de se calcular a norma \mathcal{H}_∞ de um sistema. A norma \mathcal{H}_∞ é o valor máximo de ganho da resposta em frequência de sistemas (SISO, do inglês *single-input, single-output*) ou o máximo valor singular da resposta em frequência de sistemas (MIMO, do inglês *multiple-input, multiple-output*). A norma \mathcal{H}_∞ pode ser determinada por meio de problemas LMI. O lema a seguir apresenta a caracterização LMI básica de norma \mathcal{H}_∞ .

Lema 2.1 (Morais et al., 2013) (Desempenho \mathcal{H}_∞ de sistemas discreto no tempo). Considere o sistema $H(z) = \mathcal{C}(zI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, as seguintes condições são equivalentes:

(i) $\|H(z)\|_\infty \leq \gamma$ e o sistema é estável.

(ii) Existe matriz simétrica definida positiva, $\mathcal{W} = \mathcal{W}^T > 0$, $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^T \mathcal{W} \mathcal{A} - \mathcal{W} & \mathcal{A}^T \mathcal{W} \mathcal{B} & \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T \mathcal{W} \mathcal{A} & \mathcal{B}^T \mathcal{W} \mathcal{B} - \gamma^2 I & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.6)$$

(iii) Existe matriz simétrica definida positiva, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$, $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} \mathcal{P} \mathcal{A}^T - \mathcal{P} & \mathcal{A} \mathcal{P} \mathcal{C}^T & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{A}^T & \mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{C}^T - \gamma^2 I & \mathcal{D} \\ \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.7)$$

A equivalência entre as condições (i) e (ii) pode ser estabelecida através do Teorema 2 (Lema de Kalman-Yakubovich-Popov) apresentado em Rantzer (2016), fazendo a matriz livre:

$$M = \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

A equivalência entre as condições (ii) e (iii) é devido ao fato de que a norma do sistema $\mathcal{C}(zI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$ é igual à norma do sistema dual, $\mathcal{B}^T(zI - \mathcal{A}^T)^{-1}\mathcal{C}^T + \mathcal{D}^T$. Substituindo $\mu = \gamma^2$ nas Eqs. (2.7) e (2.8) e minimizando μ sujeito à restrição (2.6) ou

(2.7), obtém-se o valor da norma \mathcal{H}_∞ .

A vantagem da caracterização LMI para o cálculo da norma é que é possível transformar a LMI de análise em uma formulação LMI de síntese. Para isso será necessário o uso do complemento de Schur. Pelo complemento de Schur, as seguintes condições para análise de estabilidade assintótica de sistemas lineares discretos no tempo são equivalentes:

$$(i) \quad X > 0, \mathcal{A}X\mathcal{A}^T - X < 0.$$

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} X & \mathcal{A}X \\ X\mathcal{A}^T & X \end{bmatrix} < 0.$$

Por exemplo, aplicando o complemento de Schur na Eq. (2.7), trocando \mathcal{P} por X e substituindo as matrizes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} pelas matrizes em malha-fechada, dadas pela Eq. (2.3), resulta em:

$$\begin{bmatrix} -X & AX + B_u KX & B_w & 0 \\ XA^T + XK^T B_u^T & -X & 0 & XC_z^T + XK^T D_{zu}^T \\ B_w^T & 0 & -I & D_{zw}^T \\ 0 & C_z X + D_{zu} KX & D_{zw} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.9)$$

A formulação da Eq. (2.9) é uma BMI porque apresenta o produto de duas variáveis: KX . Uma simples mudança de variáveis transforma a formulação BMI da Eq. (2.9) em uma formulação LMI. Definindo $Y = KX$ (Bernussou et al., 1989), $\mu = \gamma^2$, e substituindo na Eq. (2.9), resulta na seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} -X & AX + B_u Y & B_w & 0 \\ XA^T + Y^T B_u^T & -X & 0 & XC_z^T + Y^T D_{zu}^T \\ B_w^T & 0 & -I & D_{zw}^T \\ 0 & C_z X + D_{zu} Y & D_{zw} & -\mu I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.10)$$

O problema de síntese de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados pode ser formulado como sendo:

$$\begin{cases} \min_{X,Y,\mu} \mu \\ \text{sujeito a: } X > 0 \text{ e Eq. (2.10).} \end{cases} \quad (2.11)$$

O controlador que minimiza $\|T_{zw}(z)\|_\infty$ é dado por $K = YX^{-1}$. Como $X > 0$, é garantida a existência da inversa de X . A desvantagem da formulação LMI da Eq. (2.10) é que a variável de Lyapunov, X , é utilizada no cálculo do controlador. No caso de sistemas

incertos, para a síntese de um controlador independente de parâmetros, a variável de Lyapunov também não pode depender de parâmetros, o que torna o projeto mais conservador. A solução para isso é introduzir uma variável adicional, que será usada no cálculo do controlador, permitindo o uso de variável de Lyapunov dependente de parâmetros. Além disso, a variável adicional, que substitui a variável de Lyapunov no cálculo do controlador, não precisa ser simétrica e definida positiva. Tais formulações são denominadas formulações estendidas (De Oliveira et al., 2002). Essas formulações são extensões da condição de estabilidade robusta apresentada em De Oliveira et al. (1999).

Considere o sistema linear invariante no tempo discreto incerto descrito pelo modelo politópico:

$$x(k + 1) = A(\alpha)x(k), \quad (2.12)$$

em que a matriz $A(\alpha)$ pertence ao politopo convexo definido como sendo:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i A_i, \quad (2.13)$$

sendo $A_i, i = 1, \dots, v$, os vértices do politopo, α_i o i -ésimo elemento do vetor α , e $\alpha \in \Omega$, em que Ω é o simplex unitário:

$$\Omega = \{ \alpha = [a_1 \dots a_v]^T \mid \alpha_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^v \alpha_i = 1 \}, \quad (2.14)$$

A formulação de análise de estabilidade robusta apresentada em De Oliveira et al. (1999), que introduz uma variável adicional G , é apresentada a seguir.

Teorema 2.1 (Teorema 2 De Oliveira et al. (1999)). O sistema incerto dado pela Eq. (2.12) é robustamente estável no domínio da incerteza definido pela Eq. (2.13) se existirem matrizes simétricas P_i e uma matriz G , tal que:

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i' G' \\ G A_i & G + G' - P_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, v. \quad (2.15)$$

A formulação (2.15) considera uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros:

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i P_i. \quad (2.16)$$

A condição de análise de estabilidade robusta proposta por De Oliveira et al. (1999) foi estendida para novas formulações LMI para o cálculo de norma \mathcal{H}_∞ e para síntese de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado apresentadas nos Teoremas 2.2 e

2.3.

Teorema 2.2 (Teorema 2 em De Oliveira et al. (2002)). Seja $H(z) = \mathcal{C}(zI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$, a desigualdade $\|H(z)\|_\infty^2 < \mu$ é válida se, e somente se, existir matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matriz simétrica $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{A}G & \mathcal{B} & 0 \\ G\mathcal{A}^T & G + G^T - P & 0 & G^T\mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T & 0 & -I & \mathcal{D}^T \\ 0 & \mathcal{C}G & \mathcal{D} & -\mu I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.17)$$

é factível.

Substituindo as matrizes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} pelas matrizes em malha-fechada dadas pela Eq. (2.3) na Eq. (2.17) e definindo $X = G$ e $Y = KX$, resulta no seguinte teorema.

Teorema 2.3 (Teorema 6 em De Oliveira et al. (2002)). Existe um controlador na forma da Eq. (2.2) tal que a desigualdade $\|T_{zw}(z)\|_\infty^2 < \mu$ é atendida se, e somente se, a LMI:

$$\begin{bmatrix} P & AX + B_u Y & B_w & 0 \\ X^T A^T + Y^T B_u^T & X + X^T - P & 0 & X^T C_z^T + Y^T D_{zu}^T \\ B_w^T & 0 & -I & D_{zw}^T \\ 0 & C_z X + D_{zu} Y & D_{zw} & -\mu I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.18)$$

é factível, sendo as matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ e a matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ as variáveis, com $K = YX^{-1}$. Como $X + X^T > P > 0 \rightarrow \exists X^{-1}$.

A vantagem da formulação LMI estendida da Eq. (2.18) é que a variável X não precisa ser simétrica e, no caso de sistemas incertos, como será visto na próxima seção, a variável de Lyapunov, P , pode ser dependente de parâmetros.

2.2 Controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados

Considere um sistema linear invariante no tempo incerto representado por um modelo politópico:

$$P(z, \alpha) = \begin{cases} x(k+1) = A(\alpha)x(k) + B_w(\alpha)w(k) + B_u(\alpha)u(k) \\ z(k) = C_z(\alpha)x(k) + D_{zw}(\alpha)w(k) + D_{zu}(\alpha)u(k), \\ v(k) = C_y(\alpha)x(k) + D_{yw}(\alpha)w(k) + D_{yu}(\alpha)u(k) \end{cases}, \quad (2.19)$$

sendo que as matrizes incertas são a combinação convexa dos vértices:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) & B_w(\alpha) & B_u(\alpha) \\ C_z(\alpha) & D_{zw}(\alpha) & D_{zu}(\alpha) \\ C_y(\alpha) & D_{yw}(\alpha) & D_{yu}(\alpha) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^v \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & B_{w,i} & B_{u,i} \\ C_{z,i} & D_{zw,i} & D_{zu,i} \\ C_{y,i} & D_{yw,i} & D_{yu,i} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

sendo v o número de vértices do politopo e $\alpha \in \mathbb{R}^v \in \Omega$.

A formulação LMI dada pela Eq. (2.10) para o sistema incerto pode ser escrita como:

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} -X(\alpha) & * & * & * \\ X(\alpha)A^T(\alpha) + Y^T(\alpha)B_u^T(\alpha) & -X(\alpha) & * & * \\ B_w^T(\alpha) & 0 & -I & * \\ 0 & C_z(\alpha)X(\alpha) + D_{zu}(\alpha)Y(\alpha) & D_{zw}(\alpha) & -\mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.21)$$

sendo que os termos * são os termos que podem ser derivados por simetria.

Considerando a variável de Lyapunov não sendo dependente de parâmetros, na forma:

$$X(\alpha) = X \rightarrow Y(\alpha) = KX(\alpha) = KX = Y, \quad (2.22)$$

então a condição Eq. (2.20) pode ser substituída pelo conjunto de condições:

$$M_i = \begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ XA_i^T + Y^T B_{u,i}^T & -X & * & * \\ B_{w,i}^T & 0 & -I & * \\ 0 & C_{z,i}X + D_{zu,i}Y & D_{zw,i} & -\mu I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, v. \quad (2.23)$$

Como

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i M_i, \quad (2.24)$$

então, se $M_i > 0$ e $\alpha_i \geq 0$, isso implica que $M(\alpha) > 0$.

Se o conjunto de LMIs dado pela Eq. (2.23) for atendido, o sistema de controle é quadraticamente estável com o desempenho garantido para sistemas variantes no tempo. No caso de sistemas lineares invariantes no tempo, usar variável de Lyapunov independente de parâmetros passa a ser uma exigência conservadora. A formulação LMI dada pela Eq. (2.18) para o sistema incerto pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & * & * & * \\ X^T A^T(\alpha) + Y^T B_u^T(\alpha) & X + X^T - P(\alpha) & * & * \\ B_w^T(\alpha) & 0 & -I & * \\ 0 & C_z(\alpha)X + D_{zu}(\alpha)Y & D_{zw}(\alpha) & -\mu I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.25)$$

O problema de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados pode ser colocado na

forma do seguinte teorema.

Teorema 2.4 (Teorema 10 em De Oliveira et al. (2002)). Existe uma lei de controle na forma da Eq. (2.2) tal que vale a desigualdade $\|T_{zw}(z, \alpha)\|_\infty^2 < \mu$, para $\alpha \in \Omega$, se as LMIs:

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i X + B_{u,i} Y & B_{w,i} & 0 \\ X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T & X + X^T - P_i & 0 & X^T C_{z,i}^T + Y^T D_{zu,i}^T \\ B_{w,i}^T & 0 & -I & D_{zw,i}^T \\ 0 & C_{z,i} X + D_{zu,i} Y & D_{zw,i} & -\mu I \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, v, \quad (2.26)$$

são factíveis, sendo as matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ e as matrizes simétricas $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, v$, as variáveis, com $K = YX^{-1}$.

A LMI dada pela Eq. (2.23) é um caso particular da LMI Eq. (2.26), sendo obtida fazendo $X = P_i = P$ na Eq. (2.26). Além da variável adicional que permite o uso da variável de Lyapunov dependente de parâmetros, podem ser obtidas soluções com menores valores de $\|T_{zw}(z, \alpha)\|_\infty$ com formulações LMI que incluem parâmetros de ajuste, como é o caso do teorema a seguir.

Teorema 2.5 (Teorema 1 em Morais et al. (2013)). Existe uma lei de controle na forma dada pela Eq. (2.2) tal que vale a desigualdade $\|T_{zw}(z, \alpha)\|_\infty^2 < \mu$, para $\alpha \in \Omega$, se existem matrizes $W_i = W_i^T > 0$, $i = 1, \dots, v$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, e um dado escalar $\xi \in \mathbb{R} \in (-1, 1)$, tal que:

$$\begin{bmatrix} \xi(A_i X + B_{u,i} Y + X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T) - P_i & * & * & * \\ X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T - \xi X & P_i - X - X^T & * & * \\ \xi(C_{z,i} X + D_{zu,i} Y) & C_{z,i} X + D_{zu,i} Y & -\mu I & * \\ 0 & B_{w,i}^T & D_{zw,i}^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, v. \quad (2.27)$$

O controlador é dado por $K = YX^{-1}$. O parâmetro de ajuste ξ afeta não somente o desempenho resultante como a factibilidade do problema. É necessário otimizar o valor de ξ através de busca por discretização do intervalo $(-1, 1)$ ou por métodos de otimização de uma variável. O Teorema 2.4 (De Oliveira et al., 2002) é um caso particular do Teorema 2.5 (Morais et al., 2013), sendo obtido fazendo $\xi = 0$.

A prova do Teorema 2.5 utiliza o Lema da Projeção apresentado a seguir.

Lema 2.2 (Gahinet e Apkarian, 1994). Dadas uma matriz simétrica $\Psi = \Psi^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e duas matrizes \mathcal{P} e \mathcal{Q} com dimensão de colunas igual a m , considere o problema de determinar Θ , de dimensão compatível, tal que:

$$\Psi + \mathcal{P}^T \Theta \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^T \Theta \mathcal{P} < 0. \quad (2.28)$$

Seja $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{N}_{\mathcal{Q}}$ quaisquer matrizes que sejam o complemento ortogonal (colunas formam uma base do espaço nulo) de \mathcal{P} e \mathcal{Q} , respectivamente, isto é, $\mathcal{P}\mathcal{N}_{\mathcal{P}} = 0$ e $\mathcal{Q}\mathcal{N}_{\mathcal{Q}} = 0$. Então a Eq. (2.28) tem solução para Θ se, e somente se, as seguintes desigualdades de projeção com respeito a Θ são satisfeitas:

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{\mathcal{P}}^T \Psi \mathcal{N}_{\mathcal{P}} < 0, \\ \mathcal{N}_{\mathcal{Q}}^T \Psi \mathcal{N}_{\mathcal{Q}} < 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Multiplicando a Eq. (2.27) por α_i e somando para $i = 1, \dots, v$, o resultado (omitindo por simplicidade a dependência de α) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -W & 0 & 0 & B_w \\ 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu I & D_w \\ B_w^T & 0 & D_{zw}^T & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A + B_u K \\ -I \\ C_z + D_{zu} K \\ 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} \xi I & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \xi I \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} X^T \begin{bmatrix} A^T + K^T B_u^T & -I & C_z^T + K^T D_{zu}^T & 0 \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Considerando no Lema da Projeção que:

$$\Psi = \begin{bmatrix} -W & 0 & 0 & B_w \\ 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu I & D_w \\ B_w^T & 0 & D_{zw}^T & -I \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} A^T + K^T B_u^T & -I & C_z^T + K^T D_{zu}^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ A^T + K^T B_u^T & C_z^T + K^T D_{zu}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathcal{Q} = [\xi I \quad I \quad 0 \quad 0] \rightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -\xi I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Pelo Teorema de Projeção, a condição dada pela Eq. (2.27) corresponde as seguintes condições:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}}^T \Psi \mathcal{N}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} (A + B_u K)X(A + B_u K)^T - X & (A + B_u K)XC^T & B_w \\ (C_z + D_{zu}K)X(A + B_u K)^T & (C_z + D_{zu}K)X(C_z + D_{zu}K)^T - \gamma^2 I & D_{zw} \\ B_w^T & D_{zw}^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{Q}}^T \Psi \mathcal{N}_{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} -(1 - \xi^2)P & 0 & B_w \\ 0 & -\mu I & D_{zw} \\ B_w^T & D_{zw}^T & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.35)$$

sendo a primeira a versão dual do BRL (do inglês, *Bounded Real Lema*), Eq. (2.7), para o sistema em malha-fechada, e a segunda requerendo que $\xi \in (-1, 1)$ considerando que $P(\alpha) > 0$.

2.3 Novas formulações de cálculo de norma \mathcal{H}_{∞}

Neste trabalho usaremos o Lema da Projeção, de forma semelhante a apresentada no trabalho de Morais et al. (2013), mas acrescentando dois parâmetros de ajuste de tal modo que os Teoremas 2.4 e 2.5 sejam condições particulares do teorema proposto de acordo com a escolha desses dois parâmetros. Inicialmente serão apresentados os teoremas de análise para posteriormente serem aplicados para síntese.

Teorema 2.6 (Norma \mathcal{H}_{∞}). Considere o sistema $H(z) = \mathcal{C}(zI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, as seguintes condições são equivalentes:

(i) $\|H(z)\|_{\infty}^2 \leq \mu$ e o sistema é estável.

(ii) Existem uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz simétrica definida positiva $P = P^T > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e escalares $\beta_1 \in \mathbb{R}$ e $\beta_2 \in \mathbb{R}$, com $\beta_2^2 - \beta_1^2 > 0$, tais que a seguinte LMI seja válida:

$$\begin{bmatrix} \beta_1(\mathcal{A}^T Z^T + ZA) - P & \beta_2 \mathcal{A}^T Z^T - \beta_1 Z & \beta_1 ZB & \mathcal{C}^T \\ * & P - \beta_2(Z + Z^T) & \beta_2 ZB & 0 \\ * & * & -\mu I & \mathcal{D}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.36)$$

(iii) Existem uma matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz simétrica definida positiva $P = P^T > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e escalares $\beta_1 \in \mathbb{R}$ e $\beta_2 \in \mathbb{R}$, com $\beta_2^2 - \beta_1^2 > 0$, tais que a seguinte LMI seja válida:

$$\begin{bmatrix} \beta_1(AX + X^T \mathcal{A}^T) - P & \beta_2 AX - \beta_1 X^T & \beta_1 X^T \mathcal{C}^T & \mathcal{B} \\ * & P - \beta_2(X + X^T) & \beta_2 X^T \mathcal{C}^T & 0 \\ * & * & -\mu I & \mathcal{D} \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.37)$$

Prova: A LMI (2.36) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & \mathcal{C}^T \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu I & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C} & 0 & \mathcal{D} & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T \\ -I \\ \mathcal{B}^T \\ 0 \end{bmatrix} Z^T [\beta_1 I \quad \beta_2 I \quad 0 \quad 0] \\ & + \begin{bmatrix} \beta_1 I \\ \beta_2 I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Z [\mathcal{A} \quad -I \quad \mathcal{B} \quad 0] < 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Considerando no Lema da Projção:

$$\Psi = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & \mathcal{C}^T \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu I & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C} & 0 & \mathcal{D} & -I \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\mathcal{P} = [\mathcal{A} \quad -I \quad \mathcal{B} \quad 0] \rightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\mathcal{Q} = [\beta_1 I \quad \beta_2 I \quad 0 \quad 0] \rightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} \beta_2 I & 0 & 0 \\ -\beta_1 I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Pelo Teorema de Projção, a condição (2.36) corresponde as seguintes condições:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}}^T \Psi \mathcal{N}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} I & \mathcal{A}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}^T & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & \mathcal{C}^T \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu I & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C} & 0 & \mathcal{D} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T P \mathcal{A} - P & \mathcal{A}^T P B & \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T P \mathcal{A} & \mathcal{B}^T P B - \mu I & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Q^T \Psi \mathcal{N}_Q &= \begin{bmatrix} \beta_2 I & -\beta_1 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & \mathcal{C}^T \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu I & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C} & 0 & \mathcal{D} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 I & 0 & 0 \\ -\beta_1 I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\beta_2^2 P + \beta_1^2 P & 0 & \beta_2 \mathcal{C}^T \\ 0 & -\mu I & \mathcal{D}^T \\ \beta_2 \mathcal{C} & \mathcal{D} & -I \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

sendo a primeira a condição do BRL Eq. (2.6), e a segunda condição $\beta_2^2 - \beta_1^2 > 0$. Considerando que $P > 0$ a LMI (2.37) é a versão dual da LMI (2.36), recuperando o BRL dado em (2.7). Os parâmetros β_1 e β_2 são parâmetros de ajuste que devem ser fixados *a priori* para que as condições (2.36) e (2.37) se tornem LMIs.

2.4 Novas formulações de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados

A partir do Teorema 2.6 é possível derivar as LMIs para controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados.

Teorema 2.7 (Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados). Existe uma lei de controle na forma (2.2) tal que a desigualdade $\|T_{zw}(z)\|_\infty^2 < \mu$ é atendida se existirem uma matriz simétrica $P = P^T > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, e escalares $\beta_1 \in \mathbb{R}$ e $\beta_2 \in \mathbb{R}$, com $\beta_2^2 - \beta_1^2 > 0$, tais que:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \beta_2 (AX + B_u Y) - \beta_1 X^T & \beta_1 (X^T C_z^T + Y^T D_{zu}^T) & B_w \\ * & P - \beta_2 (X + X^T) & \beta_2 (X^T C_z^T + Y^T D_{zu}^T) & 0 \\ * & * & -\mu I & D_{zw} \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.44)$$

$$\Pi_{11} = \beta_1 (AX + B_u Y + X^T A^T + Y^T B_u^T) - P.$$

seja verificada, nesse caso o controlador é dado por $K = YX^{-1}$.

Prova: Basta substituir as matrizes em malha-fechada do sistema de controle baseado em realimentação de estados, Eq. (2.3), na LMI (2.37) e fazer a mudança de variáveis $Y = KX$.

Para obter a formulação LMI de síntese a partir da LMI (2.36) é necessário realizar a mesma transformação de congruência e mudanças de variáveis adotada em He et al.

(2005).

Teorema 2.8 (Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados). Existe uma lei de controle na forma (2.2) tal que a desigualdade $\|T_{zw}(z)\|_\infty^2 < \mu$ é atendida se existirem uma matriz simétrica $P = P^T > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, e escalares $\beta_1 \in \mathbb{R}$ e $\beta_2 \in \mathbb{R}$, com $\beta_2^2 - \beta_1^2 > 0$, tais que:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & * & * & * \\ \beta_2(AX + B_u Y) - \beta_1 X^T & W - \beta_2(X + X^T) & * & * \\ \beta_1 B_w^T & \beta_2 B_w^T & -\mu I & * \\ C_z X + D_{zu} Y & 0 & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.45)$$

$$\Lambda_{11} = \beta_1(AX + B_u Y + X^T A^T + Y^T B_u^T) - W.$$

seja verificada, nesse caso o controlador é dado por $K = YX^{-1}$.

Prova: Defina $X = Z^{-T}$, pré-multiplique a Eq. (2.39) por \mathcal{J}_2^T e pós-multiplique por \mathcal{J}_2 , sendo

$$\mathcal{J}_2 = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Substitua as matrizes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} respectivamente pelas matrizes em malha-fechada do sistema de controle baseado em realimentação de estados: $A + B_k$, B_w , $C_z + D_{zu,k}$ e D_{zw} , Eq. (2.3), e faça as mudanças de variáveis $W = X^T P X$ e $Y = KX$. Em seguida a prova segue conforme demonstrado para o teorema de análise, onde obtém-se o BRL (2.6) a partir de (2.36).

2.5 Novas formulações de síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados

Com bases nos Teoremas 2.6 e 2.7, utilizando a mesma metodologia dos Teoremas 2.4 ou 2.5, é possível obter as formulações para controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados.

Teorema 2.9 (Controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados). Existe uma lei de controle robusta na forma (2.2) tal que a desigualdade $\|T_{zw}(z)\|_\infty^2 < \mu$ é atendida para

$\forall \alpha \in \Omega$ se existem matrizes simétricas $P_i = P_i^T > 0, P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, \dots, v$, matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, e escalares $\beta_1 \in \mathbb{R}$ e $\beta_2 \in \mathbb{R}$, com $\beta_2^2 - \beta_1^2 > 0$, tais que:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \beta_2(A_i X + B_{u,i} Y) - \beta_1 X^T & \beta_1(X^T C_{z,i}^T + Y^T D_{zu,i}^T) & B_{w,i} \\ * & P_i - \beta_2(X + X^T) & \beta_2(X^T C_{z,i}^T + Y^T D_{zu,i}^T) & 0 \\ * & * & -\mu I & D_{zw,i} \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.47)$$

$$\Pi_{11} = \beta_1(A_i X + B_{u,i} Y + X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T) - P_i, \quad i = 1, \dots, v.$$

seja verificada, nesse caso o controlador é dado por $K = YX^{-1}$.

As LMIs (2.25) (De Oliveira et al., 2002) e (2.27) (Morais et al., 2013) são casos particulares da LMI (2.47) fazendo $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 1$ ou $\beta_1 = \xi$ e $\beta_2 = 1$, respectivamente.

Teorema 2.10 (Controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados). Existe uma lei de controle robusta na forma (2.2) tal que a desigualdade $\|T_{zw}(z)\|_\infty^2 < \mu$ é atendida se existem matrizes simétricas $P_i = P_i^T > 0, P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, \dots, v$, matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, e escalares $\beta_1 \in \mathbb{R}$ e $\beta_2 \in \mathbb{R}$, com $\beta_2^2 - \beta_1^2 > 0$, tais:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & * & * & * \\ \beta_2(A_i X + B_{u,i} Y) - \beta_1 X^T & W_i - \beta_2(X + X^T) & * & * \\ \beta_1 B_{w,i}^T & \beta_2 B_{w,i}^T & -\mu I & * \\ C_{z,i} X + D_{zu,i} Y & 0 & D_{zw,i} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.48)$$

$$\Lambda_{11} = \beta_1(A_i X + B_{u,i} Y + X^T A_i + Y^T B_{u,i}^T) - W_i, \quad i = 1, \dots, v.$$

seja verificada, nesse caso o controlador é dado por $K = YX^{-1}$.

2.6 Determinação dos parâmetros de ajuste das formulações LMI por otimização

Os parâmetros de ajuste β_1 e β_2 nas formulações LMI propostas afetam o resultado do problema de síntese ou até mesmo a factibilidade do mesmo. Pode não ser eficiente determinar esses parâmetros através de testes de diferentes valores igualmente espaçados em uma determinada faixa. Nesse trabalho é proposto aplicar um método de otimização evolucionária para determinação de β_1 e β_2 .

Seja $[K, \gamma, \sigma] = LMI(H(\alpha), \beta_1, \beta_2)$ a implementação dos problemas LMI dados

pelos Teoremas 2.9 ou 2.10. Os argumentos da função são o modelo politópico, $H(\alpha)$, com as matrizes do sistema para cada vértice, e os parâmetros de ajuste β_1 e β_2 . Por intermédio de um *solver* SDP, a função retorna o controlador K , o custo garantido, $\|H(\alpha)\|_\infty \leq \gamma \forall \alpha \in \Omega$, e o máximo valor dos resíduos das restrições, σ . A princípio, se $\sigma > 0$ o *solver* conseguiu determinar uma solução factível para o problema, isto é, uma solução que atende todas as restrições LMI. Porém, valores de σ negativos próximos de zero podem significar uma solução factível na prática (Lofberg, 2004). Nesse trabalho foi adotado $\sigma > -10^{-12}$ como sendo uma solução factível. Esse valor foi obtido por tentativa e erro considerando que, utilizando o *solver* SDPT3, todas as soluções que atenderam esse limite eram na verdade factíveis. Para determinação dos valores de β_1 e β_2 é necessário resolver o seguinte problema de otimização restrito:

$$\begin{aligned} \{\beta_1^*, \beta_2^*\} &= \arg \min_{\beta_1, \beta_2} \gamma \\ \text{sujeito a:} & \\ \beta_2^2 - \beta_1^2 &> 0, \\ \sigma &> -10^{-12}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

sendo γ e σ calculados pela função $[K, \gamma, \sigma] = LMI(H(\alpha), \beta_1, \beta_2)$.

Como os algoritmos de otimização evolucionária são aplicados a problemas irrestritos, isto é, sem restrições, uma das contribuições desse trabalho é propor o método de penalidades para incorporar as duas restrições do problema (2.49) na função objetivo. O problema irrestrito pode ser escrito como:

$$\{\beta_1^*, \beta_2^*\} = \arg \min_{\beta_1, \beta_2} f(H(\alpha), \beta_1, \beta_2), \quad (2.50)$$

sendo

$$f(H(\alpha), \beta_1, \beta_2) = \begin{cases} (1 + g_1) \times 10^6, & \text{se } g_1 \geq 0, \\ (1 + g_2) \times 10^5, & \text{se } g_1 < 0 \text{ e } g_2 > 0, \\ \gamma & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.51)$$

As restrições são definidas como $g_1 = \beta_1^2 - \beta_2^2 < 0$, para garantir $\beta_2^2 - \beta_1^2 > 0$, e $g_2 = -10^{-12} - \sigma < 0$, para garantir $\sigma > -10^{-12}$. Se a solução é não factível, o valor da função objetivo será muito maior do que a de uma solução factível. Como temos duas restrições, penalizamos mais a sobre os dois parâmetros escalares uma vez que neste caso não é preciso solucionar o problema LMI. No processo de seleção de algoritmos evolucionários, quando comparadas duas soluções não factíveis, a solução mais próxima da região factível, de acordo com os valores das restrições, será selecionada.

A função $f(H(\alpha), \beta_1, \beta_2)$ é não diferenciável, o que inviabiliza o uso de métodos de otimização como o método Quase-Newton ou Gradiente Conjugado. A função $[K, \gamma, \sigma] = LMI(H(\alpha), \beta_1, \beta_2)$, que determina γ e σ , é não convexa porque possui mínimos em diferentes regiões do espaço de busca, não sendo indicado o método de otimização elipsoidal. Para funções não diferenciáveis e não convexas, os métodos de otimização evolucionária são os mais indicados. Nesse trabalho é adotado o método Evolução Diferencial (DE) (Storn e Price, 1997) para solução do problema (2.49) com a função objetivo definida em (2.50). O método DE é simples de ser implementado, possui poucos parâmetros de ajuste.

2.7 Estudo de casos

Nesta seção serão apresentados dois estudos de casos para avaliar as formulações LMI de síntese proposta. Os resultados foram gerados através do *software Matlab*[®] e todas as formulações LMI implementadas pela *interface YALMIP* (Lofberg, 2004) e solucionadas pelo *solver SDPT3* (Toh et al., 1999). Para os resultados dos estudos de caso, a variável σ para teste de factibilidade é obtida pela função *check* do YALMIP: $\sigma = \min(\text{check}(\text{LMIs}))$, sendo LMIs o conjunto de restrições LMI. Os parâmetros escalares ótimos β_1^* e β_2^* são obtidos resolvendo o problema dado pela Eq. (2.51) pelo método de otimização evolução diferencial (Storn e Price, 1997). O método evolução diferencial é um método que trabalha com uma população de N soluções candidatas que convergem para solução ótima através de operações de mutação, cruzamento e seleção. O algoritmo termina após um número fixo de gerações, N_g . Será avaliado otimizar um dos parâmetros fixando o outro igual a 1 ou otimizando ambos. O tamanho da população e o número de gerações, nos estudos de casos 1 e 2, são iguais a $N = 20$ e $N_g = 200$. As variáveis de otimização são livres, sendo as restrições incluídas na própria função objetivo, Eq. (2.51). Quando é fixado $\beta_2 = 1$, a população inicial é distribuída no intervalo $[-1; 1]$ uma vez que $|\beta_1| < 1$. Quando é fixado $\beta_1 = 1$, a população inicial é distribuída no intervalo $[-10; 10]$ porque $|\beta_1| > 1$. Ao invés dos valores ótimos obtidos na síntese, γ^* , serão avaliados os custos garantidos γ_{cg} dos sistemas em malha-fechada considerando o método de análise para cálculo com precisão especificada (Gonçalves et al., 2006), com precisão de 0,01.

2.7.1 Estudo de caso 1

Considere o sistema incerto linear invariante no tempo discreto cujas matrizes do modelo politópico são:

$$A = \rho \begin{bmatrix} 0,78 - p_1 & 0,7 - p_1 & 0 & -0,3 \\ p_1 - 0,7 & 0,78 - p_1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,45 + p_2 & 0 \\ -0,3 & 0 & 0 & 0,8 - p_2 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0 \\ 0 \\ -0,01 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0,2 \\ 0 & 0,2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}$$

sendo os parâmetros incertos $p_1 \in [0; 0,3]$ e $p_2 \in [0; 0,3]$. O escalar ρ é utilizado para avaliar o conservadorismo dos métodos, sendo que, quanto maior o ρ , maior o valor absoluto dos autovalores, tornando mais difícil encontrar uma solução estabilizante.

O objetivo deste primeiro estudo de caso, é determinar um controlador por realimentação de estados que estabilize robustamente o sistema incerto e minimize o valor do custo garantido \mathcal{H}_∞ .

Tabela 2.1 – Valores máximos de ρ para o qual é obtida uma solução com $\sigma > -10^{-12}$ para as diferentes formulações LMI para o estudo de caso 1.

Método	Teorema 4, De Oliveira et al. (2002)	Teorema 1, Morais et al. (2013)	Teorema 2.9	Teorema 2.10
ρ	1,3448	1,3586	1,3586	1,3580

A Tabela 2.1 apresenta os valores máximo de ρ para o qual é obtida uma solução com $\sigma > -10^{-12}$ para as diferentes formulações LMI sendo analisadas. Os valores foram obtidos por tentativa e erro. Observa-se que ambos os teoremas propostos conseguem obter soluções que resultam em sistemas robustamente estáveis para valores de ρ em que o Teorema 4 (De Oliveira et al., 2002) não tem sucesso, isto é, controlador resultante

não estabiliza o sistema. Também é verificado que, para esse estudo de caso, otimizar β_1 e β_2 não resultou em valor maior de ρ em comparação com fixar $\beta_2 = 1$ e otimizar somente $\beta_1 \in (-1,1)$, Teorema 1 (Morais et al., 2013).

Tabela 2.2 – Comparação entre os custos garantidos \mathcal{H}_∞ das formulações LMI para o estudo de caso 1 para $\rho = 1,3448$.

Formulação	β_1^*, β_2^*	N_g^*	γ^*	γ_{cg}	Δ_{cg}
Teorema 4, De Oliveira et al. (2002)	0; 1	–	14,6976	6,7063	200,5826 %
Teorema 1, Morais et al. (2013)	-0,4330; 1	15	3,3607	2,4649	10,4791 %
Teorema 2.9 com $\beta_1 = 1$	1; -2,3095	17	3,3607	2,4664	10,5463 %
Teorema 2.9	37,9584; -87,7297	15	3,3607	2,4653	10,4701 %
Teorema 2.10 com $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 1$	0; 1	–	14,6977	6,7082	200,6678 %
Teorema 2.10 com $\beta_2 = 1$	-0,4392; 1	2	2,4524	2,2311	
Teorema 2.10 com $\beta_1 = 1$	1; -2,2770	13	2,4524	2,2311	
Teorema 2.10	20,0418; -45,6334	21	2,4524	2,2311	

A Tabela 2.2 lista os resultados obtidos pelas formulações LMI para o estudo de caso 1 considerando o valor de ρ para o qual o Teorema 4 (De Oliveira et al., 2002) apresenta resultado factível, isto é, $\rho = 1,3448$. A coluna N_g^* apresenta o número da iteração em que a solução ótima foi obtida dentro da precisão de quatro casas decimais. A coluna γ^* corresponde ao custo garantido \mathcal{H}_∞ informado pela formulação LMI de síntese, a coluna γ_{cg} apresenta o valor do custo garantido \mathcal{H}_∞ obtido pelo método de análise com precisão específica e a coluna Δ_{cg} apresenta a variação percentual do valor γ_{cg} em relação a melhor solução obtida.

Existem quatro possibilidades de escolha ou determinação dos dois parâmetros de ajuste dos Teorema 2.9 e 2.10, fixar $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 1$, que equivale ao Teorema 4 (De Oliveira et al., 2002); otimizar β_1 fixando $\beta_2 = 1$, que equivale ao Teorema 1 (Morais et al., 2013); fixar $\beta_1 = 1$ otimizando β_2 e otimizar β_1 e β_2 . Para este exemplo específico,

o Teorema 2.10 apresentou os melhores resultados de custo garantido \mathcal{H}_∞ , conforme mostrado em destaque na Tabela 2.2, independentemente da forma de determinação dos parâmetros de ajuste, β_1 e β_2 . Além disso, foi verificado que, em ambos os teoremas propostos, os valores ótimos de β_1 e β_2 estão associados a uma relação β_1/β_2 . Desse modo, a princípio, não existe diferença entre ter um ou dois parâmetros de ajuste, sendo que a forma adotada no Teorema 1 (Morais et al., 2013) é a mais interessante porque fixando $\beta_2 = 1$, basta procurar por β_1 no intervalo $(-1,1)$. Fixando $\beta_1 = 1$, é necessário buscar $\beta_2 > 1$. De acordo com a forma de determinação dos parâmetros de ajuste, é possível gerar controladores ligeiramente diferentes, o que explica os γ_{cg} apresentarem uma diferença mínima. Ou seja, existem vários controladores diferentes que atingem o mesmo valor de γ^* , mas apesar de valores iguais de γ^* , o valor de γ_{cg} pode apresentar uma diferença pequena porque os controladores resultantes para os diferentes valores de β_1^* e β_2^* não são exatamente iguais. O controlador obtido com o Teorema 2.10, otimizando ambos os parâmetros, é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} -1,1168 & -2,4100 & -1,4541 & 2,4641 \\ 0,1455 & -1,9968 & -5,2555 & -0,0298 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

2.7.2 Estudo de caso 2

Considere o sistema linear invariante no tempo discreto cujas matrizes são:

$$A = \kappa \begin{bmatrix} 0,6 & p_1 & 0 & 0,1 \\ -p_1 & 0,6 & 0,2 & 0 \\ -0,4 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} p_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix}$$

sendo os parâmetros incertos $p_1 \in [0,6; 0,7]$, $p_2 \in [0,85; 0,95]$ e $p_3 \in [0,8; 1]$. O escalar κ é utilizado da mesma forma que o escalar ρ no exemplo anterior.

O objetivo deste estudo de caso também é determinar um controlador que estabiliza o sistema incerto e minimiza o custo garantido \mathcal{H}_∞ . Nesse estudo de caso foi

considerado número de variáveis de entrada, exógenas e de desempenho diferentes em relação ao estudo de caso anterior. O parâmetro $\kappa \geq 1$ foi variado, aumentando a distância dos autovalores para origem no plano-Z, para verificar até que ponto as formulações LMI conseguem obter soluções factíveis.

Tabela 2.3 – Valores máximos de κ para o qual é obtida uma solução com $\sigma > -10^{-12}$ para as diferentes formulações LMI para o estudo de caso 2.

Método	Teorema 4, De Oliveira et al. (2002)	Teorema 1, Morais et al. (2013)	Teorema 2.9	Teorema 2.10
κ	1,2480	1,2480	1,2481	1,2471

A Tabela 2.3 apresenta os valores máximo de k para o qual é obtida uma solução com $\sigma > -10^{-12}$ para as diferentes formulações LMI sendo analisadas. Novamente, os valores foram obtidos por tentativa e erro. Observa-se que o Teorema 2.9 consegue obter soluções com $\sigma > -10^{-12}$ para valores de k em que o Teorema 4 (De Oliveira et al., 2002) e o Teorema 1 (Morais et al., 2013) não tem sucesso. Porém, para esse estudo de caso, apesar do Teorema 4 (De Oliveira et al., 2002), resultar $\sigma = -3,8195 \times 10^{-5}$ e valor incorreto de custo garantido, o controlador resultante estabiliza robustamente o sistema. Nesse estudo de caso, otimizar β_1 e β_2 obteve $\sigma > -10^{-12}$ para valor de k em que fixar $\beta_2 = 1$ e otimizar somente $\beta_1 \in (-1, 1)$, Teorema 1 (Morais et al., 2013), não teve sucesso. Para $k = 1,2481$, o problema fica tão complexo que foram necessárias 39 gerações do algoritmo de otimização para obter uma solução factível. Além disso, aproximar os valores ótimos de β_1 e β_2 com quatro casas decimais resulta em $\sigma = -3,8152 \times 10^{-5} < -10^{-12}$, o que demonstra a dificuldade de obter tais valores sem utilizar otimização. Uma possível explicação para se não conseguir solução fixando $\beta_2 = 1$ pode ser algum problema com condicionamento numérico que dificulta o *solver* encontrar solução. Foi experimentado utilizar a solução otimizando β_1 e β_2 , dividindo ambos por β_2 para forçar $\beta_2 = 1$ mas mantendo a mesma relação β_1/β_2 , e mesmo assim não foi obtida solução factível.

Tabela 2.4 – Comparação entre os custos garantidos \mathcal{H}_∞ das formulações LMI para o estudo de caso 2 com $k = 1,2480$.

Formulação	β_1^*, β_2^*	N_g^*	γ^*	γ_{cg}	Δ_{cg}
Teorema 4, De Oliveira et al. (2002)	0; 1	–	583,1290	92,5885	34,6160 %
Teorema 1, Morais et al. (2013)	–0,3282; 1	173	441,3851	71,2456	3,5852 %
Teorema 2.9	2,5203; –8,1050	196	440,0836	68,7797	
Teorema 2.9 com $\beta_1 = 1$	1; –3,0220	86	442,6243	74,8136	8,0652 %

A Tabela 2.4 lista os resultados obtidos pelas formulações LMI para o estudo de caso 2 considerando o valor de κ para o qual o Teorema 4 (De Oliveira et al., 2002) apresenta resultado factível, isto é, $\kappa = 1,2480$. A Tabela 2.4 não lista os resultados para o Teorema 2.10 porque não são obtidas soluções factíveis para $k = 1,2480$. Para esse estudo de caso, foi verificado que o Teorema 2.10 resulta em soluções piores que o Teorema 2.9 para os valores de k em que ambos obtêm soluções factíveis. Diferentemente do estudo de caso 1, para esse estudo de caso ocorreu diferenças entre os custos garantidos γ^* de acordo com a forma de determinação de β_1^* e β_2^* sendo que otimizar ambos os parâmetros levou ao melhor resultado. Assim, o controlador que gerou o melhor desempenho foi obtido com o Teorema 2.9 proposto otimizando os dois parâmetros:

$$K = [-2,2417 \quad -1,2073 \quad 4,8995 \quad -0,1363] \quad (2.53)$$

2.8 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentadas novas formulações LMI para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados para sistemas lineares invariantes no tempo incertos, em tempo discreto, representados por modelos politópicos. Por meio dos estudos de casos foi possível observar que com a otimização de dois parâmetros escalares, aumenta a probabilidade de encontrar uma solução factível em problemas que geralmente são mais complexos de se obter a solução. Também foi observado que é possível fixar um parâmetro e obter o valor ótimo do outro ou até

mesmo tentar otimizar ambos os parâmetros. A princípio, o Teorema 2.9 obtém o mesmo resultado do Teorema 1 apresentado em Morais et al. (2013) uma vez que o desempenho ótimo é obtido para uma determinada relação β_1/β_2 . Fixando $\beta_2 = 1$, como em Morais et al. (2013), fica mais fácil de buscar o ótimo no intervalo $(-1,1)$ por meio de um método de grade (busca uniforme no intervalo). Quando otimizando tanto β_1 e β_2 , apesar da solução ótima não ser melhor para todos os casos, existem infinitas soluções ótimas que podem ser mais fáceis de serem localizadas por meio de otimização do que quando fixando β_1 ou $\beta_2 = 1$, além da possível questão de condicionamento numérico da restrição LMI. Vale ressaltar que o Teorema 2.10, versão dual do Teorema 2.9, uma novidade desse trabalho, pode proporcionar resultados melhores que o Teorema 2.9 que gera resultados similares ao de Morais et al. (2013).

Os estudos de casos considerados nesse capítulo são problemas acadêmicos em que são criadas propositalmente condições mais complexas para se obterem os projetos ótimos. Para alguns casos de problemas reais, é possível que a formulação mais simples apresentada em De Oliveira et al. (2002), em que $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 1$, seja suficiente para obter a solução ótima. De qualquer forma, é sempre interessante ter outras possibilidades de projeto para confirmar se o projeto mais simples é realmente ótimo ou se é possível encontrar soluções ainda melhores.

No próximo capítulo, as novas formulações LMI serão utilizadas para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída através de um método baseado na mudança das variáveis X e Y que aparecem no cálculo do controlador: $K = YX^{-1}$.

3 Realimentação Estática de Saída

Nesse capítulo, as formulações LMI propostas para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados serão adaptadas para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída através de uma mudança de variáveis que inclui uma variável matricial de ajuste. O problema de otimização proposto para determinação dos dois parâmetros escalares de ajuste será utilizado para também obter a matriz ótima de ajuste da transformação de variáveis. Serão apresentados estudos de casos para avaliar a eficiência das formulações propostas em conjunto com a mudança de variáveis e a aplicação de otimização evolucionária em comparação com outras formulações existentes na literatura.

3.1 Introdução

Como discutido nos capítulos anteriores, é mais difícil obter uma mudança de variáveis linearizante que permite transformar uma formulação LMI de análise de estabilidade ou desempenho em uma formulação LMI para síntese de controle robusto por realimentação estática de saída. Já existem alguns resultados, como Agulhari et al. (2010), que propôs o controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída para sistemas discretos em duas etapas. Inicialmente projeta-se um controlador de realimentação de estados dependente de parâmetros. Na segunda etapa, as matrizes utilizadas para o cálculo do controlador por realimentação de estados, obtidas na primeira etapa, são utilizadas como parâmetros na formulação LMI para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída. O controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros obtido na primeira etapa afeta o desempenho do controlador robusto por realimentação estática de saída resultante. Desse modo é interessante testar diferentes formas de obter o controlador dependente de parâmetros: controlador estabilizante, controlador sub-ótimo, com diferentes especificações de desempenho ou controlador ótimo. Variando a especificação do controlador por realimentação de estados sub-ótimo, pode ser obtidos diferentes desempenhos para o controlador ótimo por realimentação estática de saída.

Considere um sistema linear invariante no tempo incerto, em tempo discreto,

representado por um modelo politópico:

$$P(z, \alpha) = \begin{cases} x(k+1) = A(\alpha)x(k) + B_w(\alpha)w(k) + B_u(\alpha)u(k) \\ z(k) = C_z(\alpha)x(k) + D_{zw}(\alpha)w(k) + D_{zu}(\alpha)u(k), \\ y(k) = C_y(\alpha)x(k) + D_{yw}(\alpha)w(k) + D_{yu}(\alpha)u(k) \end{cases}, \quad (3.1)$$

em que

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) & B_w(\alpha) & B_u(\alpha) \\ C_z(\alpha) & D_{zw}(\alpha) & D_{zu}(\alpha) \\ C_y(\alpha) & D_{yw}(\alpha) & D_{yu}(\alpha) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^v \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & B_{w,i} & B_{u,i} \\ C_{z,i} & D_{zw,i} & D_{zu,i} \\ C_{y,i} & D_{yw,i} & D_{yu,i} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

sendo v o número de vértices do politopo e $\alpha \in \mathbb{R}^v \in \Omega$:

$$\Omega = \{\alpha = [a_1 \dots a_v]^T \mid \alpha_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^v \alpha_i = 1\}. \quad (3.3)$$

Nesse capítulo é considerado o controle por realimentação estática de saída, cuja ação de controle é dada por:

$$u(k) = Ky(k), \quad (3.4)$$

sendo K a matriz de ganhos de dimensão $n_u \times n_y$.

No trabalho de Agulhari et al. (2010), são apresentados três teoremas (ver Apêndice A), para o cálculo do controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros. O primeiro deles permite o cálculo de um controlador por realimentação de estados, dependente de parâmetros, que estabiliza robustamente o sistema. Já o segundo, possibilita obter um controlador \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados dependente de parâmetros, considerando $D_{yu}(\alpha) = 0$ na Eq. (3.1). O terceiro permite projetar o controlador \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída considerando as matrizes obtidas para calcular o controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros obtido pelo Teorema 1 ou 2 para valores fixos de γ (controle sub-ótimo) ou valor ótimo, para $D_{yu}(\alpha) = 0$ na Eq. (3.1).

Em Chang et al. (2015) são apresentados dois lemas (Lema 8 e Lema 9) para o projeto de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída para sistemas discretos com e sem parâmetros escalares de ajuste. Além desses dois lemas, em Chang et al. (2015) é apresentado o Teorema 4 que possui dois parâmetros de ajuste para serem definidos *a priori*, β e ρ . Os lemas 8 e 9 e o Teorema 4, que aparecem em Chang et al. (2015), são apresentados no Apêndice A.

Como visto no capítulo 2, na síntese de controlador \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados, a formulação LMI mais simples por ser do tipo,

$$F(X, Y, \gamma) > 0, X = X^T > 0, \quad (3.5)$$

sendo que a ação de controle $u(k) = K_x x(k)$, $K_x = YX^{-1}$, estabiliza o sistema com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ . No caso da realimentação estática de saída, considerando $C_y(\alpha) = C_y$, com posto completo de linhas, e $D_{yw}(\alpha) = 0$ e $D_{yu}(\alpha) = 0$, na Eq. (3.1), o problema é obter o controlador K na ação de controle $u(k) = Ky(k) = KC_y x(k)$:

$$YX^{-1} = KC_y. \quad (3.6)$$

Em Rubió-Massegú et al. (2013), são propostas as seguintes mudanças de variáveis na LMI geral para síntese de controle robusto por realimentação de estados, Eq. (3.5), para obter K :

$$F(X_Q, X_R, Y_R, \gamma) > 0, X_Q = X_Q^T > 0, X_R = X_R^T > 0, \quad (3.7)$$

com $X_Q \in \mathbb{R}^{(n-n_y) \times (n-n_y)}$, $X_R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $Y_R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ definidos por:

$$X = QX_QQ^T + RX_RR^T = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_Q & 0 \\ 0 & X_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^T \\ R^T \end{bmatrix}, Y = Y_RR^T \quad (3.8)$$

sendo Q a matriz cujas colunas representam o espaço nulo de C_y , isto é, $C_yQ = 0$, e a matriz R tal que $C_yR = I$. O controlador é dado por $K = Y_RX_R^{-1}$. Em Rubió-Massegú et al. (2013), é proposto que a matriz R seja parametrizada por:

$$R = C_y^\dagger + QL \quad (3.9)$$

em que $C_y^\dagger = C_y^T(C_yC_y^T)^{-1}$, a Moore-Penrose pseudoinversa de C_y , e $L \in \mathbb{R}^{(n-n_y) \times n_y}$ é uma matriz a ser escolhida. Com essa escolha para a matriz R obtém-se:

$$C_yR = C_y(C_y^\dagger + QL) = C_yC_y^T(C_yC_y^T)^{-1} + C_yQL = I + 0L = I \quad (3.10)$$

Teorema 3.1 (Teorema 2 em Rubió-Massegú et al. (2013)). Suponha que o X da Eq. (3.8) seja não singular, uma vez que $X > 0$, então X_R é não singular e $YX^{-1} = KC_y$ com $K = Y_RX_R^{-1}$.

Através do Teorema 3.1, é possível transformar qualquer formulação LMI para síntese de controle robusto por realimentação de estados em uma formulação LMI para síntese de controle robusto por realimentação estática de saída, utilizando a mudança de variáveis dada pela Eq. (3.8), com R dado pela Eq. (3.9), desde que as variáveis medidas sejam dadas por $y(k) = C_yx(k)$ com C_y tendo posto completo de linhas. A limitação de que C_y seja conhecida não interfere com a classe de problemas onde as variáveis medidas são parte das variáveis de estados ou soma ou subtração das mesmas.

Tal restrição não permite tratar os casos em que C_y é incerto, seja por ter termos incertos ou no caso de estudo de confiabilidade do sistema de controle devido a falhas nos sensores.

Em Rubió-Massegú et al. (2013), não é apresentado um método para determinação da matriz L ótima, sendo considerada nula nos estudos de caso. Em Palacios-Quiñonero et al. (2014) é proposta uma formulação para o cálculo da matriz L conforme Teorema 3.2 apresentado a seguir.

Teorema 3.2 (Teorema 1 em Palacios-Quiñonero et al. (2014)). Considere o conjunto $\mathcal{P}_n = \{X \in \mathbb{S}^{n \times n} : X > 0\}$ de todas as matrizes simétricas ($n \times n$) definidas positivas. Para qualquer $X \in \mathcal{P}_n$, existe uma única matriz L tal que $X = QX_QQ^T + RX_RR^T$ é atendido, com $R = C_y^\dagger + QL$, para matrizes adequadas $X_Q \in \mathcal{P}_{n-q}$ e $X_R \in \mathcal{P}_q$. Além disso, a matriz L pode ser obtida como $L = Q^\dagger X C_y^T (C_y X C_y^T)^{-1}$.

Pelo Teorema 3.2, é possível calcular a matriz L a partir de uma matriz X que pode ser obtida como a matriz de Lyapunov resultante de um projeto de controle por realimentação de estados. Semelhante ao caso do método de síntese apresentado em Agulhari et al. (2010), diferentes formas de cálculo do controlador por realimentação de estados, estabilizante ou com custo sub-ótimo, que resulta em diferentes matrizes X , geram diferentes matrizes L . A matriz L obtida não é necessariamente a ótima, sendo as vezes pior que considerar a matriz L nula. Desse modo é importante ter um método para determinação da matriz L ótima na mudança de variáveis.

Uma melhoria no método de síntese apresentado em Rubió-Massegú et al. (2013) e Palacios-Quiñonero et al. (2014) é realizada em Gopmandal e Ghosh (2021), em que a mudança de variáveis é aperfeiçoada para formulações LMI onde a variável X não necessita de ser simétrica e a variável de Lyapunov é dependente de parâmetros:

$$F(P_i, X, \gamma) > 0, P_i = P_i^T > 0, i = 1, \dots, v. \quad (3.11)$$

Como X não precisa ser simétrica, em Gopmandal e Ghosh (2021) é proposto considerar a mudança de variáveis com X bloco triangular superior:

$$X = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^T \\ R^T \end{bmatrix}, Y = Y_1 R^T, \quad (3.12)$$

em que as matrizes Q e R são calculadas para satisfazer $C_y Q = 0, C_y R = I$, sendo R definida pela Eq. (3.10). O ganho do controlador por realimentação estática de saída é dado por:

$$K = Y_1 X_{22}^{-1}. \quad (3.13)$$

A desvantagem dessa forma de obter uma formulação LMI de síntese de controlador por realimentação de saída é a necessidade da determinação da matriz L ótima. Em Gopmandal e Ghosh (2021) é proposto aplicar o Teorema 3.2 para determinação de L variando a especificação de desempenho no projeto do controlador por realimentação de estados que gera a matriz X . Na próxima seção será proposto um método para determinar a matriz L por otimização em conjunto com os dois parâmetros escalares das formulações de síntese propostas.

3.2 Determinação dos parâmetros de ajuste das formulações LMI e da matriz L da mudança de variáveis por otimização

Seja $H(\alpha)$ o modelo politópico do sistema incerto com o conjunto de matrizes para cada vértice e $[K, \gamma, \sigma] = LMI(H(\alpha), L, \beta_1, \beta_2)$ a função que retorna à solução do problema LMI dado pela Eq. (2.47), Teorema 2.9, ou Eq. (2.48), Teorema 2.10, com a mudança de variáveis dada pela Eq. (3.12), na forma do ganho, K , custo garantido γ , e o resíduo mínimo das restrições, σ . Considerando a aplicação de algoritmos de otimização evolucionária para determinação da matriz ótima L^* e dos escalares β_1^* e β_2^* , este trabalho propõe o seguinte problema de otimização:

$$\{L^*, \beta_1^* e \beta_2^*\} = \underset{L, \beta_1, \beta_2}{\operatorname{argmin}} f(H(\alpha), L, \beta_1, \beta_2), \quad (3.14)$$

sendo a função objetivo $f(H(\alpha), L, \beta_1, \beta_2)$ determinada a partir de $[K, \gamma, \sigma] = LMI(H(\alpha), L, \beta_1, \beta_2)$. Uma vez determinado L^*, β_1^* e β_2^* , então o controlador e custo garantido ótimos são dados por:

$$[K^*, \gamma^*, \sigma] = LMI(H(\alpha), L^*, \beta_1^*, \beta_2^*). \quad (3.15)$$

mesma forma descrita no capítulo 2, foi proposta que a função objetivo, tratando as duas restrições do problema pela técnica de penalidades, seja da forma:

$$f(H(\alpha), L, \beta_1, \beta_2) = \begin{cases} (1 + g_1) \times 10^6, & \text{se } g_1 > 0 \\ (1 + g_2) \times 10^5, & \text{se } g_1 \leq 0 \text{ e } g_2 > 0. \\ \gamma, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.16)$$

As restrições são definidas como $g_1 = \beta_1^2 - \beta_2^2 < 0$, para garantir $\beta_2^2 - \beta_1^2 > 0$, e $g_2 = -10^{-12} - \sigma < 0$, para garantir $\sigma > -10^{-12}$. Se a solução é não factível, o valor da função objetivo será muito maior do que a de uma solução factível. Como temos duas restrições, penalizamos mais a sobre os dois parâmetros escalares uma vez que neste caso não é preciso solucionar o problema LMI. No processo de seleção de algoritmos evolucionários, quando comparadas duas soluções não factíveis, a solução mais próxima da região factível, de acordo com os valores das restrições, será selecionada.

A função $f(H(\alpha), L, \beta_1, \beta_2)$ é não diferenciável, o que inviabiliza o uso de métodos de otimização como o método Quase-Newton ou Gradiente Conjugado. A função $[K, \gamma, \sigma] = LMI(H(\alpha), L, \beta_1, \beta_2)$, que determina γ e σ , é não convexa porque possui mínimos em diferentes regiões do espaço de busca, não sendo indicado o método de otimização elipsoidal. Para funções não diferenciáveis e não convexas, os métodos de otimização evolucionária são os mais indicados. Como descrito no Capítulo 2, é adotado o método Evolução Diferencial (DE) (Storn e Price, 1997) para solução do problema (3.14) com a função objetivo definida em (3.16).

No capítulo 2, os estudos de casos tratavam de sistemas incertos discretos no tempo ao passo que nesse capítulo os estudos de casos tratarão de sistemas incertos contínuos no tempo que serão discretizados. Para analisar os resultados obtidos, considerando o erro na discretização do modelo politópico (Braga et al., 2013), foi considerada a solução dos seguintes problemas de otimização para verificação de estabilidade robusta e desempenho robusto \mathcal{H}_∞ de um dado controlador K . Seja $\theta \in \mathbb{R}^{v-1}$ o vetor de variáveis de otimização e define o vetor α (ver Eq. (3.3)), em função do vetor θ como $\alpha = [\theta_1, \dots, \theta_{v-1}, 1 - \sum \theta_i]^T$. A análise de estabilidade robusta considera o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \max_{\alpha \in \Omega} \max_i \left| \lambda_i \left(A_f(\alpha) \right) \right| \\ \text{sujeito a: } & -\theta_i \leq 0, i = 1, \dots, v-1 \\ & -1 + \sum_i^{v-1} \theta_i \leq 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sendo $\lambda_i(A_f(\alpha))$ o i -ésimo autovalor da matriz de malha fechada calculada pela discretização da combinação convexa dos vértices do modelo contínuo no tempo. As duas restrições garantem que $\alpha \in \Omega$. Se $\varphi^* \geq 1$, então o sistema não é robustamente estável. Obviamente não é possível garantir a estabilidade robusta com 100% de certeza, mas pode-se executar a otimização mais de uma vez para aumentar a probabilidade do resultado estar correto. Para análise de desempenho robusto é considerado o problema:

$$\begin{aligned} \xi^* &= \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(z, \alpha)\|_{\infty} \\ \text{sujeito a: } & -\theta_i \leq 0, i = 1, \dots, v-1 \\ & -1 + \sum_i^{v-1} \theta_i \leq 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo $T_{zw}(z, \alpha)$ o sistema em malha-fechada obtido a partir da discretização da combinação convexa dos vértices do sistema contínuo. A otimização pode ser interrompida caso seja localizado um sistema instável no politopo. Para um melhor desempenho do algoritmo de otimização evolucionária para resolver estes dois problemas de otimização, pode se utilizar a operação de reflexão para garantir que $\theta_i \in [0, 1], i = 1, \dots, v-1$ e na população inicial, além de forçar que as soluções aleatórias iniciais atendam às restrições, devem ser incluídas as soluções que correspondem aos v vértices do politopo. Para solução destes dois problemas por algoritmos evolucionária também é aplicado o método da penalidade para tratar restrições.

3.3 Estudo de casos

Como mencionado, para resolver o problema de otimização da Eq. (3.14) foi utilizado o método evolução diferencial (Storn e Price, 1997), com multiplicador da mutação diferencial com distribuição aleatória uniforme no intervalo $F \in [0.5, 1)$, a probabilidade de cruzamento $C_r = 0.9$. Serão considerados dois estudos de casos, sendo o estudo de caso 1 o problema de controle do sistema de quatro tanques, com seis variáveis de estados, e o estudo de caso 2 o problema de controle de uma destilaria, com quatorze variáveis de estados. Nos dois estudos de casos, o tamanho da população é $N = \max(10, 2\eta)$, sendo η o número de variáveis de otimização que é igual ao número de elementos da matriz L mais dois, quando se otimiza β_1 e β_2 , $\eta = (n - n_y)n_y + 2$. Já o número de gerações no estudo de caso 1 é $N_g = 20N$ e no estudo

de caso 2 é $N_g = 2N$. A diferença no número de gerações de um estudo de caso para o outro é porque o estudo de caso 2 possui matrizes maiores, ou seja, o custo computacional ficaria muito alto se adotasse o mesmo critério nos dois problemas. Da mesma forma do Capítulo 2, todas as formulações LMI foram implementadas usando o YALMIP (Lofberg, 2004) e solucionadas pelo *solver* SDPT3 (Toh et al., 1999). A variável σ para teste de factibilidade é obtida pela função `check` do YALMIP: $\sigma = \min(\text{check}(\text{LMIs}))$, sendo LMIs o conjunto de restrições LMI. Devido à dificuldade de discretização de modelos politópicos, os projetos são comparados com base nos possíveis valores máximos de norma \mathcal{H}_∞ no domínio de incerteza, ξ^* , obtido como sendo a solução do problema dado pela Eq. (3.18), calculados também pelo método evolução diferencial.

3.3.1 Estudo de caso 1- Quatro Tanques

Este estudo de caso apresenta uma aplicação da realimentação estática de saída de um sistema de controle de nível de quatro tanques apresentado em Johansson (2020) conforme mostra a Figura 3.1. O objetivo desse sistema de controle é controlar os níveis dos tanques inferiores a partir das tensões aplicadas nas duas bombas, tratando-se de um sistema multivariável com duas variáveis manipuladas e duas variáveis controladas ou variáveis de processo. As válvulas de três vias são responsáveis pelo acoplamento entre as malhas de controle fazendo com que cada bomba atue sobre os níveis de todos os tanques. Pelo ajuste dessas válvulas é possível ter um ponto de operação de fase não-mínima.

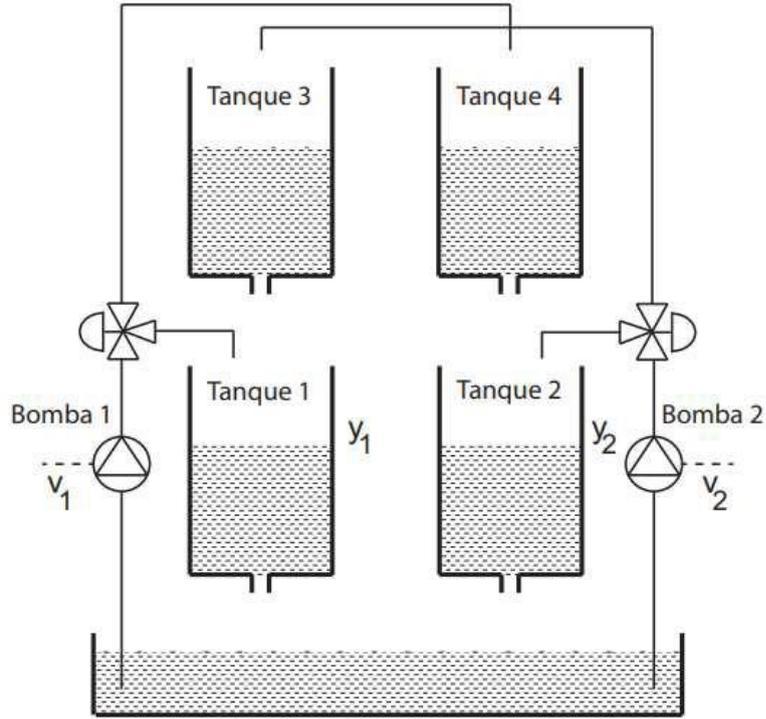


Figura 3.1 – Representação do modelo do sistema de Quatro Tanques (Johansson, 2000).

As matrizes do sistema linearizado são dadas por (Johansson, 2020):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{T_3} & \frac{-1}{T_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 K_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 K_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_1) K_1}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1) K_1}{A_4} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ K_c & 0 \\ 0 & K_c \end{bmatrix}, C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_y = \begin{bmatrix} K_c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & K_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{yu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Além dos níveis dos Quatro Tanques, nesse estudo de caso são acrescentadas duas

variáveis de estados, em relação ao modelo original, associadas às integrais dos erros de rastreamento. Os parâmetros que aparecem nessas matrizes, para o ponto de operação de fase-mínima, são dados por (Johansson, 2020): $A_1 = 28 \text{ cm}^2$, $A_2 = 32 \text{ cm}^2$, $A_3 = 28 \text{ cm}^2$, $A_4 = 32 \text{ cm}^2$, $T_1 = 62 \text{ s}$, $T_2 = 90 \text{ s}$, $T_3 = 23 \text{ s}$, $T_4 = 30 \text{ s}$, $K_1 = 3,33 \frac{\text{cm}^3}{\text{Vs}}$, $K_2 = 3,35 \frac{\text{cm}^3}{\text{Vs}}$ e $K_c = 0.5 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$. As variáveis desse modelo são: u_1 e u_2 as variações das tensões de entrada aplicadas nas bombas em torno do ponto de operação, h_1 e h_2 as variáveis do processo, os desvios dos níveis dos dois tanques inferiores em torno do ponto de operação. Os valores das variáveis para o ponto de operação considerado são dados por (Johansson, 2020): $h_{10} = 12,4 \text{ cm}$, $h_{20} = 12,7 \text{ cm}$, $V_{10} = 3,0\text{V}$, $V_{20} = 3,0 \text{ V}$. Nesse estudo de caso são considerados como parâmetros incertos os ajustes das válvulas de três vias sendo que os valores estão nas seguintes faixas: $\gamma_1 \in [0,55; 0,95]$ e $\gamma_2 \in [0,55; 0,95]$.

As variáveis de estado, $x = [h_1, h_2, h_3, h_4, \varphi_1, \varphi_2]^T$ são os desvios dos níveis dos tanques em torno do ponto de operação e as integrais dos erros de rastreamento $\varphi_i(t) = \int_0^t [K_c r_i(\tau) - K_c h_i(\tau)] d\tau, i = 1, 2$. As variáveis exógenas são desvios dos sinais de referência em torno do ponto de operação, $w = [r_1, r_2]^T$. Este sistema não possui sinais de perturbação e o objetivo do controle é obter um compromisso entre os erros de rastreamento e o esforço de controle devido a variações em degrau dos sinais de referência. As variáveis de desempenho são $z = [\varphi_1, \varphi_2, \rho u_1, \rho u_2]^T$, sendo que $\rho = 1,25$ foi escolhido para obter o compromisso entre erros de rastreamento e esforço de controle (evitar valores negativos de tensão que significaria saturação da ação de controle). As variáveis de medição são $y = [K_c h_1, K_c h_2, \varphi_1, \varphi_2]^T$ tal que o controlador resultante é um controlador PI centralizado com a ação proporcional aplicada sobre a saída. O sistema é discretizado com período de amostragem $h = 1\text{s}$ usando o método do segurador de ordem zero (ZOH, do inglês *Zero-Order Hold*).

Tabela 3.1 – Comparação entre os custos garantidos \mathcal{H}_∞ dos métodos de síntese para o estudo de caso do controle de nível do sistema de Quatro Tanques.

Formulação	Parâmetros	N_g (N_g^*)	γ^*	ξ^*	$\Delta\xi^*$
Teorema 3, Agulhari et al. (2010)	$\gamma = 2,0527$	200 (15)	4,1640	3,4569	7,1674 %
Lema 8, Chang et al. (2015)	–	1	5,7984	5,4466	68,8501 %
Lema 9, Chang et al. (2015)	$\nu = 4,4839$	200 (17)	5,7002	5,3475	65,7779 %
Teorema 4, Chang et al. (2015)	$\beta^* = 0,7847$ $\rho^* = 0,0628$	200 (15)	5,5608	5,1790	60,5542 %
Teorema 2.9	$\beta_1^* = -16,2837$ $\beta_2^* = -35,4513$	400 (330)	3,2776	3,2257	
Teorema 2.10	$\beta_1^* = 16,6917$; $\beta_2^* = -182,2162$	400 (171)	3,3573	3,2934	2,0987 %

A Tabela 3.1 apresentam os diferentes resultados de síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída para avaliação dos Teoremas 2.9 e 2.10 propostos, com a mudança de variáveis definida pelas Eq. (3.12) e (3.9). Em cada formulação obteve-se os parâmetros ótimos a serem fixados através de otimização evolucionária sendo os valores listados na segunda coluna. A terceira coluna apresenta o número total de gerações do algoritmo DE, N_g , e entre parênteses o número da geração, N_g^* , em que a solução ótima foi obtida (com precisão de 4 casas decimais). A coluna γ^* corresponde ao valor ótimo do custo garantido \mathcal{H}_∞ obtido através da solução do problema LMI de síntese. A coluna ξ^* é o valor máximo de norma calculado pela solução do problema (3.18), e $\Delta\xi^*$ é a variação percentual em relação ao melhor valor alcançado de ξ^* . Não foram realizados testes fixando os valores de β_1 e/ou β_2 uma vez que é esperado valores similares e o maior custo computacional é relacionado com a determinação da matriz L .

Diante dos resultados apresentados, nota-se que o Teorema 2.9 resultou no melhor desempenho \mathcal{H}_∞ otimizando a matriz L^* e os escalares β_1^* e β_2^* em relação as outras formulações de síntese da literatura. A matriz L ótima obtida pelo Teorema 2.9 é

dada por:

$$L^* = \begin{bmatrix} -0,3267 & -0,8337 & 0,2193 & -0,0571 \\ 1,5083 & -20,4141 & 0,0493 & 0,1041 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

O controlador que resultou no menor custo garantido \mathcal{H}_∞ , calculado pelo Teorema 2.9, com a mudança de variáveis, considerando a matriz L^* apresentada na Eq. (3.19) e os valores de β_1^* e β_2^* listados na Tabela 3.1, é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} -22,9728 & -1,2053 & 4,0542 & -0,4387 \\ 1,5083 & -20,4141 & -0,4649 & 3,6018 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

A seguir serão apresentadas as respostas temporais obtidas pelos controladores otimizados pelos Teorema 3 (Agulhari et al., 2010), Teorema 4 (Chang et al., 2015) e o Teorema 2.9 proposto, obtidas por simulação. Para cada controlador são apresentadas as respostas temporais dos níveis dos tanques inferiores e as respostas temporais das tensões das bombas de acordo com o controlador e as mudanças de sinais de referência aplicadas no sistema.

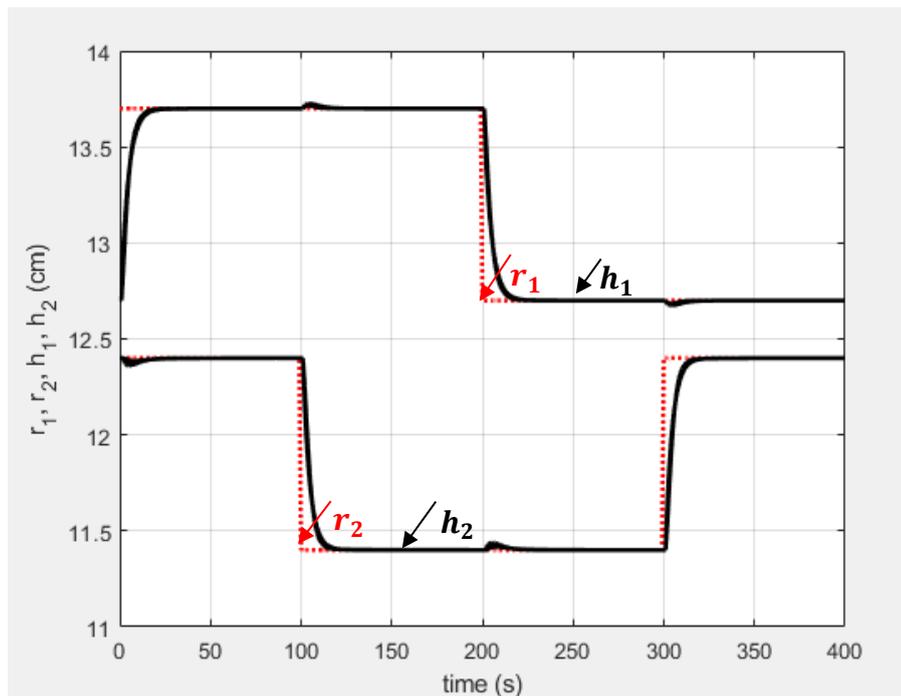


Figura 3.2 – Respostas temporais dos níveis nos tanques inferiores, para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 3 (Agulhari et al., 2010).

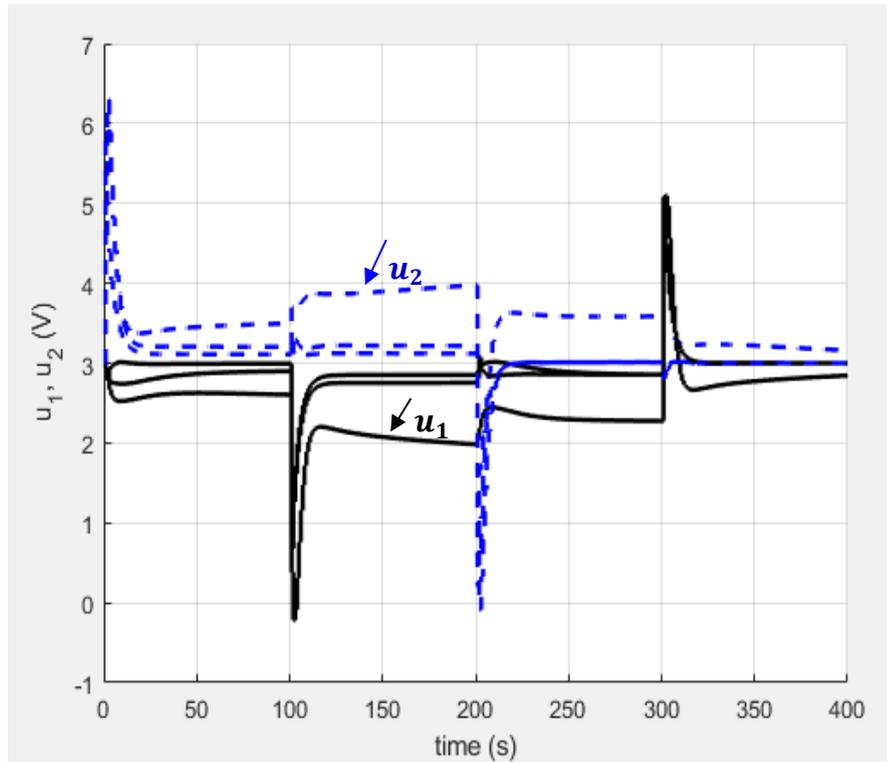


Figura 3.3 – Respostas temporais das tensões aplicadas nas bombas para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 3 (Agulhari et al., 2010).

Pelo Teorema 3 de Agulhari et al. (2010) foi obtido o seguinte controlador:

$$K = \begin{bmatrix} -20,3966 & -1,2546 & 4,4436 & -0,0118 \\ 0,4333 & -27,4199 & -0,3988 & 5,8391 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

A resposta temporal desse controlador é apresentada na Figura 3.2 sendo que as variações em degrau dos sinais de referência resultam em respostas transitórias amortecidas e com pouco acoplamento entre as malhas de controle. A Figura 3.3 mostra que esse controlador ocasionaria a saturação das tensões nas bombas com valores menores que zero. Esse sistema apresenta uma incerteza bastante significativa, como por ser visto pelos diferentes transitórios das variáveis manipuladas para cada vértice do modelo politópico. Entretanto, o controlador resulta em transitórios dos níveis bastante aproximados, o que é desejado.

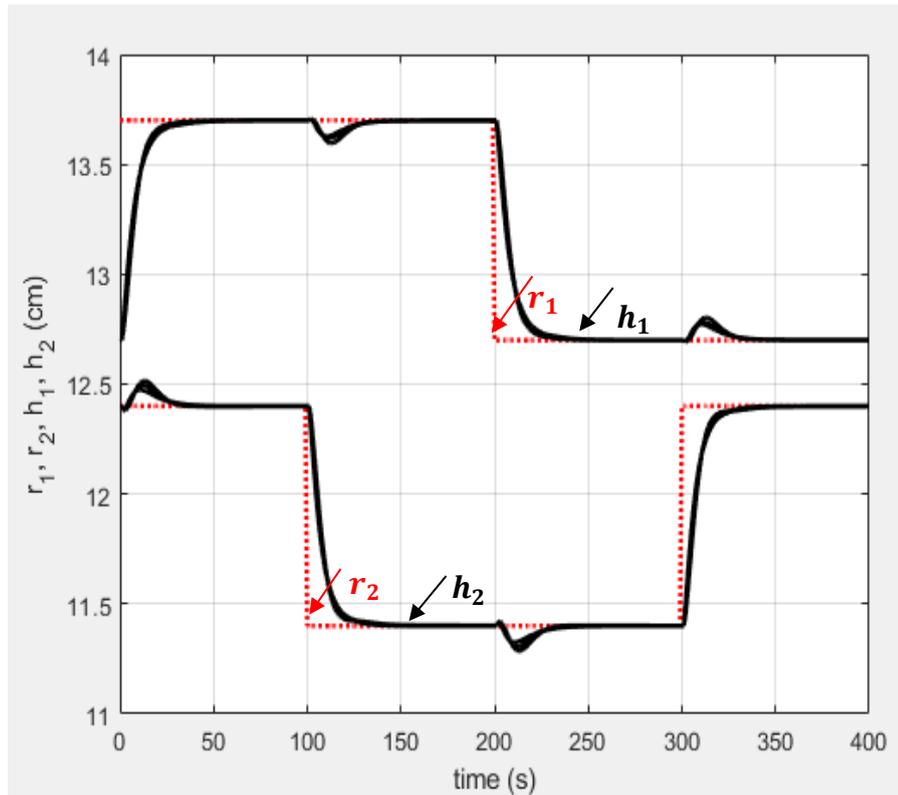


Figura 3.4 – Respostas temporais dos níveis nos tanques inferiores, para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 4 (Chang et al., 2015).

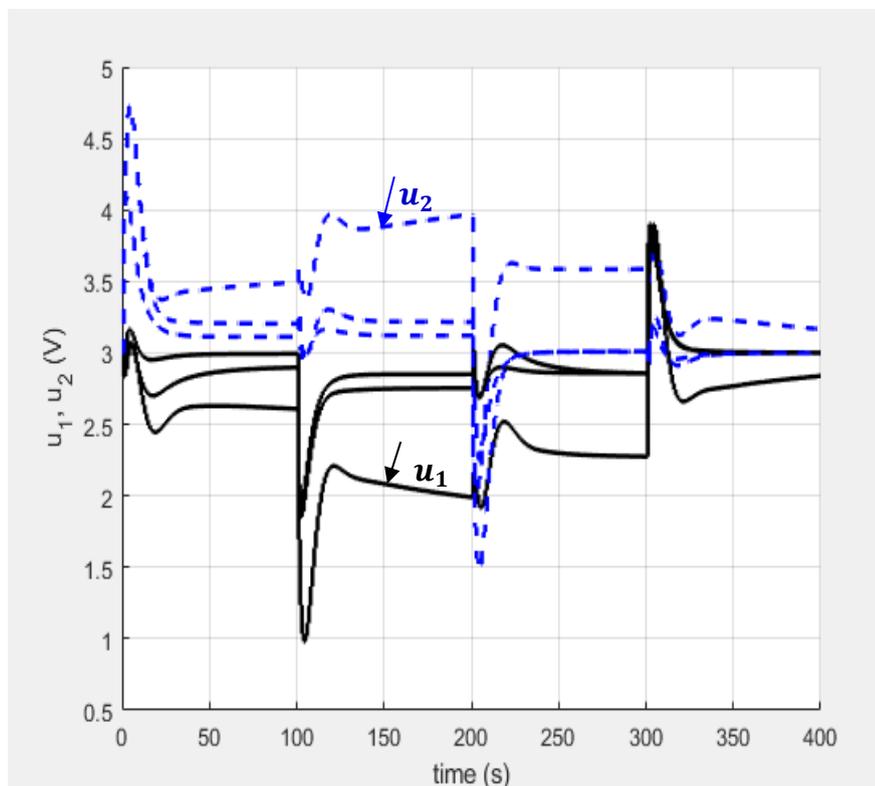


Figura 3.5 – Respostas temporais das tensões aplicadas nas bombas para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 4 (Chang et al., 2015).

Pelo Teorema 4 (Chang et al., 2010) foi obtido o seguinte controlador:

$$K = \begin{bmatrix} -14,0781 & 4,9973 & 1,8254 & -0,3302 \\ 3,9191 & -15,9080 & -0,1914 & 1,9392 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

As respostas temporais dos níveis inferiores, para os sinais de referência considerados, obtidas por esse controlador, são apresentadas na Figura 3.4. Também foram obtidas respostas amortecidas mas com maior acoplamento entre as malhas em relação ao controlador anterior. Por outro lado, a Figura 3.5 mostra que as tensões das bombas permanecem no intervalo que evitaria saturação.

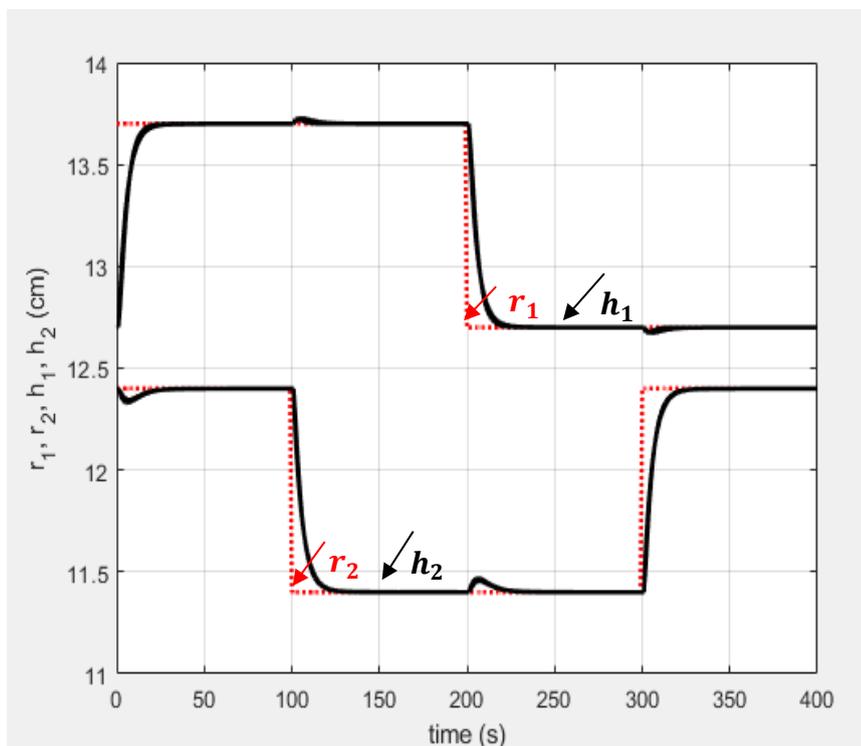


Figura 3.6 – Respostas temporais dos níveis nos tanques inferiores, para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 2.9 proposto no trabalho.

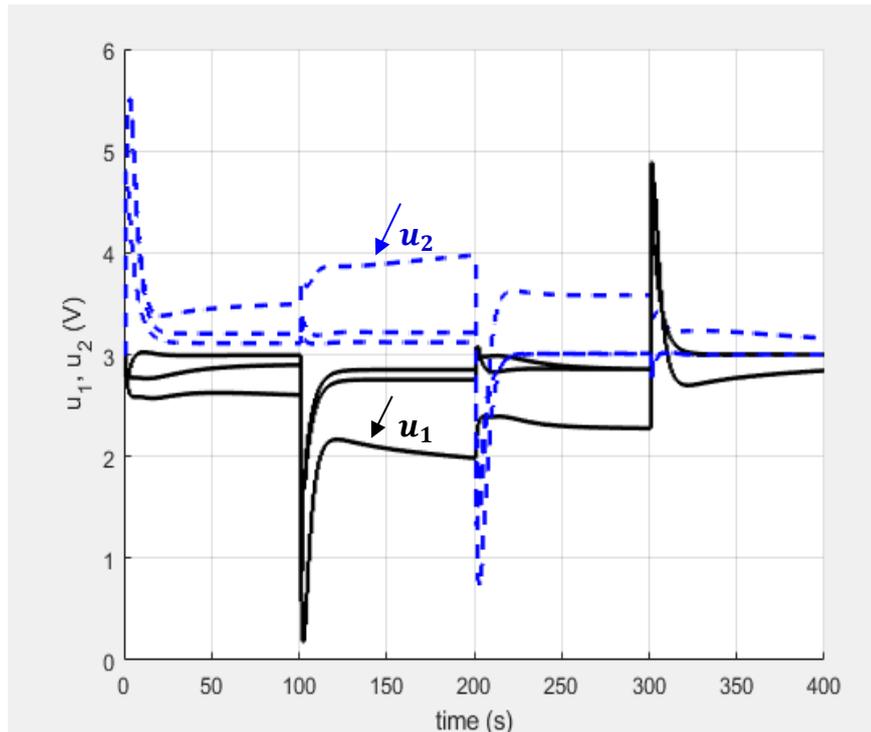


Figura 3.7 – Respostas temporais das tensões aplicadas nas bombas para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 2.9 proposto no trabalho.

Por fim, a Figura 3.6 apresenta as respostas temporais dos níveis relativos ao controlador obtido pelo Teorema 2.9 proposto, apresentado na Eq. (3.20), que corresponde ao menor custo garantido de todos os métodos. Nota-se uma resposta transitória similar aos controladores anteriores com pequeno acoplamento entre malhas. A Figura 3.7 mostra que as tensões das bombas permanecem no intervalo que evitaria saturação.

Pode ser verificado que a escolha no valor de ρ evitou as tensões negativas nas entradas das bombas, o que significaria saturação dos sinais de controle, para os sinais de referência considerados, na maioria dos controladores obtidos, com exceção do controlador obtido pelo método apresentado em Agulhari et al. (2010) que, apesar da resposta rápida de rastreamento e menor acoplamento entre malhas (equivalente a uma rejeição de distúrbio), similar ao do Teorema 2.9, as tensões ficam negativas, o que resultariam em saturação.

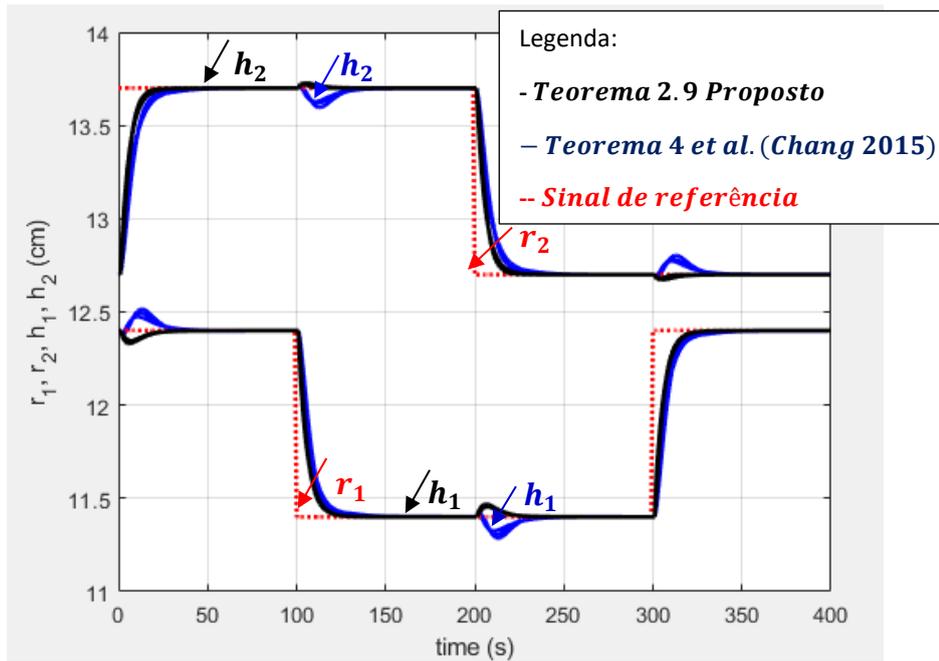


Figura 3.8– Respostas temporais dos níveis nos tanques inferiores, para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 4 (Chang et al., 2015) e o Teorema 2.9 no processo de Quatro Tanques.

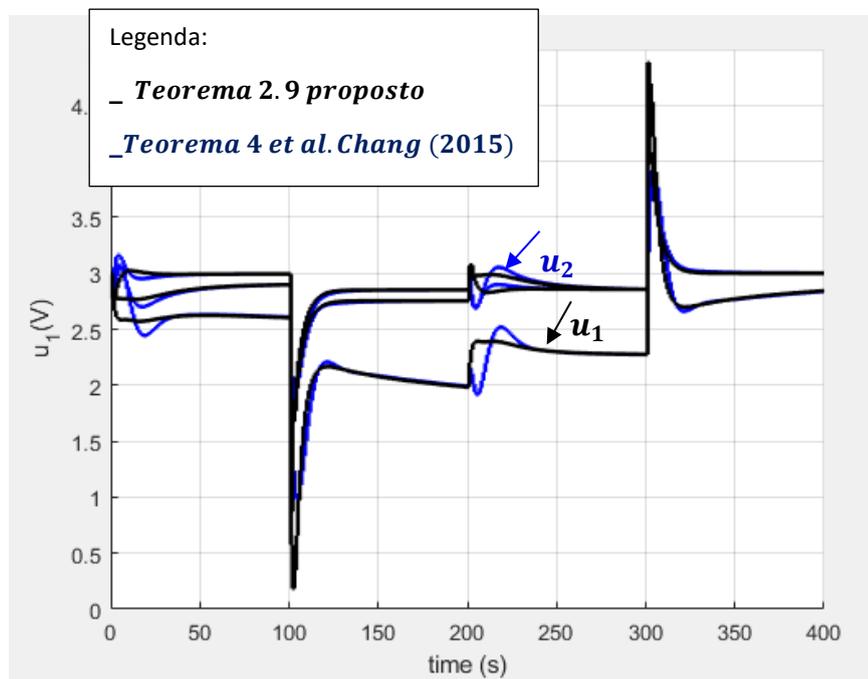


Figura 3.9– Respostas temporais das tensões aplicadas nas bombas em u_1 , para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 4 (Chang et al., 2015) e Teorema 2.9 proposto no processo de Quatro Tanques.

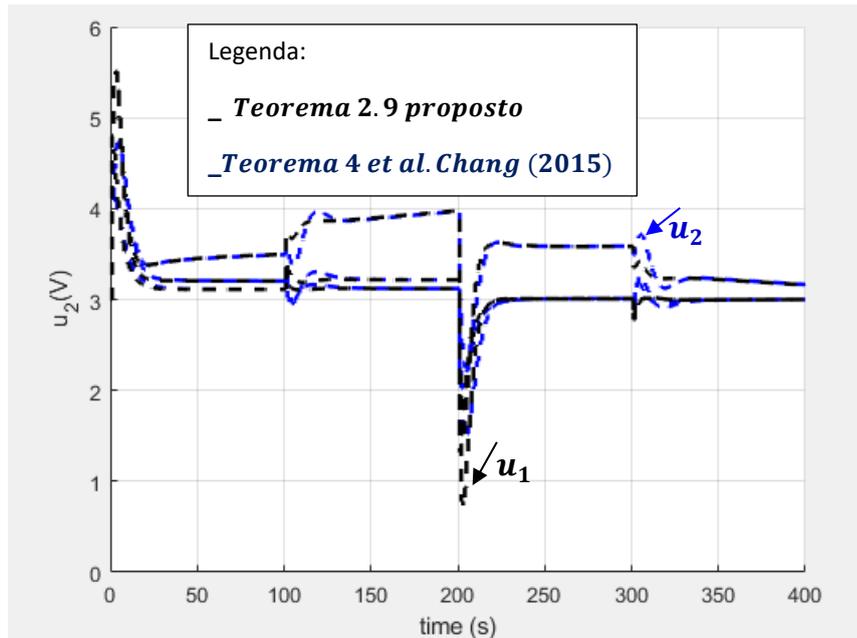


Figura 3.10– Respostas temporais das tensões aplicadas nas bombas em u_2 , para os quatro vértices, para o controlador obtido pelo Teorema 4 (Chang et al., 2015) e Teorema 2.9 proposto no processo de Quatro Tanques.

Para comparação dos controladores que não resultam em saturação das tensões das bombas, a Figura 3.8 apresenta as respostas temporais obtidas com o controlador calculado pelo Teorema 4 (Chang et al., 2015), melhor resultado dos métodos já existentes na literatura, e o controlador obtido pelo Teorema 2.9, com a mudança de variáveis, melhor resultado entre os dois teoremas propostos. Nota-se que o controlador obtido pelo teorema proposto apresentou respostas temporais melhores do que o Teorema 4 (Chang et al., 2015) por ter respostas transitórias mais rápidas (menores tempos de subida, isto é, tempo para ir de 10% a 90% do valor final) e menores acoplamentos entre as malhas de controle para o caso em que ambos os controladores evitam a saturação das tensões das bombas para as variações dos sinais de referência avaliadas. Pelas Figuras 3.9 e 3.10 pode ser observado a razão pela qual o controlador obtido pelo Teorema 2.9, com a mudança de variáveis, resulta em transitório mais rápido e com menor acoplamento entre malhas. Pode ser visto que o controlador obtido com o Teorema 4 (Chang et al., 2015) além de apresentar picos de tensões menores, também pode apresentar resposta inversa (o sinal varia inicialmente na direção oposta do valor final de regime estacionário), o que atrasa a ação de controle para eliminar a interferência da outra malha de controle.

3.3.2 Estudo de caso 2- Coluna de destilação binária

Considere o modelo linearizado no espaço de estados em tempo contínuo de uma coluna de destilação binária com oito pratos apresentado em Davison (1990), cujas matrizes são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 0,0043 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0095 & -0,0138 & 0,0046 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0095 & -0,0141 & 0,0063 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0095 & -0,0158 & 0,0111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0095 & -0,0158 & 0,022 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0095 & -0,0422 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0202 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0422 & 0,0280 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0202 & -0,0482 & 0,037 & 0 & 0,0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0202 & -0,572 & 0,042 & 0,0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0202 & -0,0483 & 0,0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0255 & -p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,01 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,000005 & -0,00004 & 0,0025 \\ 0,000002 & -0,00002 & 0,005 \\ 0,000001 & -0,00001 & 0,005 \\ 0 & 0 & 0,005 \\ 0 & 0 & 0,005 \\ -0,000005 & 0,00001 & 0,005 \\ -0,000001 & 0,00003 & 0,005 \\ -0,000004 & 0,000005 & 0,005 \\ -0,000002 & 0,000002 & 0,0025 \\ 0,00046 & 0,00046 & 0,0025 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_z = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 11} & I_3 \\ 0_{3 \times 11} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$D_{zw} = 0_{6 \times 1}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ \rho I_3 \end{bmatrix},$$

Neste estudo de caso são considerados dois parâmetros incertos, $p_1 \in [0,0112; 0,0168]$ e $p_2 \in [0,0148; 0,0222]$, e três variáveis de estados adicionais associadas às integrais dos erros das saídas em relação ao ponto de operação, que são incluídas nas variáveis medidas. As variáveis de desempenho são definidas para obter um compromisso entre a minimização das integrais dos erros e do esforço de controle.

As variáveis manipuladas do problema são: $|u_1| \leq 2,5$, temperatura do vapor do trocador de calor, posicionado na base da coluna de destilação, $|u_2| \leq 2,5$, temperatura do líquido refrigerante do condensador no topo da coluna, $|u_3| \leq 0,3$, vazão de refluxo no topo da coluna. O distúrbio, $|w_1| \leq 1$, é a variação da concentração da entrada de alimentação. As variáveis de processo são: $y_1 = x_{10}$, composição do componente mais volátil no trocador de calor (produto da base), $y_2 = x_1$, composição do componente mais volátil no condensador (produto do topo ou destilado), $y_3 = x_{11}$, pressão. As outras variáveis de estado são: x_2 até x_9 , composições dos componentes mais voláteis nos pratos 1 (mais alto) a 8 (mais baixo), respectivamente, e x_{12} a x_{14} , as integrais dos erros de rastreamento de cada variável de processo. As variáveis medidas são as três

variáveis de processo e as três integrais dos erros de rastreamento. Todas as variáveis representam variações em torno do ponto de operação. O sistema é discretizado pelo método ZOH adotando $h = 30s$ como período de amostragem. Foi adotado $\rho = 2$ para tentar limitar as variáveis de entrada dentro dos limites especificados para o sinal de perturbação.

Tabela 3.2 – Comparação entre os custos garantidos \mathcal{H}_∞ das formulações LMI para o estudo de caso da destilaria.

Formulação	Parâmetros	$N_g (N_g^*)$	γ^*	ξ^*	$\Delta\xi^*$
Teorema 3, Agulhari et al. (2010)	$\gamma = 0,0175$	20 (–)	17,6093	Instável	–
Lema 8, Chang et al. (2015)	–	–	20,1337	6,8605	82,6446%
Lema 9, Chang et al. (2015)	$\nu = 3,0920$	20 (–)	19,6491	7,1686	90,8471%
Teorema 4, Chang et al. (2015)	$\beta^* = 0,0250;$ $\rho^* = -0,3990$	40 (–)	22,3757	7,7546	106,4480%
Teorema 2.9	$\beta_1^* = 2,1414$ $\beta_2^* = -124,5790$	200 (137)	3,7567	3,7562	
Teorema 2.10	$\beta_1^* = -4,7800$ $\beta_2^* = 307,8357$	200 (192)	3,7569	3,7566	0,0106%

A Tabela 3.2 apresenta os resultados obtidos para os diferentes métodos de síntese. O traço entre parêntesis na coluna $N_g (N_g^*)$ indica que o algoritmo de otimização não localizou uma solução factível para o problema. Com o Teorema 3 apresentado em Agulhari et al. (2010), não foi localizado nenhum valor de γ que resultasse em um sistema robustamente estável. Como destacado na Tabela 3.2, o método proposto para otimização da matriz L e dos parâmetros β_1 e β_2 nos Teoremas 2.9 e 2.10, com a mudança de variáveis, apresentou o menor resultado de ξ^* . Também pode ser observado o menor conservadorismo (diferença entre γ^* e ξ^*) da formulação de síntese com os valores ótimos de L^* , β_1^* e β_2^* . O melhor controlador obtido pelo método proposto é dado por:

$$K = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,3656 & -1,9212 & -1,5553 & -0,0339 & 0,0004 & 0,0593 \\ -0,3704 & 1,8387 & 1,4493 & 0,0339 & -0,0003 & -0,0590 \\ -0,0152 & -0,0590 & 0,0076 & 0,0040 & 0,0012 & -0,0062 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

A matriz L otimizada obtida considerando o Teorema 2.9 é dada por:

$$L^* = \begin{bmatrix} -0,1741 & 0,5403 & 0,3138 & -0,8751 & -0,2257 & -0,1588 \\ 0,1958 & 0,2582 & 0,7828 & -0,4428 & -0,2538 & 0,6779 \\ 0,0235 & 0,9369 & 1,3680 & -0,3213 & -0,1697 & 0,5477 \\ -0,2565 & 0,1931 & 2,7304 & -0,1446 & -0,0100 & 0,2556 \\ -1,2097 & -1,1501 & -3,0130 & 0,0375 & 0,3934 & 0,1624 \\ -0,7788 & 0,1560 & -0,1829 & 1,0885 & 0,0857 & 0,4852 \\ 0,5981 & -0,5125 & -1,7478 & 0,6542 & -0,4535 & -1,0947 \\ -0,0242 & 0,2292 & -0,1814 & 1,4858 & 0,1539 & -1,1264 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

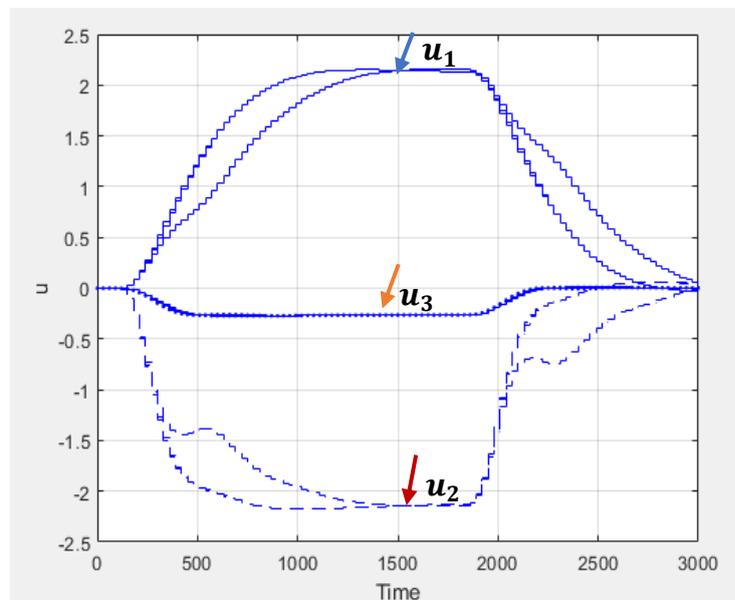


Figura 3.11 – Respostas temporais das variáveis manipuladas com o controlador obtido pelo Lema 8 (Chang et al., 2015), para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria.

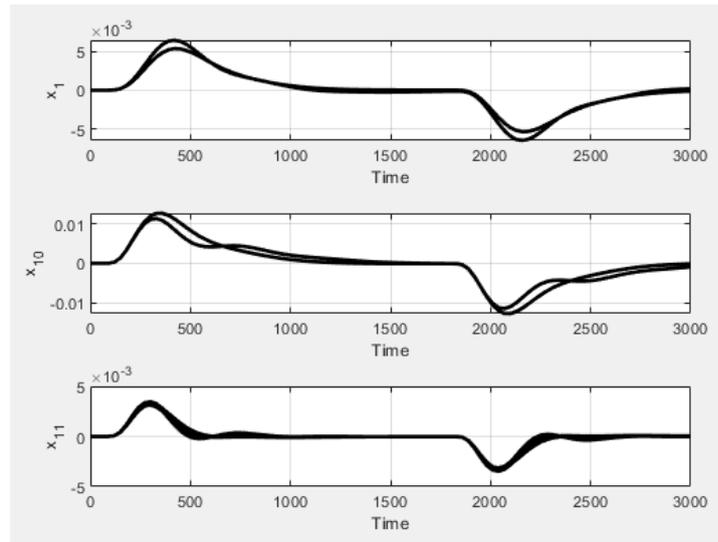


Figura 3.12 – Respostas temporais das variáveis de processo com o controlador obtido pelo Lema 8 (Chang et al., 2015), para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria.

As Figuras 3.11 e 3.12 apresentam as respostas temporais das variáveis manipuladas e de processo, respectivamente, com o controlador obtido pelo Lema 8 (Chang et al., 2015), melhor resultado entre as formulações já existentes consideradas. Na simulação, foi aplicado um sinal de distúrbio tipo pulso unitário, iniciando em $t = 60s$ e finalizando em $t = 1800s$. Pela Figura 3.11 pode ser observado que o valor de $\rho = 2$ garantiu que os três sinais de entrada não atingissem os valores limites que resultariam em saturação do sinal de controle. Pela Figura 3.12 pode ser observado que por meio da ação integral, o sistema de controle retorna ao ponto de operação (erros nulos em regime estacionário para as três variáveis de processo) em ambas as variações do sinal de distúrbio com respostas transitórias bem amortecidas.

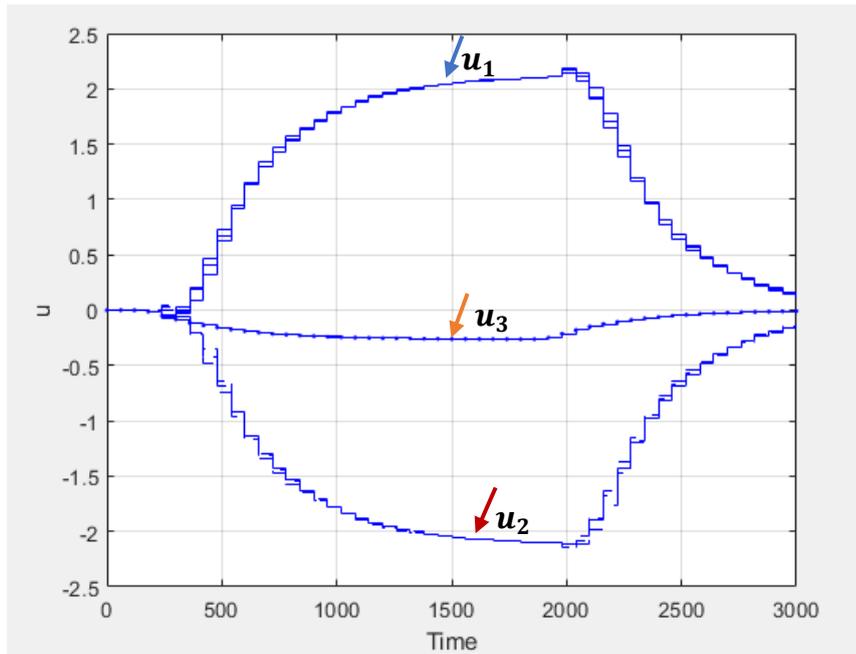


Figura 3.13 – Respostas temporais das variáveis manipuladas com o controlador obtido pelo Teorema 2.9 proposto para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria.

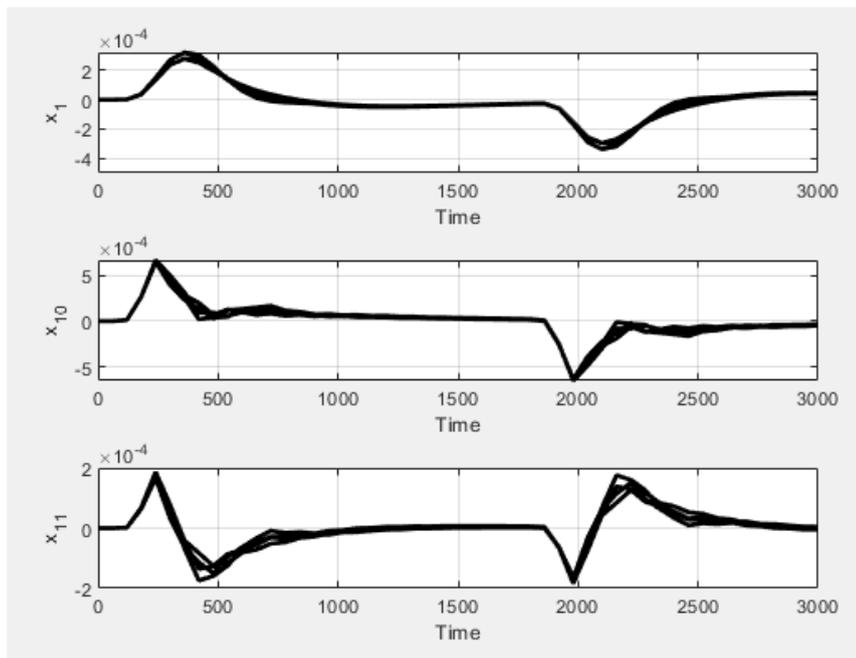


Figura 3.14 – Respostas temporais das variáveis de processo com o controlador obtido pelo Teorema 2.9 proposto, para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria.

As Figuras 3.13 e 3.14 apresentam as respostas temporais das variáveis manipuladas e do processo, respectivamente, com o controlador dado pela Eq. (3.23), obtido pelo Teorema 2.9 proposto, com a mudança de variáveis, considerando a matriz L^* apresentada na Eq. (3.24) e os valores de β_1^* e β_2^* listados na Tabela 3.2. Novamente

as variáveis manipuladas permaneceram dentro dos limites evitando saturação e as variáveis de processo apresentaram um comportamento menos suave que o controlador anterior mas com as amplitudes cerca de 10 vezes menores.

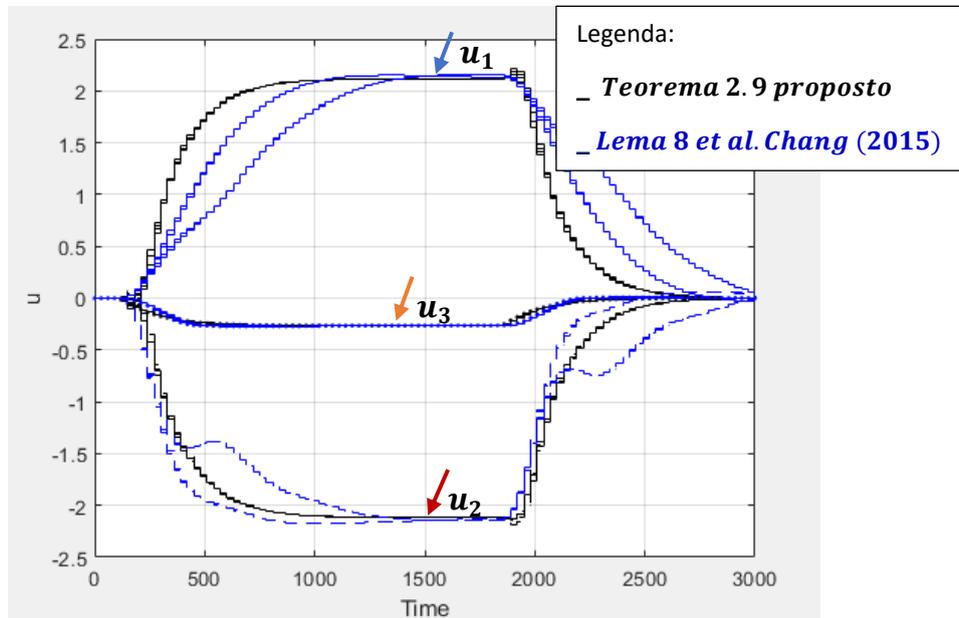


Figura 3.15 – Comparativo entre as respostas temporais das variáveis manipuladas com os controladores obtidos pelo Lema 8 (Chang et al., 2015) e pelo Teorema 2.9, para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria.

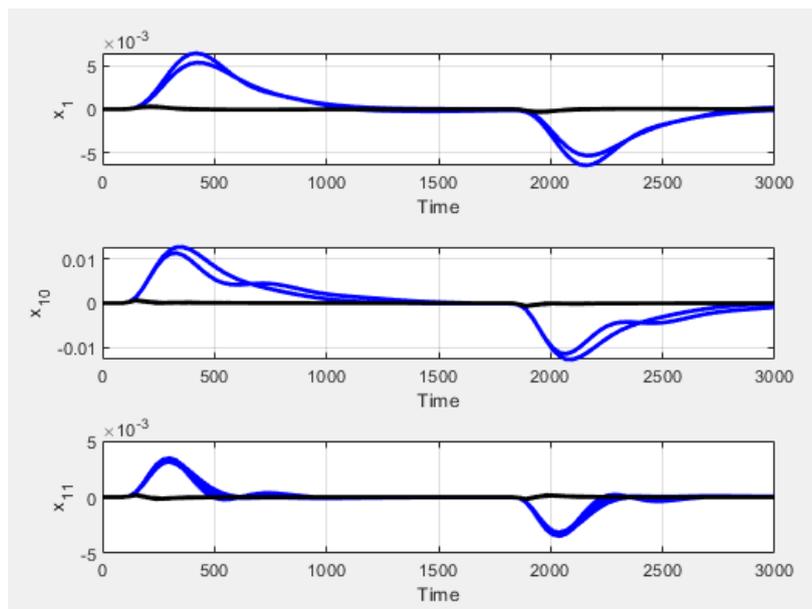


Figura 3.16 – Comparativo entre as respostas temporais das variáveis de processo com os controladores obtidos pelo Lema 8 (Chang et al., 2015), curva em azul, e pelo Teorema 2.9 proposto, curva em preto, para os quatro vértices do estudo de caso da destilaria.

Através das Figuras 3.15 e 3.16 é possível comparar os desempenhos dos controladores obtidos pelos Teorema 2.9 proposto e pelo Lema 8 (Chang et al., 2015). Pela Figura 3.15 pode ser observado que com o controlador obtido pelo Teorema 2.9, as variáveis manipuladas convergem mais rapidamente para o valor de regime estacionário do que o controlador obtido pelo Lema 8 (Chang et al., 2015), que apresenta maior sensibilidade às variações dos parâmetros do processo. Pela Figura 3.16 fica mais claro a diferença significativa de desempenho entre os dois controladores, sendo que o controlador obtido pelo Teorema 2.9 rejeita melhor o distúrbio apresentando respostas na casa de 10^{-4} enquanto que o Lema 8 (Chang et al., 2015) apresentou na casa de 10^{-3} .

3.4 Considerações finais

Neste capítulo, as formulações propostas para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados são aplicadas para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída para sistemas lineares invariantes no tempo incertos, em tempo discreto, representados por modelos politópicos, através de mudança de variáveis existente na literatura. Por meio dos estudos de casos foi possível observar que as formulações propostas podem gerar controladores com melhor desempenho do que formulações existentes. A mudança de variáveis inclui uma matriz adicional que deve ser fixada, cujo número de termos depende dos números de variáveis de estados e de saídas medidas. Foi proposto aplicar otimização evolucionária para calcular o valor ótimo dessa matriz em conjunto com os dois parâmetros de ajuste das formulações LMI propostas. Foram considerados dois estudos de casos de sistemas multivariáveis e os resultados das formulações propostas com parâmetros otimizados foi comparados com outros resultados da literatura. As formulações da literatura que também possuem parâmetros de ajuste também tiveram esses parâmetros otimizados baseados na mesma ideia. Os resultados demonstram que é possível obter controladores com desempenho significativamente melhores que os controladores obtidos com as outras formulações existentes na literatura.

4 Conclusão

4.1 Conclusões gerais

Neste trabalho foram propostas novas formulações LMI para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados para sistemas lineares invariantes no tempo incertos, em tempo discreto, representados por modelos politópicos. As novas formulações demandam a fixação a *priori* de dois parâmetros de ajuste, que permitem que as formulações LMI propostas tenham uma maior probabilidade de obter soluções factíveis ou soluções melhores, em problemas mais difíceis de obter solução. Foi proposto nesse trabalho um problema de otimização, para ser solucionado através de métodos de otimização evolucionária, para determinação desses dois parâmetros. Foi demonstrado através de dois exemplos que com a metodologia proposta é possível obter soluções para problemas mais complexos que justifica o custo computacional associado ao uso do algoritmo de otimização evolucionária. Também foi observado a importância de avaliar ambas as formulações LMI de síntese primal e dual sendo possível, como verificado, obter melhores resultados com a formulação dual. É fundamental o uso de técnicas de otimização para determinação dos parâmetros escalares ótimos considerando ainda que pequenas melhorias, não importando o custo computacional para obtê-las, são justificadas em termos dos benefícios a longo prazo.

As formulações LMI para síntese de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação de estados foram adaptadas para a síntese de controle robusto por realimentação estática de saída utilizando uma mudança de variáveis existente na literatura. Essa mudança de variáveis requer a determinação a *priori* de uma matriz de ajuste que afeta o desempenho do controlador resultante, sendo necessária uma forma de determinação da mesma para obtenção do controlador ótimo. Uma limitação na aplicação dessa mudança de variável é a necessidade das variáveis medidas dependerem apenas das variáveis de estados sem incertezas na matriz relacionando as variáveis medidas e as variáveis de estado. Desse modo não é possível tratar, por exemplo, problema de controle tolerante a falhas no caso da falha ocorrer nos sensores. Semelhante ao caso do controle por realimentação de estados, foi proposto aplicar otimização evolucionária para determinação dessa matriz de ajuste em conjunto com os outros dois parâmetros de ajuste das formulações LMI propostas. A metodologia proposta foi avaliada e

comparada com outras formulações existentes na literatura através de dois estudos de casos. Foi verificado pelos resultados obtidos que é possível obter controladores por realimentação estática de saída com desempenho significativamente melhor que os obtidos com outras formulações existentes na literatura. O método de síntese proposto pode apresentar um custo computacional bastante elevado para a determinação ótima da matriz da mudança de variáveis e os dois parâmetros de ajuste das formulações LMI propostas, de acordo com a complexidade do sistema, mas é justificado por resultar em mais qualidade do produto final, mais segurança do processo, menor custo da produção, menos consumo de energia e menos perdas no controle de qualidade.

4.2 Propostas de trabalhos futuros

As formulações propostas permitem considerar que os parâmetros de ajuste sejam dependentes de parâmetros. Desse modo é interessante desenvolver um estudo para avaliar se a uma maior complexidade da formulação LMI, necessária para tratar produto de dois termos dependentes dos parâmetros incertos, e o maior número de parâmetros de ajustes, irá resultar em melhor desempenho para o sistema de controle ou resolver problemas em que parâmetros de ajuste fixos não obtém soluções. Outra possibilidade é considerar uma matriz no lugar de um dos parâmetros escalares, o que geraria mais graus de liberdade, mas também maior complexidade para determinação de valor ótimo. Nesse trabalho foi considerado o método evolução diferencial clássico para solução dos problemas de otimização propostos. É importante avaliar outros métodos de otimização, incluindo as versões aprimoradas do método evolução diferencial e outros métodos, em busca de obter melhores resultados com menor custo computacional. Dependendo da complexidade do problema, o número de variáveis de otimização pode ser elevado sendo também importante considerar métodos de otimização mais adequados para tratar número elevado de variáveis de otimização.

4.3 Publicações associadas a este trabalho

Trabalhos apresentados em evento científico relacionados com o presente trabalho:

- Pauliana Rufino de Almeida Lima Oliveira e Eduardo Nunes Gonçalves. Novas

formulações LMI de síntese de controle \mathcal{H}_∞ discreto robusto por realimentação de estados. Sociedade Brasileira de Automática, XXIV Congresso Brasileiro de Automática, Fortaleza - CE, Brasil, 2022.

- Pauliana Rufino de Almeida Lima Oliveira e Eduardo Nunes Gonçalves. Controle \mathcal{H}_∞ discreto por realimentação estática de saída obtendo o melhor resultado da formulação LMI por otimização evolutiva. Sociedade Brasileira de Automática, XXIV Congresso Brasileiro de Automática, Fortaleza - CE, Brasil, 2022.

Apêndice A

Formulações de síntese de controle robusto \mathcal{H}_∞

Teorema 1 em Agulhari et al. (2010). Se existirem matrizes simétricas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, v$, tais que as seguintes LMIs são verificadas:

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i G_i + B_{u,i} Z_i \\ * & G_i + G_i^T - P_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, v, \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{bmatrix} P_i + P_j & A_i G_j + A_j G_i + B_{u,i} Z_j + B_{u,i} Z_i \\ * & G_i + G_j + G_i^T + G_j^T - P_i - P_j \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, v-1, j = i+1, \dots, v, \quad (\text{A.2})$$

então o sistema representado pela Eq. (3.1) é estabilizável pela ação de controle $u(k) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}x(k)$ sendo $G(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ dados por:

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i Z_i, \quad G(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i G_i, \quad \alpha \in \Omega \quad (\text{A.3})$$

Teorema 2 em Agulhari et al. (2010). Se existirem matrizes simétricas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, v$, e dado $\gamma > 0$, e se as seguintes LMI são verificadas:

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i G_i + B_{u,i} Z_i & 0 & B_{u,i} \\ * & G_i + G_i^T - P_i & G_i^T C_{z,i}^T + Z_i^T D_{zu,i}^T & 0 \\ * & * & \gamma^2 I & D_{zw,i} \\ * & * & * & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, v, \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{bmatrix} P_i + P_j & A_i G_j + A_j G_i + B_{u,i} Z_j + B_{u,j} Z_i \\ * & G_i + G_j + G_i^T + G_j^T - P_i - P_j \\ * & * \\ * & * \\ 0 & B_{w,i} + B_{w,j} \\ G_i^T C_{z,j}^T + G_j^T C_{z,i}^T + Z_i^T D_{zu,j}^T + Z_j^T D_{zu,i}^T & 0 \\ 2\gamma^2 I & D_{zw,i} + D_{zw,j} \\ * & 2I \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, v-1, j = i+1, \dots, v, \quad (\text{A.5})$$

então a ação de controle $u(k) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}x(k)$, sendo $G(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ dados pela Eq. (A.3), estabiliza o sistema incerto dado pela Eq. (3.1) com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ . O valor de γ pode ser minimizado para obtenção do controlador, substituindo $\mu = \gamma^2$

ou pode ser fixado a *priori* para obter um controlador sub-ótimo, possibilitando a obtenção de diferentes controladores.

Teorema 3 em Agulhari et al. (2010). Considerando as matrizes $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soluções do Teorema 1 ou Teorema 2, se existirem matrizes simétricas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $i = 1, \dots, v$, matrizes $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times q}$ e $\mu > 0$, e as seguintes LMIs são atendidas:

$$\begin{bmatrix} G_i^T P_i G_i & G_i^T A_i^T F_i + Z_i^T B_{u,i}^T F_i & 0 \\ * & F_i + F_i^T - P_i & F_i^T B_{w,i} \\ * & * & \mu I \\ * & * & * \\ * & * & * \\ G_i^T C_{z,i}^T H_i + Z_i^T D_{zu,i}^T H_i & G_i^T C_{y,i}^T L^T - Z_i^T R^T \\ 0 & F_i^T B_{u,i} \\ D_{zw,i}^T H_i & 0 \\ H_i + H_i^T - I & H_i^T D_{zu,i} \\ * & -R - R^T \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, v \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & 0 & \Theta_{14} & \Theta_{15} \\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} & 0 & \Theta_{25} \\ * & * & 3\mu I & \Theta_{34} & 0 \\ * & * & * & \Theta_{44} & \Theta_{45} \\ * & * & * & * & -3(R + R^T) \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, N, j \neq i, j = 1, \dots, N, \quad (\text{A.7})$$

em que $\mu = \gamma^2$ e

$$\Theta_{11} = G_i^T P_i G_j + G_j^T P_i G_i + G_i^T P_j G_i,$$

$$\Theta_{12} = G_i^T A_i^T F_j + G_j^T A_i^T F_i + G_i^T A_j^T F_i + Z_i^T B_{u,i}^T F_j + Z_j^T B_{u,i}^T F_i + Z_i^T B_{u,j}^T F_i,$$

$$\Theta_{14} = G_i^T C_{z,i}^T H_j + G_j^T C_{z,i}^T H_i + G_i^T C_{z,j}^T H_i + Z_i^T D_{zu,i}^T H_j + Z_j^T D_{zu,i}^T H_i + Z_i^T D_{zu,j}^T H_i,$$

$$\Theta_{15} = (G_i^T C_{y,i}^T + G_i^T C_{y,j}^T + G_j^T C_{y,i}^T) L^T - (2Z_i^T + Z_j^T) R^T,$$

$$\Theta_{22} = 2F_i + F_j + 2F_i^T + F_j^T - 2P_i - P_j,$$

$$\Theta_{23} = F_i^T B_{w,i} + F_i^T B_{w,j} + F_j^T B_{w,i},$$

$$\Theta_{25} = F_i^T B_{u,i} + F_i^T B_{u,j} + F_j^T B_{u,i}$$

$$\Theta_{34} = D_{zw,i}^T H_i + D_{zw,i}^T H_j + D_{zw,j}^T H_i,$$

$$\Theta_{44} = 2H_i + H_j + 2H_i^T + H_j^T - 3I,$$

$$\Theta_{45} = H_i^T D_{zu,i} + H_i^T D_{zu,j} + H_j^T D_{zu,i},$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & 0 & Y_{14} & Y_{15} \\ * & Y_{22} & Y_{23} & 0 & Y_{25} \\ * & * & 6\mu I & Y_{34} & 0 \\ * & * & * & Y_{44} & Y_{45} \\ * & * & * & * & -6(R - R^T) \end{bmatrix} > 0,$$

$$i = 1, \dots, v-2, j = i+1, \dots, v-1, k = j+1, \dots, v, \quad (\text{A.8})$$

com

$$Y_{11} = G_j^T P_i G_k + G_k^T P_i G_j + G_i^T P_j G_k + G_k^T P_j G_i + G_i^T P_k G_j + G_j^T P_k G_i,$$

$$Y_{12} = G_j^T A_i^T F_k + G_k^T A_i^T F_j + G_i^T A_j^T F_k + G_k^T A_j^T F_i + G_i^T A_k^T F_j + G_j^T A_k^T F_i + Z_j^T B_{u,i}^T F_k + Z_k^T B_{u,i}^T F_j + Z_i^T B_{u,j}^T F_k + Z_k^T B_{u,j}^T F_i + Z_i^T B_{u,k}^T F_j + Z_j^T B_{u,k}^T F_i,$$

$$Y_{14} = G_j^T C_{z,i}^T H_k + G_k^T C_{z,i}^T H_j + G_i^T C_{z,j}^T H_k + G_k^T C_{z,j}^T H_i + G_i^T C_{z,k}^T H_j + G_j^T C_{z,k}^T H_i + Z_j^T D_{zu,i}^T H_k + Z_k^T D_{zu,i}^T H_j + Z_i^T D_{zu,j}^T H_k + Z_k^T D_{zu,j}^T H_i + Z_i^T D_{zu,k}^T H_j + Z_j^T D_{zu,k}^T H_i,$$

$$Y_{15} = (G_i^T C_{y,j}^T + G_j^T C_{y,i}^T + G_i^T C_{y,k}^T + G_k^T C_{y,i}^T + G_j^T C_{y,k}^T + G_k^T C_{y,j}^T) L^T - 2(Z_i^T + Z_j^T Z_k^T) R^T,$$

$$Y_{22} = 2(F_i + F_j + F_k + F_i^T + F_j^T + F_k^T - P_i - P_j - P_k),$$

$$Y_{23} = F_i^T B_{w,j} + F_i^T B_{w,i} + F_i^T B_{w,k} + F_k^T B_{w,i} + F_j^T B_{w,k} + F_k^T B_{w,j},$$

$$Y_{25} = F_i^T B_{u,j} + F_j^T B_{u,i} + F_i^T B_{u,k} + F_k^T B_{u,i} + F_j^T B_{u,k} + F_k^T B_{u,j},$$

$$Y_{34} = D_{zw,i}^T H_j + D_{zw,j}^T H_i + D_{zw,i}^T H_k + D_{zw,k}^T H_i + D_{zw,j}^T H_k + D_{zw,k}^T H_j,$$

$$Y_{44} = 2(H_i + H_j + H_k + H_i^T + H_j^T + H_k^T) - 6I,$$

$$Y_{45} = H_i^T D_{zu,j} + H_j^T D_{zu,i} + H_i^T D_{zu,k} + H_k^T D_{zu,i} + H_j^T D_{zu,k} + H_k^T D_{zu,j},$$

então a ação de controle por realimentação estática de saída $u(k) = L^{-1} R y(k)$

estabiliza o sistema (3.1) com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ .

Lema 8 em Chang et al. (2015). Considere o sistema dado pela Eq. (3.1) com $C_y(\alpha) = C_y$, sendo C_y uma matriz com posto completo de linhas e $D_{yw} = 0$ e $D_{yu} = 0$, se existirem matrizes L_1, Q_j e $S_j, j = 1, 2, \dots, v$ e escalar $\mu > 0$ satisfazendo as seguintes LMIs:

$$\Gamma_{ii} < 0, i = 1, 2, \dots, v \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, i < j, i, j = 1, 2, \dots, v, \quad (\text{A.10})$$

sendo:

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} -S_j - S_j^T + T^{-1}Q_jT^{-T} & * & * & * \\ 0 & -\mu I & * & * \\ A_iTS_j + B_{u,i}[L_1 \ 0] & B_{w,i} & -Q_j & * \\ C_{z,i}TS_j + D_{z,u,i}[L_1 \ 0] & D_{z,w,i} & 0 & -I \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, v, \quad (\text{A.11})$$

com T escolhido tal que $C_yT = [I \ 0]$ e

$$S_j = \begin{bmatrix} S_{11}^j & 0 \\ S_{21}^j & S_{22}^j \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, v, \quad (\text{A.12})$$

então, o sistema é assintoticamente estável com custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\bar{\mu}}$ para ação de controle por realimentação estática de saída dada por $u(k) = L_1S_{11}^{-1}y(k)$.

Lema 9 em Chang et al. (2015). Considere o sistema representado pela Eq. (3.1) com $C_y(\alpha) = C_y$, C_y com posto completo de linhas e $D_{yw} = 0$ e $D_{yu} = 0$. Para um dado, parâmetro escalar ν , se existirem matrizes $V, U, P_j, J_{1j}, J_{2j}, J_{3j}$ e $G_j, j = 1, 2, \dots, v$ e $\mu > 0$, satisfazendo as seguintes LMIs:

$$\Theta_{ii} < 0, i = 1, 2, \dots, v, \quad (\text{A.13})$$

$$\Theta_{ij} + \Theta_{ji} < 0, i < j, i, j = 1, 2, \dots, v, \quad (\text{A.14})$$

com

$$\Theta_{ij} = \begin{bmatrix} -G_j - G_j^T + P_j + J_{1j} & * & * \\ J_{2j} & -\mu I + J_{3j} & * \\ A_iG_j + B_{u,i}V[I \ 0]T^T & B_{w,i} + B_{u,i}VD_{yw,j} & -P_j \\ C_{z,i}G_j + D_{z,u,i}V[I \ 0]T^T & D_{z,w,i} + D_{z,u,i}VD_{yw,j} & 0 \\ 0 & 0 & V^TB_{u,i}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
* & * & * & * \\
* & * & * & * \\
* & * & * & * \\
-V & * & * & * \\
V^T D_{zu,i}^T & -vU - vU^T & * & * \\
0 & (C_y G_j - U[I \ 0]T^T)^T & -\frac{J_{1i}}{v^2} & * \\
0 & (D_{yw,i} - UD_{yw,j})^T & -\frac{J_{2i}}{v^2} & -\frac{J_{3j}}{v^2}
\end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

$$\Theta_{ii} < 0, i = 1, 2, \dots, v, \quad (\text{A.16})$$

sendo T escolhida de tal forma que $C_y T = [I \ 0]$, então o sistema é assintoticamente estável com o custo \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\mu}$, para ação de controle por realimentação estática de saída dada por $u(k) = VU^{-1}y(k)$.

Teorema 4 em Chang et al. (2015). Considerando o sistema em malha aberta da Eq. (3.1), dados os escalares β e ρ , se existirem matrizes V, U, P_j e $G_j, j = 1, 2, \dots, \mu$ satisfazendo a seguinte LMI:

$$\begin{aligned}
\Pi_{ii} &< 0, i = 1, 2, \dots, \mu, \\
\Pi_{ij} + \Pi_{ji} &< 0, i < j, i, j = 1, 2, \dots, \mu,
\end{aligned}$$

com,

$$\Pi_{ij} = \begin{bmatrix}
-G_j - G_j^T + P_j & * & * \\
0 & -\gamma^2 I + J_{3i} & * \\
A_i G_j + B_i V \mathcal{F}_{p \times n}^i & E_i + B_i V H_j & -P_j \\
C_{1i} G_j + D_i V \mathcal{F}_{p \times n}^j & F_i + D_i V H_j & \rho \mathcal{F}_{q \times p}^T V^T B_i^T \\
C_{2i} G_j - U \mathcal{F}_{p \times n}^j & H_i - U H_j & \beta V^T B_i^T \\
* & * & * \\
* & * & * \\
* & * & * \\
-I + H_e(\rho D_i V \mathcal{F}_{p \times q}) & * & * \\
-\beta V^T D_i^T - \rho U \mathcal{F}_{p \times q} & -\beta U - \beta U^T
\end{bmatrix} > 0, \quad (\text{A.17})$$

sendo $\mathcal{F}_{p \times q}$ dado por:

$$\mathcal{F}_{p \times q} = \begin{cases} I, & p = q \\ [I_{p \times p} \ 0_{p \times (q-p)}], & p < q \\ \begin{bmatrix} I_{q \times q} \\ 0_{(p-q) \times q} \end{bmatrix}, & p > q \end{cases},$$

e

$$\mathcal{F}_{p \times n}^j = \begin{cases} (C_2 T C_2^T)^{-1} [I & 0], \\ [I & 0] T^T, \\ C_2, \\ C_{2j}, \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 \text{ é fixo, ou seja, } C_2(\alpha) = C_2, C_2 \text{ tem posto completo} \\ \text{e } C_2 T C_2^T \text{ não é singular, } C_2 T = [I & 0] \\ C_2 \text{ é fixo, } C_2(\alpha) = C_2, C_2 \text{ tem posto completo e} \\ C_2 T C_2^T \text{ é singular, } C_2 T = [I & 0] \\ C_2(\alpha) \text{ é fixo, ou seja, } C_2(\alpha) = C_2 \\ \text{e } C_2 \text{ não tem posto completo de linhas} \\ C_2(\alpha) \text{ não é fixo,} \end{cases}$$

então o sistema é assintoticamente estável para a ação de controle por realimentação estática de saída dada por $u(k) = VU^{-1}y(k)$ com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ .

Referências Bibliográficas

Agulhari, C.M., Oliveira, R.C., and Peres, P.L. (2010). Robust \mathcal{H}_∞ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. In *Proceedings of the 2010 american control conference*, 4677–4682. IEEE, Baltimore, MD, USA. DOI: 10.1109/CDC.2010.5620901.

Agulhari, C.M., Oliveira, R.C., and Peres, P.L. (2012). LMI Relaxations for Reduced-Order Robust \mathcal{H}_∞ Control of Continuous-Time Uncertain Linear Systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, 6(57), 1532-1537. DOI: 10.1109/TAC.2011.2174693.

Bernussou, J., Peres, P., and Geromel, J. (1989). A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1), 65–72. DOI:10.1016/0167-6911(89)90022-4.

Braga MF, Morais CF, Tognetti ES, Oliveira RC, Peres PL. A new procedure for discretization and state feedback control of uncertain linear systems. In: *52nd IEEE conference on decision and control* IEEE.; 2013; Firenze, Italy: 6397–6402. DOI: 10.1109/cdc.2013.6760901.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, PA. DOI:10.1137/1.9781611970777.

Chang, X.H., Park, J.H., and Zhou, J. (2015). Robust static output feedback \mathcal{H}_∞ control design for linear systems with polytopic uncertainties. *Systems & Control Letters*, 85, 23–32. DOI:10.1016/j.sysconle.2015.08.007.

Davison, E.J. (1990). Benchmark problems for control system design. *Report of the IFAC Theory Committee*.

De Oliveira, M.C., Bernussou, J., and Geromel, J.C. (1999). A new discrete-time robust stability condition. *Systems & control letters*, 37(4), 261–265. DOI:10.1016/S0167-6911(99)00035-3.

De Oliveira, M.C., Geromel, J.C., and Bernussou, J. (2002). Extended \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International journal of control*, 75(9), 666–679. DOI:10.1080/00207170210140212.

De Oliveira, P.J., Oliveira, R.C.L.F., Leite, V.J.S., Montagner, V.F., and Peres, P.L.D.

(2004). \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40, 1053–1061. DOI:10.1016/j.automatica.2004.01.025.

Gahinet, P. and Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International journal of robust and nonlinear control*, 4(4), 421–448. DOI: 10.1002/rnc.4590040403.

Gonçalves, E. N. Análise e síntese de controladores e filtros robustos para sistemas com domínios politópicos de incerteza. 2006. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.

Gonçalves, L.S. e Gonçalves, E. N. (2021). Controle robusto \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída combinando formulações LMI e otimização evolutiva. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Federal de Educação tecnológica de Minas Gerais. Belo Horizonte, p.97.2021.

Gopmandal, F. and Ghosh, A. (2021). A hybrid Search based synthesis of static output feedback controllers for uncertain systems with application to multivariable pid control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(12), 6069–6090. DOI:10.1002/rnc.5581.

He, Y., Wu, M., and She, J.H. (2005). Improved bounded real-lemma representation and \mathcal{H}_∞ control of systems with polytopic uncertainties. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 52(7), 380–383. DOI:10.1109/TCSII.2005.850418.

Johansson, K. H., 2000. The Quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory Process with an Adjustable Zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, May, 8(3), pp. 456-465. DOI: 10.1109/87.845876.

Lim, Jae Sik; LEE, Young Il. Design of discrete-time multivariable PID controllers via LMI approach. In: 2008 *International Conference on Control, Automation and Systems*. IEEE, 2008. p. 1867-1871. DOI: 10.1109/ICCAS. 2008.4694403.

Lofberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *IEEE international conference on robotics and automation*, 284–289. IEEE. DOI:10.1109/CACSD.2004.1393890.

Mehdi, D., Boukas, E.K., and Bachelier, O. (2004). Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems. *IMA Journal of mathematical control and information*, 21(1), 1–13. DOI: 10.1093/imamci/21.1.1.

Morais, C.F., Braga, M.F., Oliveira, R.C., and Peres, P.L. (2013). Robust state feedback control for discrete-time linear systems via LMI with a scalar parameter. In *2013 American Control Conference*, 3870–3875. IEEE, Washington, DC, USA. DOI:10.1109/ACC.2013.6580430.

Rantzer, A. (2016). On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma for positive systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(5), 1346–1349. DOI:10.1109/TAC.2015.2465571.

Sadabadi, M. S., and Peaucelle, D. (2016). From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey. *Annual reviews in control*, (42), 11-26. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2016.09.014.

Storn, R. and Price, K. (1997). Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4), 341–359. DOI:10.1023/A:1008202821328.

Sturm, J.F. (1999). Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, 11(1-4), 625–653. DOI: 10.1080/10556789908805766.

Palacios-Quiñonero, F., Rubió-Massegú, J., Rossella, J., and Karimib, H. (2014). Feasibility issues in static output-feedback controller design with application to structural vibration control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(1), 139–155. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2013.08.011.

Pipeleers, G., Demeulenaere, B., Swevers, J., and Vandenberghe, L. (2009). Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, 58(7), 510–518. DOI:10.1016/j.sysconle.2009.03.001.

Rubió-Massegú, J., Rossell, J., Karimi, H., and Palacios- Quiñonero, F. (2013). Static output-feedback control under information structure constraints. *Automatica*, 49(1), 313–316. DOI:10.1016/j.automatica.2012.10.012.

Syrmos, V.L., Abdallah, C.T., Dorato, P., and Grigoriadis, K. (1997). *Static output feedback – a survey*. *Automatica*, 33(2), 125–137. DOI:10.1016/S0005-1098(96) 001410.

Toh, K.C., Todd, M.J., and Tutuncu, R.H. (1999). SDPT3 — a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization methods and software*, 11(1-4), 545–581. DOI:10.1080/10556789908805762.