Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional

TRANSFERÊNCIA DE EMARANHAMENTO EM UMA CADEIA DE QUBITS, DO TIPO ESCADA, EM PRESENÇA DE DESORDEM CONTROLADA UTILIZANDO SEQUÊNCIAS CAÓTICAS

Talita Gomes Silva Leite

Orientador: Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Belo Horizonte
Março de 2022

Talita Gomes Silva Leite

TRANSFERÊNCIA DE EMARANHAMENTO EM UMA CADEIA DE QUBITS, DO TIPO ESCADA, EM PRESENÇA DE DESORDEM CONTROLADA UTILIZANDO SEQUÊNCIAS CAÓTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional.

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados.

Orientador: Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional
Belo Horizonte
Março de 2022

Leite, Talita Gomes Silva
L533t Transferência de emaranhamento em uma cadeia de qubits, do tipo escada, em presença de desordem controlada utilizando sequências caóticas / Talita Gomes Silva Leite. – 2022.
xii, 55 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.
Orientador: Giancarlo Queiroz Pellegrino.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Emaranhamento quântico – Teses. 2. Desordem – Teses. 3. Comportamento caótico nos sistemas – Teses. 4. Caos – Matemática – Teses. 5. Sequências (Matemática) – Teses. I. Pellegrino, Giancarlo Queiroz. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 519.6

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

Dedico este trabalho aos meus pais Gedeom e Edna, que não mediram esforços para me apoiarem.

Agradecimentos

A Deus agradeço, por me fortalecer para chegar ao fim dessa etapa tão importante da minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino, que com empenho dedicou sua orientação, e transmitiu tanto conhecimento e sabedoria.

Meus queridos pais, Gedeom e Edna, tenho muito a agradecer-lhes, por preparem meu caminho, se sacrificarem e se dedicarem para que eu chegasse até aqui. Agradeço aos meus irmãos, que estiveram comigo, demonstrando amor e compreensão. E, às minhas amadas sobrinhas, Luísa e Helena, agradeço pelo carinho e por me proporcionarem momentos de alegria.

Ao meu marido, Daniel, que incentiva meus sonhos e estudos, e que partilha comigo cada momento.

Agradeço aos meus sogros, Carlos e Lusiane, pelo apoio constante durante todos esses anos.

A minha colega de mestrado Alessandra, agradeço pelas conversas, apoio e troca de informações.

Agradeço ao CEFET/MG Campus II, pelo espaço cedido e pela oportunidade da continuação dos meus estudos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Por fim, gostaria de agradeçer a todos que de alguma forma colaboraram para a elaboração deste trabalho.

“Qualquer um que não se choque com a Mecânica Quântica é porque não a entendeu.” (NIELS BOHR)

Resumo

Este trabalho consiste no estudo da transferência de emaranhamento em um arranjo no qual duas cadeias de átomos de spin 1/2 interagem configurando uma escada com interações em cada perna e entre as pernas descrito por um Hamiltoniano, no qual os potenciais locais e as taxas de acoplamento estão desordenadas e possuem duas representações, uma por sequências randômicas e outra por sequências caóticas. O estudo propõe utilizar as sequências caóticas como estratégia para produzir desordem controlada com intensidades entre -W e W, e sequências binárias geradas a partir dessas sequências caóticas. Foram gerados gráficos para a caracterização dos espectros e autovetores de energia. Posteriormente, foi desenvolvido o estudo da evolução temporal a partir da transmissão, de uma ponta a outra da cadeia, de emaranhamento presente em um estado inicial do tipo estado de Bell. Neste trabalho, realizamos uma caracterização qualitativa obtida através de cálculo numérico para as quantidades envolvidas.
Palavras-chave: Transferência de Emaranhamento. Desordem. Sequências Caóticas.

Abstract

This work consists of the study of entanglement transfer in an arrangement in which two chains of atoms of spin 1/2 interact configuring a ladder with interactions in each leg and between legs described by a Hamiltonian, in which the local potentials and coupling rates are disordered and have two representations, one by random sequences and another by chaotic sequences.The study proposes the use of the chaotic sequences as a way of producing controlled disorder with intensities between -W and W, and binary sequences generated from these chaotic sequences. Graphs were generated for the characterization of energy spectra and eigenvectors. Subsequently, the study of the temporal evolution of the entanglement transmission, from one end of the chain to the other, of the entanglement present in a initial state of the Bell type. In this work, we performed a qualitative characterization obtained through numerical calculation for the quantities involved.
Keywords: Entanglement Transfer, Disorder, Chaotic Sequences.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

No começo do século XX, a física clássica já não era mais capaz de explicar diversos resultados experimentais; surge, então, a física quântica, que reúne um conjunto de postulados que descrevem a evolução temporal e os resultados de observação de grandezas de um sistema físico ao nível microscópico (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018). Somente podemos conhecer o mundo microscópico por meio dos nossos aparelhos ou sentidos, que pertencem ao mundo macroscópico (EISBERG et al., 1994).

O princípio da superposição está no centro das características mais intrigantes do mundo microscópico (RAIMOND; BRUNE; HAROCHE, 2001). Quando observamos um sistema físico, ele perde esta característica quântica, ou seja, perde a superposição e se projeta em um único estado. Nos átomos, por exemplo, os estados de superposições se mantêm, em geral, por pequenas frações de segundos, pois o átomo interage com o meio e a superposição se perde, como se estivessem fazendo constantes medidas e, assim, o sistema assume sua forma clássica (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1965) (NUSSENZVEIG, 2014).

Aplicando a superposição a sistemas compostos, remete-se ao conceito de emaranhamento. Ou seja, após duas partículas quânticas interagirem, elas não podem mais serem descritas independentemente uma da outra. Em um estado emaranhado, cada sistema pode revelar informações sobre o outro, comportando-se como um dispositivo de medição (VIEIRA, 2018).

Protocolos de transmissão em sistemas de informação sempre foram objeto de investigação. Particularmente, a possibilidade de transmissão de emaranhamento através de cadeias de elementos quânticos foi estudada por (ALMEIDA et al., 2019) num arranjo em que duas cadeias de átomos de spin ½ interagem, configurando uma escada em que as cadeias formam as pernas da escada e as interações entre as cadeias formam os degraus.

De outra parte, no estudo de sistemas desordenados, a localização de Anderson (PERES, 2008) é caracterizada por estados quânticos com amplitude apreciável restrita a regiões finitas do espaço. Em uma dimensão, ocorre localização qualquer que seja a intensidade da desordem.

Tomando a ideia dos dois paragráfos anteriores, no trabalho (ALMEIDA et al., 2019), os autores tomam duas cadeias de átomos de spin $1/2$ em uma configuração do tipo escada, em que a intensidade da interação entre átomos vizinhos de cada cadeia (perna da escada) é dada por uma regra dependente da posição do átomo, e em que a energia de cada átomo e a intensidade da interação entre dois átomos em mesma posição nas cadeias (degrau) é dada por uma sequência desordenada de amplitudes. Nesse sistema, os autores mostraram que é possível identificar um subespaço livre de localização, que poderia atuar como um tipo de canal de transmissão e que permitiria o processo de transferência de emaranhamento. Entretanto, esse canal leva à localização e ao vazamento de informação para outro subespaço que está mais desordenado. Um dos principais resultados daquele trabalho é que maiores amplitudes de desordem impedem que a informação vaze de um subespaço para outro.

Sendo assim, pretendemos estudar a transferência de emaranhamento nesse mesmo sistema, mas sob efeito de uma desordem controlada. No estudo de (OLIVEIRA, 2018), o autor apresenta várias sequências caóticas geradas por mapas caóticos, mostrando que é possível um controle da desordem baseado no parâmetro de caoticidade dos mapas.

Neste trabalho, investigamos a transferência de emaranhamento entre os extremos da escada descrita anteriormente, quando a desordem é dada pelas sequências caóticas geradas por três tipos de mapas caóticos que possuem diferentes características.

No segundo capítulo, um Hamiltoniano é apresentado para descrever o modelo de escada em que os átomos de uma perna interagem apenas com seus vizinhos e com o átomo correspondente da outra perna. Neste estudo, as energias individuais dos átomos e as interações que formam os degraus da escada são dadas por sequências desordenadas – aleatórias como no estudo de (ALMEIDA et al., 2019) e acrescentaremos ao estudo sequências caóticas e binárias. Consideramos a situação em que apenas uma excitação é introduzida no sistema, numa das pontas da escada. Em seguida, escreve-se uma base ortonormal para o espaço de Hilbert resultante e com ela uma matriz para o Hamiltoniano. Para o estudo da transmissão de emaranhamento, tomar-se-á o estado inicial em que os primeiros átomos (qubits) de cada perna encontram-se num estado de emaranhamento máximo, um estado de Bell. Ainda, no segundo capítulo, dois quantificadores são propostos como método de avaliação da transmissão de emaranhamento à outra ponta da escada.

O terceiro capítulo refere-se à caracterização e à comparação dos espectros e autovetores do Hamiltoniano para três tipos de sequências com características distintas, que são sequências desordenadas, caóticas e binárias.

No quarto capítulo, estuda-se a evolução temporal a partir do estado inicial escolhido e sob efeito das sequências caóticas e, particularmente, a transmissão de emaranhamento até a ponta final da cadeia, utilizando dois métodos: a Fidelidade e a Concorrência.

No quinto e último capítulo são apresentadas as principais conclusões e propostas para melhoria e trabalhos futuros.

Queremos enfatizar que, no presente trabalho, não fazemos teoria do emaranhamento, que se remete aos conceitos e definições da medida $\eta(t)$ (Fidelidade com respeito a um estado quântico de interesse) e da Concorrência $C(t)$ (uma das medidas de emaranhamento), e sim, realizamos uma caracterização qualitativa obtida através de cálculo numérico para as quantidades envolvidas.

2 Formalismo

2.1 Sistema e Modelo

O objetivo principal do trabalho é transmitir com alta fidelidade um estado emaranhado de um qubit de uma extremidade a outra de um determinado sistema. No trabalho de (ALMEIDA et al., 2019), os autores estudaram um arranjo em que duas cadeias de N átomos de spin $\frac{1}{2}$ interagem configurando uma escada, em que duas cadeias de átomos interagindo com os vizinhos mais próximos com intensidade J_n formam as pernas (j_1, j_2) da escada e as interações entre cadeias formam os degraus $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_N)$, conforme ilustrado na figura 1.

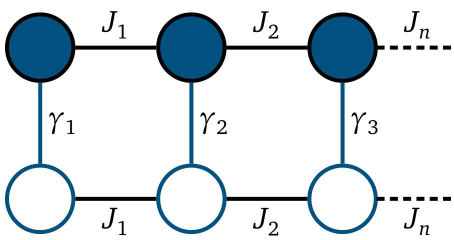

Figura 1 – Esquema do arranjo de duas cadeias de átomos de spin $\frac{1}{2}$.

No presente trabalho, estudou-se a transmissão de emaranhamento para um esquema do tipo esquema da figura 1, no qual cada perna da escada pode ser descrita por um Hamiltoniano da forma

$$H^j = \sum_{n=1}^{N} \epsilon_{n,j}\sigma^+_{n,j}\sigma^-_{n,j} + \sum_{n=1}^{N-1} J_{n,j}(\sigma^+_{n+1,j}\sigma^-_{n,j} + H.c.), \tag{1}$$

com $j = 1, 2$, e H.c. representando o operador conjugado hermiteano. Já os degraus da escada podem ser descritos pelo termo

$$H_I = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n(\sigma^+_{n,2}\sigma^-_{n,1} + H.c.). \tag{2}$$

Assim, o hamiltoniano total será

$$H = H^1 + H^2 + H_I, \tag{3}$$

sendo que $\sigma^+_{n,j}$ aumenta e $\sigma^-_{n,j}$ abaixa o spin no n-ésimo sítio da j-ésimo cadeia ($j = 1, 2$) e $\epsilon_{n,j}$ representa a energia do nível superior do n-ésimo átomo da cadeia j, eventualmente modulada por um campo magnético local. Esses operadores agem criando e destruindo excitações dos átomos ao longo da cadeia.

Para representar o hamiltoniano na forma matricial foram estabelecidos uma base ortonormal e operadores básicos, que o descrevem de modo flexível e análogo. A base β ortonormal foi construída com a ideia dos estados de Fock (FOCK, 1932), de modo a se ter um controle sobre o número de átomos ocupando o nível superior, ou seja, há excitações no sistema. Nesse estudo, tomaremos sempre o caso em que há apenas um átomo excitado, uma excitação no sistema. Com isso, os estados quânticos permitidos serão as combinações lineares dos estados

$$| n >^{(j)} = \sigma^{+}_{n,j} \bigotimes_{i=1}^{2} | 00...0 >^{i} \tag{4}$$

onde, $(| 0 > = \{|00...0 >^{1} \bigotimes |00...0 >^{2}\})$ representa o estado com zero excitações. Um exemplo é o estado $|1 >^{1} = \sigma^{+}{}_{1,1}|00...0 > \bigotimes |00...0 >= |10...0 > \bigotimes |00...0 >$.

Com estas escolhas, uma base ortonormal suficiente para descrever os estados quânticos do sistema neste espaço $2N$-dimensional pode ser

$$\beta = \begin{array}{l} \{|10...0 > \bigotimes |00...0 >, |01...0 > \bigotimes |00...0 >, ..., |00...1 > \bigotimes |00...0 > , \\ |00...0 > \bigotimes |10...0 > ,|00...0 > \bigotimes |01...0 >, ..., |00...0 > \bigotimes |00...1 >\}, \end{array} \tag{5}$$

que é denotada $\beta = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_N}, \overrightarrow{v_{N+1}}, \overrightarrow{v_{N+2}}, ..., \overrightarrow{v_{2N}}\}$, onde $\overrightarrow{v_1}$ refere-se à excitação no primeiro átomo localizado na primeira perna, e $\overrightarrow{v_{2N}}$ refere-se à excitação do último átomo localizado na segunda perna. Com isso, esta base indica também a posição (sítio) sobre as duas cadeias.

O Hamiltoniano H conserva o número total de excitações gerando um espaço de Hilbert de dimensão $2N$, portanto a matriz hamiltoniana possui ordem $[H]_{2Nx2N}$. Os elementos de matriz que formam o Hamiltoniano para cada posição ij são,

$$H_{ij} =< \overrightarrow{v_i} |H| \overrightarrow{v_j} >, \tag{6}$$

sendo i a i-ésima linha e j a j-ésima coluna de H.

Por conseguinte, utilizando a definição (6) foi possível chegarmos à forma matricial do hamiltoniano (3)

$$H = \begin{bmatrix} \epsilon_{1,1} & J_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ J_{1,1} & \epsilon_{2,1} & J_{2,1} & 0 & \vdots & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & J_{2,1} & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & J_{N-1,1} & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{N-1,1} & \epsilon_{N,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \gamma_N \\ \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \epsilon_{1,2} & J_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \vdots & J_{1,2} & \epsilon_{2,2} & J_{2,2} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & J_{2,2} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & J_{N-1,2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \gamma_N & 0 & \cdots & 0 & J_{N-1,2} & \epsilon_{N,2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

De modo a garantir a transferência com boa fidelidade ao estado quântico inicial, uma classe de redes de quibts foi tratada por (CHRISTANDL et al., 2004), com acoplamentos entre vizinhos

$$J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2), \tag{8}$$

com $n = (1, 2, ..., N-1)$.

Escolhemos utilizar a definição (8) nos operadores básicos que compõem as diagonais acima e abaixo da diagonal principal da matriz hamiltoniana (7); assim os $J's$ podem ser descritos como: $J_{n,1} = J_{n,2} = J_n$.

Olhando para o hamiltoniano, uma configuração do tipo:

1. $\epsilon_{n,1} = \epsilon_{n,2}$ leva ao desacoplamento de ambas as pernas;
2. $\epsilon_{n,1} \neq \epsilon_{n,2}$ retém algum grau de desordem no canal e promove o vazamento de informações;
3. $\epsilon_{n,2} = \epsilon_{n,1} + d_n$ mantém o canal razoavelmente seguro, mesmo permitindo pequenos desvios em $\epsilon_{n,2}$ ao redor de $\epsilon_{n,1}$. Sendo d_n um número aleatório em um intervalo [-Δ, Δ], com $\Delta \ll$ W (no qual W é a intensidade da desordem).

Definimos também que $\epsilon_{n,1} = \gamma_n$.

Em todo o trabalho utilizaremos as sequências nas energias $\epsilon_{n,1}$ e as sequências com uma pequena variação nas energias $\epsilon_{n,2}$, conforme mostrado acima (item 3).

2.2 Sequências

Tendo em vista a matriz hamiltoniana (7), utilizamos várias sequências que representam as energias no local $\epsilon_{n,j}$ e as interações entre os degraus γ_n. Para as interações entre átomos vizinhos em cada perna, utilizamos a definição (8), como visto anteriormente.

Trabalhamos com três tipos de sequências, que são:

1. Sequências Desordenadas

   Em (ALMEIDA et al., 2019), os autores utilizaram sequências desordenadas em um intervalo [-W, W]. Para gerar uma sequência aleatória entre -W e W, utilizamos a função $rand$ do Matlab, que gera uma sequência aleatória uniformemente distribuída e modulada por um fator multiplicativo que determina o intervalo da sequência para cada um dos três casos que serão abordados mais adiante, com o propósito de validar nossos procedimentos.

2. Sequências Caóticas

   No presente trabalho, queremos acrescentar o estudo com sequências caóticas proposto em (OLIVEIRA, 2018), onde o autor expõe várias sequências caóticas geradas por três tipos de mapas caóticos; com isso, pretende-se controlar a desordem da sequência variando o parâmetro de caoticidade do mapa que a gera.

   Sequências caóticas são obtidas diretamente dos mapas caóticos, onde o caos pode ser observado para determinados valores dos parâmetros (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 2000). No presente trabalho, utilizamos relações matemáticas que caracterizam cada mapa caótico e através de um algoritimo geramos as sequências caóticas, que possuem uma função de recorrência $w_{n+1} = f_r(w_n)$ (OLIVEIRA; PELLEGRINO, 2018):

   - Mapa Logístico
   $$w_{n+1} = rw_r(1-w_n).$$
   - Mapa da Barraca
   $$w_{n+1} = r\left(1-2\left|w_n-\frac{1}{2}\right|\right).$$
   - Mapa Gaussiano
   $$w_{n+1} = e^{-bw_n^2}+r.$$

   Os mapas caóticos possuem um parâmetro r que controla a caoticidade. Para cada mapa caótico escolhemos estrategicamente alguns valores de r (abrangem regiões de caos e janelas de periodicidade), que são mostrados nos capítulos subsequentes.

3. Sequências Binárias

   Posteriormente foi realizada a binarização dessas sequências caóticas. Interessantemente, no trabalho (OLIVEIRA, 2018) mostrou-se que, mesmo após a binarização da sequência desordenada original, a sequência binária resultante conserva o controle da desordem, observado na sequência original como função do parâmetro de caoticidade. O uso de sequências binárias neste estudo tem apelo potencialmente experimental, que se considera a vasta literatura envolvendo sistemas de variados graus de desordem obtidos via utilização de sequências de substituição e também sua realização experimental.

   As sequências binárias que foram utilizadas são derivadas das sequências caóticas; para que isso fosse realizado, implementamos um algoritmo para o mapa logístico e para o mapa da barraca que retorna:

a) $V_n = 1$, se $w_n \leq 0.5$;
b) $V_n = 2$, se $w_n > 0.5$.

Para o mapa gaussiano o algoritmo retorna:

a) $V_n = 1$, se $w_n \leq 0$;
b) $V_n = 2$, se $w_n > 0$.

w_n é definido como os elementos das sequências caóticas e V_n os elementos que foram binarizados a partir das sequências caóticas.

2.3 Estado Inicial

O estado inicial escolhido deve atender duas características: a primeira que ele represente uma excitação em uma extremidade da escada e, por último, que esse estado esteja emaranhado para que a transferência de emaranhamento seja realizada.

O objetivo é estudar a transmissão de emaranhamento com alta fidelidade de uma extremidade da cadeia para outra, utilizando os três tipos de sequências descritas anteriormente. Para isso, consideraremos um estado inicial particular do tipo Bell entre os dois átomos iniciais das duas pernas da escada. Suas propriedades são bem conhecidas, mas mencionaremos aqui apenas uma (SYCH; LEUCHS, 2009), onde os estados de Bell formam uma base ortonormal para o espaço de Hilbert de dois qubits, ou seja, cada estado pode ser escrito como uma superposição dos estados de Bell, remetendo ao conceito de emaranhamento. Assim, os primeiros átomos de cada perna do estado inicial encontram-se num estado de emaranhamento máximo. Em (ALMEIDA et al., 2019) foi proposto um estado inicial particular que caracteriza um estado de Bell: $[|\psi(0)>] = |1->$, definido como

$$|\psi(0)>=|1->=\frac{1}{\sqrt{2}}[|1>^{(1)}-|1>^{(2)}], \tag{9}$$

$$|\psi(0)>=|1->=\frac{1}{\sqrt{2}}[|10...0>\bigotimes|00...0>-|00...0>\bigotimes|10...0>].$$

Este estado inicial pode ser representado por uma matriz coluna, com suas coordenadas na base β na qual estamos trabalhando até o momento dadas por

$$[|\psi(0)>]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

2.4 Método

Serão propostos dois quantificadores como método de avaliação da transmissão de emaranhamento à outra ponta da escada. Usaremos dois medidores para estudar a probabilidade de se ter $|\psi(t)\rangle \approx |N- >$ em algum tempo t, em que $|N-\rangle$ é o estado $\frac{1}{\sqrt{2}}[|00...1 > \otimes|00...0 > -|00...0 > \otimes|00...1 >]$ maximamente emaranhado na extremidade final da escada:

1. A fidelidade $\eta(t) = | < N - |\psi(t) > |$ (no qual $< N - |$ é o estado de Bell) é a projeção do estado quântico no tempo t sobre o estado maximamente emaranhado associado aos dois átomos finais da escada.
2. A concorrência $C(t) = 2|f_N{}^{(1)}(t) f_N{}^{(2)}(t)|$ (onde $f_N^{(j)}(t) = \left\langle N^{(j)}|\psi(t)\right\rangle$, ou seja, é a projeção do estado quântico sobre o último átomo da perna j) como medidor de emaranhamento na ponta final, segundo o procedimento realizado em (ALMEIDA et al., 2019).

No capítulo 4 estudamos a evolução temporal e transferência de emaranhamento segundo o método acima.

3 Elementos Cinemáticos

Neste capítulo, realizou-se uma análise qualitativa para espectros e autovetores (densidade de probabilidade), anotando as principais mudanças, regiões de parâmetro r em que há janelas de periodicidade, regiões que possuem maior caoticidade, concentração dos autoestados e aparecimento de $gaps$. Utilizou-se sequências randômicas no intervalo [-W, W], sequências caóticas para três tipos de mapas caóticos e sequências binárias que foram originadas das sequências caóticas.

Para efeitos de comparação apresentamos três tipos de gráficos para a caracterização dos espectros e para a caracterização dos autovetores, respectivamente: o primeiro utilizando sequências totalmente aleatórias (através da função $rand$); o segundo utilizando sequências binárias derivadas a partir das sequências aleatórias que foram geradas utilizando a função $rand$; e a última utilizando uma sequência de período 2, do tipo (2, 1, 2, 1, 2, ...). Essas sequências foram utilizadas para a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e para os acoplamentos inter-cadeia γ_n. Nos três casos utilizamos para os acoplamentos intra-cadeia a relação de fidelidade $J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2)$. Em todas as simulações deste capítulo estabelecemos $2N$=1000.

1. Caracterização dos Espectros

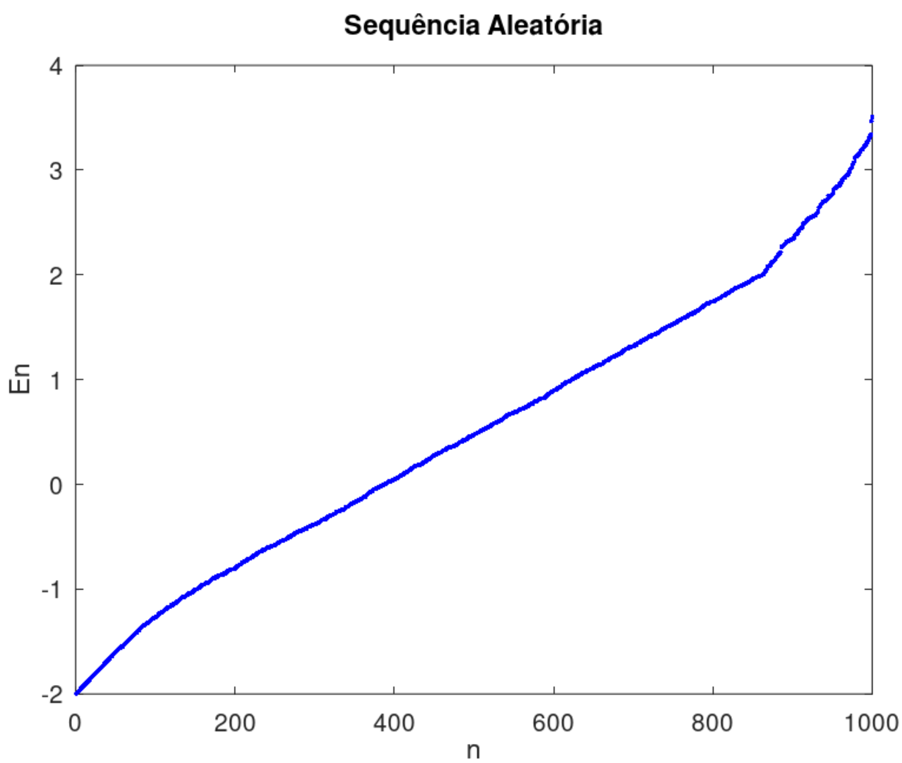

Figura 2 – Curva espectral gerada utilizando uma sequência aleatória.

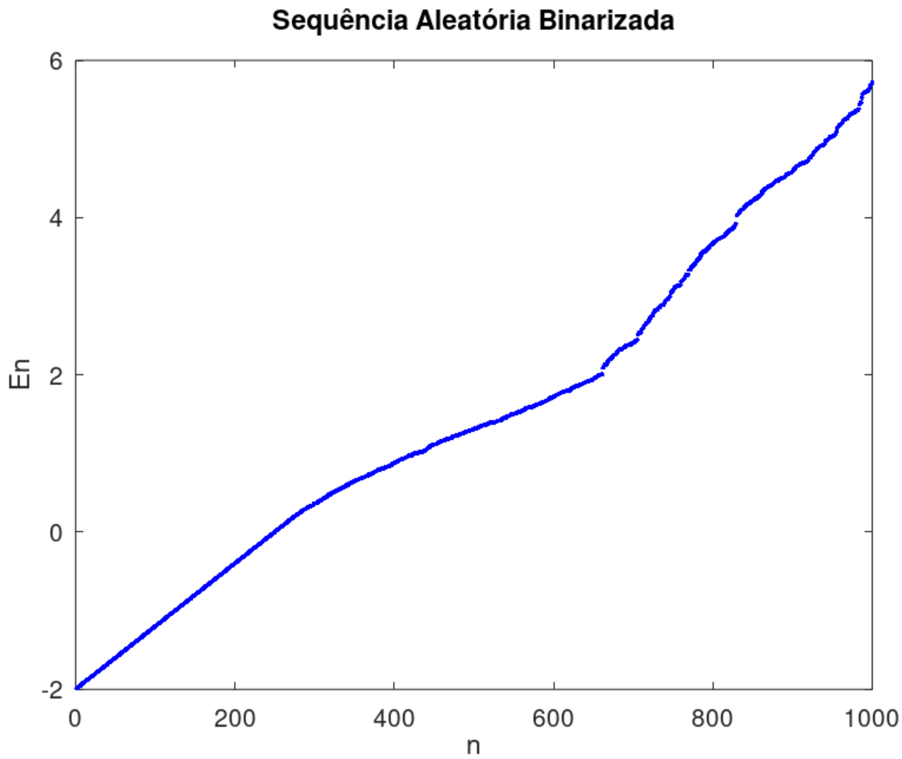

Figura 3 – Curva espectral gerada utilizando uma sequência aleatória binarizada.

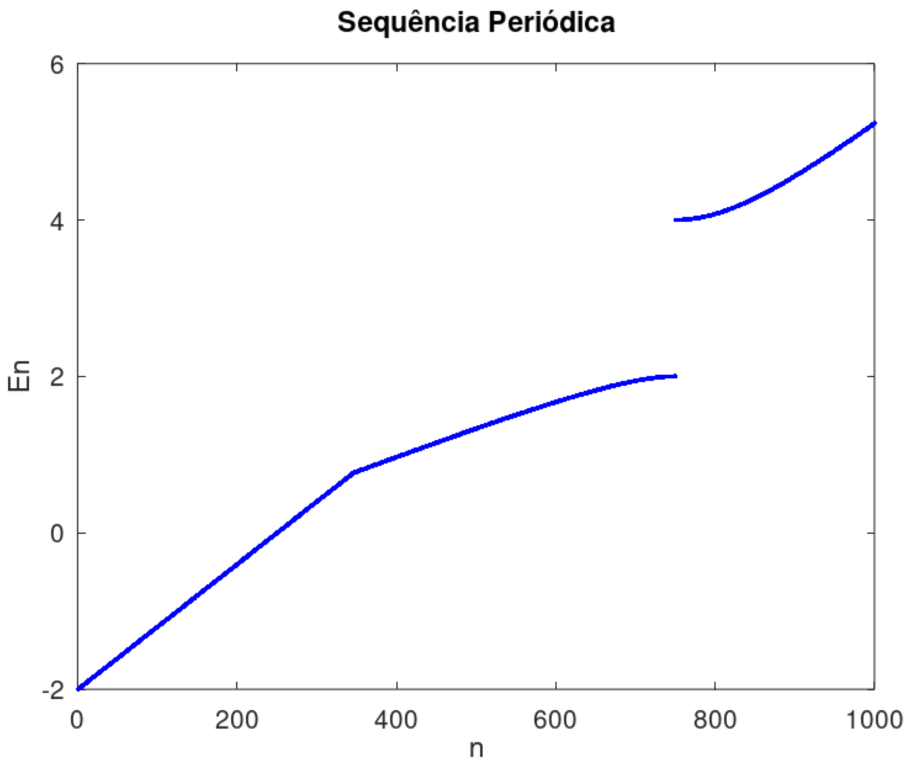

Figura 4 – Curva espectral gerada utilizando uma sequência de período 2.

2. Caracterização dos Autovetores

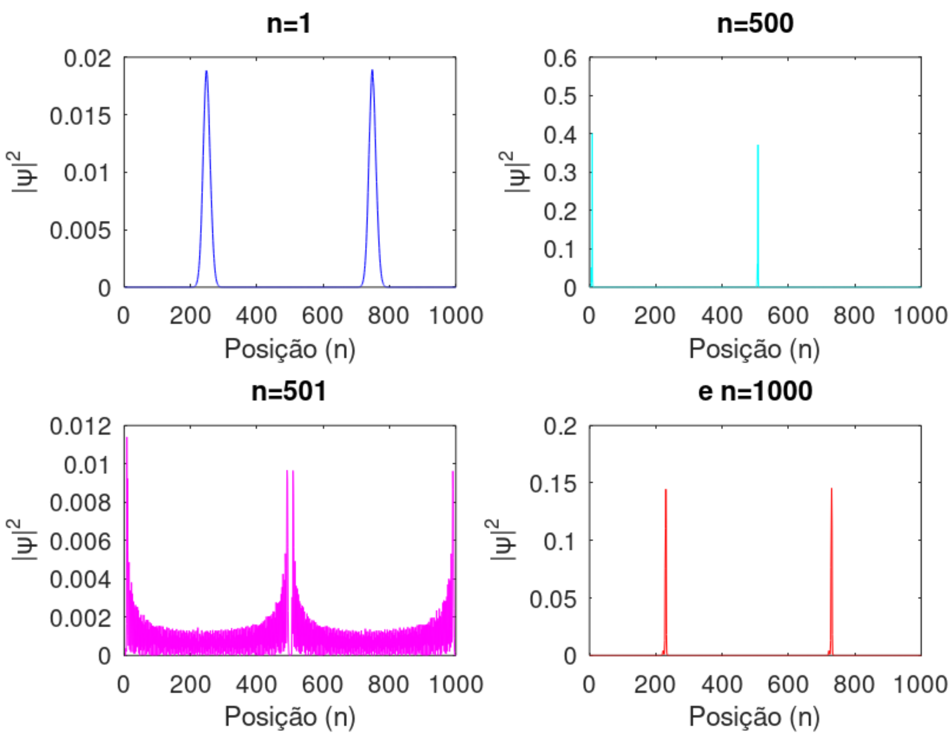

Figura 5 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, utilizando uma sequência aleatória.

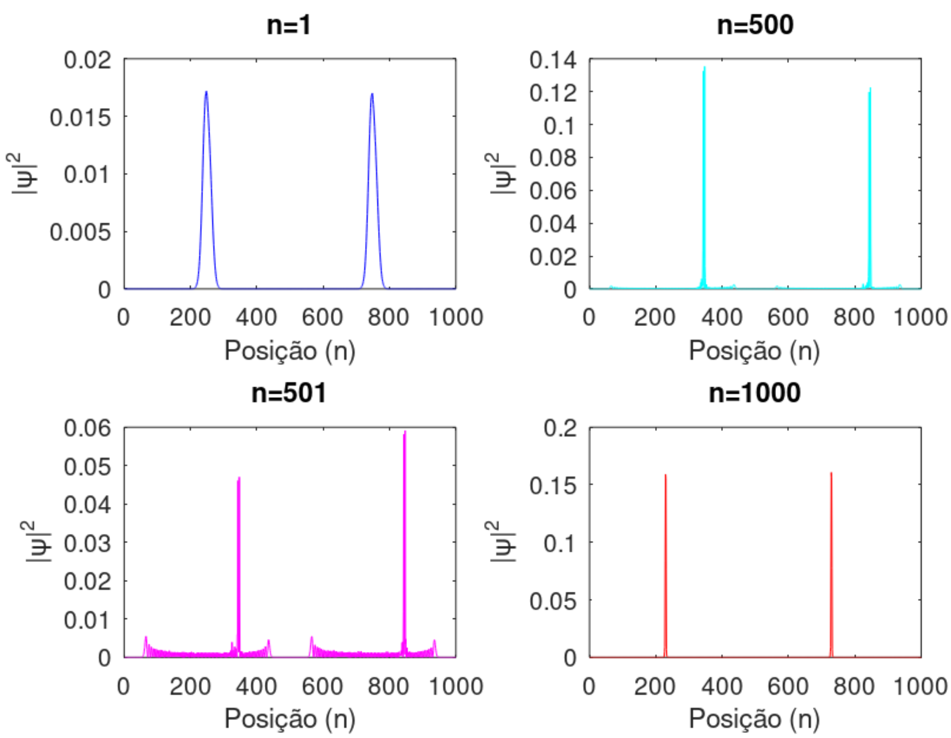

Figura 6 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, utilizando uma sequência aleatória binarizada.

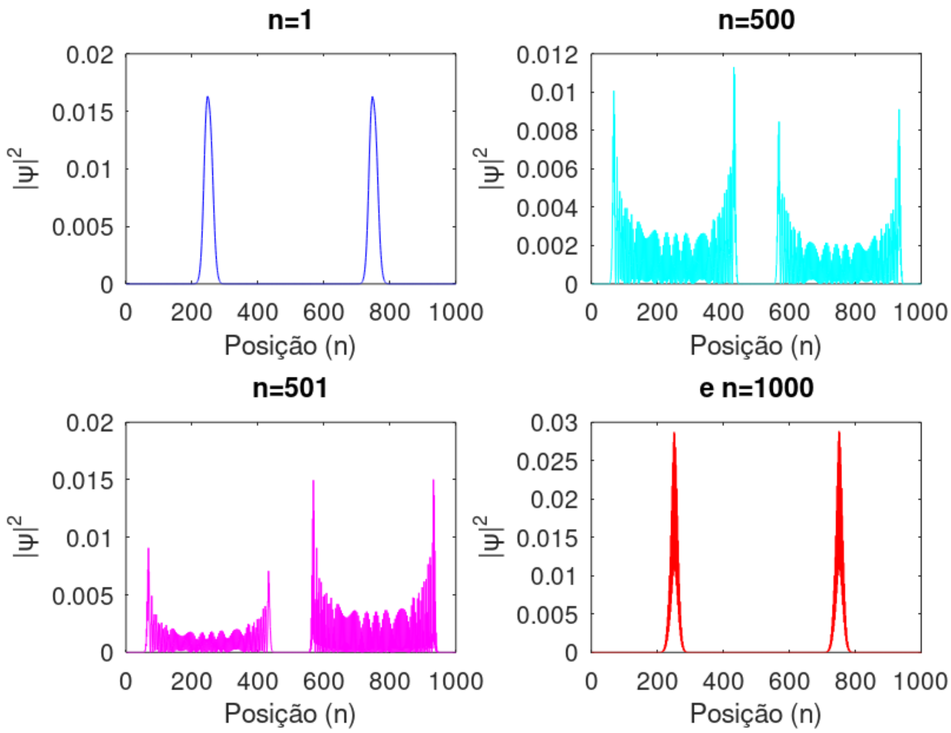

Figura 7 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, utilizando uma sequência de periódo 2.

3.1 Sequências Randômicas

Utilizamos sequências randômicas que são sequências aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo [-W, W]. Para gerar essas sequências utilizamos a função *rand* do Matlab, com o fator multiplicativo W que determina seu intervalo. Essas sequências compõem a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e os acoplamentos inter-cadeia γ_n; para os acoplamentos intra-cadeia foi utilizada a relação de fidelidade $J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2)$. Os resultados de espectro e autoestados são para uma realização de cada sequência. Verificamos também que não ocorrem mudanças significativas entre realizações diferentes.

3.1.1 Caracterização dos Espectros

1. W=0.1

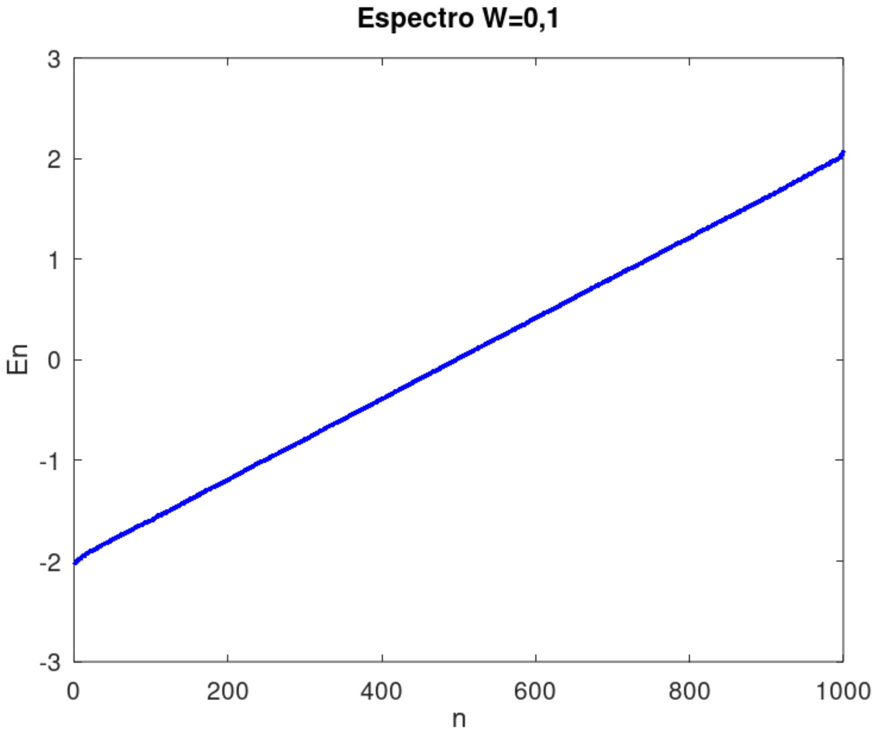

Figura 8 – Curva espectral gerada utilizando uma sequência randômica no intervalo [-W,W], com W=0.1

2. W=1

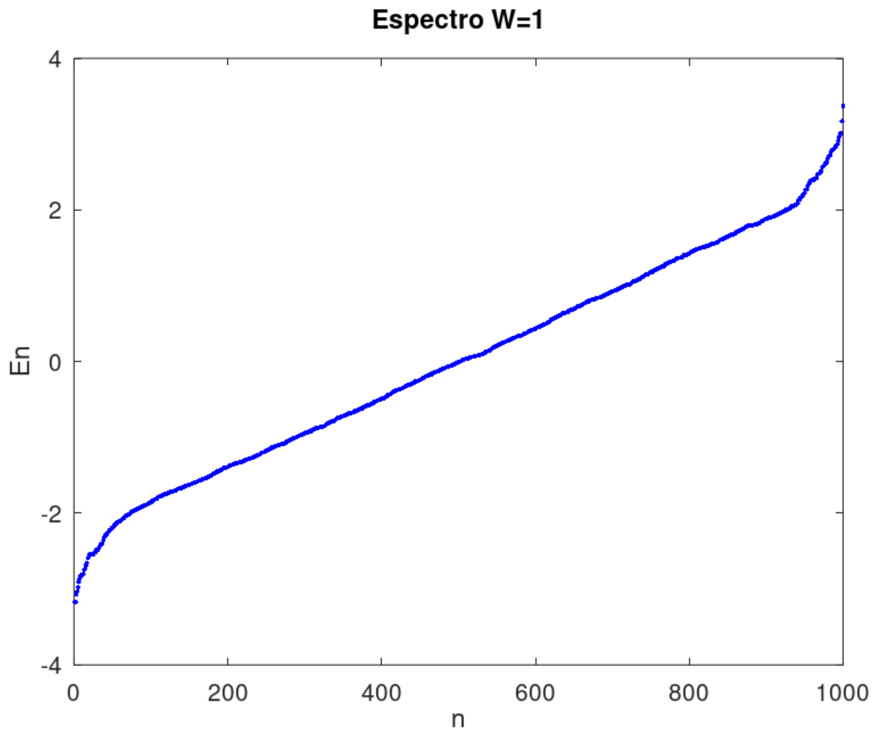

Figura 9 – Curva espectral gerada utilizando uma sequência randômica no intervalo [-W,W], com W=1

3. W=10

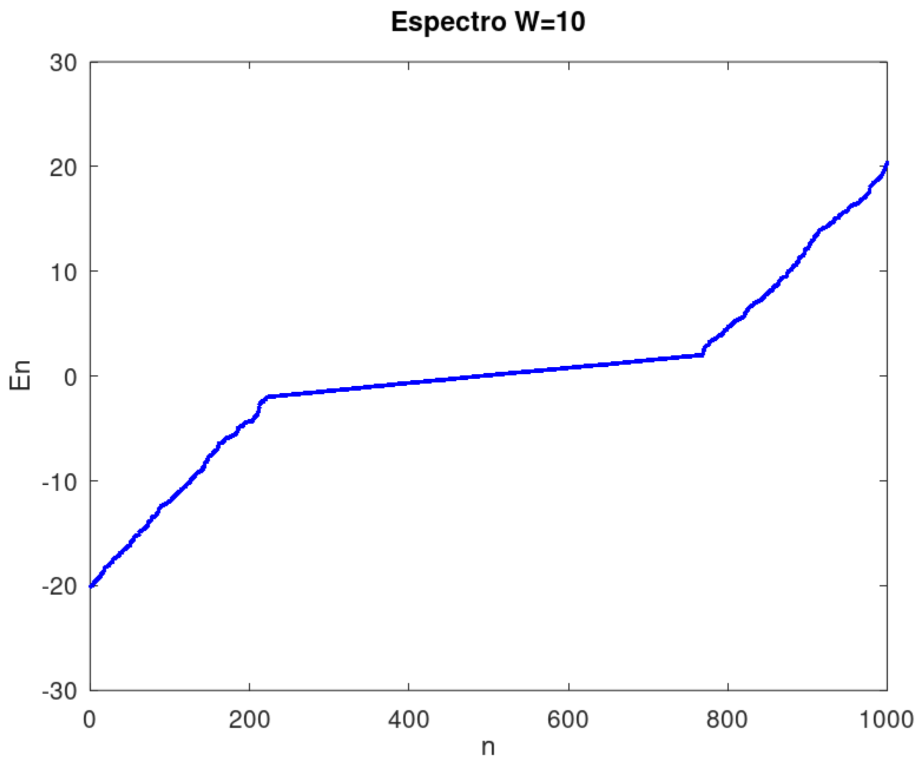

Figura 10 – Curva espectral gerada utilizando uma sequência randômica no intervalo [-W,W], com W=10

Para valores pequenos de W, os espectros assemelham-se àqueles obtidos para cadeias desacopladas de átomos com energias próximas a zero e interação entre vizinhos dada por uma relação ordenada, qual seja a relação que define J_n. À medida que W aumenta, a desordem torna-se importante e se manifesta nos extremos do espectro como porções de curvas não-suaves, característica de espectros de sistemas desordenados.

3.1.2 Caracterização dos Autoestados

A caracterização dos autovetores refere-se às curvas de densidade de probabilidade para autovetores de H, onde o índice do autovetor está associado ao autovalor e suas escolhas referem-se aos extremos ($n = 1$ e $n = 1000$) e ao centro ($n = 500$ e $n = 501$) do espectro de energia. Por outro lado, como a base de uma excitação utilizada indica a posição (sítio) sobre as pernas da escada, os gráficos de densidade de probabilidade mostram as regiões das cadeias com maior ou menor probabilidade de se encontrar a excitação colocada no sistema, para aqueles autoestados.

Na construção dos gráficos para a caracterização dos autovetores que seguem abaixo, as curvas foram caracterizadas por cores, que possuem o seguinte padrão: azul, ciano, magenta e vermelho, que indicam os autoestados $n = 1$, $n = 500$, $n = 501$ e $n = 1000$, respectivamente.

1. W=0,1

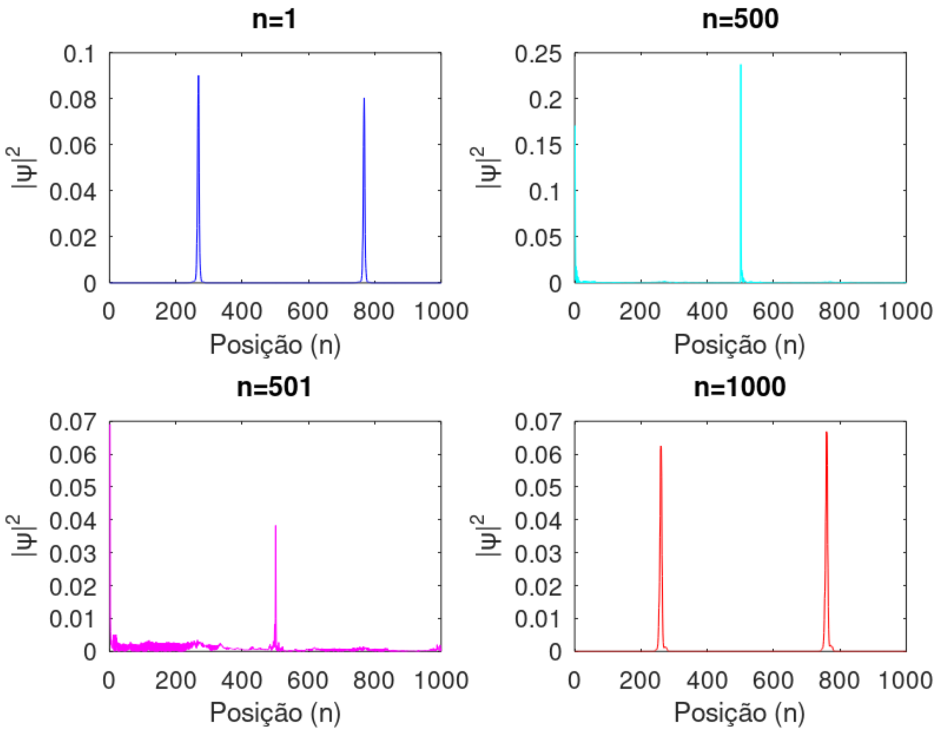

Figura 11 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências randômicas no intervalo [-W,W], com W=0.1

2. W=1

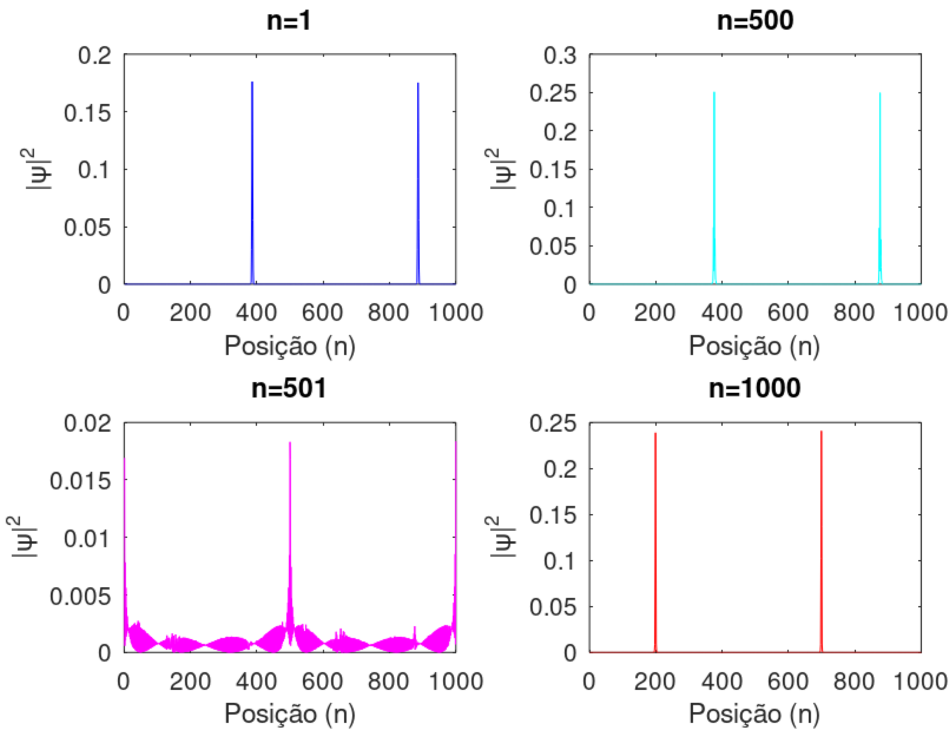

Figura 12 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências randômicas no intervalo [-W,W], com W=1

3. W=10

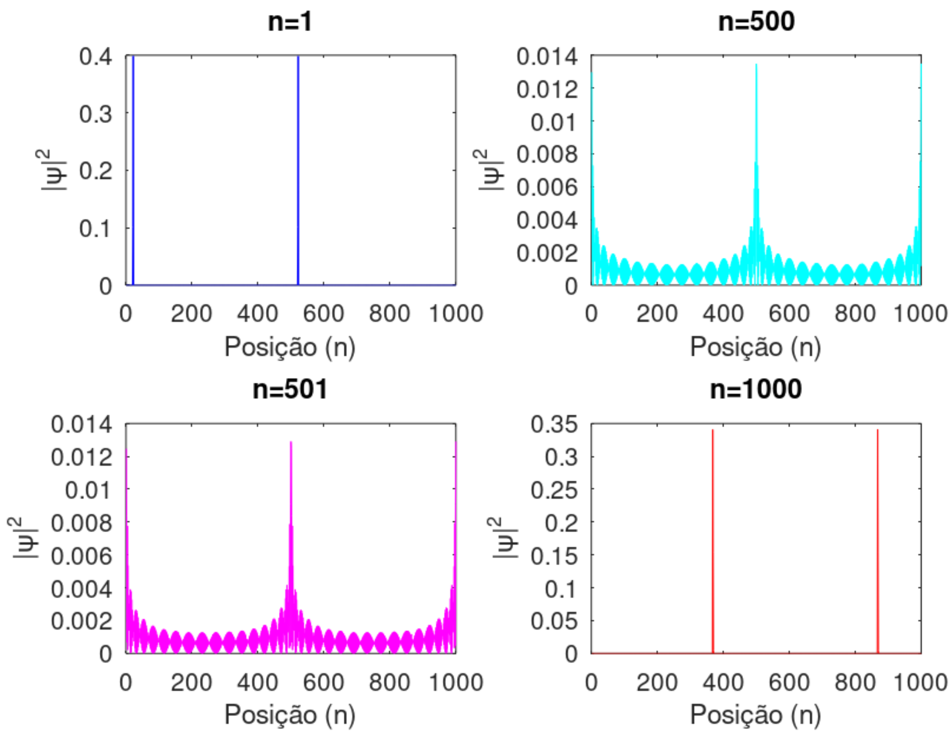

Figura 13 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências randômicas no intervalo [-W,W], com W=10

Os gráficos de densidade de probabilidade mostram que, para valores baixos de W, os autoestados associados aos extremos do espectro (baixas e altas energias) são, em geral, mais localizados e concentram a probabilidade de ocupação pela excitação sobre os átomos da região central da escada. Para os autoestados de energia intermediária, no centro do espectro, essa probabilidade tende a ser menos localizada e concentra-se sobre os átomos dos extremos da escada. Com o aumento da desordem W, há deslocamentos das regiões mais prováveis, mas a característica de localização espacial dos autoestados permanece.

3.2 Sequências Caóticas

Foram utilizadas várias sequências caóticas, cada uma com um determinado parâmetro r de caoticidade, que abrangem distintas áreas de cada mapa caótico citado no capítulo 2.

Os três mapas utilizados possuem rotas distintas para o caos: o mapa logístico atinge o caos por uma sequência de bifurcações; o mapa da barraca não possui bifurcações, tornando-se caótico a partir de $r > 0.5$; e o mapa gaussiano caminha para o caos em uma sequência de bifurcações, entra no caos e, em seguida retorna para a periodicidade por meio de unificações. Figuras dos diagramas de bifurcações com rotas para o caos se encontram no Anexo A.

As sequências caóticas são utilizadas para a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e para as interações entre os degraus γ_n. Para as interações entre as pernas, utilizou-se a relação de fidelidade

$J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2)$.

3.2.1 Caracterização dos Espectros

1. Mapa Logístico

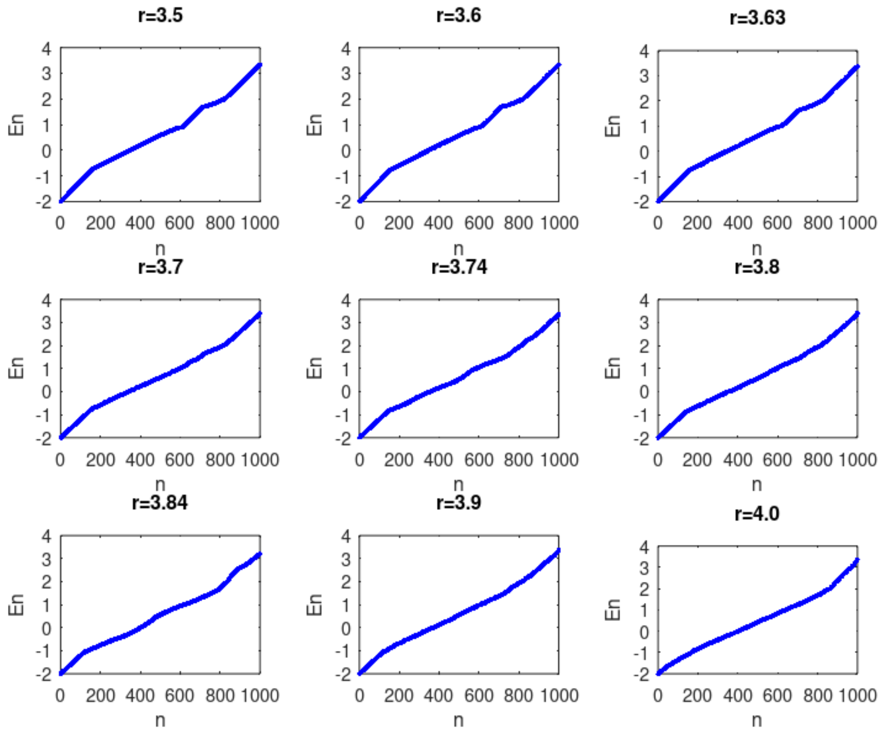

Figura 14 – Curvas espectrais para sequências caóticas geradas através do mapa logístico.

No mapa logístico, a primeira bifurcação ocorre em $r = 3.0$ e, à medida que r aumenta, o comportamento da sequência w_n passa a ser caótica, após a sequência de bifurcações. Como dito no capítulo 2, tomamos $\epsilon_{n,j} = \gamma_n = w_n$.

Sabe-se que o mapa logístico possui muitas janelas de periodicidade entre regiões de caos. As janelas mais evidentes têm início aproximado em $r = 3.6; 3.63; 3.74; 3.83$. Para parâmetros de caoticidade no interior dessas janelas, as curvas possuem comportamentos que se assemelham àqueles de sistemas cujas interações entre vizinhos são dadas por uma sequência ordenada.

As curvas representadas pelos parâmetros de caoticidade $r = 3.7; 3.8; 3.9; 4.0$, mostram curvas mais suaves em suas extremidades se comparadas as curvas cujas interações entre vizinhos são dadas por uma sequência randômica para valores de W maiores, e curvas não-suaves se comparadas as curvas para valores de W pequenos. Ou seja, o aumento da caoticidade, regulada pelo parâmetro r, sugere um aumento controlado da desordem da sequência. Esta sugestão fica mais forte no caso seguinte, do mapa da barraca, que não possui janelas de periodicidade e em que a caoticidade aumenta monotonicamente com r.

2. Mapa da Barraca

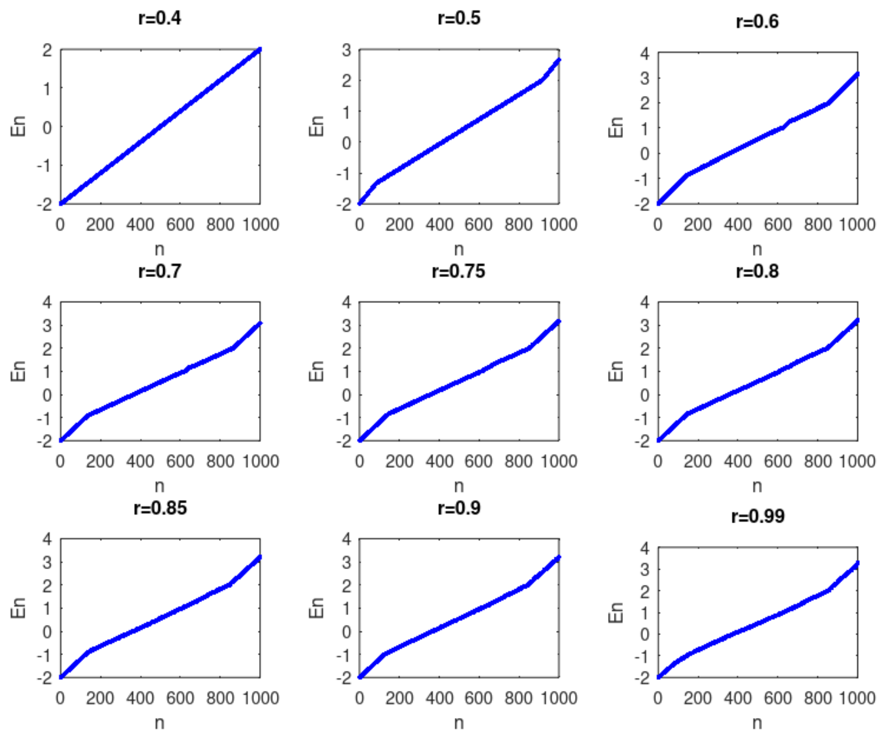

Figura 15 – Curvas espectrais para sequências caóticas geradas através do mapa da barraca.

O mapa da barraca não possui janela de periodicidade e se torna caótico a partir de $r > 0.5$.

Pode-se notar que nos extremos dos espectros as curvas não são tão suaves; com isso, fica plausível a ideia de que os espectros para o mapa da barraca são os que mais se assemelham ao caso de referência dado pela sequência randômica.

À medida que o parâmetro de caoticidade r para o mapa da barraca aumenta, sugere-se um aumento controlado da desordem da sequência, pois a caoticidade aumenta monotonicamente com r.

3. Mapa Gaussiano

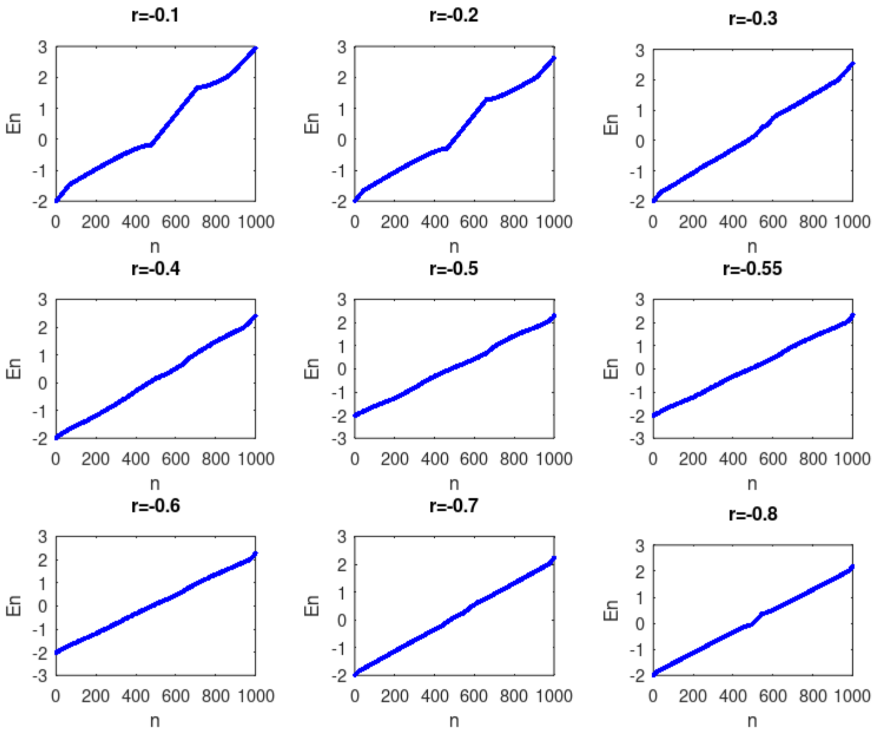

Figura 16 – Curvas espectrais para sequências caóticas geradas através do mapa gaussiano.

O mapa gaussiano apresenta comportamento menos óbvio, com as etapas de rota para o caos vistas no mapa gaussiano acontecendo simultaneamente dos dois lados. Janelas de periodicidade são observadas nas proximidades de $r =$ -0.65 e de $r =$ -0.45. Para estes parâmetros de caóticidade as curvas comportam-se de modo semelhante a sistemas cuja interações entre vizinhos são dadas por uma sequência ordenada.

As curvas relacionadas aos parâmetros de caoticidade em regiões que não possuem janelas de periodicidade assemelham-se a curvas onde as interações entre os vizinhos são dadas por uma sequência desordenada.

3.2.2 Caracterização dos Autoestados

A caracterização dos autovetores refere-se às curvas de densidade de probabilidade para autovetores de H. Realizou-se uma análise qualitativa para os autovetores (densidade de probabilidade), anotando-se as principais mudanças e concentração dos autoestados, utilizando sequências caóticas. As curvas foram caracterizadas por cores: azul, ciano, magenta e vermelho, que indicam os autoestados $n = 1$, $n = 500$, $n = 501$ e $n = 1000$, respectivamente.

1. Mapa Logístico

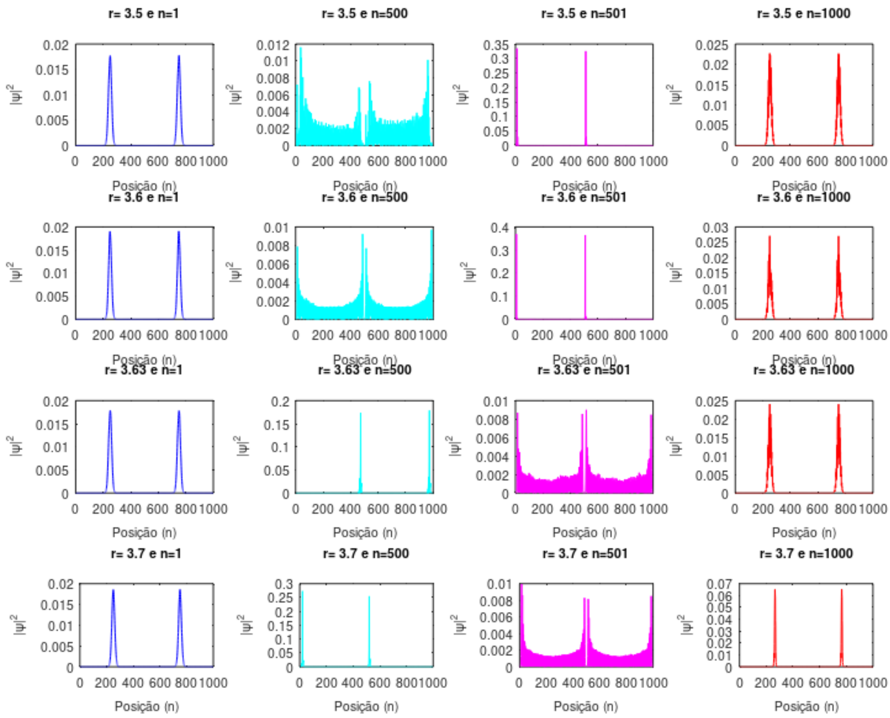

Figura 17 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas geradas através do mapa logístico.

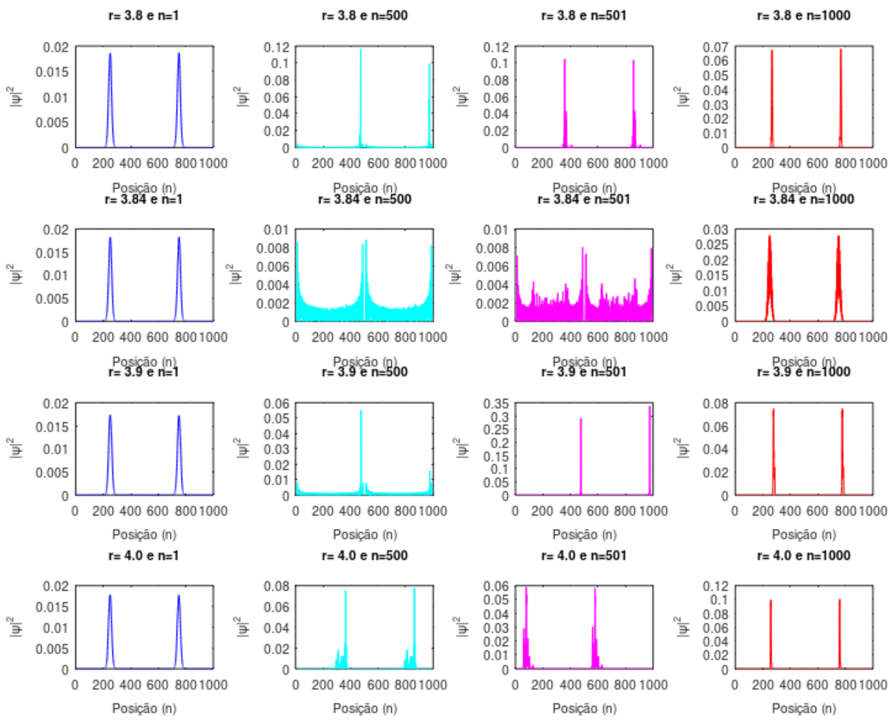

Figura 18 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas geradas através do mapa logístico.

Os gráficos mostram a densidade de probabilidade para o autoestado fundamental($n = 1$), para os autoestados associados aos autovetores intermediários ($n = 500$ e $n = 501$), e para o autoestado associado ao último autovetor de energia do sistema ($n = 1000$), representados pelas cores em azul, ciano, magenta e vermelho, respectivamente.
Analisando os gráficos, nota-se que os autoestados associados aos autovetores das extremidades ($n = 1$ e $n = 1000$) concentram a probabilidade de ocupação pela excitação sobre os átomos da região central da escada.
Para os autoestados de energia intermediária ($n = 500$ e $n = 501$), essa probabilidade concentra-se sobre os átomos dos extremos da escada.
Observa-se que para o valor $r = 4.0$, há um pequeno deslocamento das regiões mais prováveis para os autoestados de energia intermediária, mas a característica de localização espacial dos autoestados permanece.
Em valores de r onde há janelas de periodicidade a tendência é que os autoestados estejam estendidos, ou seja, a densidade de probabilidade se mostra espalhada sobre uma região considerável do sistema. Observando os gráficos, nota-se que apenas para os três valores de r com maior caoticidade ($r = 3.8$; $r = 3.9$; e $r = 4.0$), não há autoestados estendidos, qualquer que seja a posição do autovetor associado.
As curvas para $r = 3.84$ são as que mais assemelham-se para as curvas cujas interações entre vizinhos são dadas por uma sequência periódica (7).

2. Mapa da Barraca

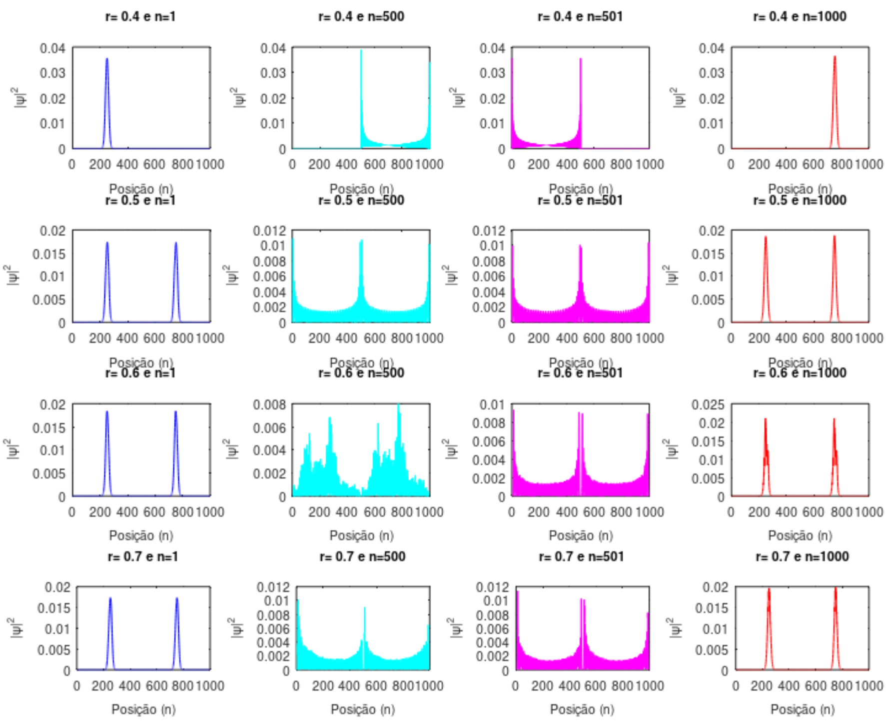

Figura 19 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas geradas através do mapa da barraca.

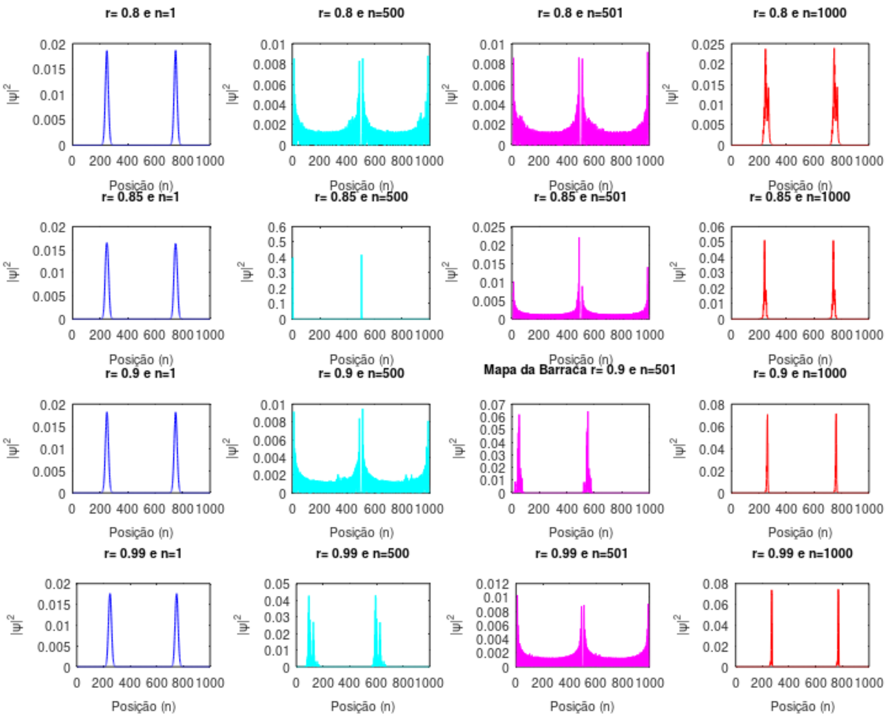

Figura 20 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas geradas através do mapa da barraca.

Os gráficos mostram que para autoestados associados aos extremos do espectro ($n = 1$ e $n = 1000$) concentram a probabilidade de ocupação pela excitação sobre os átomos da região central da escada.

Para valores de $r > 0.5$, o mapa da barraca torna-se caótico. E, ainda assim, nota-se autoestados estendidos de energia intermediária ($n = 500$ e $n = 501$); a densidade de probabilidadese mostra espalhada sobre uma região considerável do sistema em oposição à ideia de localização sobre uma região finita.

3. Mapa Gaussiano

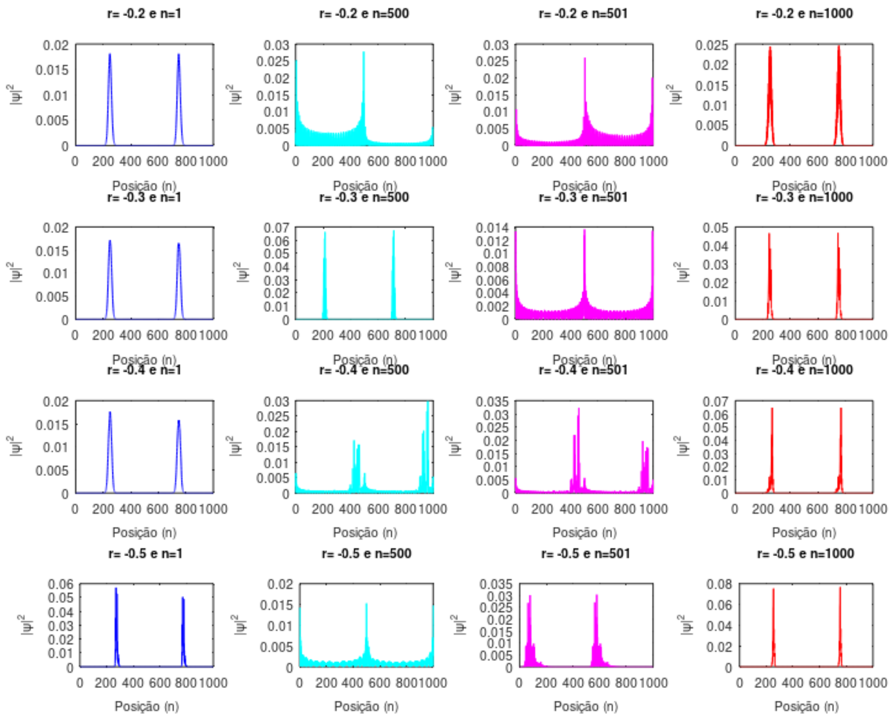

Figura 21 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas geradas através do mapa gaussiano.

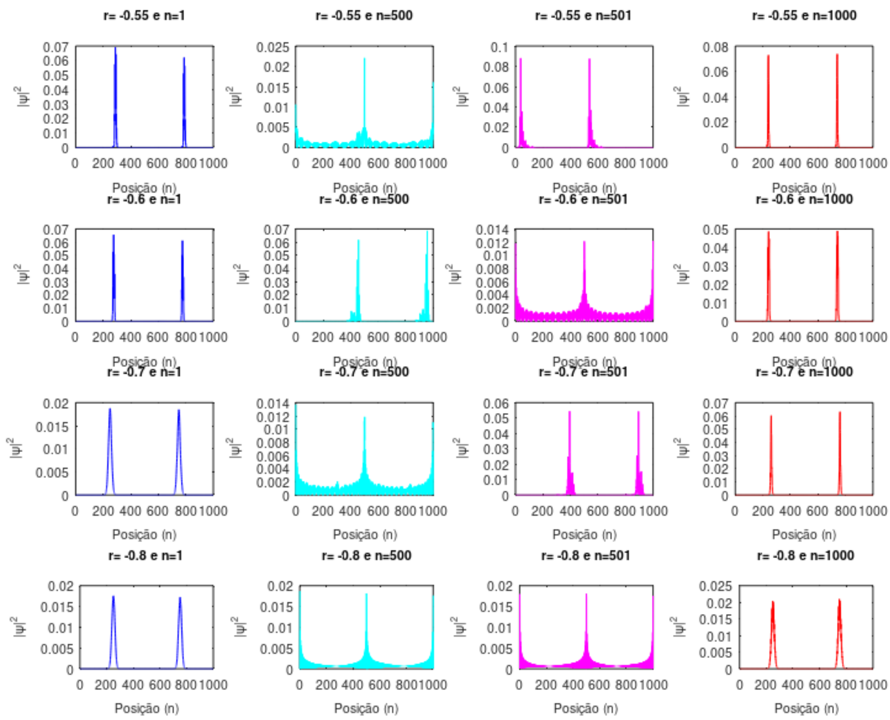

Figura 22 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas geradas através do mapa gaussiano.

As análises para o mapa gaussiano assemelham-se ao mapa logístico. Ou seja, analisando os gráficos nota-se que os autoestados associados ao autovetores das extremidades ($n = 1$ e $n = 1000$) concentram a probabilidade de ocupação pela excitação sobre os átomos da região central da escada.

Para os autoestados de energia intermediária ($n = 500$ e $n = 501$), essa probabilidade concentra-se sobre os átomos dos extremos da escada.

3.3 Sequências Binárias

As sequências binárias que foram utilizadas são derivadas das sequências caóticas; para que isso fosse realizado, implementamos um algoritmo para o mapa logístico e para o mapa da barraca que retorna:

1. $V_n = 1$, se $w_n \leq 0.5$;
2. $V_n = 2$, se $w_n > 0.5$.

Para o mapa gaussiano o algoritmo retorna:

1. $V_n = 1$, se $w_n \leq 0$;
2. $V_n = 2$, se $w_n > 0$.

w_n é definido como os elementos das sequências caóticas e V_n os elementos que foram binarizados a partir das sequências caóticas.

Posto isto, as sequências geradas a partir do V_n são as sequências binárias que foram utilizadas para a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e para as interações entre os degraus γ_n. Para as interações entre as pernas, utilizou-se a relação de fidelidade $J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2)$.

O estudo foi realizado para os três tipos de mapas caóticos, caracterizando inicialmente os espectros e posteriormente caracterizando os autovetores.

3.3.1 Caracterização dos Espectros

1. Mapa Logístico

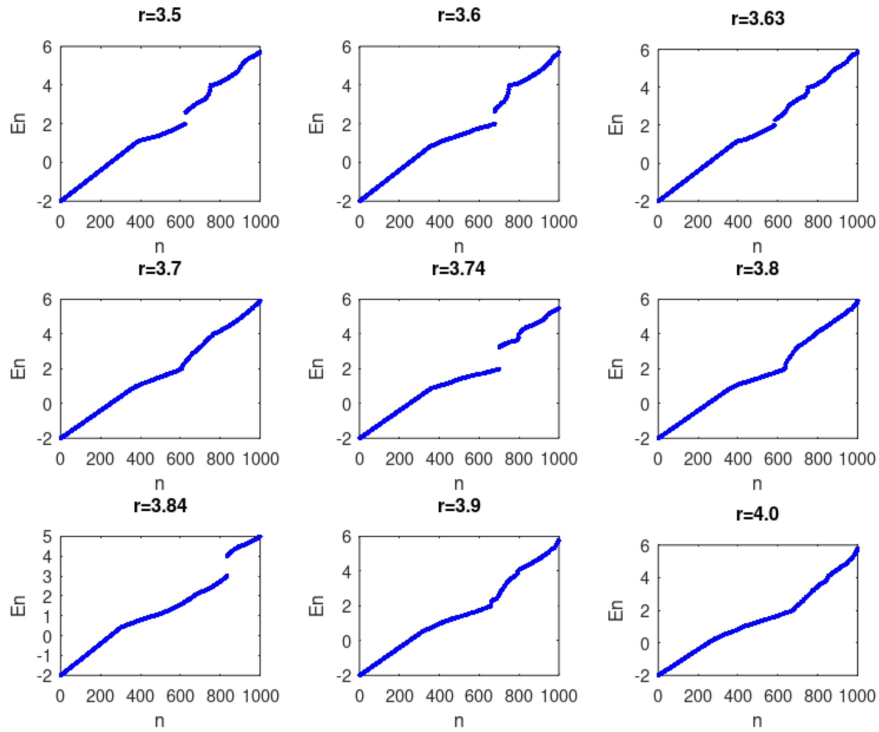

Figura 23 – Curvas espectrais para sequências caóticas binarizadas geradas através do mapa logístico.

No mapa logístico, a primeira bifurcação ocorre em $r = 3.0$ e, à medida que r aumenta, observa-se janelas de periodicidade, as mais evidentes localizadas em $r = 3.6$; 3.63; 3.74; 3.83. Nos gráficos que representam estes parâmetros de caoticidade, nota-se que aparecem regiões com um *gap* de energia proibida. Além disso, as curvas possuem comportamento semelhante às curvas que utilizam sequências ordenadas. Nesse sentido, pode-se comparar os gráficos da Fig. 23 com $r = 3.6$ e $r = 3.74$ e o espectro apresentado na Fig.4.

Fora da janela de periodicidade, os espectros assemelham-se a sistemas cujas interações entre vizinhos são dadas por uma sequência randômica, para valores de W maiores. Aqui vale a comparação do gráfico para $r = 4.0$ da Fig. 23 com aquele da Fig. 4.

2. Mapa da Barraca

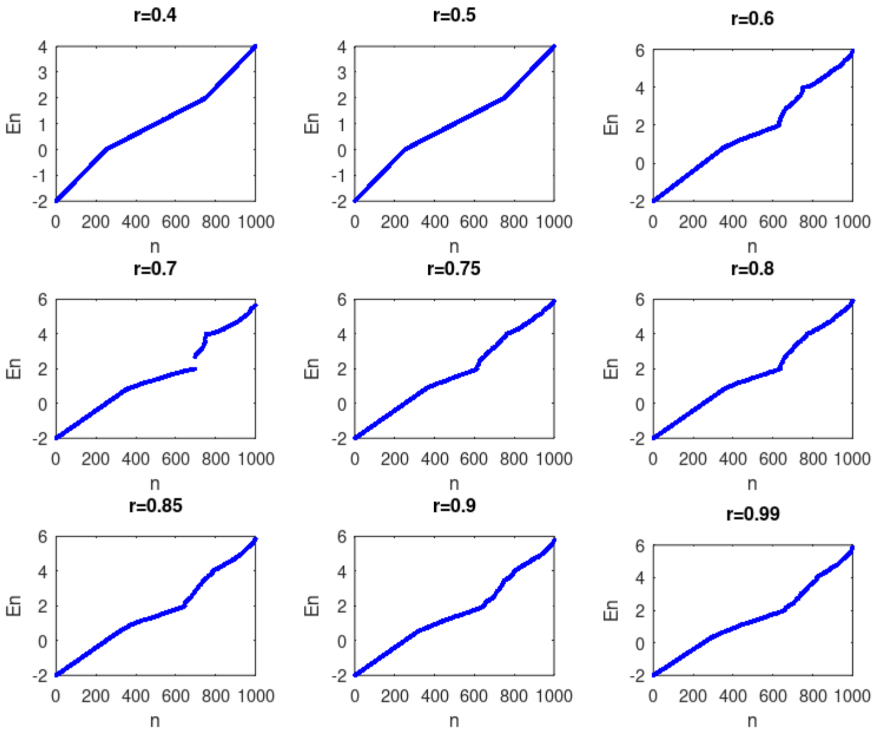

Figura 24 – Curvas espectrais para sequências caóticas binarizadas geradas através do mapa da barraca.

O mapa da barraca torna-se caótico em $r > 0.5$ e, não possui janela de periodicidade. Para os valores de parâmetros $r = 0.4$ e $r = 0.5$ o espectro não possui *gaps*, pois estão fora da região do caos e a sequência possui período 1.
Observa-se que para o valor $r = 0.7$ a curva possui um *gap*, mas a característica da banda de cima se mantém semelhante ao caso randômico à medida que W aumenta e que caracterizam curvas não-suaves nas extremidades dos espectros.

3. Mapa Gaussiano

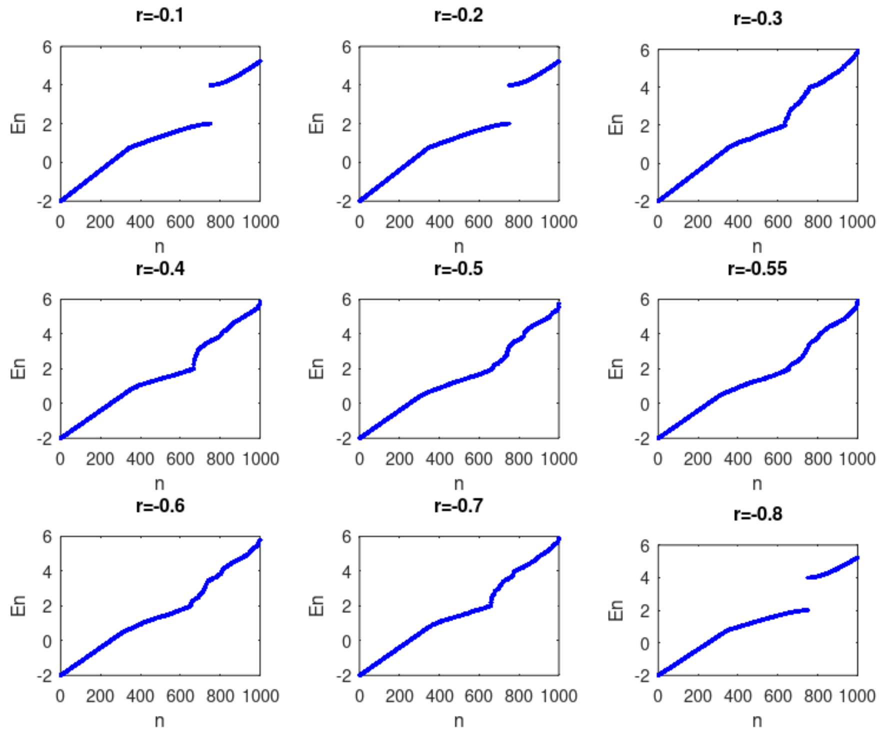

Figura 25 – Curvas espectrais para sequências caóticas binarizadas geradas através do mapa gaussiano.

Para valores de $r =$ -0.1, $r =$ -0.2 e $r =$ -0.8, que estão fora da região de caos, as curvas assemelham-se para curvas cuja interações entre vizinhos são dadas por uma sequência periódica.

Na região de caos, os espectros assemelham-se aos de sistemas cujas interações entre vizinhos são dadas por uma sequência randômica, para valores de W maiores.

3.3.2 Caracterização dos Autoestados

Os gráficos abaixo representam a densidade de probabilidade para os autoestados associados aos extremos ($n = 1$ e $n = 1000$), e para os autoestados de energia intermediária ($n = 500$ e $n = 501$). As curvas foram caracterizadas por cores e, possuem o seguinte padrão: azul, ciano, magenta e vermelho, que indicam os autoestados $n = 1$, $n = 500$, $n = 501$ e $n = 1000$, respectivamente.

1. Mapa Logístico

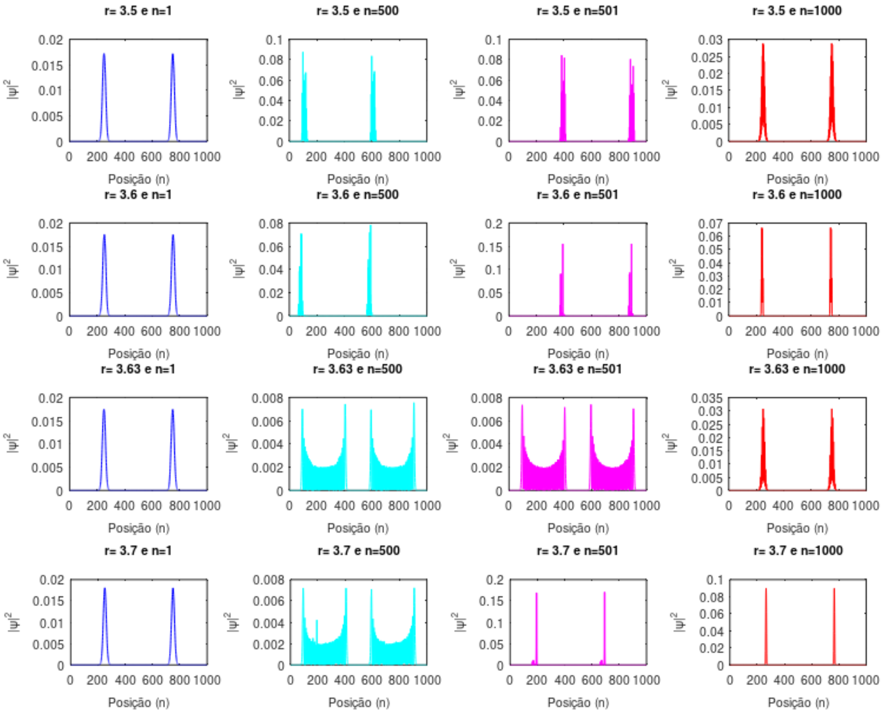

Figura 26 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas binarizadas geradas através do mapa logístico.

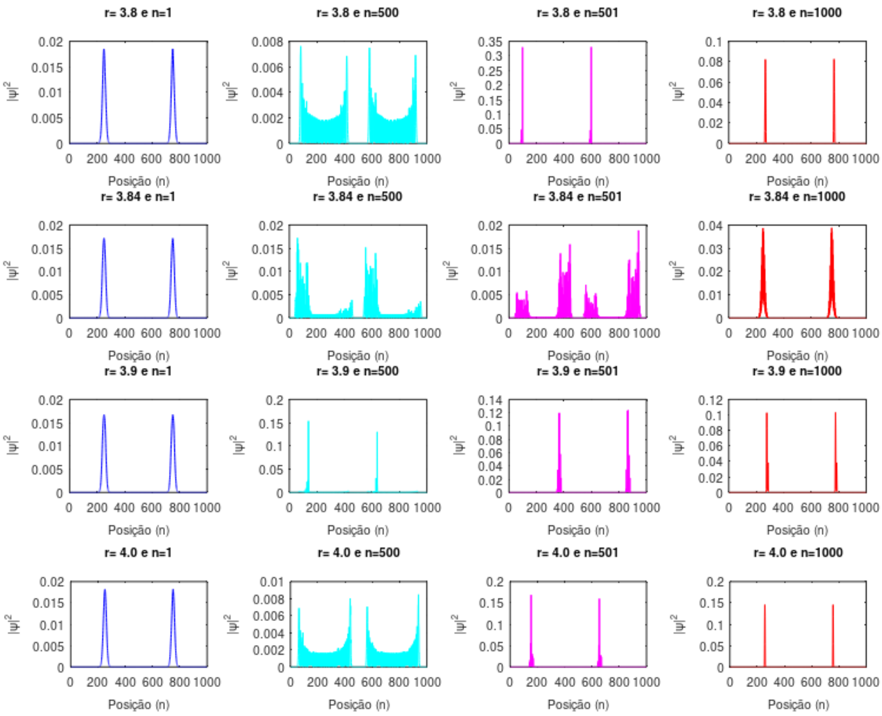

Figura 27 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas binarizadas geradas através do mapa logístico.

2. Mapa da Barraca

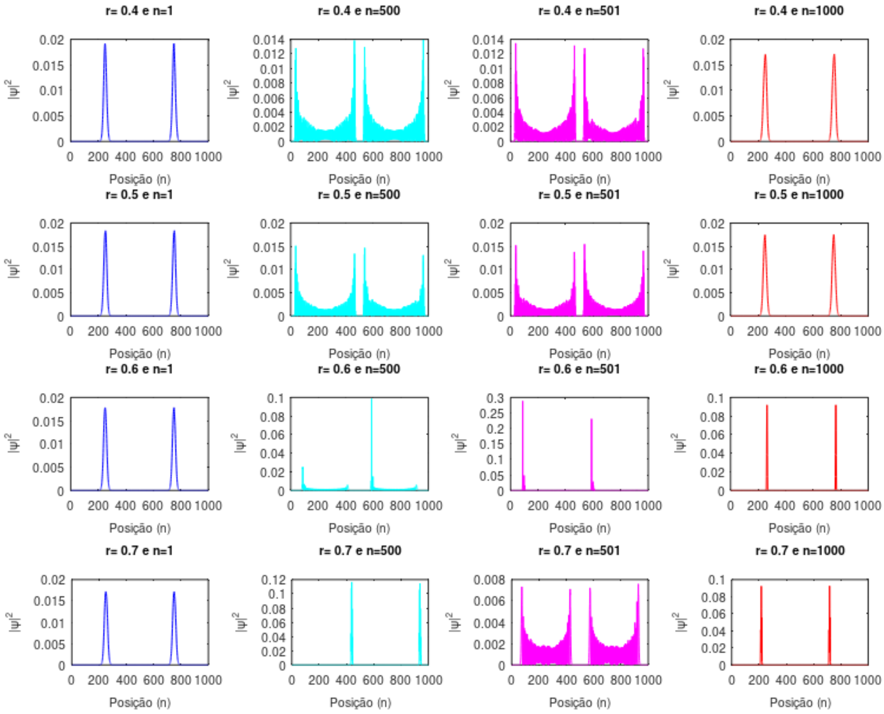

Figura 28 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas binarizadas geradas através do mapa da barraca.

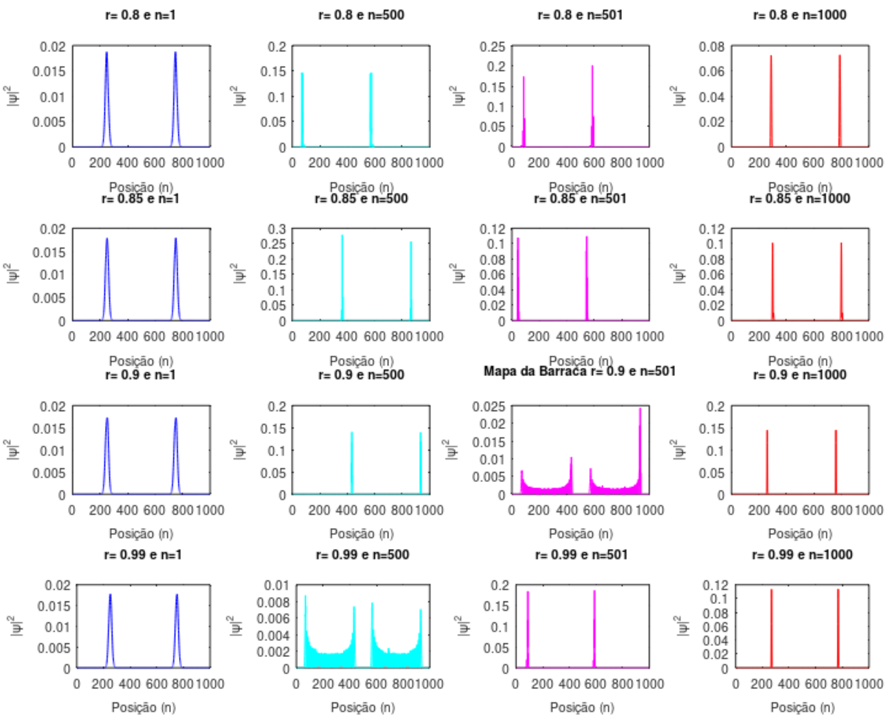

Figura 29 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas binarizadas geradas através do mapa da barraca.

3. Mapa Gaussiano

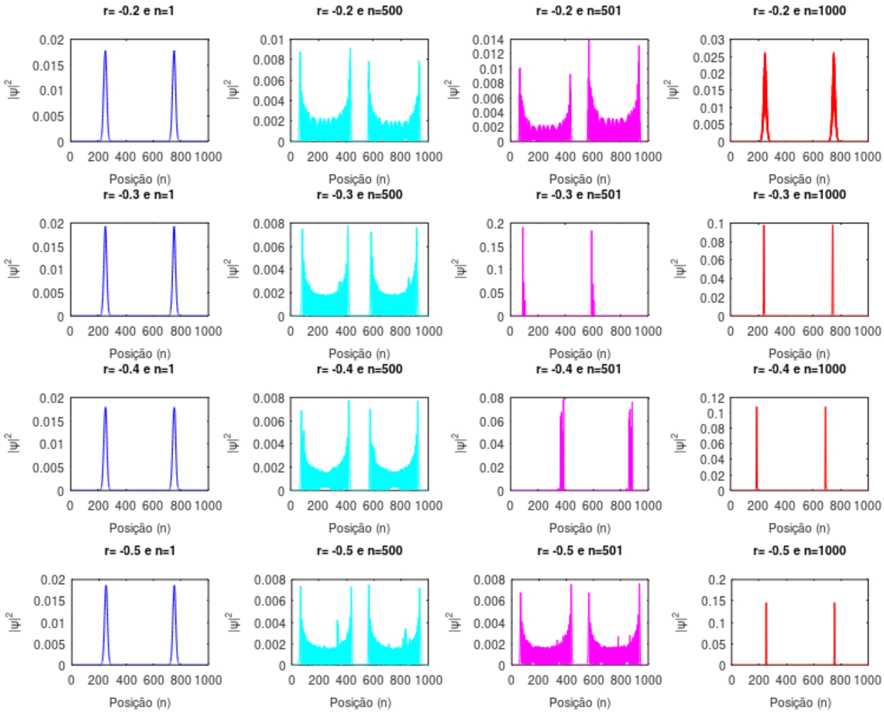

Figura 30 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas binarizadas geradas através do mapa gaussiano.

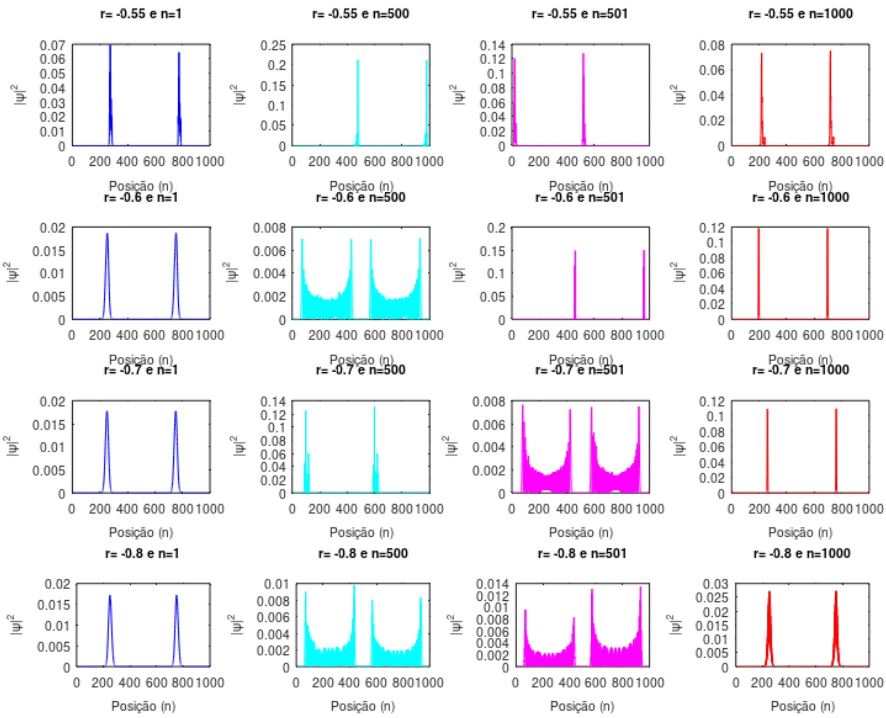

Figura 31 – Densidades de probabilidade associadas aos autoestados $|\psi_n\rangle$ de H, para sequências caóticas binarizadas geradas através do mapa gaussiano.

Analisando os gráficos das últimas seis figuras, observa-se que as curvas para a densidade de probalidade sugerem que, para os mapas caóticos, o estado fundamental ($n = 1$) e o estado mais excitado ($n = 1000$) permanecem qualitativamente inalterados, qualquer que seja o parâmetro de caoticidade tomado.

4 Evolução Temporal

4.1 Desenvolvimento

Para estudar a transmissão de emaranhamento ao longo da escada, utilizamos o estado inicial descrito pela equação (9).

Estamos interessados na evolução temporal do estado inicial: $|\psi(0)> \mapsto |\psi(t)>= e^{-iHt}|\psi(0)>$.

Ao diagonalizar a matriz do hamiltoniano (7), obtemos os autovalores λ e os autovetores com componentes σ_i na base β. A matriz de autovalores é a matriz do hamiltoniano na base ortonormal dos autovetores de H, que definimos como BON_H, podendo ser representada da seguinte forma

$$[D]=[H]_{BON_H}^{BON_H}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{(N+1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{(N+2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{(2N)} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Na base BON_H, a matriz $[e^{-iHt}]$ pode ser descrita como

$$[e^{-iHt}]=\begin{bmatrix} e^{-i\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_2 t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\lambda_{(N)} t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\lambda_{(N+1)} t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\lambda_{(N+1)} t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\lambda_{(2N)} t} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Para a evolução temporal na base β, queremos $[|\psi(t)>]_\beta = [e^{-iHt}]_\beta^\beta[|\psi(0)>]_\beta$. Então, aplicamos uma mudança de base, pois a base β não é a base dos autovetores de H. Desse modo, a evolução temporal que queremos após a mudança de base é dada por $[|\psi(t)>]_{BON_H}=[e^{-iHt}]_{BON_H}^{BON_H}[|\psi(0)>]_{BON_H}$.

As matrizes de mudança de base que precisamos são dadas pela matriz dos autovetores de H e por sua inversa. A matriz mudança de base entre bases ortonormais é sempre uma matriz unitária, sendo ortogonal no caso de espaço real. Como estamos trabalhando apenas no espaço real, a matriz é ortogonal e, para uma matriz ortogonal, a transposta é a própria inversa. Sendo assim, a matriz mudança de base será a transposta $\sigma^{'}$ da matriz dos autovetores de H.

$$[\sigma]^{'} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{N1} & \sigma_{(N+1)1} & \sigma_{(N+2)1} & \cdots & \sigma_{(2N)1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{N2} & \sigma_{(N+1)2} & \sigma_{(N+2)2} & \cdots & \sigma_{(2N)2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1N} & \sigma_{2N} & \cdots & \sigma_{NN} & \sigma_{(N+1)N} & \sigma_{(N+2)N} & \cdots & \sigma_{(2N)N} \\ \sigma_{1(N+1)} & \sigma_{2(N+1)} & \cdots & \sigma_{N(N+1)} & \sigma_{(N+1)(N+1)} & \sigma_{(N+2)(N+1)} & \cdots & \sigma_{(2N)(N+1)} \\ \sigma_{1(N+2)} & \sigma_{2(N+2)} & \cdots & \sigma_{N(N+2)} & \sigma_{(N+1)(N+2)} & \sigma_{(N+2)(N+2)} & \cdots & \phi_{(2N)(N+2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1(2N)} & \sigma_{2(2N)} & \cdots & \sigma_{N(2N)} & \sigma_{(N+1)(2N)} & \sigma_{(N+2)(2N)} & \cdots & \sigma_{(2N)(2N)} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Assim, a evolução temporal é dada por:
$[|\psi(t)>]_{BON_H} = [e^{-iHt}][\sigma]^{'}[|\psi(0)>]_{\beta}$
E resulta na matriz coluna

$$[|\psi(t)>]_{BON_H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\lambda_1 t}(\sigma_{11} - \sigma_{(M+1)1}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\lambda_2 t}(\sigma_{12} - \sigma_{(M+1)2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\lambda_N t}(\sigma_{1N} - \sigma_{(M+1)N}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\lambda_{(N+1)} t}(\sigma_{1(N+1)} - \sigma_{(M+1)(N+1)}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\lambda_{(N+2)} t}(\sigma_{1(N+2)} - \sigma_{(M+1)(N+2)}) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\lambda_{(2N)} t}(\sigma_{2N} - \sigma_{(M+1)2N}) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Para voltarmos à base β original, fazemos:

$$[|\psi(t)>]_{\beta} = [\sigma][e^{-iHt}][\sigma]^{'}[|\psi(0)>]_{\beta}. \quad (15)$$

4.2 Transmissão de Emaranhamento

Para o estudo da transmissão de emaranhamento até a ponta final da cadeia, utilizamos os métodos propostos na seção 2.4. A quantidade $\eta(t)$ mede a fidelidade do estado $|\psi(t)\rangle$ ao estado alvo $|N-\rangle$. A concorrência $C(t)$ é uma medida para o emaranhamento compartilhado entre dois qubits em qualquer estado misto arbitrário.

Para a realização da média na construção dos gráficos da fidelidade $\eta(t)$ e da concorrência $C(t)$, utilizou-se pedaços distintos (30 em 30 elementos) de cada sequência para todos os parâmetros análisados e 100 realizações de sequências para a suavização das curvas.

4.2.1 Fidelidade $\eta(t)$

A fidelidade $\eta(t)$ é a projeção do estado inicial sobre o estado quântico $|N-\rangle$, maximamente emaranhado, associado aos dois átomos finais da escada.

$$\begin{aligned}\eta(t) &= | < N - |\psi(t) > | \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[< N^{(1)}| - < N^{(2)}|\right] |\psi(t) > ,\end{aligned} \tag{16}$$

de tal modo que

$$\langle N-| = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Considerando que o estado $|N->$ é o estado de Bell agora formado pelos dois qubits do extremo final da escada, o produto da matriz coluna (15) referente a evolução temporal com a matriz linha (17) fornece uma medida da transferência de emaranhamento, regida pela equação (16).

A seguir, são mostrados os gráficos da fidelidade $\eta(t)$ em função do tempo t, no qual o tempo de transferência esperado foi $\tau = \pi N/(4J)$, utilizando $N = 30$. Segundo (CHRISTANDL et al., 2004), para o esquema de acoplamento J_n utilizado, este seria o tempo em que a transmissão alcançaria a outra ponta da escada. Para N =30, teríamos $\tau \approx 23$.

Para efeitos de comparação, plotamos dois gráficos: um utilizando sequências totalmente aleatórias (através da função $rand$) para a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e para os acoplamentos inter-cadeia γ_n e outro utilizando uma sequência de período 2, do tipo (2, 1, 2, 1, 2, ...), para a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e para os acoplamentos inter-cadeia γ_n. Nos dois casos utilizamos para os acoplamentos intra-cadeia a relação de fidelidade $J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2)$.

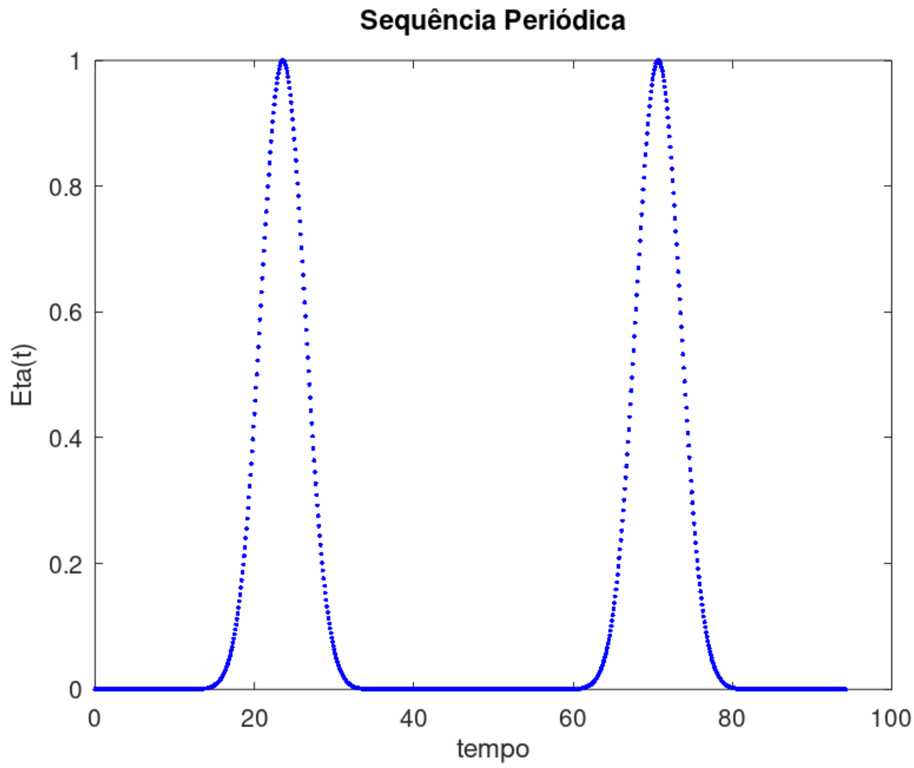

Figura 32 – Fidelidade $\eta(t)$, utilizando uma sequência de período 2, para N=30.

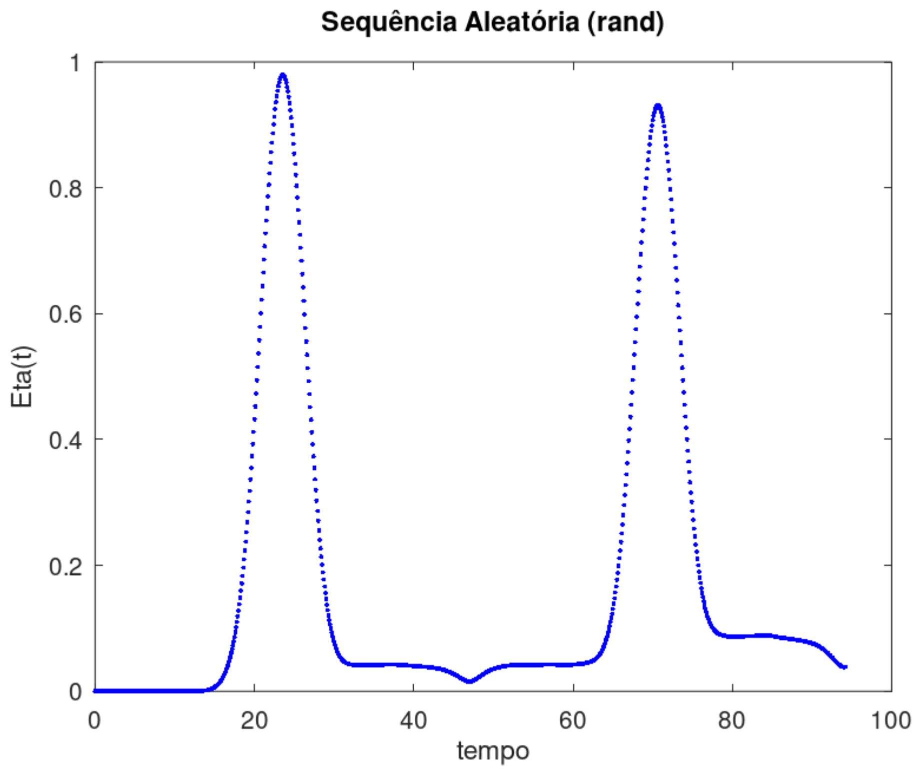

Figura 33 – Fidelidade $\eta(t)$, utilizando uma sequência totalmente aleatória, para N=30.

4.2.1.1 Sequências Randômicas

Utilizou-se sequências randômicas no intervalo [-W, W] para a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e para os acoplamentos inter-cadeia γ_n. Para os acoplamentos intra-cadeia utilizamos a relação de fidelidade $J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2)$.

Os gráficos abaixo mostram a fidelidade $\eta(t)$ avaliada no intervalo de tempo de 0 a 4τ, evidenciando picos em valores de $t=\tau$ e $t=3\tau$. Para a média utilizou-se 100 realizações de sequências para a suavização das curvas. O tempo de transferência empregado foi $\tau = \pi N/(4J)$.

1. W=0,1

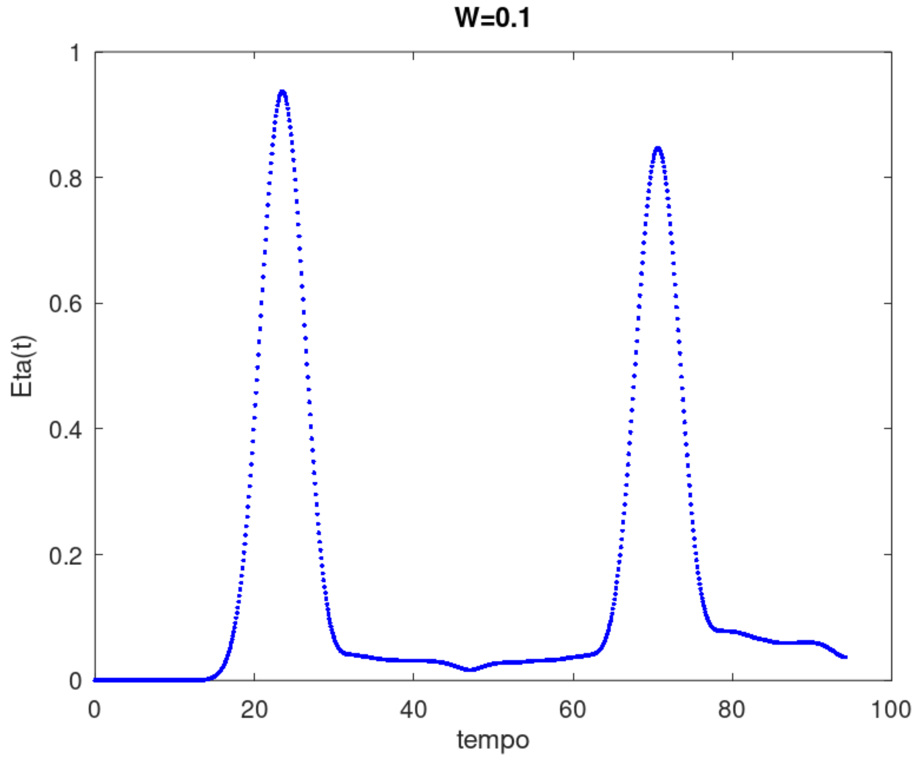

Figura 34 – Fidelidade $\eta(t)$, utilizando uma sequência randômica no intervalo [-W,W], com W=0.1, para N=30.

2. W=1

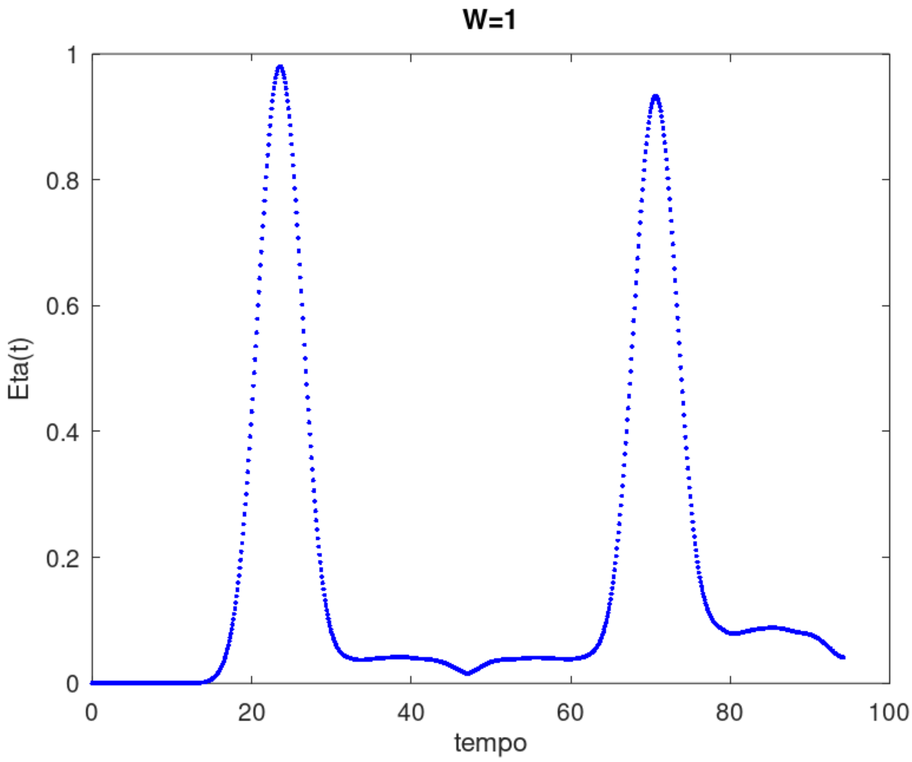

Figura 35 – Fidelidade $\eta(t)$, utilizando uma sequência randômica no intervalo [-W,W], com W=1, para N=30.

3. W=10

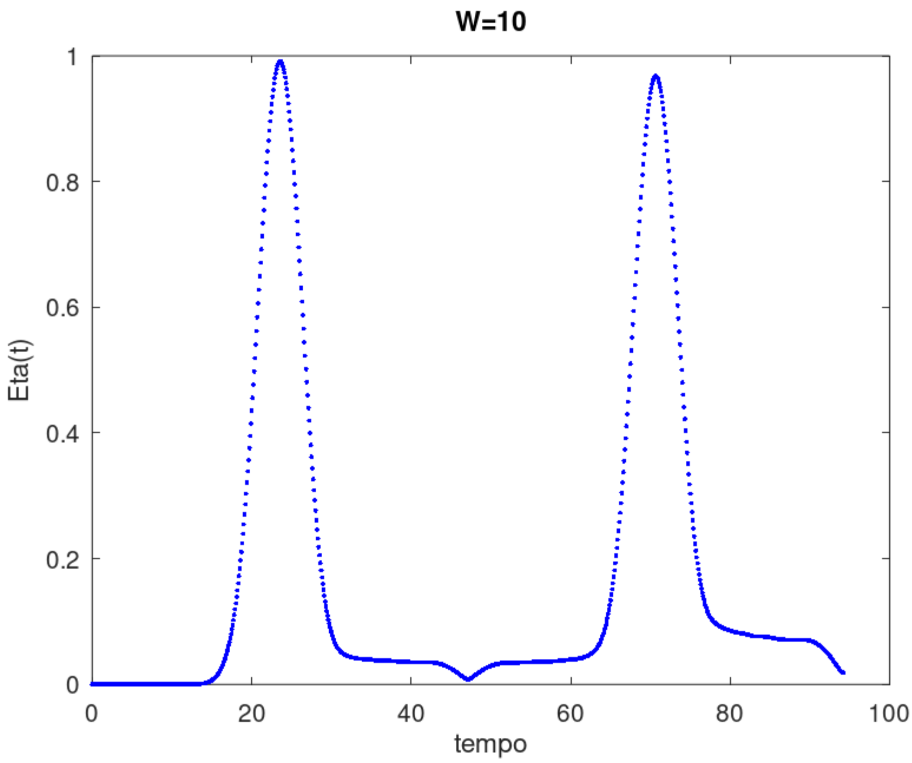

Figura 36 – Fidelidade $\eta(t)$, utilizando uma sequência randômica no intervalo [-W,W], com W=10, para N=30.

A transferência de emaranhamento é avaliada no tempo característico $\tau = 23.5$, onde ocorrem os picos (τ e 3τ). Analisando os gráficos, nota-se que à medida que W aumenta, a fidelidade $\eta(t)$ também aumenta, chegando mais próximo de $\eta(t) = 1$. Através dos gráficos, observa-se que a transferência de emaranhamento melhora com o aumento de W.

4.2.1.2 Sequências Caóticas

Para a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e para os acoplamentos inter-cadeia γ_n foram utilizadas sequências caóticas geradas por mapas caóticos para determinados valores de parâmetros de caoticidade. Para os acoplamentos intra-cadeia utilizamos a relação de fidelidade $J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2)$.

Os gráficos abaixo mostram a fidelidade $\eta(t)$ de dois qubits para o último sítio de cada perna avaliada no tempo t, para a média utilizou-se 100 realizações de sequências para a suavização das curvas. O tempo de transferência empregado foi $\tau = \pi N/(4J)$.

1. Mapa Logístico

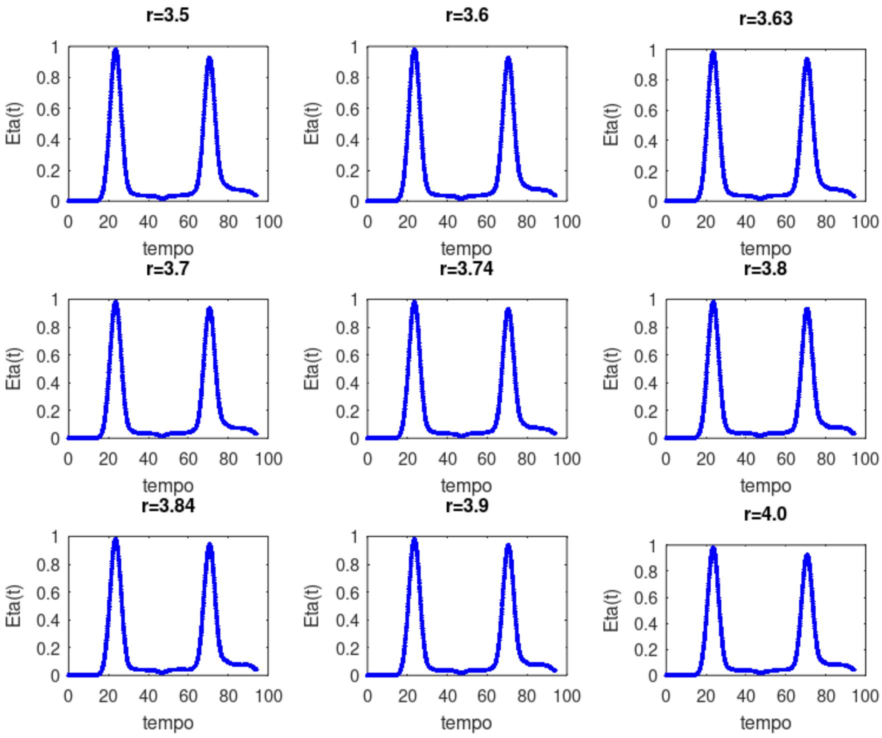

Figura 37 – Fidelidade $\eta(t)$, para alguns valores de parâmetros de caoticidade do mapa logístico, com N=30.

2. Mapa da Barraca

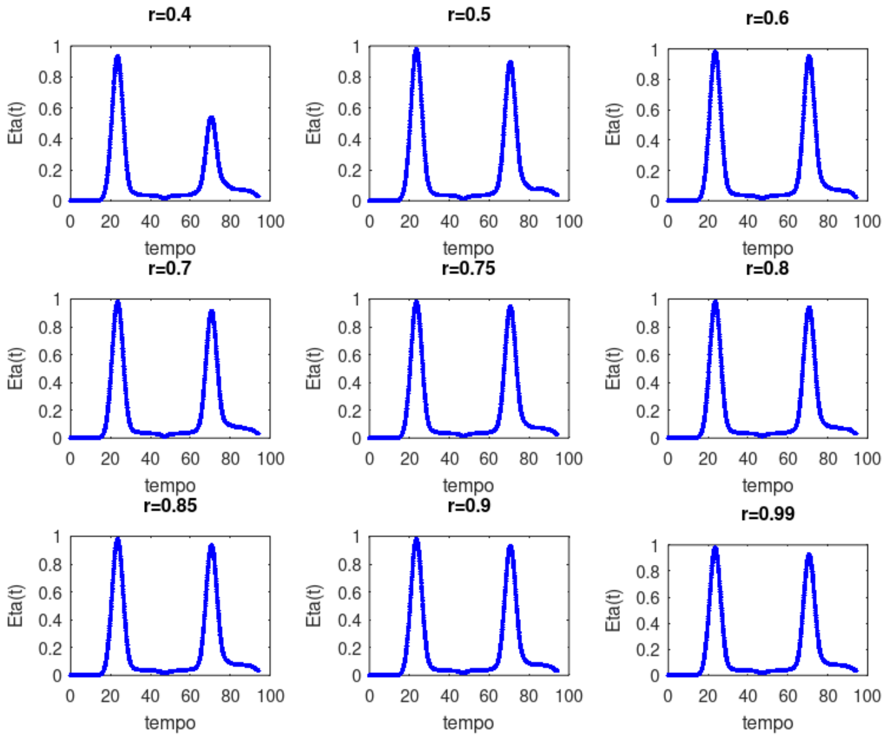

Figura 38 – Fidelidade $\eta(t)$, para alguns valores de parâmetros de caoticidade do mapa da barraca, com N=30.

3. Mapa Gaussiano

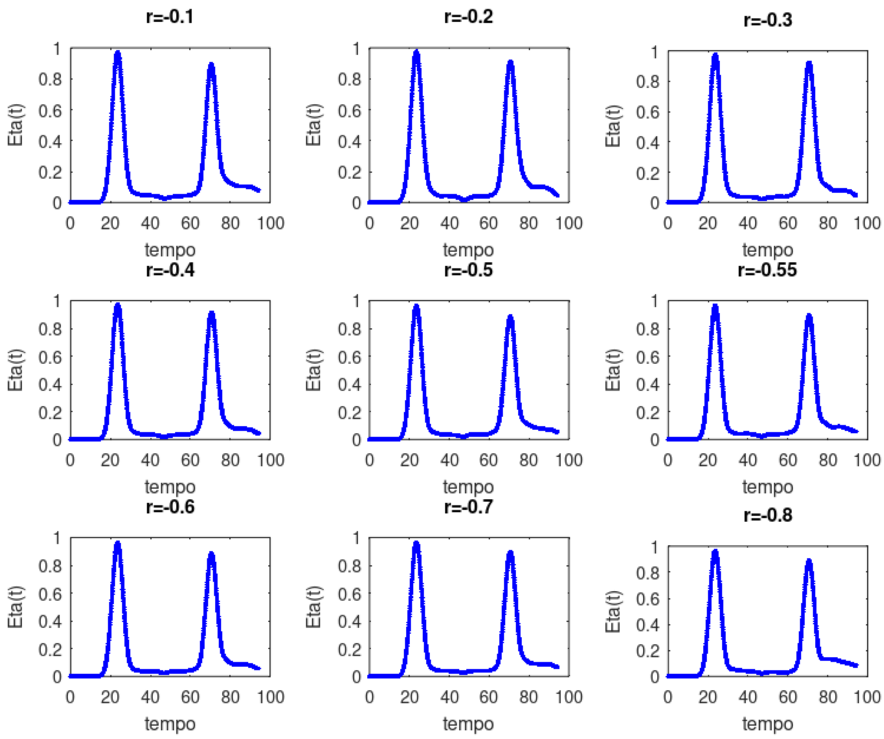

Figura 39 – Fidelidade $\eta(t)$, para alguns valores de parâmetros de caoticidade do mapa gaussiano, com N=30.

Os gráficos da fidelidade $\eta(t)$ representam a projeção do estado inicial sobre o estado de Bell dos átomos que formam o último degrau. Para os três tipos de mapa caótico, as curvas possuem comportamentos similares e assemelham-se a sistemas que utilizaram uma sequência aleatória. Em algumas curvas há uma pequena variação da sua parte inferior, próximo a 2τ. Mesmo com a semelhança para sistemas aleatórios, os casos caóticos sugerem haver uma recorrência melhor do que no caso aleatório, com pouca diminuição da fidelidade em 3τ. Observa-se que o tempo característico τ e seus múltiplos se mantêm mesmo para os casos caóticos.

4.2.1.3 Sequências Binárias

Para a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e para os acoplamentos inter-cadeia γ_n foram utilizadas sequências binárias derivadas das sequências caóticas para determinados valores de parâmetros de caoticidade. Para os acoplamentos intra-cadeia utilizamos a relação de fidelidade $J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2)$.

Os gráficos abaixo mostram a fidelidade $\eta(t)$ de dois qubits para o último sítio de cada perna avaliada no tempo t, para a média utilizou-se 100 realizações de sequências para o suavização das curvas. O tempo de transferência empregado foi $\tau = \pi N/(4J)$.

1. Mapa Logístico

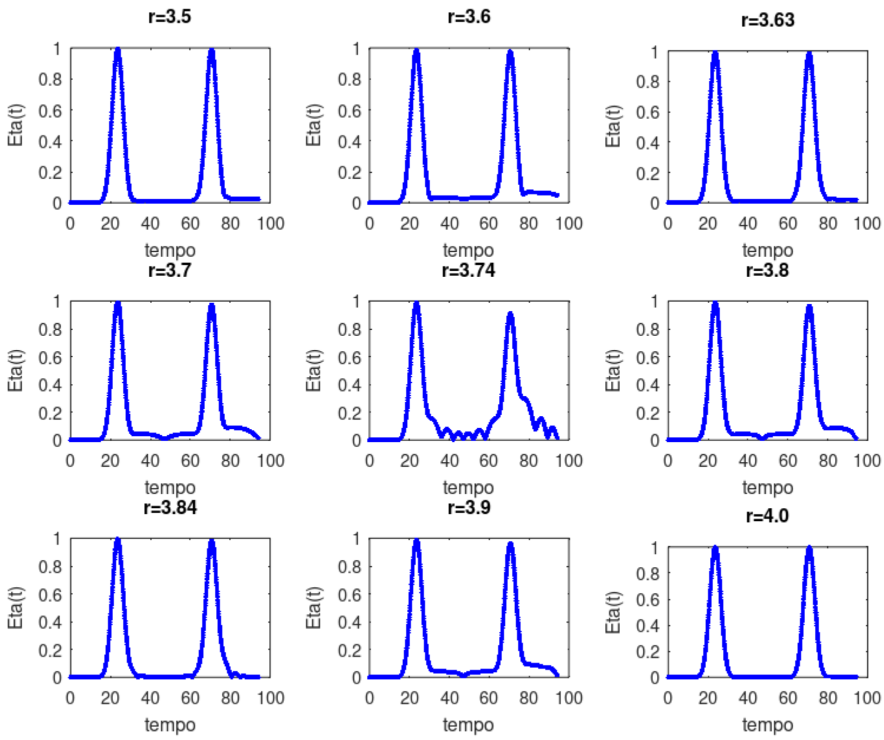

Figura 40 – Fidelidade $\eta(t)$,para alguns valores de parâmetros de caoticidade do mapa logístico, utilizando sequências binárias para N=30.

2. Mapa da Barraca

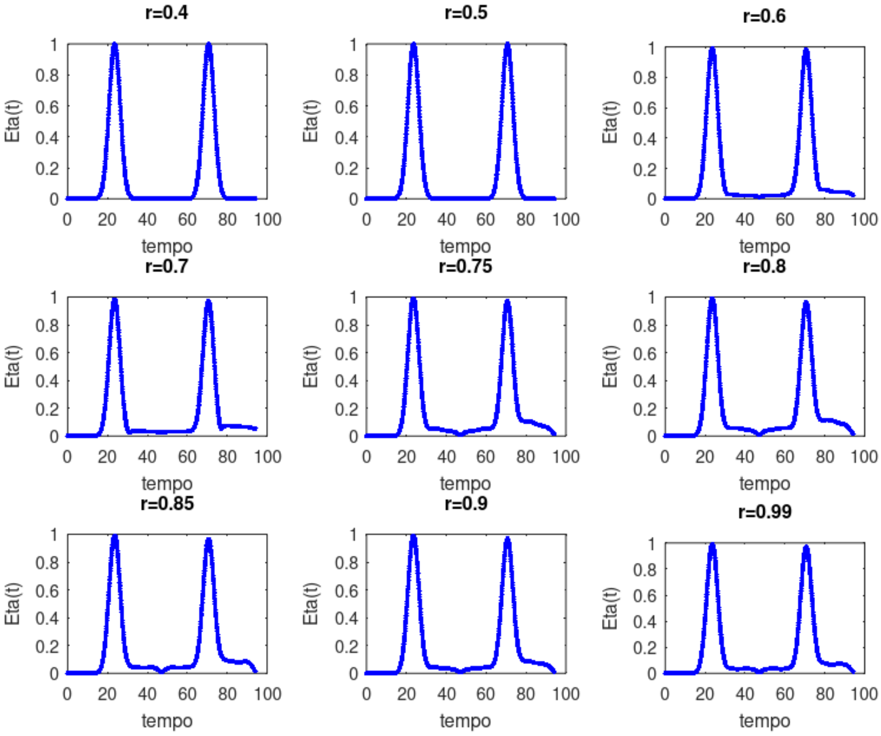

Figura 41 – Fidelidade $\eta(t)$, para alguns valores de parâmetros de caoticidade do mapa da barraca, utilizando sequências binárias para N=30.

3. Mapa Gaussiano

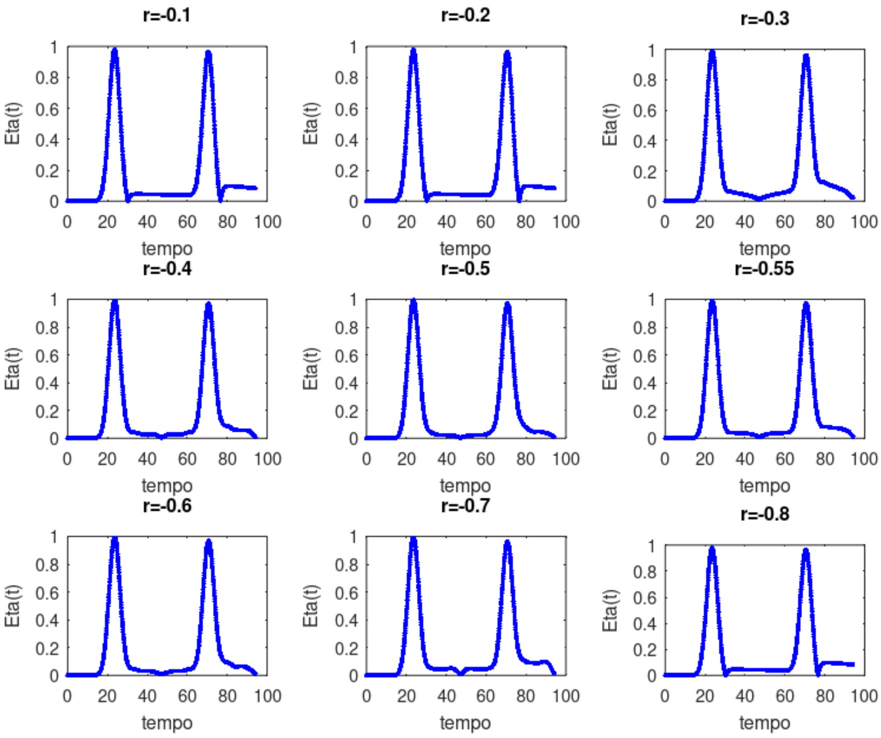

Figura 42 – Fidelidade $\eta(t)$, para alguns valores de parâmetros de caoticidade do mapa gaussiano, utilizando sequências binárias para N=30.

Analisando os gráficos utilizando sequências binárias, observa-se que o tempo característico τ se mantém. Quando comparamos as curvas das figuras 40 e 41 com as respectivas figuras 37 e 38, os casos binários sugerem haver uma melhora na recorrência, com pouca diminuição da fidelidade em 3τ, indicando um aumento na fidelidade $\eta(t)$ para o segundo pico.

Em alguns casos, nota-se que a parte inferior da curva, localizada entre $\frac{3}{2}\tau$ e $\frac{5}{2}\tau$ é similar ao caso quando utiliza-se uma sequência periódica.

Para as curvas do mapa gaussiano, nota-se uma similaridade entre as curvas para $r =$ -0.1; -0.2; -0.8, que são as regiões onde o mapa ainda não apresenta caos. No geral, também nota-se que a parte inferior (intermediária) das curvas está mais suave se comparado ao caso não-binário, sugerindo uma similaridade ao caso periódico. Nos casos onde não há janelas de periodicidade a parte inferior das curvas suavizam, mas ainda mantêm características do caso aleatório.

4.2.2 Concorrência $C(t)$

No estudo da concorrência foi utilizada a amplitude da função de onda para dois qubits desejados (AUDRETSCH, 2007). Como descrito em (ALMEIDA et al., 2019), para os estados utilizados aqui, a concorrência toma a seguinte expressão

$$C(t) = 2|f_N{}^{(1)}(t) f_N{}^{(2)}(t)|, \tag{18}$$

no qual $f_N^{(j)}(t) = \left\langle N^{(j)} | \psi(t) \right\rangle$ é a amplitude de transição para o último sítio da j-ésima perna, em que

$$\left\langle N^{(1)} \right| = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{19a}$$

$$\left\langle N^{(2)} \right| = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19b}$$

A obtenção da concorrência (18) em um determinado tempo t é dada calculando-se $f_N^{(j)}(t)$ para $j = 1,2$ e utilizando-se a matriz coluna referente à evolução temporal. Os valores extremos $C(t) = 0$ e $C(t) = 1$ indicam respectivamente estados separável e maximamente emaranhado.

Como previsto em (ALMEIDA et al., 2019), a capacidade de transferência de emaranhamento é otimamente observada em múltiplos de um tempo característico τ. Para o esquema de acoplamento J_n adotado aqui, espera-se $\tau = \pi N/(4J)$. De fato, os resultados de $\eta(t)$ confirmam a validade de τ para os parâmetros usados neste estudo.

Na construção dos gráficos da concorrência $C(t)$ que serão mostrados a seguir, utilizou-se a média de 100 realizações de sequências para a suavização das curvas. As curvas representam Δ/J (no qual Δ é a amplitude máxima do desvio aleatório d_n, em que $\epsilon_{n,2} = \epsilon_{n,1} + d_n$, com $\Delta \ll$ W) e foram caracterizadas por cores, que seguem o seguinte padrão:

1. Vermelho → $\Delta/J = 0.05$;
2. Preto → $\Delta/J = 0.1$;
3. Azul → $\Delta/J = 0.2$.

Para efeitos de comparação, apresentamos três tipos de gráficos para a concorrência $C(t)$: o primeiro utilizando sequências totalmente aleatórias (através da função $rand$); o segundo utilizando sequências binárias derivadas a partir das sequências aleatórias que foram geradas utilizando a função $rand$; e a última utilizando uma sequência de período 2, do tipo (2, 1, 2, 1, 2, ...). Essas sequências foram utilizadas para a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e para os acoplamentos inter-cadeia γ_n. Nos três casos utilizamos para os acoplamentos intra-cadeia a relação de fidelidade $J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2)$.

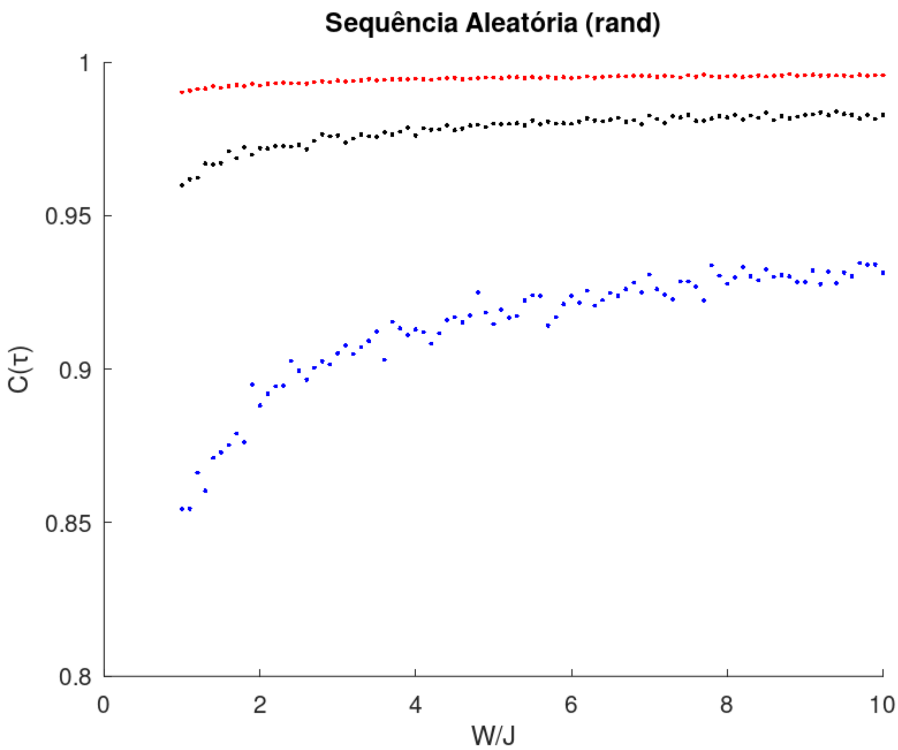

Figura 43 – Quantidade de concorrência contra a força da desordem W$/J$, utilizando uma sequência aleatória, para N=30. As curvas representadas em vermelho, preto e azul equivalem a $\Delta/J = 0.05; 0.1; 0.2$, respectivamente.

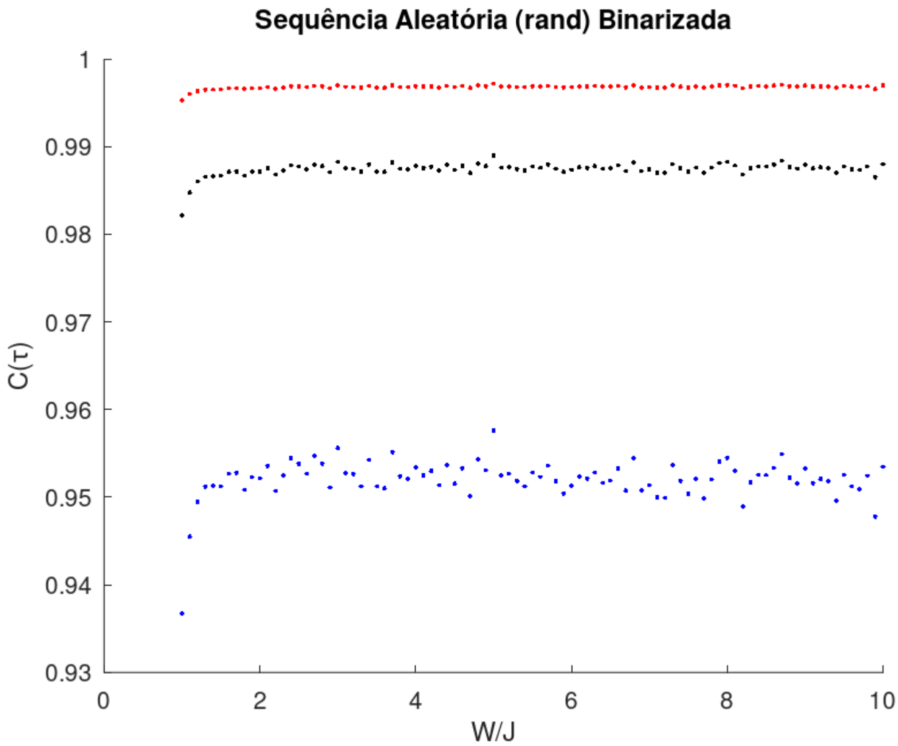

Figura 44 – Quantidade de concorrência contra a força da desordem W/J, utilizando uma sequência binária derivada de uma sequência aleatória, para N=30. As curvas representadas em vermelho, preto e azul equivalem a $\Delta/J = 0.05; 0.1; 0.2$, respectivamente.

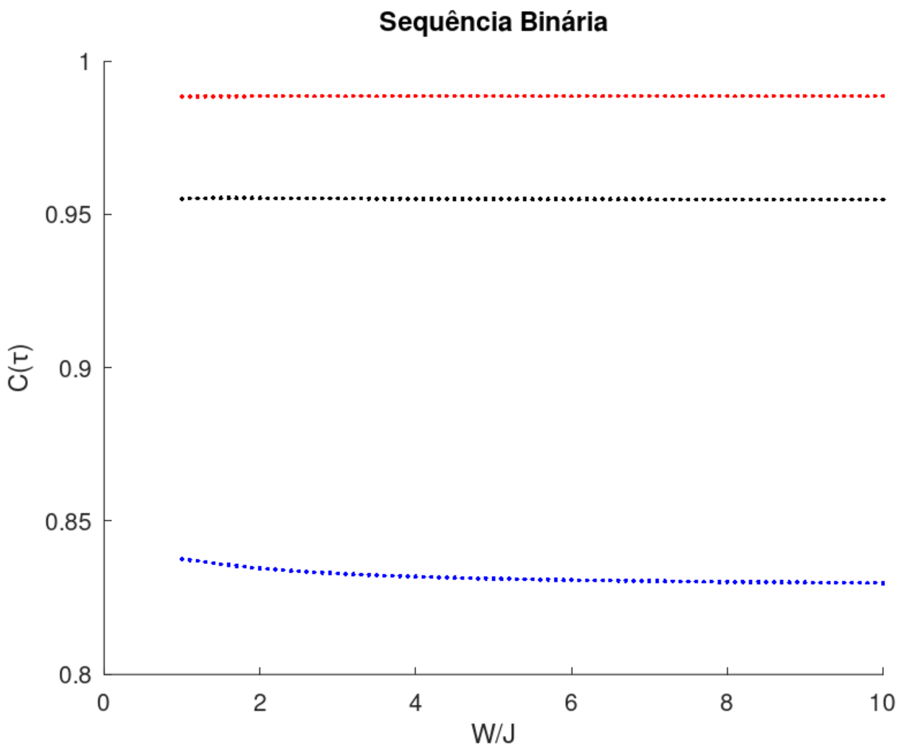

Figura 45 – Quantidade de concorrência contra a força da desordem W/J, utilizando uma sequência uma sequência binária (2, 1, 2, 1, 2, ...) para N=30. As curvas representadas em vermelho, preto e azul equivalem a $\Delta/J = 0.05; 0.1; 0.2$, respectivamente.

4.2.2.1 Sequências Caóticas

Utilizou-se sequências caóticas geradas por mapas caóticos para determinados valores de parâmetros de caoticidade r na diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e nos acoplamentos inter-cadeia γ_n. Para os acoplamentos intra-cadeia utilizou-se a relação de fidelidade (8).

Os gráficos abaixo mostram a quantidade de concorrência $C(t)$ de dois qubits para o último sítio de cada perna contra a amplitude de desordem W/J (de 1 a 10), calculando a média sobre 100 realizações distintas. O tempo de transferência empregado foi $\tau = \pi N/(4J)$ e consideramos $J = 1$, que equivale ao valor máximo da relação de fidelidade.

1. Mapa Logístico

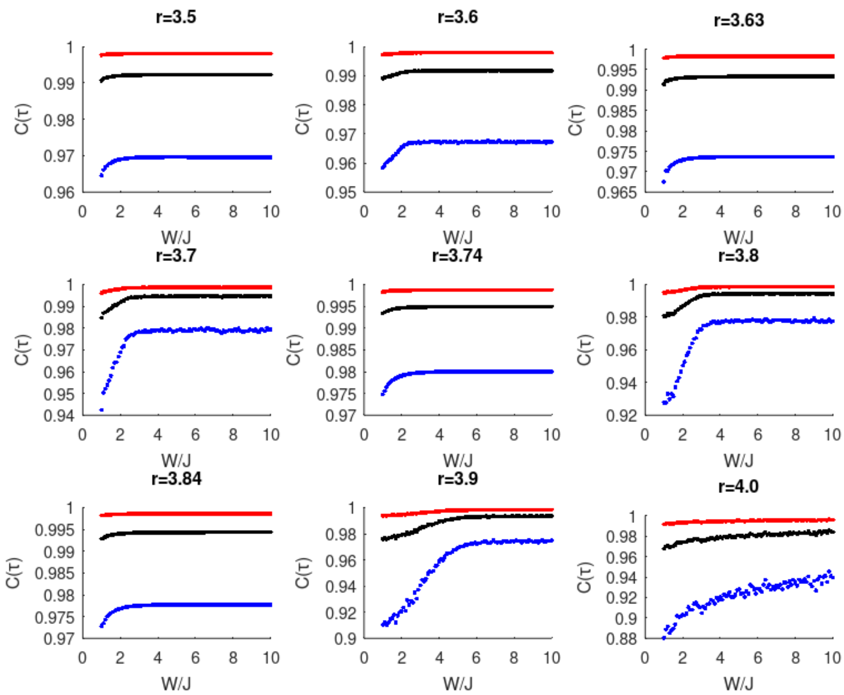

Figura 46 – Quantidade de concorrência contra a força da desordem W/J, para alguns valores de r do mapa logístico, com N=30. As curvas representadas em vermelho, preto e azul equivalem a $\Delta/J = 0.05; 0.1; 0.2$, respectivamente.

Observando os gráficos, nota-se que as curvas onde não há janelas de periodicidade ($r = 3.7$; 3.8; 3.9; 4.0.) possuem formatos parecidos, que caracteriza uma subida mais íngreme e demora mais para estabilizar se comparado as curvas onde há janelas de periodicidade. Ou seja, a medida que a caoticidade aumenta, a altura das curvas sobre o eixo y vai reduzindo.

A curva para o valor $r = 4.0$ é o que mais assemelha-se ao caso que utiliza sequência aleatória (figura 43), que é justamente o ponto com maior caoticidade do mapa logístico, e pode ser observado no Anexo A. Ao comparar os gráficos da figura 46 com o gráfico da figura 43, observa-se que a curva em azul inicia-se próxima ao ponto 0.88 no eixo y e vai estabilizando gradualmente até próximo ao ponto 0.94 no eixo y, sugerindo maior similaridade com as curvas observadas no caso utilizando sequência aleatória (43).

2. Mapa da Barraca

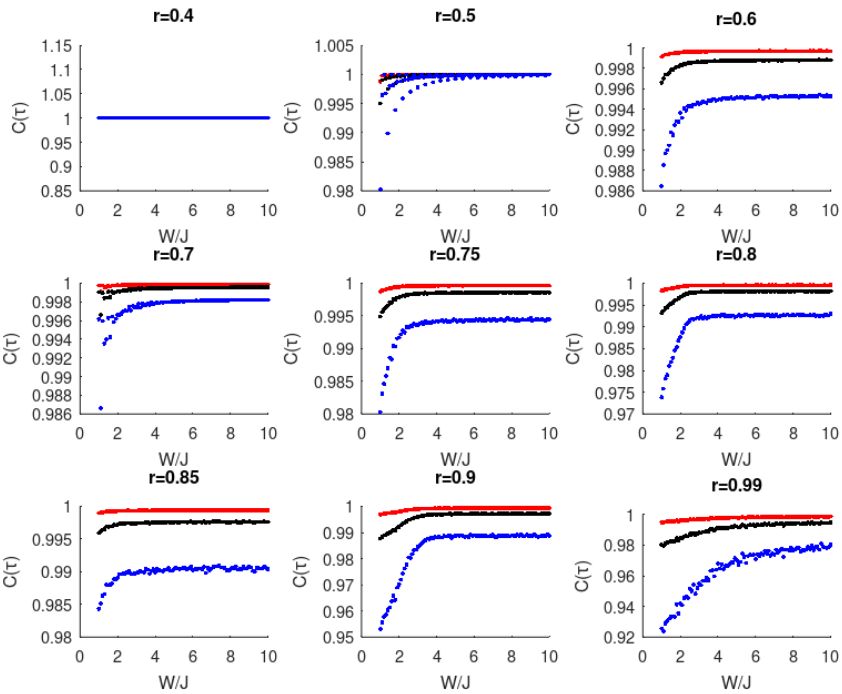

Figura 47 – Quantidade de concorrência contra a força da desordem W/J, para alguns valores de r do mapa da barraca, com N=30. As curvas representadas em vermelho, preto e azul equivalem a $\Delta/J = 0.05; 0.1; 0.2$, respectivamente.

O mapa da barraca não possui janela de periodicidade e torna-se caótico a partir de $r = 0.5$. Em $r = 0.4$ a sequência que foi gerada para plotar o gráfico é formada de apenas zeros (0, 0, ..., 0) e, em $r = 0.5$, a sequência gerada é de período 1 e ainda não está na região de caos.

As curvas indicam uma similaridade com as curvas da figura 43, e principalmente para o valor de r= 0.99, que possui maior caoticidade para o mapa da barraca.

3. Mapa Gaussiano

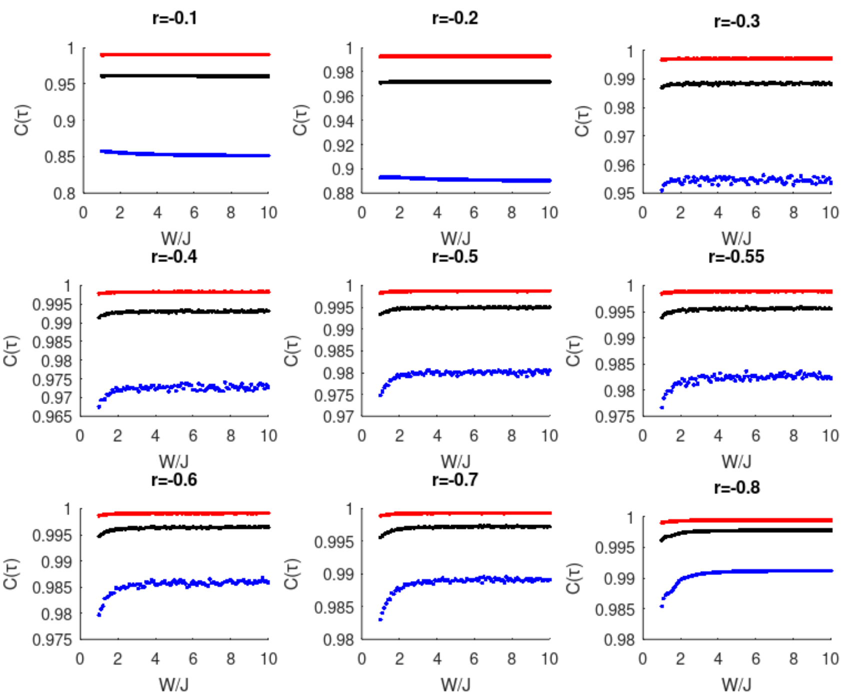

Figura 48 – Quantidade de concorrência contra a força da desordem W/J, para alguns valores de r do mapa gaussiano, com N=30. As curvas representadas em vermelho, preto e azul equivalem a $\Delta/J = 0.05; 0.1; 0.2$, respectivamente.

As sequências para valores de r = -0.1 e r = -0.2 são de período 2. Observando as curvas do gráfico, pode-se sugerir que é similiar às curvas que utilizam sequências binárias, retratadas no gráfico da figura 44.

Para valores de r que estão na região de caos, as curvas assemelham-se ao caso em que é utilizado uma sequência aleatória.

4.2.2.2 Sequências Binárias

Nesta situação, utilizou-se sequências binárias geradas através das sequências caóticas para determinados valores de parâmetros de caoticidade r para a diagonal principal $\epsilon_{n,j}$ e para os acoplamentos inter-cadeia γ_n. Para os acoplamentos intra-cadeia utilizou-se a relação de fidelidade $J_n = J\sqrt{n(N-n)}/(N/2)$.

Os gráficos abaixo mostram a quantidade de concorrência $C(t)$ de dois qubits para o último sítio de cada perna contra a amplitude de desordem W/J (de 1 a 10), calculando a média sobre 100 realizações distintas. O tempo de transferência empregado foi $\tau = \pi N/(4J)$ e consideramos $J = 1$, que equivale ao valor máximo da relação de fidelidade (8).

1. Mapa Logístico

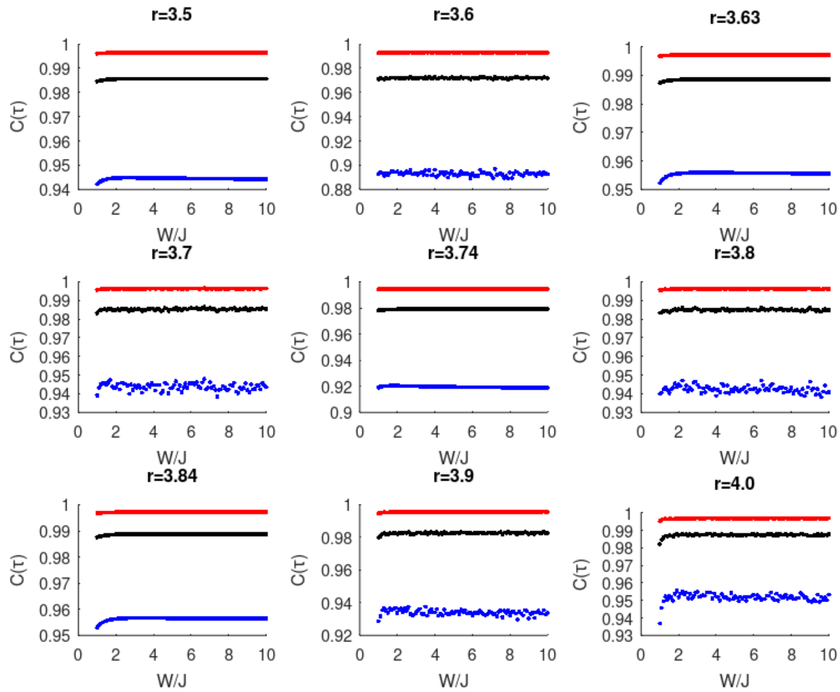

Figura 49 – Concorrência contra a força da desordem W/J, para alguns valores de r do mapa logístico, utilizando sequências binárias para N=30. As curvas representadas em vermelho, preto e azul equivalem a $\Delta/J = 0.05; 0.1; 0.2$, respectivamente.

2. Mapa da Barraca

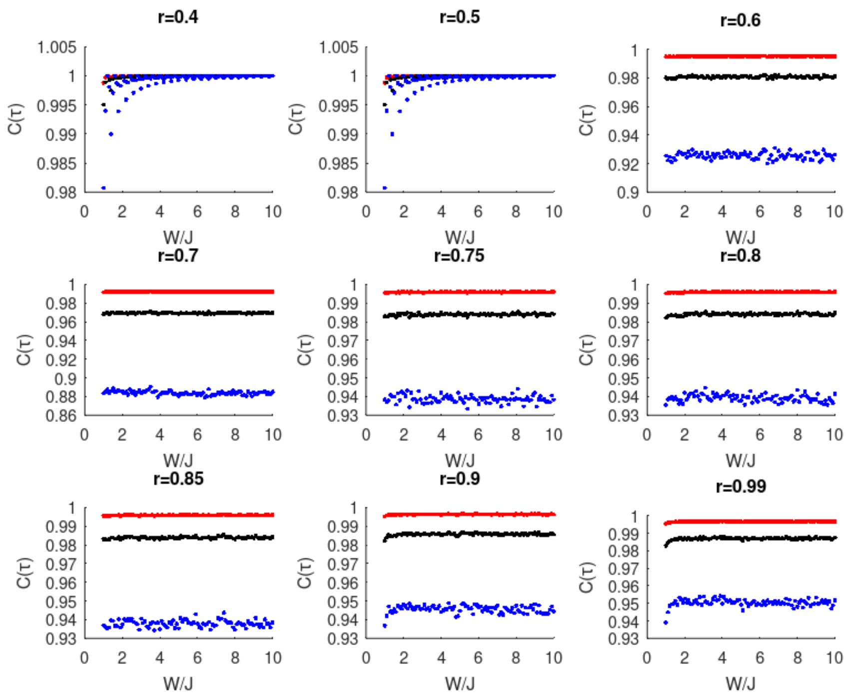

Figura 50 – Concorrência contra a força da desordem W/J, para alguns valores de r do mapa da barraca, utilizando sequências binárias para N=30. As curvas representadas em vermelho, preto e azul equivalem a $\Delta/J = 0.05; 0.1; 0.2$, respectivamente.

3. Mapa Gaussiano

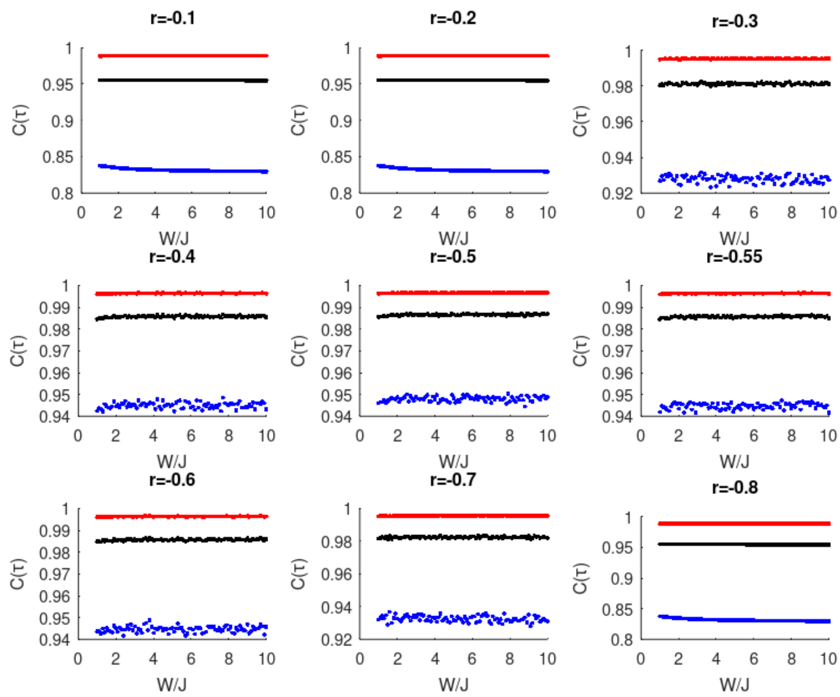

Figura 51 – Concorrência contra a força da desordem W/J, para alguns valores de r do mapa gaussiano, utilizando sequências binárias para N=30. As curvas representadas em vermelho, preto e azul equivalem a $\Delta/J = 0.05; 0.1; 0.2$, respectivamente.

No mapa logístico, nas curvas para a região caótica (r = 3.7; 3.8; 3.9; 4.0.) nota-se que estabilizaram mais rapidamente, a subida fica mais íngreme e logo se estabiliza, enquanto que as curvas para sequências não-binárias é mais suave e demora mais para estabilizar. O mesmo observa-se para o mapa da barraca e gaussiano para valores de r que estão no caos (r = 0.6; 0.7; 0.75; 0.8; 0.85; 0.9; 0.99 e r = -0.3; -0.4; -0.5; -0.55; -0.6; -0.7).

No mapa da barraca, para valores de $r = 0.4$ e $r = 0.5$ as sequências possuem período 1, consequentemente, as curvas convergem para um ponto em comum.

No mapa gaussiano, observa-se que curvas onde há janelas de periodicidade (r = -0.1; -0.2; -0.8) assemelham-se no formato, e são similiares para as curvas obtidas para casos utilizando sequência binária.

Para os três tipos de mapa caótico, observa-se que não há melhora na transmissão de emaranhamento nas curvas dos gráficos binários, pois, apesar da curva estabilizar mais rápido, ela não alcança valores maiores no eixo y se comparada às sequências não-binárias (com exceção de r = -0.8 para o mapa gaussiano).

5 Conclusão

O presente trabalho consistiu na realização da caracterização qualitativa obtida através do cálculo numérico para as quantidades envolvidas (espectros, densidade de probabilidade, fidelidade $\eta(t)$ e concorrência $C(t)$) para o sistema de transferência de emaranhamento em uma cadeia de qubits, do tipo escada, em presença de desordem controlada utilizando sequências caóticas.

O capítulo 2 apresentou um Hamiltoniano que descreveu o modelo estudado, em que os átomos de uma perna interagiam apenas com seus vizinhos e com o átomo correspondente da outra perna. As interações entre os degraus e as energias individuais foram dadas por sequências desordenadas, caóticas e binárias. E as interações intra-cadeia foram dadas pela relação de fidelidade 8. Considerou-se apenas situações em que uma excitação foi introduzida no sistema, posteriormente foi descrito uma base ortonormal para o espaço de Hilbert de dois qubits e escreveu-se um estado inicial em que os primeiros átomos de cada perna encontravam-se num estado de emaranhamento máximo. O capítulo 3 apresentou a caracterização dos espectros e densidade de probabilidade do Hamiltoniano. No capítulo 4, a transferência de emaranhamento foi estudada.

Os mapas logístico e gaussiano possuem janelas de periodicidade, entre regiões de caos, ao passo que o mapa da barraca não mostra esses retornos à regularidade; com isso, fica plausível a ideia de que os espectros para o mapa da barraca são os que mais se assemelham ao caso de referência dado pela sequência randômica. Além disso, nesses mapas, o aumento da caoticidade, regulada pelo parâmetro r, sugeriu um aumento controlado da desordem da sequência, principalmente para o mapa da barraca, que não possui janelas de periodicidade e em que a caoticidade aumentou monotonicamente com r.

Os gráficos da densidade de probabilidade que foram vistos no capítulo 3, de modo geral, mostram que para valores baixos de W, os autoestados associados aos extremos do espectro concentram a probabilidade de ocupação pela excitação sobre os átomos da região central da escada.

Um dos principais resultados para os gráficos da fidelidade $\eta(t)$ (capítulo 4) é que o tempo característico $\tau = \pi N/(4J)$ e seus múltiplos se mantêm mesmo para os casos caóticos. Os casos caóticos sugerem haver uma recorrência melhor do que no caso aleatório, com pouca diminuição da fidelidade em 3τ. Além disso, a fidelidade tende a diminuir para recorrências em $(3\tau, 5\tau, 7\tau, ...)$, conforme mostra a figura 52.

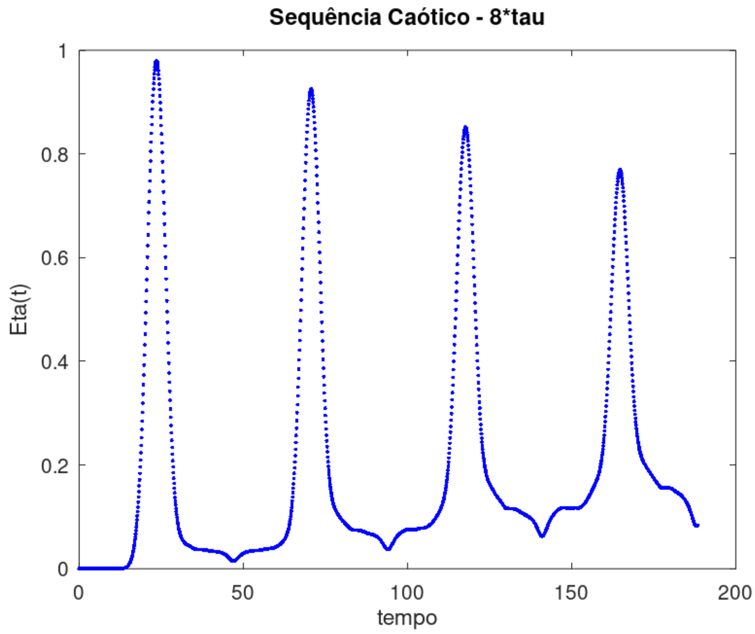

Figura 52 – Fidelidade $\eta(t)$, utilizando uma sequência aleatória para N=30. O tempo de transferência empregado foi 8τ.

Como previsto em (ALMEIDA et al., 2019) a transferência de emaranhamento melhora com o aumento de W, e há um valor máximo de saturação, que depende do desvio Delta. Isso pôde ser observado nos gráficos de concorrência analisados no capítulo 4.

Referências

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T.; YORKE, J. A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. [S.l.]: Springer New York, 2000. Citado na página 6.

ALMEIDA, G. M. et al. Robust entanglement transfer through a disordered qubit ladder. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 383, n. 27, p. 125847, 2019. Citado 8 vezes nas páginas 1, 2, 3, 6, 7, 8, 42 e 51.

AUDRETSCH, J. **Entangled systems: new directions in quantum physics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. Citado na página 42.

CHRISTANDL, M. et al. Perfect state transfer in quantum spin networks. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 92, p. 187902, May 2004. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.187902>. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 34.

EISBERG, R. M. et al. **Física cuántica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas**. [S.l.: s.n.], 1994. Citado na página 1.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics; vol. 3**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing company, 1965. Citado na página 1.

FOCK, V. Konfigurationsraum und zweite quantelung. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 75, n. 9, p. 622–647, 1932. Citado na página 4.

GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. **Introduction to quantum mechanics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. Citado na página 1.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)**. [S.l.]: Editora Blucher, 2014. Citado na página 1.

OLIVEIRA, W. F. de. **Potenciais Caóticos no Operador de Schrodinger Unidimensional: Análise pelo Inverso do Número de Participação**. Tese (Doutorado) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2018. Citado 6 vezes nas páginas x, xi, 2, 6, 54 e 55.

OLIVEIRA, W. F. de; PELLEGRINO, G. Q. Chaos-based potentials in the one-dimensional tight-binding model probed by the inverse participation ratio. **Computational and Applied Mathematics**, Springer, v. 37, n. 4, p. 3995–4006, 2018. Citado na página 6.

PERES, M. L. **Localização de Anderson e Transição Metal Isolante em Filmes de Pb**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2008. Citado na página 1.

RAIMOND, J.-M.; BRUNE, M.; HAROCHE, S. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 73, n. 3, p. 565, 2001. Citado na página 1.

SYCH, D.; LEUCHS, G. A complete basis of generalized bell states. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 11, n. 1, p. 013006, 2009. Citado na página 7.

VIEIRA, R. Transmissão de emaranhamento através de cadeias de spins. Universidade Federal de São Carlos, 2018. Citado na página 1.

Anexo

ANEXO A – Mapas Caóticos

Os gráficos abaixo se referem ao diagrama de bifurcação para cada mapa caótico estudado neste trabalho.

1. Mapa Logístico

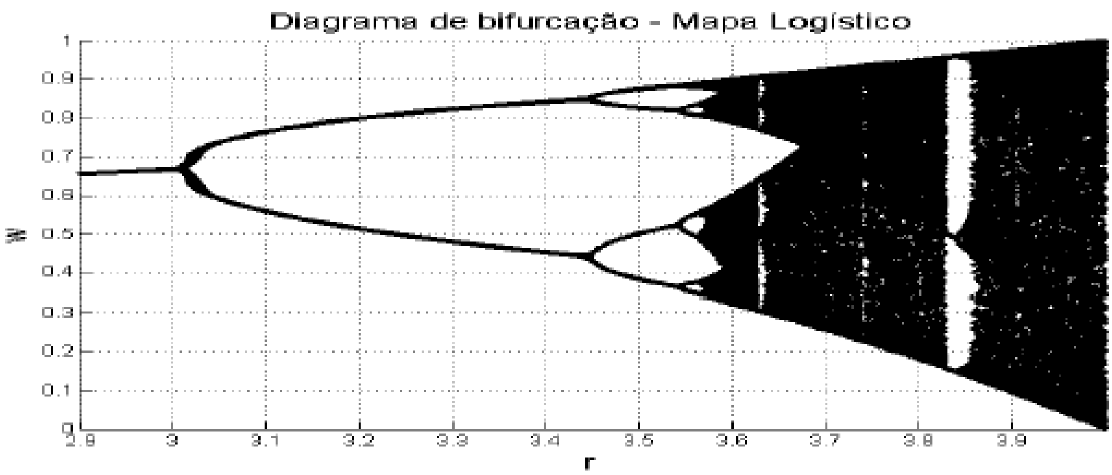

Figura 53 – Mapa de bifurcação para o mapa logístico. Fonte: (OLIVEIRA, 2018).

2. Mapa da Barraca

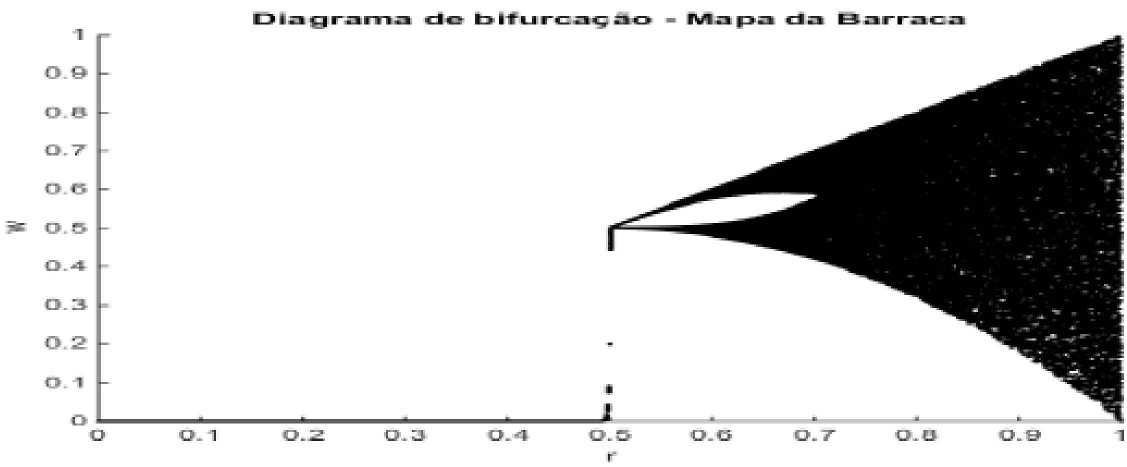

Figura 54 – Mapa de bifurcação para o mapa da barraca. Fonte: (OLIVEIRA, 2018).

3. Mapa Gaussiano

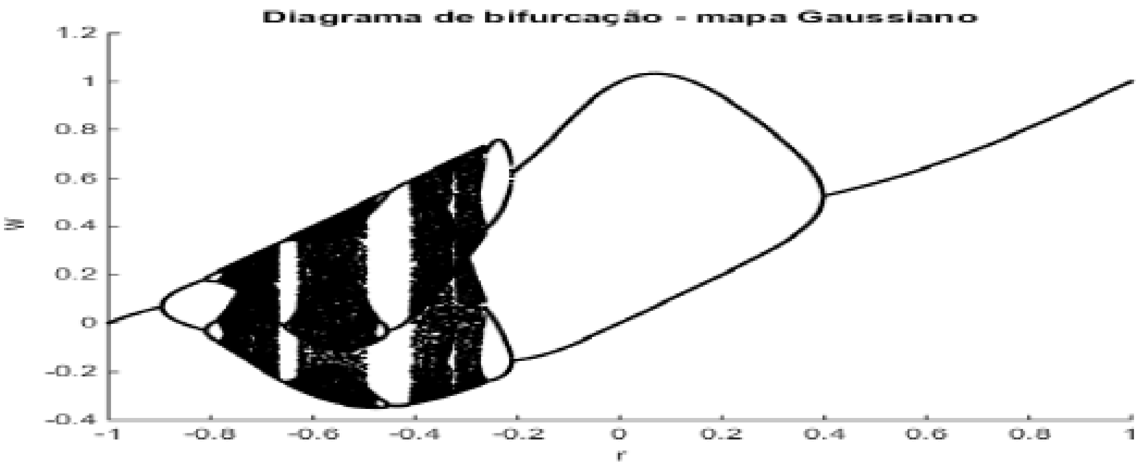

Figura 55 – Mapa de bifurcação para o mapa gaussiano. Fonte: (OLIVEIRA, 2018).