



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

Aspectos do controle das oscilações de Josephson no modelo de Bose-Hubbard de dois modos

Gilson Vieira Soares

Orientador: Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria
CEFET-MG

Coorientador: Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino
CEFET-MG

Coorientador : Prof. Dr. Adécio Carlos de Oliveira
UFSJ

BELO HORIZONTE
AGOSTO DE 2023

Gilson Vieira Soares

Aspectos do controle das oscilações de Josephson no modelo de Bose-Hubbard de dois modos

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria
CEFET-MG

Coorientador: Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino
CEFET-MG

Coorientador: Prof. Dr. Adécio Carlos de Oliveira
UFSJ

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
AGOSTO DE 2023

S676a Soares, Gilson Vieira
Aspectos do controle das oscilações de Josephson no modelo de Bose-Hubbard de dois modos / Gilson Vieira Soares. – 2023.
73 f.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: José Geraldo Peixoto de Faria.

Coorientador: Giancarlo Queiroz Pellegrino.

Coorientador: Adélcio Carlos de Oliveira.

Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Bose-Hubbard – Modelos – Teses. 2. Expoentes de Lyapunov – Teses.
3. Teoria quântica – Teses. 4. Entropia – Teses. I. Faria, José Geraldo Peixoto de.
II. Pellegrino, Giancarlo Queiroz. III. Oliveira, Adélcio Carlos de. IV. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. V. Título.

CDD 531.32

Gilson Vieira Soares

**Aspectos do controle das oscilações de
Josephson no modelo de Bose-Hubbard de
dois modos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Trabalho aprovado. Belo Horizonte, 29 de agosto de 2023:

Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria
CEFET-MG

Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino
CEFET-MG

Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira
UFSJ

Prof. Dr. Maurício Reis e Silva Júnior
UFSJ

Prof. Dr. Luis Argel Poveda Calviño
CEFET-MG

Prof. Dr. Allbens Atman Picardi Faria
CEFET-MG

Prof. Dr. Thiago Gomes de Mattos
CEFET-MG

Estou escrevendo para minhas amadas filhas Yasmin e Isadora como uma forma de homenagear o amor e a inspiração que elas trazem à minha vida.

Agradecimentos

Agradeço de coração à minha mãe, Maria Aparecida, cujo amor incondicional sempre foi a força propulsora da minha vida. Sua presença e apoio constante foram a luz que iluminou meus caminhos, moldando a pessoa que sou hoje.

À minha amada esposa, Luiza, expresso minha gratidão pelo seu amor inabalável e pelo apoio incansável em todas as fases desta jornada. Seu suporte foi a âncora que me manteve firme diante dos desafios, e sua presença tornou cada etapa mais leve.

Ao meu orientador, José Geraldo, estendo meus agradecimentos pela excepcional supervisão, paciência infinita e pelo rigor acadêmico que guiaram este trabalho. Sua orientação foi fundamental para o desenvolvimento desta tese, e sou grato por sua sabedoria e dedicação.

Aos coorientadores, Giancarlo e Adécio, dedico meu reconhecimento pelas contribuições valiosas que enriqueceram este estudo, assim como ao Professor Albens, que generosamente disponibilizou recursos computacionais indispensáveis para o progresso deste trabalho.

A todos os familiares e amigos que compartilharam este trajeto comigo, agradeço pelo apoio constante e pelas palavras de estímulo nos momentos desafiadores. Cada gesto de carinho não passou despercebido e foi fundamental para a minha jornada.

Por fim, às minhas queridas filhas, Yasmin e Isadora. Vocês são a luz dos meus dias, inspirando-me com amor infinito e renovando meu propósito a cada sorriso. Este trabalho é dedicado a vocês, como um testemunho do meu comprometimento em construir um futuro digno de suas incríveis presenças.

Kiko: Professor Girafales, eu queria uma bola quadrada.

Professor Girafales: Bola quadrada, Kiko? Você não quis dizer “caos quântico”?

Chiquinha: E burro faz doutorado?

Resumo

Neste estudo, exploramos o modelo de Bose-Hubbard de dois modos, com interações átomo-átomo ajustadas de forma harmônica ao longo do tempo. Obtemos a hamiltoniana clássica mediante uma expansão do hamiltoniano quântico em termos de $1/N$, em que N é o número de átomos. Observamos comportamento caótico na dinâmica clássica e mapeamos o espaço de parâmetros e de fase, utilizando o expoente de Lyapunov dominante e medidas quânticas como o eco de Loschmidt, a pureza generalizada e a entropia linear. Na contrapartida quântica do caos, foram observadas oscilações irregulares de Josephson. No regime regular, identificamos colapsos, reavivamentos, quase-periodicidade e controle coerente das oscilações de Josephson.

Palavras-chave: Modelo de Bose-Hubbard. Expoente de Lyapunov. Eco de Loschmidt. Pureza generalizada. Entropia linear.

Abstract

In this study, we investigate the two-mode Bose-Hubbard model with atom-atom interactions harmonically tuned over time. The classical Hamiltonian is obtained after an expansion of the quantum Hamiltonian in terms of $1/N$ where N is the number of atoms. Chaotic behavior is observed in classical dynamics, and we map the parameter and phase space using the dominant Lyapunov exponent and quantum measures such as Loschmidt echo, generalized purity, and linear entropy. In the quantum counterpart of chaos, irregular Josephson oscillations are observed. In the regular regime, we identify collapses, revivals, quasi-periodicity, and coherent control of Josephson oscillations.

Keywords: Bose-Hubbard model. Lyapunov exponent. Loschmidt echo. Generalized purity. Linear entropy

Sumário

1 – Introdução	12
2 – Fundamentos teóricos	16
2.1 Redes óticas	16
2.2 Controle de interações	16
2.3 O hamiltoniano de Bose-Hubbard de dois modos	18
2.3.1 Estados coerentes atômicos	21
2.4 Hamiltoniana clássica	21
2.5 Interação estática	24
2.5.1 Os regimes de Rabi e Fock	24
2.5.2 O regime de Josephson	25
3 – Função de Husimi, métricas quânticas e expoentes de Lyapunov . . .	30
3.1 Função de Husimi	30
3.2 Métricas quânticas	31
3.2.1 Eco de Loschmidt	31
3.2.2 Pureza generalizada	32
3.2.3 Entropia linear	33
3.2.4 Resultados numéricos e discussão	34
3.3 Caos e expoentes de Lyapunov	35
4 – Caracterização das dinâmicas clássica e quântica com modulação temporal	38
4.1 Caos na dinâmica clássica	38
4.2 Dinâmica clássica versus dinâmica quântica	39
4.2.1 Variáveis clássicas e a função de Husimi	42
4.2.2 Variáveis clássicas e métricas quânticas	46
4.3 Espaços de parâmetros e de fase	52
4.3.1 Mapeamento da dinâmica clássica	52
4.3.2 Mapeamento da dinâmica quântica	54
5 – Conclusão	58
Referências	61

Apêndices	66
APÊNDICE A–Algoritmo de Wolf	67
APÊNDICE B–Solução Numérica da Equação de Schrödinger	71

1 Introdução

O Modelo de Bose-Hubbard (MBH) foi proposto por Gersch e Knollman, no âmbito da Física do Estado Sólido, com o propósito de descrever bósons interagentes em redes [Gersch e Knollman (1963)]. O nome do modelo deriva do Modelo de Hubbard, que descreve elétrons (férmions) em uma rede cristalina [Hubbard e Flowers (1963)]. Portanto, o MBH é a versão bosônica do Modelo de Hubbard. Esse modelo tem suscitado grande interesse devido à realização experimental dos condensados de Bose-Einstein (CBE).

Um CBE é um sistema no qual bósons ultrafrios se acumulam em um estado de energia mínima. A primeira observação de um CBE ocorreu em 1995 por Anderson et al., utilizando átomos de rubídio a uma temperatura de 170 nK [Anderson et al. (1995)]. Desde então, diversos CBEs foram realizados, por exemplo, com átomos alcalinos, moléculas e até mesmo fótons [Davis et al. (1995), Zwierlein et al. (2003), Klaers et al. (2010)].

Apesar da aparente simplicidade do MBH, ele tem sido objeto de estudos extensivos como uma ferramenta valiosa para a compreensão e realização de CBEs [Griffin, Snoke e Stringari (1996)].

Bósons ultrafrios podem ser aprisionados em poços de potencial conhecidos como armadilhas, e o MBH exibe duas fases distintas que já foram observadas em CBEs [Fisher et al. (1989), Morsch e Oberthaler (2006)]: a fase superfluida (SF) e a fase isolante de Mott (IM). Na fase SF, os átomos estão constantemente tunelando entre os poços de uma rede, um fenômeno análogo à supercondutividade. Por outro lado, na fase IM, os átomos ficam aprisionados em seus poços de potencial individuais (*self-trapping*), semelhante ao que é observado em materiais isolantes.

A uma temperatura próxima do zero absoluto, é possível observar uma transição de fase quântica (TFQ) em sistemas de átomos aprisionados. Ao contrário da transição de fase clássica, que ocorre a uma temperatura crítica T_c , devido a flutuações térmicas, na TFQ são as flutuações quânticas que desempenham o papel principal. A TFQ entre as fases SF e IM já foi observada experimentalmente [Greiner et al. (2002)]. Essa transição pode ser induzida pelo controle dos parâmetros do sistema. Por exemplo, a periodicidade e profundidade dos poços da rede podem ser modificadas usando lasers, e a interação entre bósons em um poço pode ser ajustada via ressonância de Feshbach [Chin et al. (2010), Kevrekidis et al. (2003)].

Na sua forma generalizada, o MBH descreve a interação de bósons em redes óticas por exemplo, abrangendo diversas geometrias e configurações de poços (sítios da rede). Neste estudo, estamos direcionando nossa investigação para o modelo de dois modos (armadilhas), onde os bósons são aprisionados em um potencial de poço-duplo. Apesar de ser uma simplificação, esse modelo captura propriedades similares à versão generalizada, como oscilações de Josephson entre os poços e autoarmadilhamento macroscópico, dentre

outros.

Esse modelo oferece a flexibilidade de diversos mecanismos de controle, incluindo a interação átomo-átomo nos sítios, a profundidade e o desnível entre os poços, bem como o tunelamento entre eles [Saito e Ueda (2003), Strzys, Graefe e Korsch (2008), Wang e Gong (2009), Gong, Morales-Molina e Hänggi (2009), Wang e Gong (2010), Watanabe e Mäkelä (2012), Lozada-Vera, Bagnato e Oliveira (2013), Watanabe e Mäkelä (2012), Holthaus e Stenholm (2001), Lee et al. (2001), Weiss e Teichmann (2008), Abdullaev e Kraenkel (2000), Salmond, Holmes e Milburn (2002)].

A análise de sistemas quânticos que apresentam caos em sua contrapartida clássica é conhecida como caos quântico. As manifestações do caos clássico na mecânica quântica são objetos de intensos debates. Embora a mecânica quântica não exiba sensibilidade às condições iniciais, observam-se registros ou assinaturas do caos clássico. Um exemplo paradigmático de modelo quântico que exhibe caos na sua versão clássica é o *quantum kicked top* [Haake, Kuś e Scharf (1987), Chaudhury et al. (2009), Neill et al. (2016)]. Nesse modelo, o controle dos parâmetros do sistema é efetuado por uma sequência periódica de *kicks*. Esse mesmo esquema de controle já foi aplicado ao MBH de dois modos [Khripkov, Cohen e Vardi (2013), Strzys, Graefe e Korsch (2008)].

O MBH exhibe três regimes distintos [Tonel, Links e Foerster (2005), Links et al. (2006)]. Em cada um desses regimes, o monitoramento da diferença na população atômica nas armadilhas (*imbalance*) desempenha um papel crucial na investigação do modelo, pois está relacionada com as fases superfluida (SF) e isolante de Mott (IM). Quando o *imbalance* oscila ao longo do tempo, ocorrem as conhecidas oscilações de Josephson. Essas oscilações podem ser suprimidas (colapsos) ou reconstituídas (*revivals*). Tais fenômenos já foram observados em CBEs [Greiner et al. (2002)]. É nesse contexto que emerge o estudo das manifestações do caos no MBH.

Dependendo dos parâmetros e das condições iniciais, a dinâmica clássica pode exibir comportamento caótico, que se reflete de várias maneiras no modelo, especialmente nas oscilações de Josephson. A compreensão dessas manifestações do caos na dinâmica quântica é significativa e profunda, pois se trata de um fenômeno presente em diversos sistemas quânticos. Diferentes áreas da física que exploram tecnologias quânticas e, mais recentemente, a computação quântica, demandam um monitoramento aprimorado dessas oscilações.

O objetivo deste trabalho é estudar o MBH de dois modos, incorporando interações controladas temporalmente. Devido à complexidade da dinâmica caótica que vai se apresentar, este estudo baseia-se em resultados obtidos por meio de simulações numéricas. Em termos mais amplos, esta pesquisa tem como meta compreender como o caos clássico se manifesta na dinâmica quântica do MBH.

Como objetivo específico, este trabalho propõe um mapeamento detalhado dos espaços de parâmetros e de fase associados à hamiltoniana clássica do MBH de dois sítios

no limite termodinâmico. Esse limite é alcançado através da expansão do hamiltoniano quântico em termos de $1/N$, onde N representa o número de bósons interagentes. Essa abordagem resulta na obtenção de uma hamiltoniana clássica expressa em termos de variáveis ação-ângulo. As equações de movimento clássicas derivadas dessa hamiltoniana revelam uma gama de comportamentos, tais como, trajetórias regulares, quase-regulares e caóticas. Estudos anteriores que utilizam a mesma estratégia podem ser encontrados em referências como [Anglin e Vardi (2001), Graefe, Korsch e Niederle (2008), Raghavan et al. (1999)]. Além disso, modelos como o de Lipkin-Meshkov-Glick e o modelo de Dicke servem como inspiração para a abordagem no estudo do MBH pois também admitem uma expansão em termos de $1/N$.

No âmbito da análise de sistemas clássicos com comportamento caótico, o cálculo dos expoentes de Lyapunov surge de forma natural, pois esses expoentes desempenham o papel de quantificadores do caos. Um método eficaz para calcular esses expoentes foi proposto por Wolf et al. [Wolf et al. (1985)]. O conhecimento dos expoentes de Lyapunov proporciona a realização de uma técnica de análise amplamente conhecida como espaço dos parâmetros de controle, que oferece uma compreensão global do sistema com respeito aos parâmetros [Bonatto, Gallas e Ueda (2008)].

A literatura apresenta diversos trabalhos [Khripkov, Cohen e Vardi (2013), Madhok et al. (2015)], incluindo outros já citados, que realizam um mapeamento do sistema com respeito aos parâmetros e condições iniciais. Cada um desses estudos explora regimes e características específicas dos sistemas abordados. No entanto, ao investigarmos a relação entre as dinâmicas clássica e quântica, o mapeamento análogo na dinâmica quântica é crucial considerar os fatores intrínsecos à mecânica quântica. Neste trabalho, serão empregados três quantificadores ou indicadores de caos no MBH de dois modos, juntamente com os expoentes de Lyapunov, que quantificam o caos clássico. Esses quantificadores consistem no eco de Loschmidt, na pureza generalizada e na entropia linear. A análise desses mapeamentos irá revelar, conforme mostraremos, uma significativa equivalência qualitativa e quantitativa em relação às correspondentes manifestações clássicas. Adicionalmente, a função de Husimi desempenhará um papel importante como um indicador qualitativo do caos.

Em suma, este trabalho visa contribuir para a compreensão das manifestações do caos no contexto do MBH de uma maneira mais ampla. Como será mostrado, na dinâmica quântica, os quantificadores podem ser ajustados e substituídos por análogos. O uso de mais de uma métrica, como será mostrado, permite explorar com maior ou menor vantagem determinados fenômenos ou aspectos do modelo, tais como o controle das oscilações de Josephson, colapsos e reavivamentos, e claro, o caos. Portanto, esperamos que os resultados e técnicas utilizadas se apliquem a outros tipos de abordagem do modelo, por exemplo, a modulação temporal de outros parâmetros bem como a forma da modulação.

O Capítulo 2 oferece uma síntese dos conceitos essenciais relacionados às redes óticas

e ao controle das interações em átomos ultrafrios, que constituem pilares fundamentais para a criação de CBEs. A seguir, introduzimos o MBH de dois modos e discutimos a aplicação do limite termodinâmico a esse modelo. Detalhamos as equações de movimento tanto na descrição clássica quanto na descrição quântica. Além disso, apresentamos resultados cruciais para o modelo com interações estáticas. Esse capítulo proporciona uma visão panorâmica do MBH, suficientemente ampla para que os leitores compreendam o escopo desta tese.

O Capítulo 3 aprofunda a discussão teórica em torno das métricas utilizadas, incluindo a função de Husimi, os expoentes de Lyapunov e o algoritmo proposto por Wolf. Ilustramos esses conceitos por meio de exemplos numéricos aplicados ao MBH com interações estáticas. Essa seção oferece um alicerce teórico essencial para a análise subsequente.

O Capítulo 4 é dedicado à caracterização abrangente da dinâmica, tanto clássica quanto quântica, do MBH com modulação temporal nas interações. Este capítulo abarca uma série de resultados numéricos significativos, que constituem o cerne desta tese. Através dessas análises, exploramos uma variedade de comportamentos emergentes e fenômenos, fornecendo uma visão ampla das complexas relações entre a dinâmica clássica e quântica do MBH com interações moduladas.

Por fim, o capítulo 5 apresenta uma discussão sucinta dos resultados obtidos, em especial no tocante ao caos na dinâmica clássica e aos mapeamentos clássico e quântico. Além disso, é discutida uma proposta de trabalho futuro que já se encontra em andamento.

Ademais, os algoritmos numéricos foram escritos nas linguagens C++ e Python. A solução da equação de Schrödinger foi obtida com o uso do módulo QUTIP para Python [Johansson, Nation e Nori (2012)]. Os resultados gráficos foram gerados com o GNUPLOT, e o ambiente de trabalho foi o Linux. No final desse trabalho temos dois apêndices que esclarecem, de forma pormenorizada, a implementação do algoritmo de Wolf e o uso do QUTIP, caso o leitor queira realizar a implementação desses.

2 Fundamentos teóricos

Este capítulo começa com uma breve introdução sobre a implementação de redes óticas, necessária para a realização do CBE. Em seguida, é apresentada a teoria de controle de interações atômicas nos poços da rede. O modelo de Bose-Hubbard de dois modos é apresentado e, além disso, é mostrado o ferramental matemático e conceitual da teoria de sistemas de dois níveis. Para uma revisão detalhada do modelo, consultar [Links et al. (2006), Gati e Oberthaler (2007), Dalton e Ghanbari (2012)]. Na sequência, o limite termodinâmico para o modelo de Bose-Hubbard de dois modos é avaliado e as equações de movimento são obtidas. A última seção é dedicada à apresentação de resultados numéricos para o modelo com interações estáticas.

2.1 Redes óticas

Bósons ultrafrios podem ser aprisionados em redes óticas. Diversos tipos de geometrias de redes já foram desenvolvidas. Uma rede ótica pode ser construída com o uso de feixes de laser contra-propagantes. Na direção em que os lasers se propagam, são gerados potenciais periódicos que podem aprisionar átomos ultrafrios.

A rede mais simples que pode ser construída, a rede unidimensional, consiste em usar dois feixes com a mesma intensidade e comprimento de onda λ , que se propagam em uma determinada direção e em sentidos opostos, gerando potenciais periódicos da forma

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx), \quad (2.1.1)$$

com $k = 2\pi/\lambda$ e x sendo a direção de propagação dos feixes. A constante V_0 é a profundidade dos poços, proporcional à intensidade dos *lasers*.

Os poços de potencial Eq. (2.1.1) possuem profundidade constante ao longo da rede, sendo ditos simétricos, e o espaçamento entre os poços, os sítios da rede, é $a = \lambda/2$. Tal rede pode ser modificada alterando-se os parâmetros de controle da rede, a saber, o comprimento de onda dos *lasers* e sua intensidade. Dessa forma, é possível obter potenciais assimétricos periódicos. Um potencial assimétrico de poço duplo é a soma de dois potenciais simétricos com profundidades diferentes. Para mais detalhes técnicos sobre a implementação de redes óticas, consultar [Morsch e Oberthaler (2006)].

2.2 Controle de interações

A quantidade chave para a compreensão das interações atômicas em uma rede ótica é o comprimento de espalhamento a_s . Tal quantidade advém da teoria quântica de

espalhamento e se relaciona com os processos de colisão entre átomos. É uma medida do alcance da interação entre as partículas em um processo de colisão e, portanto, tem dimensão de comprimento. A interação entre dois átomos em um mesmo sítio da rede U é proporcional a a_s . Valores de a_s positivos resultam em interações repulsivas e, o contrário, atrativas.

A formação de um CBE é favorecida para valores de a_s positivos, pois, assim, os átomos colidem elasticamente, o que pode levar ao tunelamento entre poços. Valores positivos muito altos podem levar a colisão entre três átomos ou mais (fora do regime de validade do modelo). Os valores de a_s dependem da espécie atômica. Diversos resultados experimentais mostram que os valores ficam entre algumas dezenas a centenas de a_0 (raio de Bohr). Algumas espécies atômicas exibem bons valores, ^{87}Rb e ^{23}Na são exemplos. Outras necessitam de ajuste no valor de a_s . A referência [Chin et al. (2010)] mostra uma tabela com diversos valores de a_s bem como detalhes técnicos e teóricos.

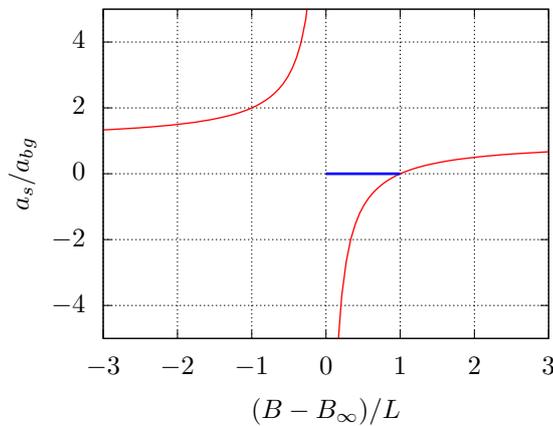
Uma técnica bastante utilizada para controlar o valor e o sinal de a_s é conhecida como ressonância Feshbach. Na presença de um campo magnético externo constante B , o comprimento de espalhamento a_s , para gases ultrafrios, é dado pela expressão [Moerdijk, Verhaar e Axelsson (1995)]

$$a_s(B) = a_{bg} \left(1 - \frac{L}{B - B_\infty} \right), \quad (2.2.1)$$

onde a_{bg} é o comprimento de espalhamento de fundo (*background*) longe da ressonância, B_∞ é a posição da ressonância, e L é a largura da ressonância.

A Figura 1 mostra o comportamento de a_s em função do campo externo B .

Figura 1 – A linha azul representa o valor de L , que é a extensão dos valores de B nos quais o controle de a_s pode ser realizado.



O parâmetro a_{bg} representa o valor de a_s quando B tende ao infinito, indicando que a aplicação do campo externo B não afeta significativamente o valor de a_s (ou seja, $a_s(B) \approx a_{bg}$). Quando o campo externo B é tal que $B \approx B_\infty$, o comprimento de espalhamento tende ao infinito. Por fim, L é a extensão dos valores de B para os quais se

inicia um ajuste dos valores de a_s . Uma largura L pequena resulta em variações bruscas, tanto em magnitude quanto em sinal, para a_s . Em suma, os parâmetros a_{bg} , B_∞ e L são obtidos experimentalmente e dependem, principalmente, da espécie atômica.

Este trabalho explorará, além das interações estáticas (U constante), o caso em que elas são moduladas temporalmente [Pollack et al. (2010)]. Consideremos que o campo magnético B na Eq. (2.2.1) seja da forma $B(t) = B_0 + b \cos(\omega t)$. O campo B é composto de uma parte estática B_0 e de uma parte oscilatória com amplitude b e frequência de oscilação ω . Temos, então,

$$a_s(t) = a_{bg} \left(1 - \frac{L}{B_0 - B_\infty + b \cos(\omega t)} \right). \quad (2.2.2)$$

Se $|b| \ll |B_0 - B_\infty|$, a Eq. (2.2.2) admite uma expansão de primeira ordem em torno b da forma

$$a_s(B) \simeq a_s(B_0) + \frac{da_s(B_0)}{dB} (B - B_0) \simeq a^* + \delta a \cos(\omega t), \quad (2.2.3)$$

com as constantes

$$a^* = a_s(B_0) = a_{bg} \left(1 - \frac{L}{B_0 - B_\infty} \right) \quad \text{e} \quad \delta a = \frac{a_{bg} L b}{(B_0 - B_\infty)^2}. \quad (2.2.4)$$

Como o parâmetro de interação U é proporcional a a_s , podemos obter uma expressão para a interação dependente do tempo $U(t)$. Dividindo ambos os lados da Eq. (2.2.3) por a^* temos

$$U(t) = U_0 [1 + \mu \cos(\omega t)], \quad (2.2.5)$$

onde U_0 é a parte estática da interação, $\mu = \delta a/a^*$ é a amplitude da modulação e ω , sua frequência.

2.3 O hamiltoniano de Bose-Hubbard de dois modos

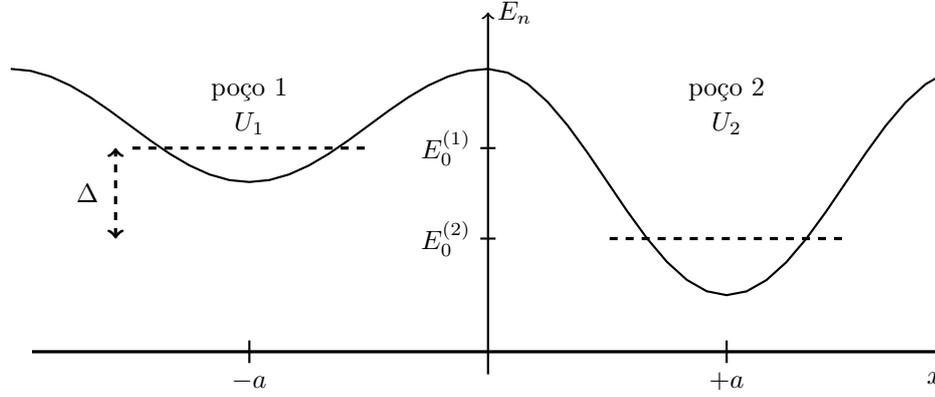
Dado um sistema com N átomos bosônicos interagentes, armadilhados em um potencial unidimensional de poço duplo com dois sítios, a descrição quântica aproximada de tal sistema de dois modos é dada pelo hamiltoniano (com $\hbar = 1$)

$$\hat{H} = -\frac{\Omega}{2} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) + \Delta (\hat{n}_1 - \hat{n}_2) + U [\hat{n}_1 (\hat{n}_1 - 1) + \hat{n}_2 (\hat{n}_2 - 1)]. \quad (2.3.1)$$

A Figura 2 mostra o esquema do potencial.

No hamiltoniano Eq. (2.3.1), Ω é a frequência de tunelamento entre os poços, $\Delta = E_0^{(1)} - E_0^{(2)}$ é a diferença de energia do estado fundamental entre os poços e U é o parâmetro de interação entre átomos em um mesmo poço. São dados os operadores de

Figura 2 – Esquema do potencial unidimensional de poço duplo. O potencial varia ao longo do eixo x com seus mínimos localizados em $x = -a$ (poço 1) e $x = a$ (poço 2). A interação entre átomos em um mesmo poço é U_1 e U_2 . Neste trabalho consideramos $U_1 = U_2 = U$. Por fim, $E_0^{(1)}$ e $E_0^{(2)}$ são as energias do nível mais baixo de cada poço e Δ a correspondente diferença de energia.



criação (\hat{a}_i^\dagger) e aniquilação (\hat{a}_i) de partículas nos poços $i = 1, 2$ que obedecem à relação de comutação $[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{j,k}$. Temos os operadores $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ que fornecem o número de partículas que populam o poço i . Por fim, verifica-se que o hamiltoniano é invariante sob transformações $\hat{a}_i \rightarrow -\hat{a}_i$ e $\hat{a}_i^\dagger \rightarrow -\hat{a}_i^\dagger$. A invariância também se verifica para transformações $\hat{a}_i \rightarrow e^{i\alpha} \hat{a}_i$ e $\hat{a}_i^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha} \hat{a}_i^\dagger$.

Define-se o operador número total de partículas $\hat{N} = \hat{n}_1 + \hat{n}_2$. Como se pode verificar, \hat{H} comuta com \hat{N} , logo o número total de partículas é conservado. A expansão do terceiro termo na Eq. (2.3.1) é dada por

$$\hat{n}_1(\hat{n}_1 - 1) + \hat{n}_2(\hat{n}_2 - 1) = \frac{1}{2}[\hat{N}^2 + (\hat{n}_1 - \hat{n}_2)^2] - \hat{N}. \quad (2.3.2)$$

O hamiltoniano é acrescido de uma constante de movimento que pode ser desprezada. Assim, o hamiltoniano Eq. (2.3.1) é dado por

$$\hat{H} = -\frac{\Omega}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) + \Delta(\hat{n}_1 - \hat{n}_2) + \frac{U}{2}(\hat{n}_1 - \hat{n}_2)^2. \quad (2.3.3)$$

Alternativamente, o sistema em estudo pode ser encarado como uma coleção de N sistemas de dois níveis interagentes e, dessa forma, todas as quantidades de interesse podem ser obtidas da álgebra de momento angular padrão. Introduzindo os operadores de pseudospin [Schwinger (2001)]

$$\begin{aligned} \hat{J}_x &= \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \\ \hat{J}_y &= \frac{1}{2i}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \\ \hat{J}_z &= \frac{1}{2}(\hat{n}_1 - \hat{n}_2), \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

o hamiltoniano Eq. (2.3.3) assume uma forma mais simples

$$\hat{H} = -\Omega \hat{J}_x + 2\Delta \hat{J}_z + 2U \hat{J}_z^2. \quad (2.3.5)$$

Verificam-se as seguintes relações de comutação da álgebra do grupo $SU(2)$

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hat{J}_y \quad (2.3.6)$$

e o momento angular total \hat{J} guarda relação com \hat{N} dada por $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = \frac{\hat{N}}{2} \left(\frac{\hat{N}}{2} + 1 \right)$.

Um estado de Dicke $|j, m\rangle$, com $j = N/2$, é tal que $\hat{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle$. Como \hat{J}^2 está relacionado ao número total de partículas e, $[\hat{J}^2, \hat{J}_i] = 0$, o número total de partículas N é constante de movimento. Para o operador \hat{J}_z , com $m = (n_1 - n_2)/2$, temos $\hat{J}_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle$. Este operador fornece o desbalanceamento (*imbalance*) no número de partículas nos poços 1 e 2.

Para a obtenção do espectro de autovalores do operador hamiltoniano Eq. (2.3.5), é necessário construir as matrizes para \hat{J}_x e \hat{J}_z explicitamente. Para esse fim, temos os operadores \hat{J}_+ e \hat{J}_- de tal modo que $\hat{J}_x = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2}$. Para um dado j fixo (número de partículas fixo), os elementos das matrizes \hat{J}_+ , \hat{J}_- e \hat{J}_z são dados por

$$\begin{aligned} \langle m' | \hat{J}_\pm | m \rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \delta_{m', m \pm 1} \\ \langle m' | \hat{J}_z | m \rangle &= m \delta_{m', m} \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

com $|m\rangle \equiv |j, m\rangle$. Todas as matrizes são quadradas e de ordem $(N+1) \times (N+1)$.

Verifica-se que as matrizes para os operadores \hat{J}_+ e \hat{J}_- são tais que $\hat{J}_+^\dagger = \hat{J}_-$. Os elementos dessas matrizes são iguais e, além disso, se encontram dispostos acima (\hat{J}_+) e abaixo (\hat{J}_-) da diagonal principal. Já a matriz para \hat{J}_z é diagonal na base $|j, m\rangle$ com autovalores iguais a m . As formas matriciais dos operadores \hat{J}_+ e \hat{J}_z são dadas por

$$\hat{J}_+ = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2(2j-1)} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \sqrt{2j} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_z = \begin{bmatrix} -j & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -j+1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & j \end{bmatrix}. \quad (2.3.8)$$

De posse das matrizes dadas pela Eq. (2.3.8), o hamiltoniano Eq. (2.3.5) pode ser escrito na forma matricial em termos da base de autoestados de \hat{J}_z . O hamiltoniano é uma matriz tridiagonal.

2.3.1 Estados coerentes atômicos

Uma representação alternativa do estado do sistema pode ser feita definindo um ponto sobre a chamada esfera de Bloch. Em termos das coordenadas esféricas e dos estados de Dicke, define-se o estado coerente atômico [Arecchi et al. (1972)], como

$$|\theta, \phi\rangle = \sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n} \cos^n(\theta/2)} \left[\sin(\theta/2) e^{i\phi} \right]^{N-n} |n\rangle, \quad (2.3.9)$$

em que $|n\rangle \equiv |n\rangle_1 \otimes |N-n\rangle_2$ é um estado de Fock referente a n partículas no poço 1 e $N-n$ partículas no poço 2. Em termos dos estados de Fock, o estado geral do sistema é

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^N c_n(t) |n\rangle, \quad (2.3.10)$$

com a condição de normalização $\sum_{n=0}^N |c_n(t)|^2 = 1$

O estado definido pela Eq. (2.3.9) é coerente no sentido de que minimiza a relação de incerteza de Robertson–Schrödinger [Schrödinger (1999)]

$$\sigma_{J_x}^2 \sigma_{J_y}^2 \geq \left| \frac{1}{2} \langle \{\hat{J}_x, \hat{J}_y\} \rangle - \langle \hat{J}_x \rangle \langle \hat{J}_y \rangle \right|^2 + \left| \frac{1}{2i} \langle [\hat{J}_x, \hat{J}_y] \rangle \right|^2, \quad (2.3.11)$$

para os pares de observáveis \hat{J}_x e \hat{J}_y , onde σ é o desvio padrão e $\{\}$ o anticomutador.

Na base de estados $|\theta, \phi\rangle$, o valor esperado de um operador $\langle \hat{J}_i \rangle$ é $\langle \theta, \phi | \hat{J}_i | \theta, \phi \rangle$. Temos, então, os seguintes resultados

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_x \rangle &= \frac{N}{2} \sin \theta \cos \phi \\ \langle \hat{J}_y \rangle &= \frac{N}{2} \sin \theta \sin \phi \\ \langle \hat{J}_z \rangle &= \frac{N}{2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Um estado coerente se encontra na superfície da esfera de Bloch Figura 3, obedecendo à relação

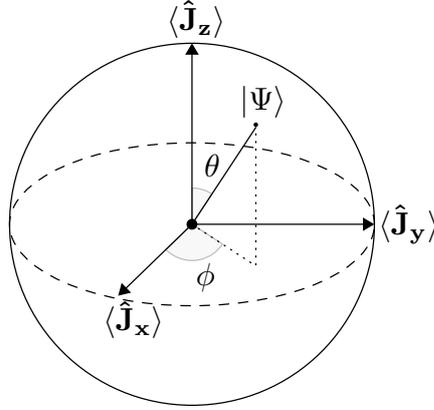
$$\langle \hat{J}_x \rangle^2 + \langle \hat{J}_y \rangle^2 + \langle \hat{J}_z \rangle^2 = j^2, \quad (2.3.13)$$

ou seja, o raio da esfera é $j = N/2$.

2.4 Hamiltoniana clássica

Ao tomar os limites de N e V tendendo ao infinito enquanto a razão N/V se mantém constante, é possível obter uma hamiltoniana clássica correspondente ao operador hamiltoniano quântico. Esse limite é um limite clássico do sistema quântico, conhecido como limite termodinâmico.

Figura 3 – Os polos norte ($\theta = 0$) e sul ($\theta = \pi$) da esfera de Bloch correspondem, respectivamente, aos estados em que todos os bósons ocupam os sítios 1 e 2, e $|\Psi\rangle = |\theta, \phi\rangle$.



Para realizar o limite termodinâmico na hamiltoniana dada pela Eq. (2.3.5), é necessário redefinir os operadores quânticos de maneira que eles passem a comutar. Isso é feito de forma a garantir que os operadores quânticos se comportem como funções numéricas clássicas, permitindo a correspondência entre os sistemas quântico e clássico.

A redefinição dos operadores quânticos no limite termodinâmico é dada pelas seguintes definições [Lieb (1973)]

$$\begin{aligned} j_z &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\hat{J}_z}{j} \\ j_x &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\hat{J}_x}{j} = \sqrt{1 - j_z^2} \cos \phi, \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

onde j_z e ϕ são variáveis canonicamente conjugadas e assumem o papel de variáveis clássicas. Nesse limite, os operadores quânticos \hat{J}_x e \hat{J}_z são redefinidos em termos das variáveis clássicas j_x e j_z , que são funções numéricas das coordenadas do sistema clássico. Isso permite mapear o sistema quântico no espaço de fase clássico.

Após a redefinição dos operadores, o hamiltoniano quântico Eq. (2.3.5) se torna uma hamiltoniana clássica, escrita em termos das variáveis clássicas j_x e j_z . O limite termodinâmico permite descrever o sistema de muitas partículas em termos de uma dinâmica clássica, o que é mais fácil de analisar e resolver em muitos casos. Assim, é possível estudar as propriedades e comportamentos do sistema no limite clássico, e obter informações valiosas sobre o sistema quântico original.

A hamiltoniana clássica é obtida pelo reescalonamento do hamiltoniano quântico, dividindo ambos os lados da Eq. (2.3.5) por j e avaliando o limite conforme $j \rightarrow \infty$, resultando em

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\hat{H}}{j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[-\Omega \frac{\hat{J}_x}{j} + 2\Delta \frac{\hat{J}_z}{j} + 2Uj \left(\frac{\hat{J}_z}{j} \right)^2 \right]. \quad (2.4.2)$$

A hamiltoniana clássica h correspondente ao sistema quântico toma a seguinte forma

$$h(j_z, \phi) = -\Omega\sqrt{1 - j_z^2} \cos \phi + 2\Delta j_z + u j_z^2, \quad (2.4.3)$$

onde o parâmetro $U = u/2j$ foi reescalado. Para o caso em que U é modulado temporalmente, como dado por Eq. (2.2.5), o reescalonamento $U_0 = u_0/2j$ leva à expressão

$$u(t) = u_0(1 + \mu \cos(\omega t)). \quad (2.4.4)$$

As variáveis j_z e ϕ descrevem, temporalmente, as trajetórias no espaço de fase clássico $j_z \times \phi$. As funções $j_z(t)$ e $\phi(t)$ são soluções das equações de Hamilton [Goldstein, Poole e Safko (2002)], dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial h(\phi, j_z)}{\partial j_z} = \frac{\Omega j_z \cos \phi}{\sqrt{1 - j_z^2}} + 2\Delta + 2u j_z \\ \frac{dj_z}{dt} &= -\frac{\partial h(\phi, j_z)}{\partial \phi} = -\Omega\sqrt{1 - j_z^2} \sin \phi. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

De maneira equivalente, é possível aumentar a dimensão do espaço de fase clássico em uma unidade. Sem perda de generalidade, as definições dadas pela Eq. (2.4.1) podem ser estendidas para os valores esperados dos operadores de pseudospin Eq. (2.3.12). Como estes valores são obtidos para estados coerentes, pode-se associar aos j 's os ângulos (θ, ϕ) . As variáveis clássicas correspondentes são dadas por

$$\begin{aligned} j_x &= \sin \theta \cos \phi \\ j_y &= \sin \theta \sin \phi \\ j_z &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Temos, então, uma correspondência entre os sistemas quântico e clássico dado que $j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$ com $j^2 = 1$ e que a definição de j_x , dada pela Eq. (2.4.1), é preservada. O estado do sistema se encontra, agora, sobre a superfície de uma esfera de raio unitário e o estado (clássico) do sistema é representado por um ponto de coordenadas (j_x, j_y, j_z) .

Assim como os observáveis evoluem no tempo na dinâmica clássica, o mesmo ocorre na quântica. A evolução temporal de um operador é dada pela equação de Heisenberg $\frac{d\hat{J}_i}{dt} = i[\hat{H}, \hat{J}_i]$. Para os operadores de pseudospin Eq. (2.3.4), temos as equações de movimento

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{J}_x}{dt} &= -2\Delta\hat{J}_y - 2U\{\hat{J}_y, \hat{J}_z\}, \\ \frac{d\hat{J}_y}{dt} &= \Omega\hat{J}_z + 2\Delta\hat{J}_x + 2U\{\hat{J}_x, \hat{J}_z\}, \\ \frac{d\hat{J}_z}{dt} &= -\Omega\hat{J}_y. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Como consequência da definição Eq. (2.4.1), verifica-se que, no limite termodinâmico, $[\hat{J}_j, \hat{J}_k] \rightarrow (j_j j_k - j_k j_j) = 0$ e também que $\{\hat{J}_j, \hat{J}_k\} \rightarrow (j_j j_k + j_k j_j) = 2j_j j_k$. Assim, a tomada do limite termodinâmico para o sistema de equações Eq. (2.4.7), leva às seguintes equações

$$\begin{aligned}\frac{dj_x}{dt} &= -2\Delta j_y - 2uj_y j_z \\ \frac{dj_y}{dt} &= \Omega j_z + 2\Delta j_x + 2uj_x j_z \\ \frac{dj_z}{dt} &= -\Omega j_y.\end{aligned}\tag{2.4.8}$$

Tais equações são equivalentes às dadas por Eq. (2.4.5). A solução do sistema de equações fornece as funções $j_x(t)$, $j_y(t)$ e $j_z(t)$.

2.5 Interação estática

Na presente seção, é realizada uma investigação numérica do modelo de Bose-Hubbard de dois modos, tendo em vista a obtenção de informações qualitativas e quantitativas sobre a transição de fase quântica. Inicialmente, é estudado o comportamento do espectro de autovalores do hamiltoniano de Bose-Hubbard e, adicionalmente, atenção especial é dada à energia do estado fundamental como função de um dos parâmetros de controle do sistema. Por fim, é investigado o comportamento das curvas de nível da superfície de energia associada à hamiltoniana clássica.

O espectro de autovalores do operador hamiltoniano Eq. (2.3.5) é obtido por sua diagonalização numérica. Também foi realizada a integração numérica dos sistemas de equações Eq. (2.4.7) (dinâmica quântica) e Eq. (2.4.8) (dinâmica clássica). O parâmetro de tunelamento será fixo em $\Omega = 1$ e apenas o caso do poço simétrico, ou seja, $\Delta = 0$ será estudado. As interações serão consideradas estáticas $U = U_0$. As autoenergias estão em unidades de energia por partícula e o tempo em unidades de $1/\Omega$.

2.5.1 Os regimes de Rabi e Fock

Na expressão do hamiltoniano de Bose-Hubbard dada pela Eq. (2.3.5), considerando os parâmetros Ω e U e a relação entre eles, o sistema pode se encontrar em um dos três regimes: Rabi, Fock e Josephson.

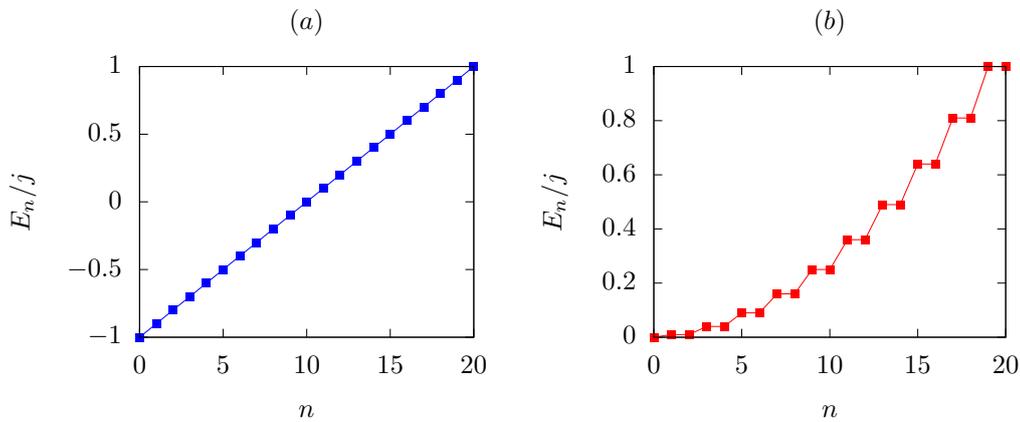
No regime de Rabi, o termo $-\Omega \hat{J}_x$ (termo de tunelamento) predomina. No caso limite em que $U = 0$ (ausência de interação entre átomos no mesmo poço), o espectro de autovalores não apresenta degenerescência e a diferença de energia entre os estados é igual a $1/j$. Nesse regime, observa-se a fase superfluida em que os átomos estão em constante tunelamento entre os poços.

No extremo oposto, há o regime de Fock em que o termo $2U \hat{J}_z^2$ (termo de interação entre dois átomos no mesmo poço) é o que predomina. Na situação limite em que $\Omega = 0$,

o espectro é todo degenerado em pares de estados, com um comportamento quadrático. Verifica-se que os átomos se encontram aprisionados nos poços (*self-trapping*) e, então, é observada a fase isolante. A degenerescência apresentada é para os pares de estados $|n, N - n\rangle$ e $|N - n, n\rangle$.

A Figura 4 mostra o espectro de energia em função dos estados $n = 0, 1, \dots, N$ para os regimes de Rabi e Fock.

Figura 4 – Espectro do Hamiltoniano Eq. (2.3.5), com $N = 20$ para os regimes de (a) Rabi $\Omega = 1$ e $UN = 0$ (b) Fock $\Omega = 0$ e $UN = 1.0$. As autoenergias E_n estão normalizadas por j e os respectivos autoestados rotulados por $n = 0, 1, \dots, N$.



2.5.2 O regime de Josephson

O caso intermediário entre os regimes de Rabi e Fock é o regime de Josephson. Tal regime é de grande interesse neste trabalho e será amplamente investigado. O regime de Josephson exhibe parte do espectro degenerado e parte não. Essa mudança de comportamento sinaliza uma TFQ para um parâmetro crítico de controle U_c .

Primeiramente, foi investigado o comportamento do espectro de energia do hamiltoniano dado pela Eq. (2.3.5) para diferentes valores de UN . As figuras Figura 5 e Figura 6 mostram os resultados.

Nota-se que a degenerescência ocorre nos estados de mais baixa energia para $UN < -0.5$ Figura 5(a) e nos estados mais excitados para $UN > 0.5$ Figura 5(b). Por outro lado, Figura 6(a)(b) mostram um espectro não-degenerado. Esses resultados numéricos (surgimento e desaparecimento da degenerescência) iniciais já apontam para uma transição de fase quântica quando o parâmetro de controle UN assume o valor crítico $U_c N = \pm 0,5$.

Além disso, verifica-se que, no regime de Josephson, após um certo tempo, cessam as oscilações do valor esperado do operador \hat{J}_z (oscilações de Josephson), os chamados colapsos ocorrem. Adicionalmente, à medida que o número de bósons N aumenta, os

Figura 5 – Caso degenerado: espectro do Hamiltoniano Eq.(2.3.5), para dois diferentes valores do parâmetro UN com $N = 100$. (a) $UN = -0.8$ e (b) $UN = 0.8$

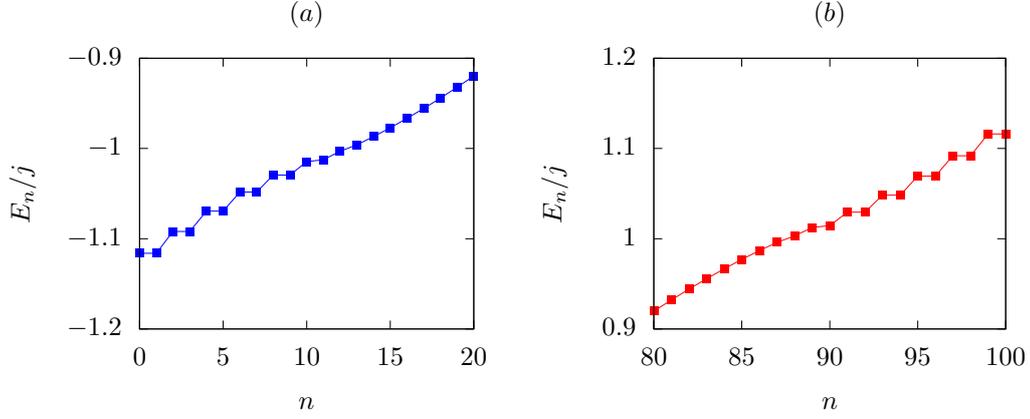
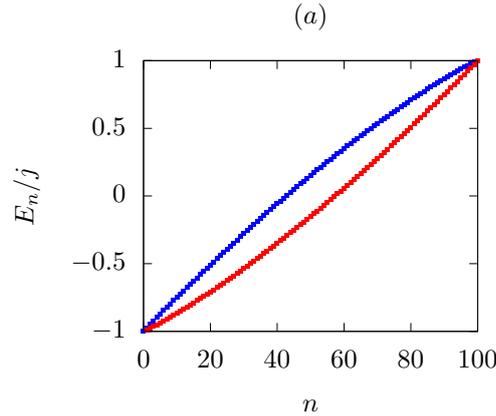


Figura 6 – Casos não-degenerado: espectro do Hamiltoniano Eq.(2.3.5), para dois diferentes valores do parâmetro UN com $N = 100$. Vermelho $UN = -0.3$ e azul $UN = 0.3$



colapsos demoram mais para acontecer. Quando N tende ao infinito, as oscilações de $\langle \hat{J}_z \rangle$ convergem para as oscilações clássicas j_z . A Figura 7 mostra esses resultados.

Os regimes de Josephson e autoarmadilhamento já foram observados experimentalmente com aproximadamente 1000 átomos de ^{87}Rb . A Figura 8 mostra os resultados do experimento.

Continuando a investigação numérica, o estudo do mínimo de energia para o caso clássico foi realizado. Para tal, foi verificada a natureza dos pontos fixos j_z e ϕ da superfície de energia associada à hamiltoniana dada pela Eq. (2.4.3). Os pontos fixos $(0,0)$ e $(j_z,0)$ com $j_z = \pm\sqrt{1 - (1/2u)^2}$ são pontos de mínimo para os quais temos a expressão

$$h_{min} = \begin{cases} -1, & \text{se } -0,5 < u < 0, \text{ em } (0,0), \\ \frac{1}{2u} + u \left[1 - \left(\frac{1}{2u} \right)^2 \right], & \text{se } -\infty < u < -0,5, \text{ em } \left(\pm\sqrt{1 - (1/2u)^2}, 0 \right). \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Figura 7 – (a) Evolução temporal de $\langle \hat{J}_z \rangle(t)/j$ para três valores de N : 100 (azul), 500 (vermelho) e 1000 (preto) com condição inicial $|0, \pi\rangle$ e $UN = 0.5$. (b) Evolução temporal da correspondente variável clássica $j_z(t)$

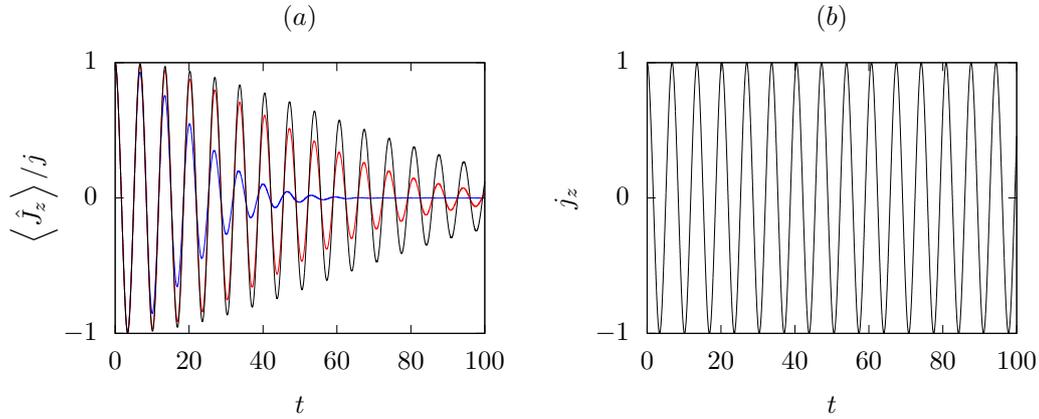
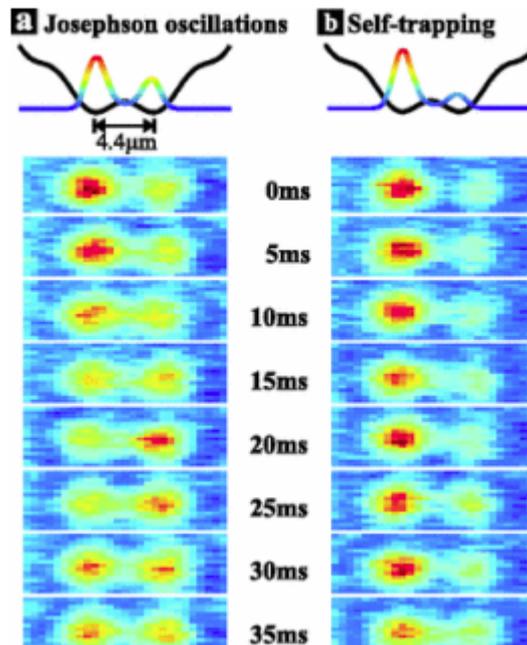


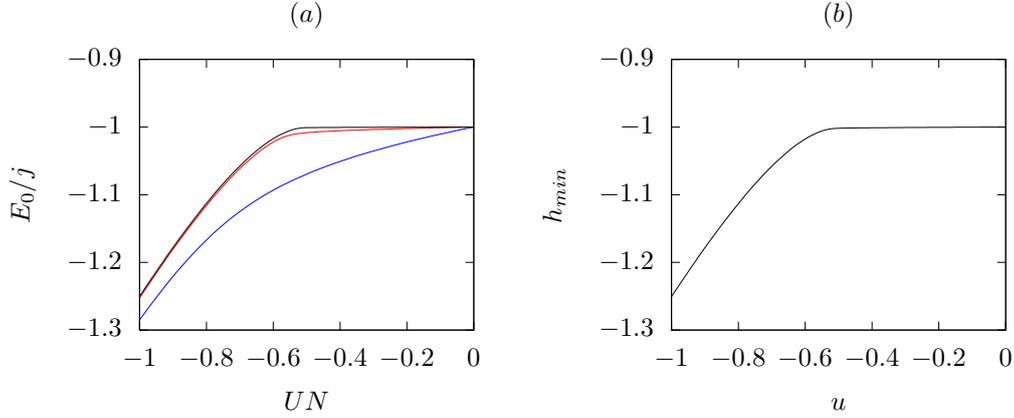
Figura 8 – Na figura as cores representam a distribuição da densidade atômica no poços. Em (a) são observadas oscilações da distribuição enquanto em (b) não há oscilações. Extraído de [Albiez et al. (2005)]



Foi realizado, também, um estudo do comportamento do mínimo de energia E_0 do espectro do hamiltoniano Eq. (2.3.5) quando se varia o parâmetro de controle UN . A Figura 9(a) mostra este mínimo para três diferentes valores de N e também o comportamento de h_{min} Figura 9(b).

As três curvas Figura 9(a) apresentam, inicialmente, um crescimento monótono e, aparentemente, a partir de um certo valor de parâmetro, tendem a se aproximar de um platô. Nota-se também que $E_0(UN)$ tende a um comportamento universal quando N cresce. A função dada pela Eq. (2.5.1) muda de comportamento para um determinado

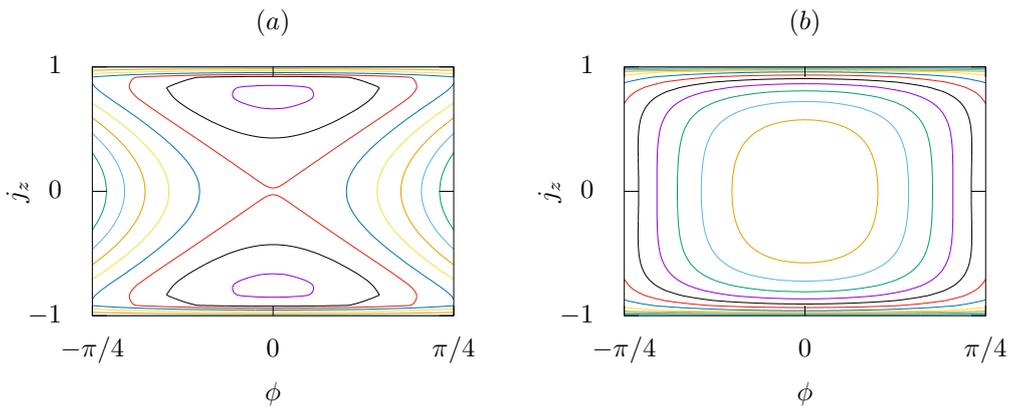
Figura 9 – (a) Energia do estado fundamental E_0/j para o Hamiltoniano Eq. (2.3.5) como função de UN para três valores de N : 10 (azul), 100 (vermelho) e 1000 (preto). (b) Mínimo da hamiltoniana clássica Eq. (2.4.3), dado pela Eq. (2.5.1), como função do parâmetro u .



valor crítico $u_c = -0.5$, como mostra a Figura 9(b). As curvas obtidas na Figura 9(a) parecem assumir o mesmo comportamento de h_{min} quando o número de partículas N tende ao infinito, o que, novamente, aponta para uma transição de fase quântica para u_c .

Por fim, a transição de fase quântica é caracterizada quando u assume seu valor crítico $u_c = -0.5$. Isso se verifica no estudo das curvas de nível da função Eq. (2.4.3) mostrada na Fig.(10).

Figura 10 – Curvas de nível para a superfície da hamiltoniana Eq. (2.4.3) para dois valores de u . (a) $u = -0.6$ e (b) $u = -0.4$



A origem do espaço de fase $j_z \times \phi$ é um mínimo para valores de u no intervalo $(-0.5, 0)$ e um ponto de sela para valores $u < -0.5$. A origem, ao dar lugar a um ponto de sela, faz com que as órbitas que eram fechadas em torno da origem, agora sejam fechadas em torno de dois vales que se encontram simetricamente afastados. Esses novos vales caracterizam regiões em torno das quais temos dois novos mínimos, $(j_z, \phi) = (\pm\sqrt{1 - (1/2u)^2}, 0)$, que compartilham o mesmo valor. Essa mudança no comportamento das curvas de nível, bem

como os resultados anteriormente apresentados, sinalizam que, para o parâmetro $u_c \pm 0.5$, temos uma transição de fase quântica para o modelo de Bose-Hubbard de dois modos.

3 Função de Husimi, métricas quânticas e expoentes de Lyapunov

Nesta seção vamos introduzir as métricas que serão utilizadas para estudar as manifestações do caos no regime de interações moduladas periodicamente. Em seguida, alguns resultados numéricos simples serão apresentados para o caso de interações estáticas. Todavia, serão importantes, para a compreensão dos resultados que vão se apresentar na dinâmica com controle das interações como será mostrado. Por fim, temos uma seção dedicada aos expoentes de Lyapunov e como é feita a sua computação.

3.1 Função de Husimi

De maneira geral, define-se a função de quase-distribuição de Husimi [Husimi (1940)]

$$Q(\alpha) = \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle, \quad (3.1.1)$$

em que $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ é o operador densidade associado ao estado puro $|\Psi\rangle$ e $|\alpha\rangle$ um estado coerente. A quase-distribuição é, portanto, o valor esperado do operador densidade em um determinado estado coerente. É normalizada e positiva em todo o espaço de fase e será útil neste trabalho.

Em função das variáveis θ e ϕ , a função de Husimi $Q(\theta, \phi)$, juntamente com a constante $(2j + 1)/4\pi$, leva à condição de normalização

$$\frac{2j + 1}{4\pi} \int Q(\theta, \phi) d\Omega = 1, \quad (3.1.2)$$

com $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.

Para um estado coerente $|\theta', \phi'\rangle$, a função de Husimi é dada por

$$\begin{aligned} Q(\theta, \phi) &= \langle \theta, \phi | \theta', \phi' \rangle \langle \theta', \phi' | \theta, \phi \rangle \\ &= \left[\frac{1 + \cos\theta \cos\theta' + \cos(\phi' - \phi) \sin\theta \sin\theta'}{2} \right]^N, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

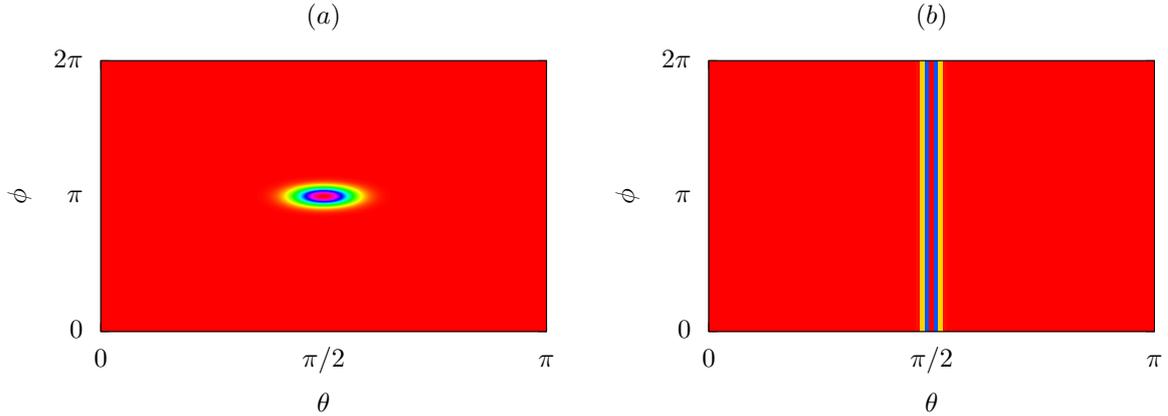
que assume o valor máximo para $(\theta, \phi) = (\theta', \phi')$.

Para um estado de Fock $|n\rangle$, que é coerente para $n = 0$ e $n = N$, temos

$$\begin{aligned} Q(\theta, \phi) &= \langle \theta, \phi | n \rangle \langle n | \theta, \phi \rangle \\ &= \binom{N}{n} \cos^{2n}(\theta/2) \sin^{2(N-n)}(\theta/2). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Como se pode observar, a função não possui dependência explícita para o ângulo ϕ . Assim, sobre a esfera de Bloch, a função circunda o eixo $\langle \hat{J}_z \rangle$. A Figura 11 mostra a distribuição de Husimi para um estado coerente atômico e para um estado de Fock.

Figura 11 – Função de Husimi para (a) estado coerente $|\pi/2, \pi\rangle$ e (b) estado de Fock $|50, 50\rangle$ ambos com $N = 100$.



De maneira geral, um estado inicial coerente evolui e não se mantém coerente. A visualização do estado não assume o comportamento mostrado nos dois exemplos citados. A função de Husimi se espalha pelo espaço de fase muitas vezes de maneira bastante complicada como veremos. Portanto, é interessante determinar as coordenadas do centróide da distribuição de Husimi como se segue

$$\begin{aligned} \langle \theta \rangle &= \frac{\int \theta Q(\theta, \phi) d\Omega}{\int Q(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{2j+1}{4\pi} \int \theta Q(\theta, \phi) d\Omega \\ \langle \phi \rangle &= \frac{\int \phi Q(\theta, \phi) d\Omega}{\int Q(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{2j+1}{4\pi} \int \phi Q(\theta, \phi) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Mostra-se que, para um estado coerente atômico $|\theta, \phi\rangle$, temos $(\langle \theta \rangle, \langle \phi \rangle) = (\theta, \phi)$.

3.2 Métricas quânticas

3.2.1 Eco de Loschmidt

Dado um estado inicial $|\Psi_0\rangle$ e duas evoluções governadas pelos hamiltonianos \hat{H}_0 e \hat{H} , temos as seguintes expressões para os estados evoluídos no tempo t :

$$|\Psi(t, k)\rangle = \sum_{n=0}^N c_n(t) |n\rangle \quad \text{e} \quad |\Psi(t, k')\rangle = \sum_{n=0}^N c'_n(t) |n\rangle, \quad (3.2.1)$$

onde k é algum parâmetro de \hat{H}_0 (sistema não perturbado) e $k' = k + \delta k$ é um parâmetro de \hat{H} (sistema perturbado), sendo δk a amplitude da perturbação.

O eco de Loschmidt , ou simplesmente eco, é definido como a evolução temporal do *overlap* entre as duas evoluções diferentes partindo do mesmo estado inicial

$$M(t) = |\langle \Psi(t, k') | \Psi(t, k) \rangle|^2 = \left| \sum_{n=0}^N c'_n(t) c_n^*(t) \right|^2. \quad (3.2.2)$$

O eco pode ser interpretado como um quantificador do efeito da perturbação ao longo do tempo. Em $t = 0$, temos $M(0) = 1$. Dependendo do valor da perturbação, após um certo tempo, podemos ter $M(t) = 0$ e os estados se tornam ortogonais. O comportamento do eco no tempo é bastante distinto dependendo de fatores como o tempo de evolução, parâmetros, amplitude da perturbação e características do sistema.

Peres [Peres (1984)] argumenta que a evolução de um estado quântico é afetada quando o hamiltoniano que governa a evolução deste sofre pequenas perturbações. Se o correspondente clássico do sistema quântico é caótico, o *overlap* no tempo entre as dinâmicas tende a zero com pequenas flutuações. Sendo assim, o eco se mostra bastante apropriado para o estudo do caos quântico para o modelo de Bose-Hubbard. Para revisões detalhadas, consultar [Goussev et al. (2012), Gorin et al. (2006)].

O decaimento temporal do eco é dividido em três estágios:

- Decaimento parabólico de tempo curto que depende da amplitude da perturbação.
- Decaimento assintótico de tempo intermediário que poder ser de dois tipos: exponencial Gaussiano para perturbações de baixa amplitude ou exponencial para perturbações de alta amplitude.
- Decaimento de tempo longo onde o eco satura para valores da ordem de $1/\mathcal{N}$ onde \mathcal{N} é a dimensão do espaço de Hilbert do sistema.

Neste trabalho, tratamos especificamente da evolução de estados coerentes atômicos. Todavia, o eco é uma medida de caráter mais geral e não possui essa restrição. Diversos trabalhos exploraram o eco aplicado ao modelo de Bose-Hubbard de dois modos [Liu et al. (2006), Zheng et al. (2009), Zheng et al. (2010)] e em contextos similares como o modelo de Dicke [Bhattacharya, Dasgupta e Dutta (2014)].

3.2.2 Pureza generalizada

À medida que um estado coerente evolui, geralmente não se mantém coerente ao longo do tempo. A distribuição de Husimi, que inicialmente é relativamente bem localizada para os estados coerentes, se espalha pelo espaço de fase durante o processo de evolução. Esse fenômeno ocorre devido à não-saturação da relação de incerteza de Robertson-Schrödinger. Como os estados coerentes são representados por pontos na superfície da esfera de Bloch, a não-saturação da relação de incerteza produz $\langle \hat{J}_x \rangle^2 + \langle \hat{J}_y \rangle^2 + \langle \hat{J}_z \rangle^2 < j^2$.

Uma medida do quanto um estado deixa de ser coerente, no contexto dos operadores de pseudospin, é chamada de pureza generalizada e é dada por

$$P = \frac{\sum \langle \Psi | \hat{J}_i | \Psi \rangle^2}{j^2} \quad i = x, y, z. \quad (3.2.3)$$

Na visão de Viscondi *et al* [Viscondi, Furuya e Oliveira (2009), Viscondi, Furuya e Oliveira (2010)], a pureza é uma medida da qualidade da aproximação semiclássica. Nesse contexto, à medida que o valor de P diminui, a qualidade da aproximação semiclássica (neste trabalho o limite termodinâmico) diminui. Para estados coerentes, $P = 1$. Com a evolução do estado, regida pelo hamiltoniano de Bose-Hubbard de dois modos, $P(t)$ revelará vários comportamentos que dependem dos diferentes regimes dinâmicos, como o controle das oscilações no regime de Josephson e o caos. Essa abordagem analítica para o modelo de Bose-Hubbard de dois modos foi conduzida por Lozada [Lozada-Vera, Bagnato e Oliveira (2013)], e de forma semelhante por Khripkov [Khripkov, Cohen e Vardi (2013)].

3.2.3 Entropia linear

O modelo de Bose-Hubbard de dois modos, descrito pela Eq. (2.3.1), é construído levando em conta dois espaços de estados, \mathcal{E}_1 referente ao sítio 1 e \mathcal{E}_2 referente ao sítio 2. As respectivas bases são $|n\rangle_1$ e $|N - n\rangle_2$ com $n = 0, 1, \dots, N$. O espaço do sistema composto possui dimensão $(N + 1)^2$. Todavia, a descrição do sistema em termos dos operadores de pseudospin reduz a dimensão para $N + 1$, e a base é dada por $|n\rangle = |n\rangle_1 \otimes |N - n\rangle_2$. Tal redução é possível para sistemas *bipartite*, em que algum tipo de simetria é preservada. No nosso caso, como o número total átomos é conservado, a dinâmica pode ser estudada em um subespaço do espaço de estados global $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

Um estado qualquer $|\Psi\rangle$, composto pela interação de dois subsistemas A e B , pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_i \chi_i |i_A\rangle |i_B\rangle. \quad (3.2.4)$$

Tomando o traço parcial, temos os operadores densidade para os subsistemas A e B

$$\rho_A = \sum_i \chi_i^2 |i_A\rangle \langle i_A| \quad \rho_B = \sum_i \chi_i^2 |i_B\rangle \langle i_B|. \quad (3.2.5)$$

Com a Eq. (3.2.4) e o traço parcial da pela Eq. (3.2.5), podemos acessar o estado dos subsistemas (ρ_1 e ρ_2) do modelo de Bose-Hubbard. Assim, temos o operador densidade do estado composto

$$\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi| = \sum_{m,n=0}^N c_m c_n^* |m\rangle |N - m\rangle \langle n| \langle N - n|, \quad (3.2.6)$$

e os operadores densidade dos subsistemas

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \text{tr}_2 \rho \\
&= \sum_{m,n,k=0}^N c_m c_n^* |m\rangle \langle n| \langle k|N-m\rangle \langle N-n|k\rangle \\
&= \sum_{n=0}^N |c_n|^2 |n\rangle \langle n| \\
\rho_2 &= \sum_{n=0}^N |c_n|^2 |N-n\rangle \langle N-n|.
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Os operadores ρ_1 e ρ_2 são diagonais na base dos autoestados de operador número $|n\rangle_i$, com $i = 1, 2$. Consequentemente, ρ_1^2 e ρ_2^2 também são.

Quando o estado de um sistema pode ser descrito por um vetor de estado $|\Psi\rangle$, tal estado é dito ser puro. Os operadores ρ e ρ^2 são chamados idempotentes e obedecem as seguintes relações: $\rho^2 = \rho$ e $\text{tr}(\rho^2) = \text{tr}(\rho) = 1$. Caso contrário, o estado é dito ser misto e temos: $\rho^2 \neq \rho$, $\text{tr}(\rho) = 1$ e $\text{tr}(\rho^2) < 1$. De maneira complementar, temos a entropia linear ou defeito de idempotência

$$S_{1,2} = 1 - \text{tr}(\rho_{1,2}^2). \tag{3.2.8}$$

Outros quantificadores de emaranhamento, como entropia de Von Neumann, concorrência e discórdia quântica [Hines, McKenzie e Milburn (2003), Bhosale e Santhanam (2018), Neill et al. (2016)], já foram explorados. Devido aos altos recursos computacionais necessários para computar estas métricas, este trabalho explora a entropia linear.

3.2.4 Resultados numéricos e discussão

A Figura 12 mostra a evolução temporal do eco M para três amplitudes de perturbação no parâmetro U com $N = 1000$.

Os resultados numéricos mostram que o eco decai tendendo a zero para todas as perturbações, porém, perturbações de pequena amplitude faz com que esse decaimento seja mais lento. Isso sugere que, para muitas partículas, um estado inicial precisa ser evoluído por um tempo mais longo.

Com respeito a pureza e a entropia, a Figura 13 mostra a evolução temporal de $\langle \hat{J}_z \rangle / j$, P e S para dois regimes diferentes.

No regime de Rabi, o valor médio do observável \hat{J}_z realiza oscilações harmônicas com frequência $\omega_R = 2\pi\Omega$ (frequência de Rabi). A entropia também oscila, com valores nulos (ausência de emaranhamento) nos instantes em que $\langle \hat{J}_z \rangle / j = \pm 1$ (estados de Fock). Além disso, a frequência de oscilação é $2\omega_R$.

Já no regime de Josephson, as oscilações de $\langle \hat{J}_z \rangle / j$ tendem ao colapso. A amplitude das oscilações diminui com correspondente diminuição da pureza e aumento da entropia. A saturação no valor da pureza e da entropia é acompanhada do colapso do observável.

Figura 12 – Evolução temporal do eco M com $\Omega = 1$, evolução não perturbada, $UN = 1$, evolução perturbada, $UN = 1 + \delta U$ e condição inicial $|0, \pi\rangle$. $N = 1000$ fixo e δU variável: $1 \cdot 10^{-4}$ (preto), $5 \cdot 10^{-4}$ (vermelho) e $1 \cdot 10^{-3}$ (azul).

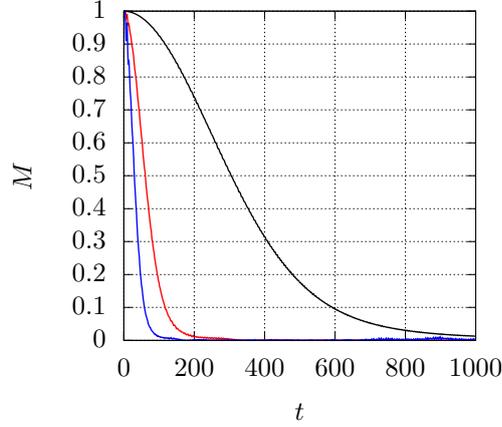
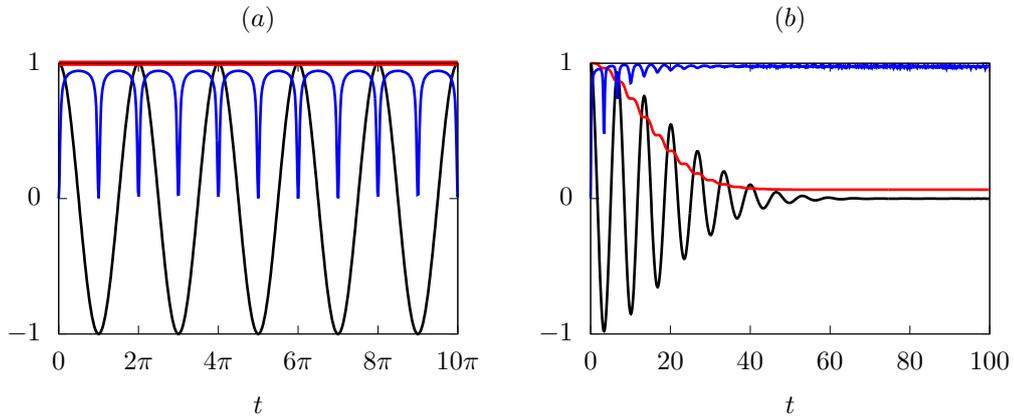


Figura 13 – Evolução temporal de $\langle \hat{J}_z \rangle / j$ (preto), P (vermelho) e S (azul) com $N = 100$ e condição inicial $|0, \pi\rangle$. (a) Regime de Rabi ($\Omega = 1$ e $U = 0$) e (b) regime de Josephson ($\Omega = 1$ e $UN = 0.5$).



Importante acrescentar que os subsistemas se mantêm fortemente emaranhados durante todo o tempo de evolução.

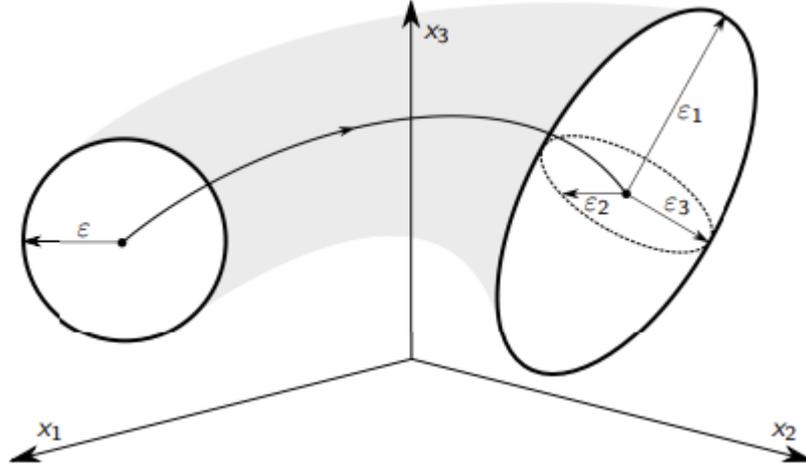
3.3 Caos e expoentes de Lyapunov

A introdução do termo de interação dependente do tempo $U(t)$ Eq. (2.2.5), com o parâmetro $U_0 = u_0/2j$ reescalado, nas equações de movimento clássicas, pode levar o sistema a um comportamento caótico. Como consequência do caos, o sistema apresenta sensibilidade com respeito aos parâmetros de controle e às condições iniciais. Dessa forma, faz-se necessário, para uma melhor compreensão da dinâmica governada pela hamiltoniana clássica dada pela Eq. (2.4.3), computar os expoentes de Lyapunov λ .

Os expoentes de Lyapunov quantificam a sensibilidade às condições iniciais avaliando

como trajetórias vizinhas divergem no tempo. Dado um espaço de fase tridimensional, temos três expoentes, um para cada direção do espaço de fase. Seja ε o raio de uma esfera (hiperesfera no caso n -dimensional) centrada na condição inicial. Devido à divergência exponencial, após um tempo t , a esfera se transforma em um elipsóide. A Figura 14 ilustra esse processo para o caso tridimensional.

Figura 14 – Deformação de uma esfera de raio ε em um elipsóide de semi-eixos ε_1 , ε_2 e ε_3 .



Em um instante de tempo t , os semi-eixos do elipsóide tem comprimento

$$\varepsilon_i(t) = e^{\lambda_i t} \varepsilon, \quad (3.3.1)$$

com $i = 1, 2, 3$. Os expoentes de Lyapunov são definidos como

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon} \right). \quad (3.3.2)$$

Em $t = 0$ o volume da esfera é

$$V(0) = \frac{4\pi}{3} \varepsilon^3.$$

Após um certo tempo t , o volume do elipsóide é

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = V(0) e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$$

Como o sistema clássico é conservativo, ele preserva volume no espaço de fase, ou seja, a soma dos expoentes de Lyapunov é nula. Se os três forem nulos, temos o regime periódico ou regular. Se tivermos dois expoentes, um positivo e outro negativo, iguais em módulo, o regime caótico se apresenta. De maneira resumida, temos a Tabela 1.

Para sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias, o algoritmo de Wolf é bastante utilizado para computar os expoentes de Lyapunov e será utilizado neste

Tabela 1 – Regimes dinâmicos (Lyapunov)

λ_i	λ_1	λ_2	λ_3
periódico	0	0	0
caos	+	0	-

trabalho. A referência [Wolf et al. (1985)] mostra detalhes de implementação computacional do algoritmo, bem como alguns exemplos para sistemas clássicos. De maneira resumida, o Apêndice A mostra como realizar a implementação do algoritmo. Os resultados numéricos para o modelo de Bose-Hubbard de dois modos serão apresentados no próximo capítulo.

4 Caracterização das dinâmicas clássica e quântica com modulação temporal

Os resultados numéricos apresentados neste capítulo foram obtidos pela integração numérica das equações de movimento clássicas e quânticas. Para as equações clássicas foi utilizado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo fixo 10^{-3} . Já para as equações quânticas, foi utilizado o módulo QUTIP. Detalhes técnicos são mostrados no [Apêndice B](#). Novamente, os valores fixos foram $\Omega = 1$ e $\Delta = 0$. Para a dinâmica quântica, o número de bósons em todas as simulações foi fixado em $N = 1000$. As interações moduladas, tanto para a dinâmica quântica quanto clássica, são dadas, respectivamente, pelas equações Eq. (2.2.5) e Eq. (2.4.4). Os expoentes de Lyapunov foram computados utilizando o algoritmo de Wolf. Será dada especial atenção ao expoente de Lyapunov no espaço dos parâmetros de controle e no espaço de fase clássico.

A contrapartida quântica do sistema, no espaço de fase clássico, será explorada usando a função de Husimi, bem como o seu centróide. Por fim, o mapeamento da dinâmica quântica, no espaço dos parâmetros e de fase, será realizado com os valores médios do eco Eq. (3.2.2), da pureza generalizada Eq. (3.2.3) e da entropia linear Eq. (3.2.8). Exceto quando explicitamente indicado, as condições iniciais usadas na dinâmica quântica são estados coerentes atômicos, rotulados pelo par ordenado (θ, ϕ) . Além disso, o conjunto de parâmetros usados para as evoluções é dado pela tripla ordenada (u_0, μ, ω) .

4.1 Caos na dinâmica clássica

A dinâmica clássica é sensível aos parâmetros e às condições iniciais. De maneira geral, o sistema exhibe três regimes dinâmicos: periódico (ou regular), quase-periódico (ou quase-regular) e caótico. A [Tabela 2](#) mostra seis regimes para diferentes escolhas de parâmetros e condições iniciais. Para a classe de regimes 1, a condição inicial foi fixada, enquanto os parâmetros foram variados. Por outro lado, para a classe 2, o conjunto de parâmetros foi fixado, enquanto as condições iniciais foram variadas.

A [Figura 15](#) apresenta a dinâmica periódica 1, quase-periódica 1 e caótica 1 no plano $\dot{j}_z \times \dot{j}_y$, bem como a evolução temporal de λ , o expoente de Lyapunov. As três cores (preto, vermelho e azul) representam a convergência dos três expoentes de Lyapunov. A condição inicial é a mesma para os três conjuntos de parâmetros dados na [Tabela 2](#), evidenciando a dependência do sistema em relação aos parâmetros.

A [Figura 15\(b\)](#) mostra que os três expoentes de Lyapunov convergem para zero à

Tabela 2 – Regimes dinâmicos (parâmetros e condições iniciais)

Classe	Regimes	(θ, ϕ)	(u_0, μ, ω)
1	periódico 1	$(0, \pi)$	$(0.6, 0.6, 1.8)$
	quase-periódico 1	$(0, \pi)$	$(0.15, 0.6, 1.8)$
	caótico 1	$(0, \pi)$	$(0.9, 0.6, 1.8)$
2	periódico 2	$(\pi/2, 9\pi/16)$	$(-1, 1, 1.8)$
	quase-periódico 2	$(\pi/2, 4\pi/3)$	$(-1, 1, 1.8)$
	caótico 2	$(\pi/2, 5\pi/3)$	$(-1, 1, 1.8)$

medida que o tempo tende ao infinito, o que indica um comportamento periódico para os parâmetros fornecidos. No entanto, na [Figura 15\(f\)](#), é possível notar que dois expoentes, um positivo e outro negativo, têm o mesmo valor absoluto, o que indica um comportamento caótico.

No caso do regime quase-periódico 1 [Figura 15\(d\)](#), é possível notar que os expoentes de Lyapunov apresentam uma convergência mais lenta se comparado com o caso periódico 1 da [Figura 15\(b\)](#). Assim, regularidade e quase-regularidade são considerados regimes equivalentes em relação aos expoentes de Lyapunov. As trajetórias quase-periódicas no espaço de fase $j_z \times j_y$ exibem um comportamento complexo, porém qualitativamente bem mais simples do que no caso caótico. A diferenciação quantitativa entre periodicidade e quase-periodicidade pode ser realizada pela determinação das frequências dominantes dos regimes por meio da transformada de Fourier. No entanto, o tempo de convergência dos expoentes pode ser um bom indicador quantitativo.

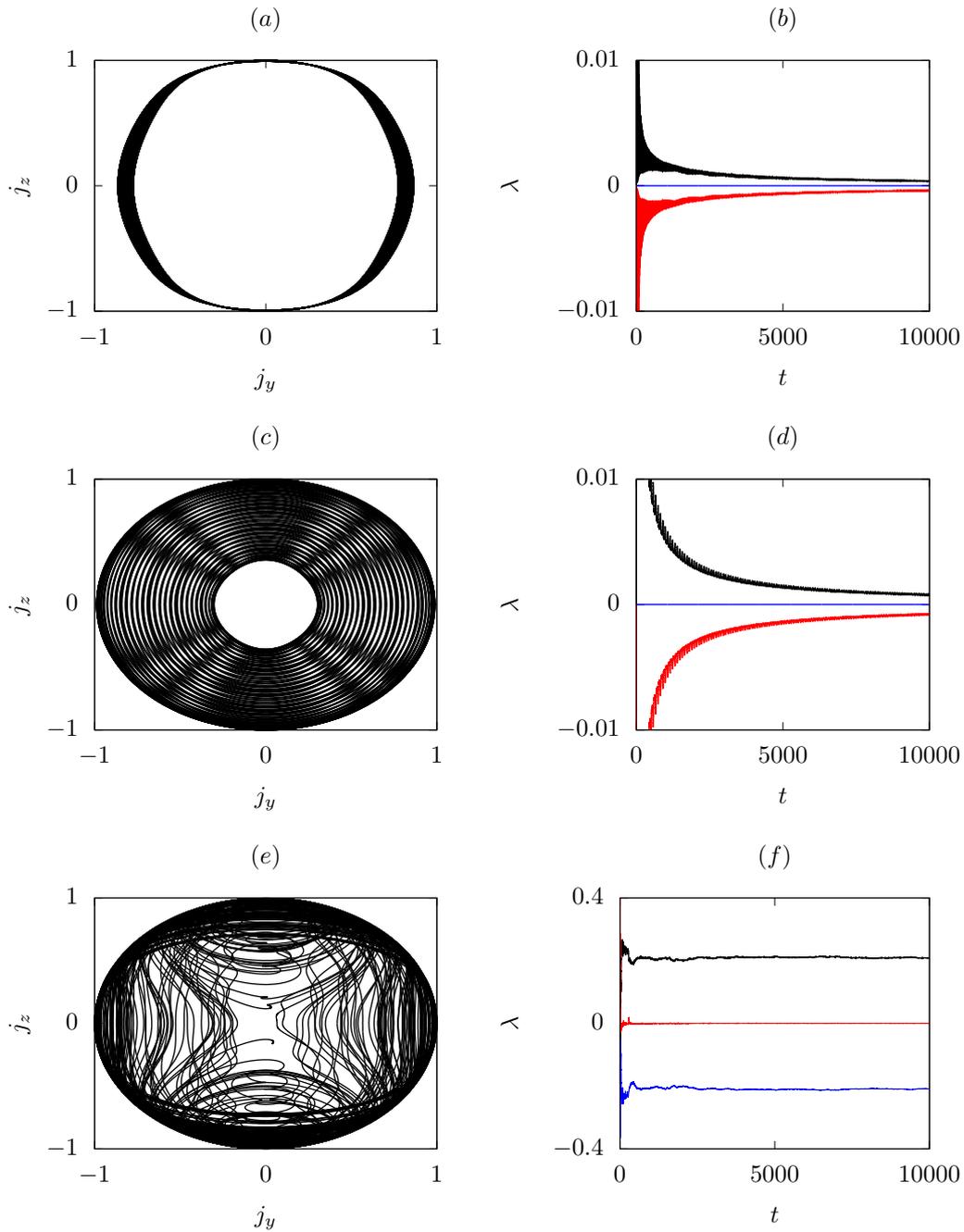
Um estudo do comportamento do sistema em relação às condições iniciais é apresentado na [Figura 16](#). O conjunto de parâmetros é o mesmo para as três condições iniciais dadas e, novamente, os expoentes de Lyapunov identificaram os três regimes dinâmicos.

4.2 Dinâmica clássica versus dinâmica quântica

Os resultados numéricos apresentados se referem à dinâmica clássica. Os próximos resultados visam mostrar como os regimes observados na dinâmica clássica se refletem na dinâmica quântica. Isto é feito por meio do estudo da evolução de valores esperados de observáveis nos diferentes regimes. Tomando como referência os estados iniciais e parâmetros listados na [Tabela 2](#), a [Figura 17](#) mostra a evolução temporal do valor médio de \hat{J}_z para quatro regimes diferentes.

A mudança na dinâmica quântica é drástica com a introdução do regime classicamente caótico 2 [Figura 17\(b\)](#). A amplitude das oscilações do observável \hat{J}_z rapidamente diminuem e passam a ocorrer de forma bastante irregular em torno de zero (quase-colapso). Uma extensa investigação numérica do regime caótico foi realizada, tomando como referência os mapeamentos que serão apresentados. De maneira geral, os resultados numéricos mostraram que o comportamento apresentado para o regime caótico é característico da

Figura 15 – Trajetória no plano $j_z \times j_y$ (esquerda) e expoentes de Lyapunov em função do tempo $\lambda(t)$ (direita). (a) periódica 1, (c) quase-periódica 1 e (e) caótica 1.

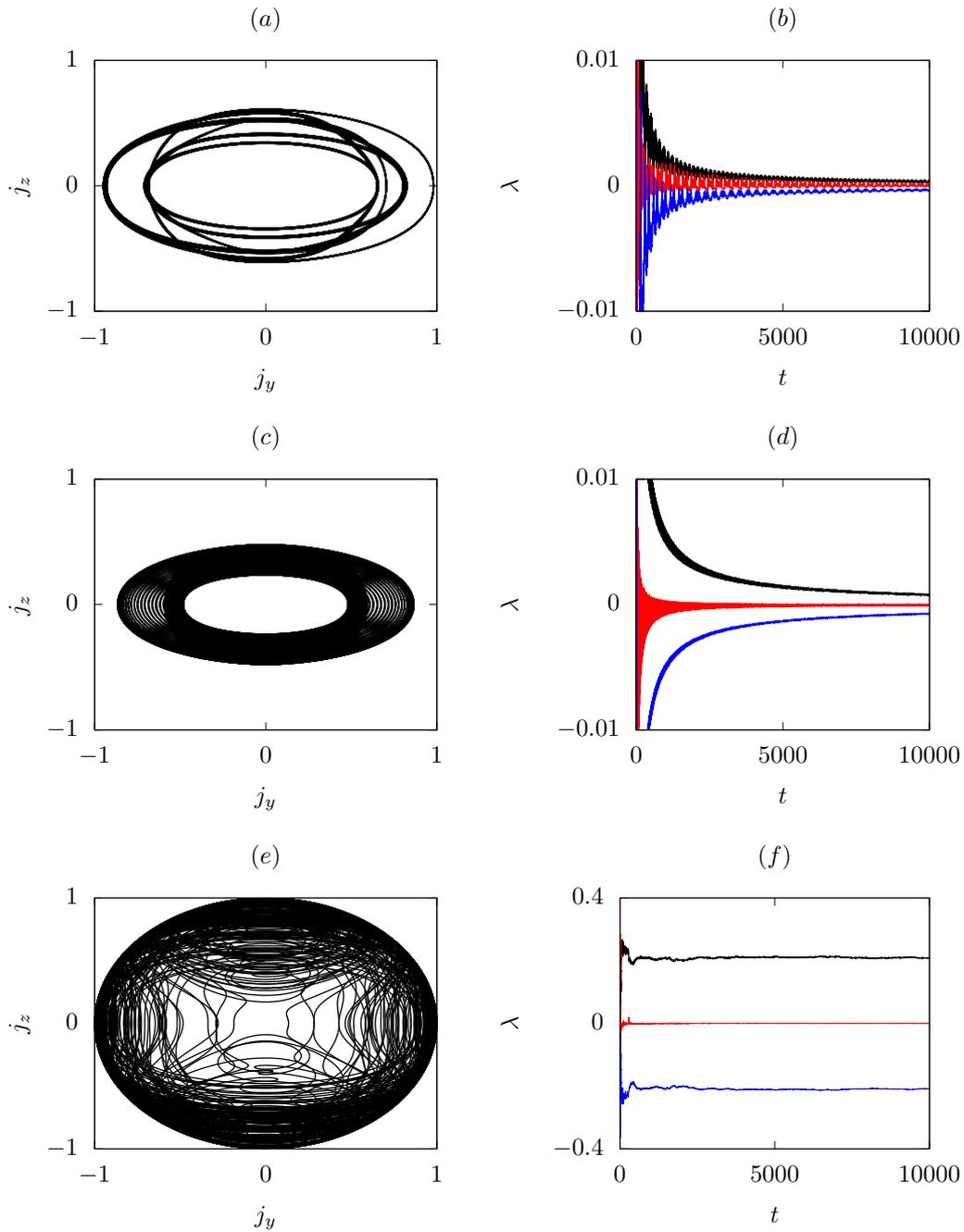


contrapartida quântica do caos clássico.

A evolução mostrada na [Figura 17\(c\)](#) apresentou um regime inicial com queda das oscilações e, após um certo tempo (transiente), o regime regular predominou. Um colapso efetivo do operador \hat{J}_z , [Figura 17\(d\)](#), após transiente, é mostrado para a quase-periodicidade 2. Curiosamente, um pequeno ressurgimento foi observado.

Como foi discutido anteriormente, os expoentes de Lyapunov não diferenciam periodicidade de quase-periodicidade e, portanto, não é possível dizer qual o comportamento do sistema a longo prazo. No entanto, os resultados mostrados para dinâmicas do tipo

Figura 16 – Trajetória no plano $j_z \times j_y$ (esquerda) e expoentes de Lyapunov em função do tempo $\lambda(t)$ (direita). (a) periódico 2, (c) quase-periódico 2 e (e) caótico 2.

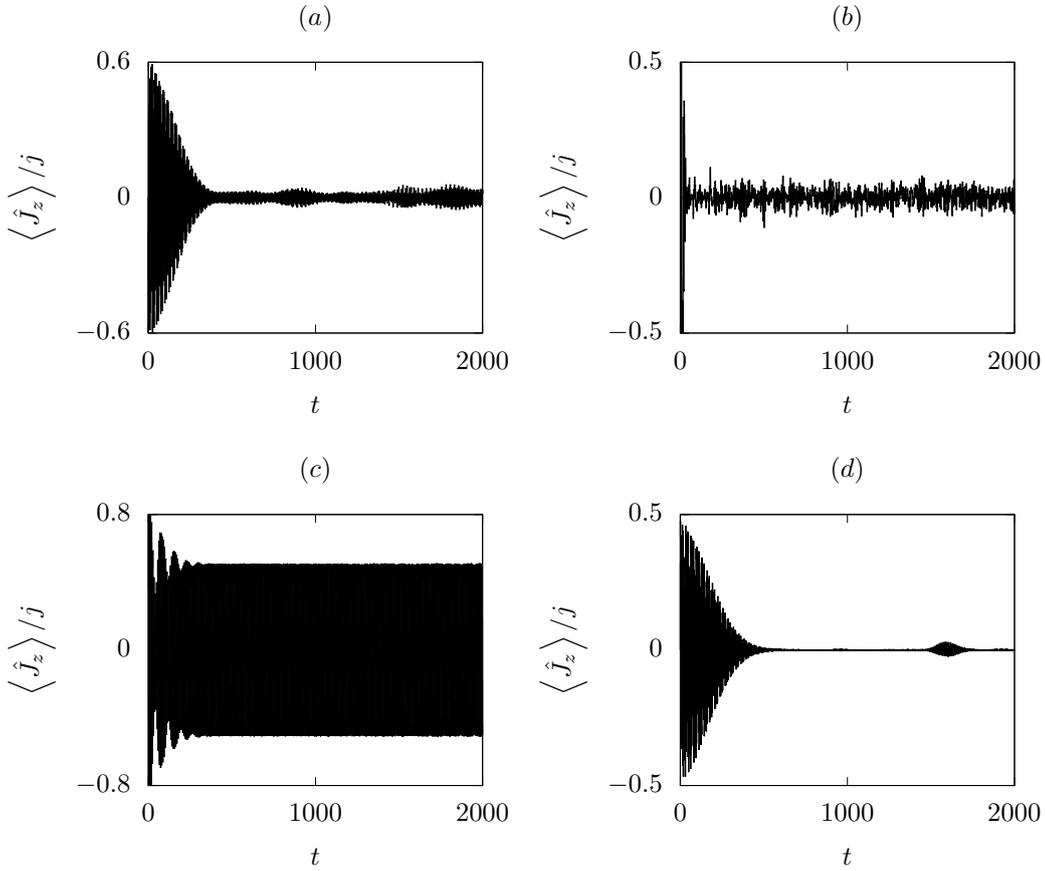


quase-regular, no contexto da mecânica quântica, são bem distintos do caso regular e caótico.

Em contrapartida, no regime periódico 1, após um transiente, as oscilações ocorrem com pequena amplitude em torno de zero, porém de maneira periódica. Todavia, o quase-colapso é mais regular. Diversos resultados numéricos realizados mostraram dinâmicas regulares variadas. Por exemplo, a [Figura 18](#) mostra uma solução regular bastante específica.

Ambas as dinâmicas são semelhantes e a dinâmica quântica não sofre alterações

Figura 17 – Série temporal de $\langle \hat{J}_z \rangle / j$: (a) periódico 2, (b) caótico 2, (c) quase-periódico 1 e (d) quase-periódico 2



em sua amplitude, pelo menos para o intervalo de tempo considerado. O valor médio do operador \hat{J}_z realiza oscilações harmônicas no tempo.

Esse controle das oscilações do valor médio dos observáveis já foi reportado [Lozada-Vera, Bagnato e Oliveira (2013)]. Para um conjunto limitado de estados e parâmetros, a evolução temporal mantém a relação de incerteza Eq. (2.3.11) bem próxima de seu mínimo. Como os estados coerentes não são autoestados do hamiltoniano, não se espera que a relação de incerteza se mantenha saturada ao longo do tempo. Entretanto, o estado evoluído no tempo se mantém bem próximo de um estado coerente como será mostrado. O resultado apresentado na Figura 18 é importante para a teoria de controle quântico de estados e será melhor investigado ao longo deste capítulo.

4.2.1 Variáveis clássicas e a função de Husimi

A evolução temporal da função de Husimi Eq. (3.1.1), bem como o seu valor médio Eq. (3.1.5), como mostraremos, são bons sinalizadores de caos quântico. A Figura 19 mostra a função de Husimi no espaço $\theta \times \phi = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ em três instantes diferentes para as dinâmicas periódica e quase-periódica 2.

Figura 18 – (a) Plano $\langle \hat{J}_z \rangle / j \times \langle \hat{J}_y \rangle / j$ e (b) plano $j_z \times j_y$. Condição inicial $(0, \pi)$ e parâmetros $(0.5, 0.6, 1.8)$

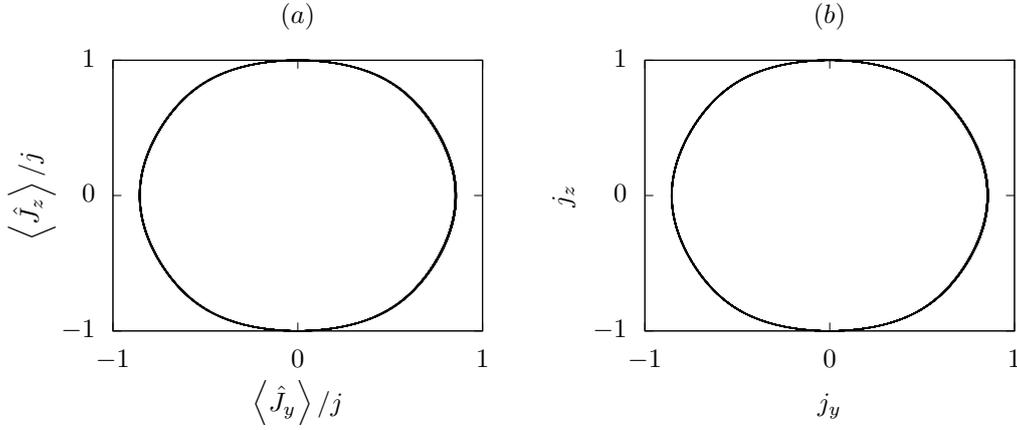
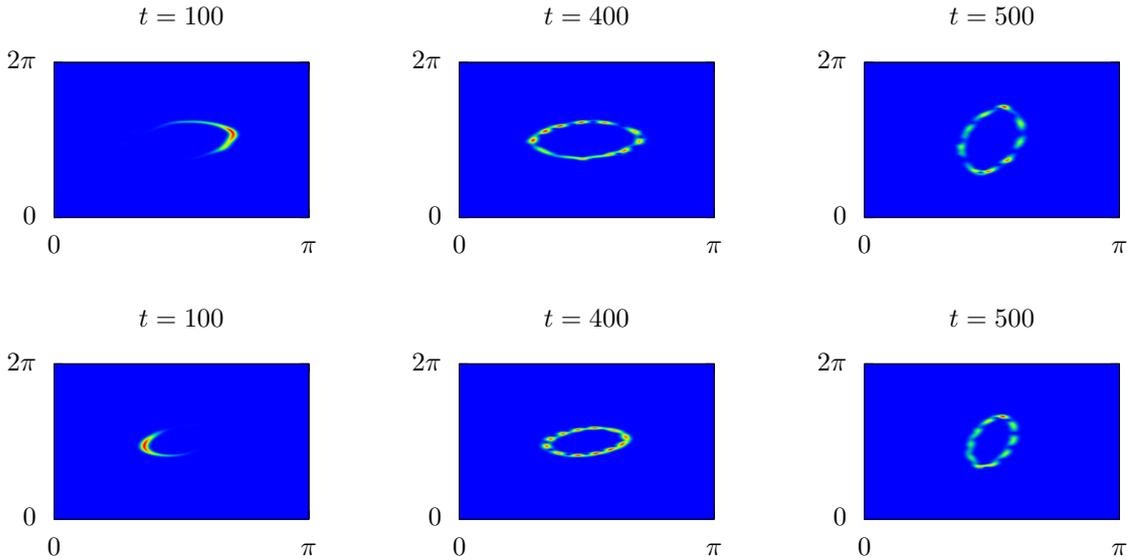


Figura 19 – Distribuição de Husimi para as dinâmicas periódica 2 (primeira linha) e quase-periódica 2 (segunda linha) em três instantes de tempo.

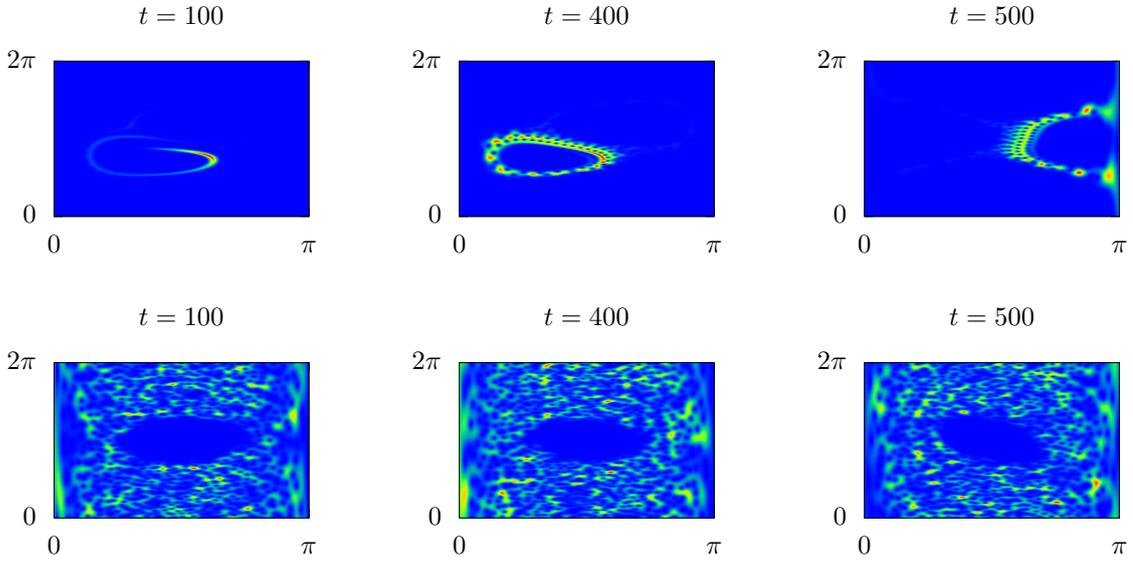


A função de Husimi em $t = 100$ se mostra razoavelmente bem localizada. A estrutura da distribuição, especialmente, em $t = 400$ e $t = 500$ em formato de anel, parece ser uma característica dos colapsos (ou quase-colapsos). Nota-se que ao longo do anel, temos uma superposição de estados, tal como *cat states*. São regimes classicamente distintos, mas que, após certo tempo, são semelhantes.

Adicionalmente, temos a evolução da função de Husimi para as dinâmicas, periódica 1 e caótica 2, na Figura 20.

Nos instantes $t = 400$ e $t = 500$, temos novamente uma superposição de estados, porém, com uma estrutura mais complexa do que nos colapsos e quase-colapsos mostrados na Figura 19. Já no regime caótico 2, a diferença é drástica. A distribuição de Husimi

Figura 20 – Distribuição de Husimi para as dinâmicas quase-periódica 1 (primeira linha) e caótica 2 (segunda linha) em três instantes de tempo.



se difunde por todo o espaço de fase $\theta \times \phi$, uma manifestação, na dinâmica quântica, do regime caótico observado no correspondente clássico. À medida que o estado evolui, seu valor máximo diminui bastante, tornando-se bastante deslocalizado. É importante dizer que as oscilações irregulares em torno de zero não produziram as estruturas em forma de anel.

Por fim, uma comparação entre as dinâmicas clássica e quântica é feita com o cálculo do centróide da distribuição de Husimi. A solução numérica da integral dada pela Eq. (3.1.5) fornece o valor médio das variáveis θ e ϕ para cada instante de tempo. Assim, definimos as quantidades

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_x &= \sin(\langle\theta\rangle) \cos(\langle\phi\rangle) \\ \mathcal{J}_y &= \sin(\langle\theta\rangle) \sin(\langle\phi\rangle) \\ \mathcal{J}_z &= \cos(\langle\theta\rangle).\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

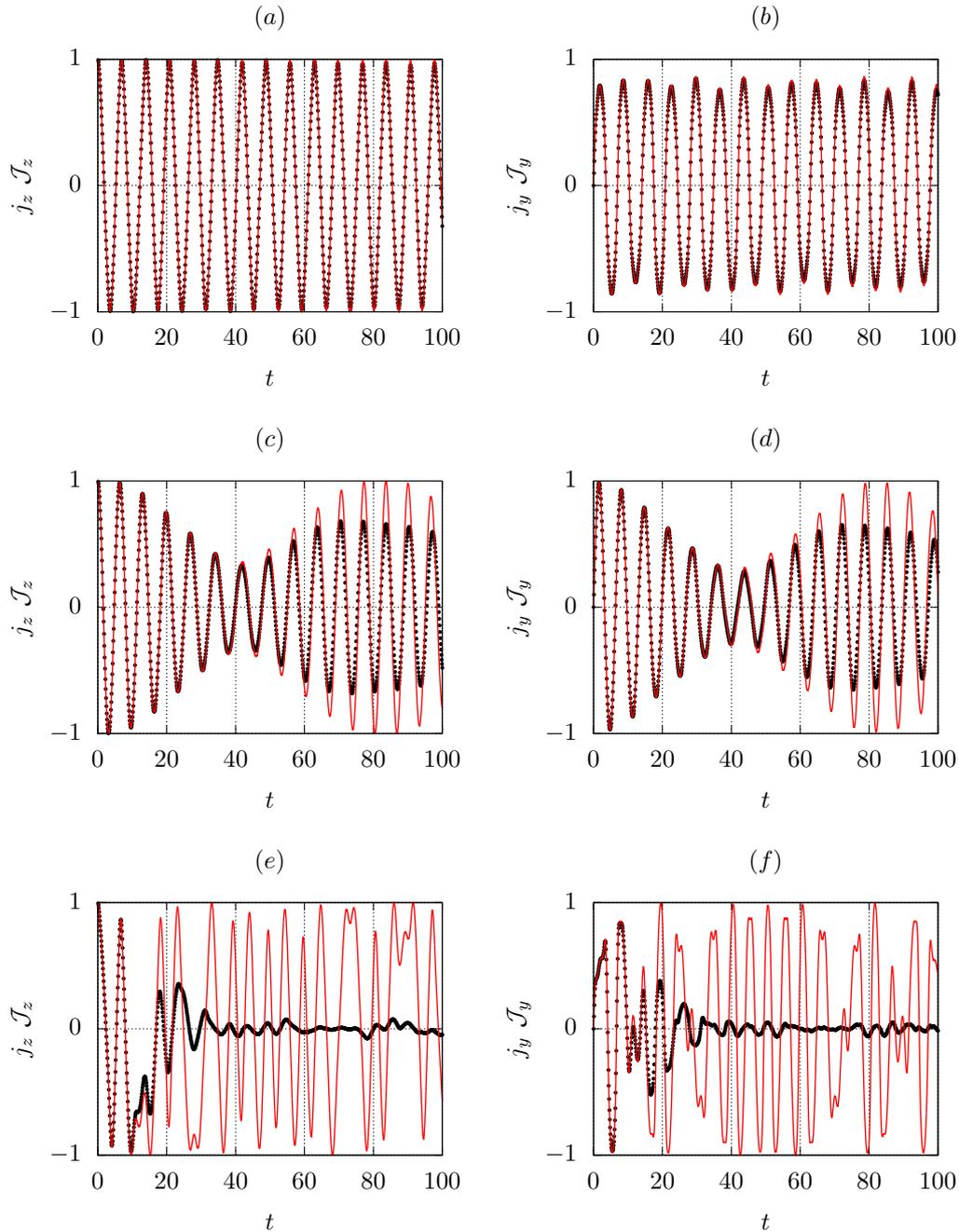
Tais quantidades são semelhantes aos j_s dados pela Eq. (2.4.6). Dessa maneira, o estudo da evolução temporal dos j_s e \mathcal{J}_s se mostra relevante.

A Figura 21 mostra a evolução temporal de \mathcal{J}_z e \mathcal{J}_y juntamente com seus correspondentes clássicos j_z e j_y .

Os resultados mostram claramente que, no regime caótico, rapidamente a evolução dos \mathcal{J}_s diverge dos correspondentes clássicos j_s em concordância com a igualmente rápida dispersão da função de Husimi anteriormente mostrada.

Para a dinâmica do tipo regular, as séries temporais oscilam de forma bastante semelhante. Tal semelhança se verificou para vários conjuntos de parâmetros e condições iniciais no regime regular. A dinâmica quase-regular parece ser um caso intermediário e

Figura 21 – Evolução temporal de \mathcal{J}_z e \mathcal{J}_y (pontos pretos) e j_y e j_z (linha sólida vermelha). Esquerda \mathcal{J}_z e j_z . Direita \mathcal{J}_y e j_y . (a)(b) periódico 1, (c)(d) quase-periódico 1 e (e)(f) caótico 1.



se verifica, no exemplo mostrado, que os tempos de concordância para as dinâmicas da classe 1 são tais que, $t_{P1} \gtrsim 2t_{QP1} \gtrsim 10t_{C1}$. Os resultados apresentados, para tempos curtos, mostram com clareza os efeitos ou manifestações do caos clássico na mecânica quântica.

Para a dinâmica com elevado controle das oscilações (Figura 18), à medida que o estado evolui, observa-se que a distribuição de Husimi se mantém bem localizada. A investigação numérica desse regime em especial mostrou que as quantidades \mathcal{J}_i e j_i oscilam em fase por um período longo de tempo. Como mecanismo de detecção das manifestações

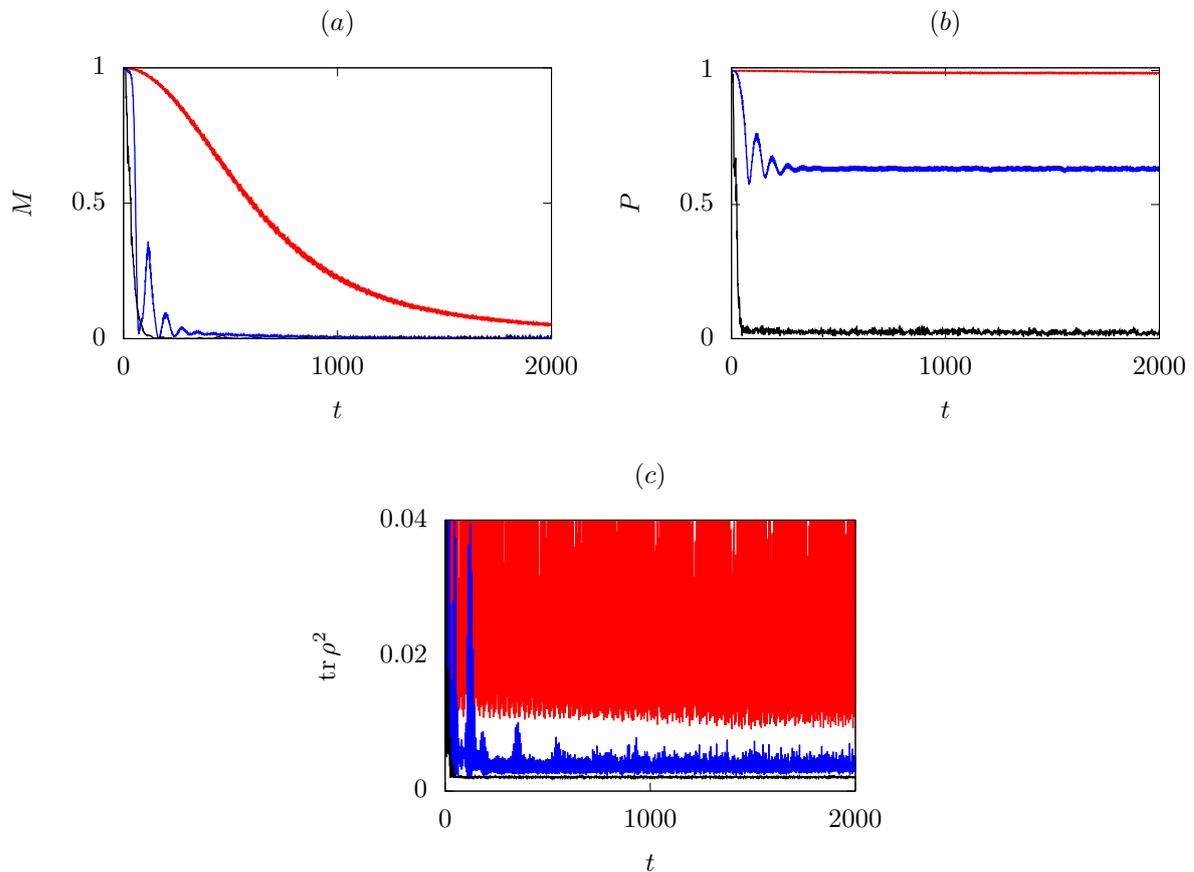
do caos, em diferentes contextos, bem como a geração de outros estados [Juliá-Díaz et al. (2012)] a função de Husimi produz bons resultados qualitativos.

4.2.2 Variáveis clássicas e métricas quânticas

Até o momento, a investigação dos regimes dinâmicos quânticos foi realizada de maneira pontual. Alguns exemplos foram dados, e uma abordagem qualitativa-quantitativa foi realizada. Como mostrado anteriormente, a melhor correspondência clássica-quântica se deu para um estado e conjunto de parâmetros específico. Nesta seção, será investigada a dinâmica quântica de maneira mais abrangente, colocando em perspectiva o expoente de Lyapunov dominante (maior expoente) e as métricas de natureza quântica: eco M , pureza P , e entropia linear S . Em diversas ocasiões, vamos nos referir à quantidade $R = 1 - S$ que vamos chamar de grau de idempotência.

A Figura 22 mostra a evolução temporal das métricas para as três dinâmicas já discutidas na Figura 21.

Figura 22 – Vermelho (regular), azul (quase-regular) e preto (caótico). (a) : $M(t)$, (b) : $P(t)$ e (c) : $R(t)$

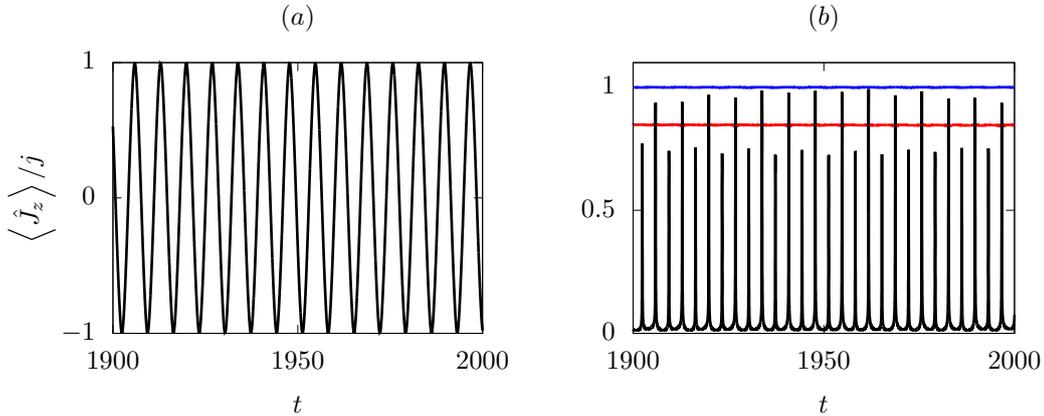


A dinâmica quântica, correspondente ao regime classicamente caótico, mostra que rapidamente estas métricas tendem a um valor de saturação próximo de zero, e menor

que os valores atingidos nos demais regimes. Em uma análise preliminar, é possível dizer que a dinâmica caótica apresenta um valor médio, após um período transiente curto, menor do que o das outras dinâmicas. É interessante observar que, no regime regular, embora a pureza tenha se mantido em um patamar alto, o eco e R decaíram bastante. Como a condição inicial e os parâmetros não se referem ao controle ótimo (Figura 18), o eco se mostra bastante sensível à perda de controle das oscilações de Josephson e exibiu um decaimento, porém, mais lento, se comparado com o regime caótico. A evolução quase-regular se mostra como um caso intermediário.

Retornando ao regime mostrado na Figura 18, temos a evolução temporal das métricas após um tempo longo na Figura 23.

Figura 23 – Regime de elevado controle das oscilações de Josephson. (a) : $\langle \hat{J}_z \rangle / j(t)$ e (b): $M(t)$ (vermelho), $P(t)$ (azul) e $R(t)$ (preto).



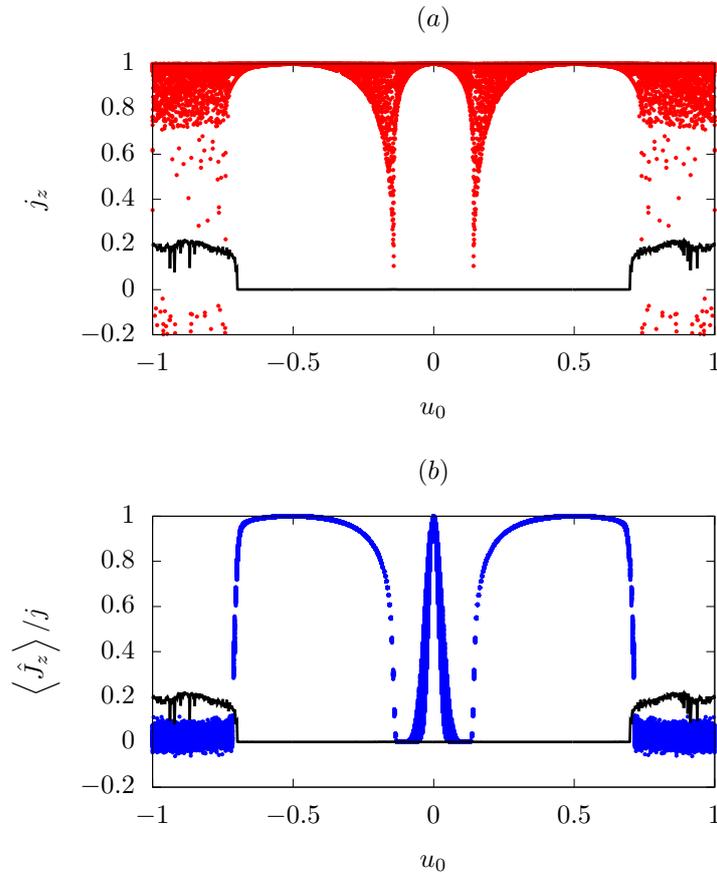
Como se pode notar, a pureza é elevada e o eco sofreu um decaimento, porém, bem menos pronunciado do que aquele que foi mostrado na Figura 22(a). Valores elevados de eco e pureza indicam, igualmente, elevado controle das oscilações de $\langle \hat{J}_z \rangle$. Com relação ao valor de R , ele oscila com valores máximos para $\langle \hat{J}_z \rangle = \pm 1$ (estados de Fock $|0, N\rangle$ ou $|N, 0\rangle$) semelhante ao regime de Rabi. Nesses instantes, o grau de emaranhamento é baixo. Todavia, no regime caótico isso não se observa e os resultados já mostrados indicam que o caos leva a um rápido e forte emaranhamento. Em outro contexto, caos e regularidade foram explorados via dinâmica de emaranhamento com o uso da entropia linear [Angelo et al. (2001)] e resultados análogos ao discutido foram reportados.

Os resultados mostrados até aqui sugerem que a evolução temporal dos observáveis (Figura 17) e das métricas (Figura 22) devem ser avaliados após um período transiente; particularmente a entropia linear, que realiza oscilações, mesmo no regime de elevado controle. Devido aos altos custos computacionais e, claro, ao elevado número de partículas N , optamos por uma média aritmética simples das métricas no intervalo $1000 < t \leq 2000$, descartando um transiente entre $t = 0$ e $t = 1000$. A investigação numérica realizada para diversos parâmetros e condições iniciais mostra que, após um tempo bem inferior a este, os

observáveis tendem a um comportamento permanente. Portanto, este transiente se mostra adequado para capturar o comportamento do sistema a longo prazo.

Para exemplificar, a [Figura 24](#) mostra os valores máximos da variável clássica j_z (vermelho) e do correspondente quântico $\langle \hat{J}_z \rangle / j$ (azul) em função de u_0 . Adicionalmente, o maior expoente de Lyapunov (expoente dominante (preto)) identifica as regiões de comportamento regular (ou quase-periódico) e caos. Os valores foram obtidos avaliando

Figura 24 – (a) Valor máximo de j_z e (b) valor máximo $\langle \hat{J}_z \rangle / j$ em função de u_0 . Condição inicial $(0, \pi)$ e parâmetros $\mu = 0.6$ e $\omega = 1.8$.



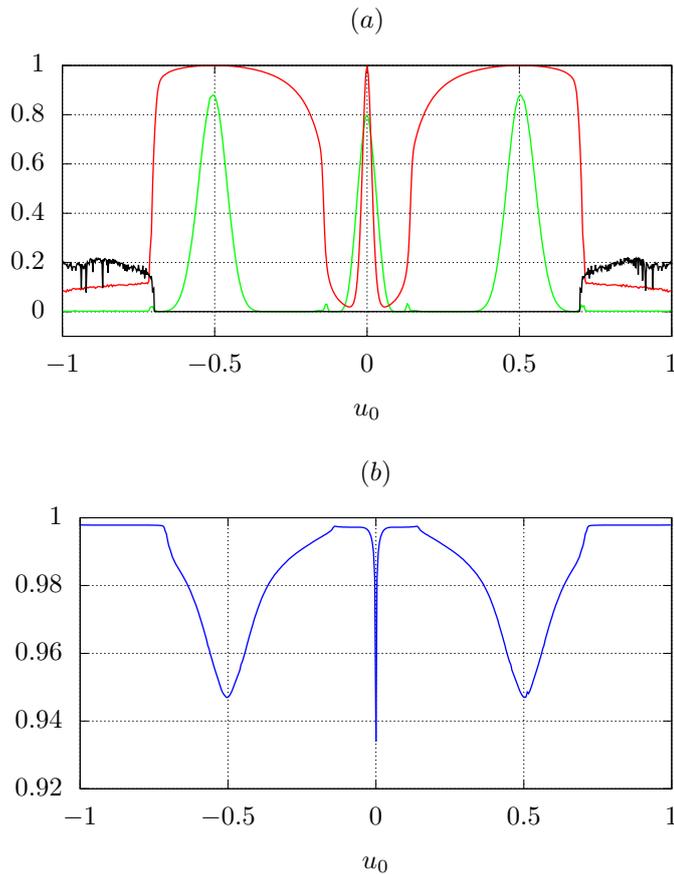
a mudança do sinal de $d\hat{J}_z/dt = -\Omega\hat{J}_y$ dado pela Eq. (2.4.7) e o correspondente clássico $dj_z/dt = -\Omega j_y$ dado pela Eq. (2.4.8). A mudança de sinal ocorre quando $\langle \hat{J}_y \rangle = j_y = 0$. Quando a derivada passa de um valor positivo, no instante t , para um valor negativo, no instante $t + \Delta t$, o máximo é avaliado como $[j_z(t) + j_z(t + \Delta t)] / 2$ e, de maneira equivalente, para $\langle \hat{J}_z \rangle$.

O expoente de Lyapunov dominante separa a região classicamente regular da caótica para os valores $u_0 \lesssim -0.7$ e $u_0 \gtrsim 0.7$. A variável j_z assume diversos valores na região caótica. Em oposição, $\langle \hat{J}_z \rangle / j$ assume valores em torno de zero (quase-colapso irregular) como já discutido. Em regiões próximas de $u_0 = 0$, colapsos são observados.

A [Figura 25](#) mostra os valores de \bar{M} , \bar{P} e \bar{S} onde o uso da barra indica que se trata dos valores médios das métricas após um período transitório, conforme já discutido

anteriormente. Além disso, também é mostrado o expoente de Lyapunov dominante λ . Os resultados apresentados no diagrama de bifurcação mostram que o controle ótimo

Figura 25 – Diagrama de bifurcação: valor médio das métricas (após transiente) e expoente de Lyapunov dominante em função de u_0 . Condição inicial $(0, \pi)$ e parâmetros $\mu = 0.6$ e $\omega = 1.8$. (a) \overline{M} (verde), \overline{P} (vermelho) e λ (preto) (b) \overline{S} (azul).



das oscilações de Josephson, ocorre para valores máximos de \overline{M} e \overline{P} e mínimos de \overline{S} . No diagrama em questão, isso ocorre para $u_0 \approx \pm 0.5$. Para valores de u_0 na vizinhança de 0.5, uma rápida mudança no valor de \overline{M} é observada, dada a sua natureza, a sensibilidade da métrica com respeito aos parâmetros.

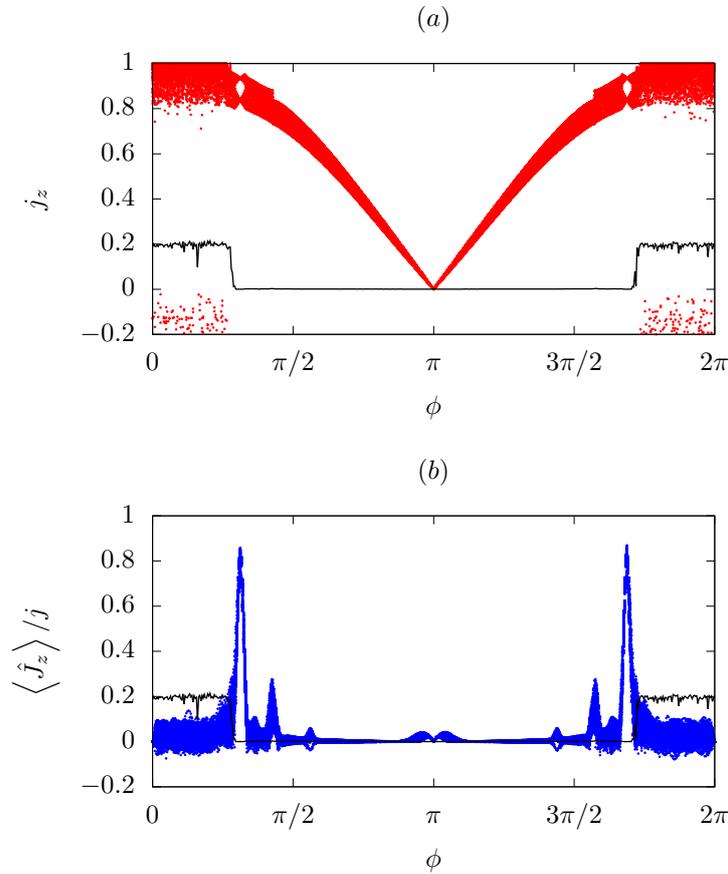
Na região classicamente caótica, valores mínimos de \overline{M} e \overline{P} , bem como valores máximos \overline{S} são observados. Entretanto, isso não é uma característica da região caótica e acontece para outras regiões onde o expoente de Lyapunov dominante não é muito próximo de zero. Tais regiões necessitam de melhor compreensão. Todavia, a extensa investigação numérica mostra que se trata de regimes de quase-periodicidade. Em tais regimes, como já foi discutido, a dinâmica dos observáveis muda, podendo ocorrer colapsos (ou quase-colapsos) e também supressão da queda da amplitude das oscilações dos observáveis [Figura 17\(c\)\(d\)](#).

Com relação à média da entropia \overline{S} , seu comportamento não revela mudanças drásticas. O que se observa é um valor máximo na região caótica e mínimo para o

parâmetro de controle $u_0 \approx \pm 0.5$. É importante observar que a diferença entre os valores máximo e mínimo de \bar{S} é pequena, o que dificulta a análise. Além disso, um valor alto de entropia, por si só, não é capaz de identificar a região classicamente caótica que se confunde com a regular próxima de $u_0 = 0$ (caso não-interagente).

Na mesma linha dos resultados mostrados na Figura 24 temos outro exemplo que explora variações nas condições iniciais. A Figura 26 mostra os valores máximos de j_z e $\langle \hat{J}_z \rangle / j$ e o expoente de Lyapunov dominante em função do ângulo ϕ .

Figura 26 – (a) Valor máximo de j_z e (b) valor máximo $\langle \hat{J}_z \rangle / j$ em função de ϕ . Condição inicial $(\pi/2, \phi)$ e parâmetros $(-1, 0.3, 1.8)$.

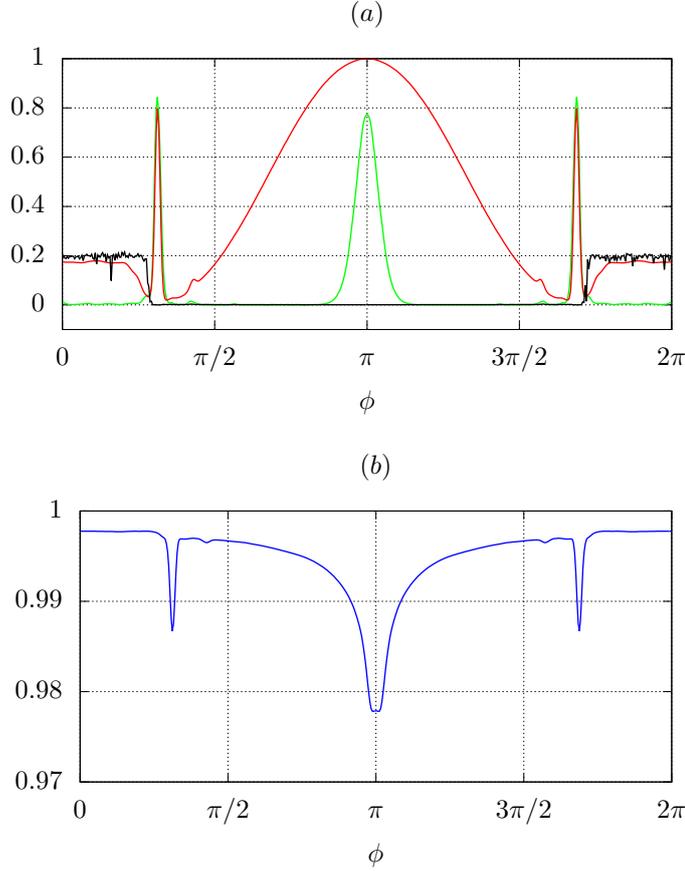


A fronteira entre as regiões caótica e regular é observada para valores de $\phi \lesssim 0.98$ e $\phi \gtrsim 5.42$. A fronteira, para os valores máximos de $\langle \hat{J}_z \rangle / j$, se caracterizam por valores altos do observável. Na região caótica, os quase-colapsos irregulares novamente se apresentam. Ao adentrar na região regular, os máximos sofrem diminuição nos seus valores até o colapso efetivo em $\phi = \pi$. Nota-se claramente que as oscilações de Josephson, para uma ampla região observada, são de baixa amplitude.

A Figura 27 mostra os resultados dos valores médios das métricas e o expoente de Lyapunov dominante.

Novamente, valores médios baixos de eco \bar{M} e pureza \bar{P} bem como valores médios elevados de entropia \bar{S} caracterizam a região caótica. Na fronteira com a região regular,

Figura 27 – Diagrama de bifurcação: valor médio das métricas (após transiente) e expoente de Lyapunov dominante em função de ϕ . Condição inicial $(\pi/2, \phi)$ e parâmetros $(-1, 0.3, 1.8)$. (a) \overline{M} (verde), \overline{P} (vermelho) e λ (preto) (b) \overline{S} (azul).



uma súbita mudança foi observada. Especificamente, com respeito à dinâmica associada $(\pi/2, \pi)$, os resultados numéricos mostraram que não houve evolução apreciável do estado. Os valores médios dos três observáveis ($\langle \hat{J}_x \rangle / j$, $\langle \hat{J}_y \rangle / j$ e $\langle \hat{J}_z \rangle / j$) não oscilaram e se mantiveram constantes no tempo, portanto, a pureza \overline{P} também não oscilou, como esperado. O eco \overline{M} sofreu uma queda e isso se deve ao fato de que, mesmo não havendo evolução dos observáveis, a métrica envolve duas evoluções. Como a condição inicial é fixa com respeito a θ , ou seja, $\langle \hat{J}_z \rangle / j = 0$, o resultado apresentado na Figura 26, permite dizer que não haverá mudança grande no valor médio do observável, por exceção, da fronteira regular-caótica.

De maneira geral, os três quantificadores mostraram valores baixos de \overline{M} e \overline{P} e altos de \overline{S} nas regiões caóticas. Na fronteira caótica-regular, as métricas sofrem uma drástica e súbita mudança. Nos diagramas mostrados, isso se verifica também, próximo de $u_0 = 0$ que é esperado, dado que, para esse valor de u_0 , temos o regime de Rabi. Tais mudanças ocorrem também no centro do espaço $\theta \times \phi$.

Por fim, dada a complexidade dos dados apresentados, é útil estabelecer alguma relação de dependência estatística entre λ e as quantidades \overline{M} , \overline{P} e \overline{S} . As medidas

tradicional, como a correlação de Pearson, se concentram na relação linear entre dois conjuntos de variáveis. Todavia, a distância de correlação [Székely, Rizzo e Bakirov (2007)] é capaz de avaliar dependência linear e não-linear entre as variáveis. A distância de correlação varia entre 0 e 1, onde 0 indica ausência de dependência estatística entre as variáveis, e 1 indica dependência total.

A Tabela 3 mostra a distância de correlação para as séries numéricas apresentadas na Figura 25 e Figura 27

Tabela 3 – Distância de correlação

série	$\lambda \times \overline{M}$	$\lambda \times \overline{P}$	$\lambda \times \overline{S}$
u_0	0.359	0.758	0.572
ϕ	0.227	0.529	0.584

A maior distância de correlação, para a série associada a u_0 , é entre λ e \overline{P} , o que talvez explique a semelhança entre a Figura 24(b) e a curva de \overline{P} mostrada na Figura 25. Com relação ao eco, seu comportamento de queda acentuada ao longo da região clássica pode justificar a baixa correlação. A entropia é um caso intermediário. Com respeito a série associada a ϕ , houve uma redução nas distâncias de correlação para as métricas \overline{M} e \overline{P} . A distância associada a \overline{S} se manteve estável. Todas as quantidades apresentam uma correlação com a dinâmica clássica que não é desprezível.

4.3 Espaços de parâmetros e de fase

Esta última seção é dedicada a um mapeamento mais completo do comportamento do sistema regular ou caótico. O mapeamento se dará no espaço de parâmetros e de fase (espaço das condições iniciais). A dinâmica clássica será investigada via expoente de Lyapunov dominante. A dinâmica quântica será investigada através dos valores médios das métricas.

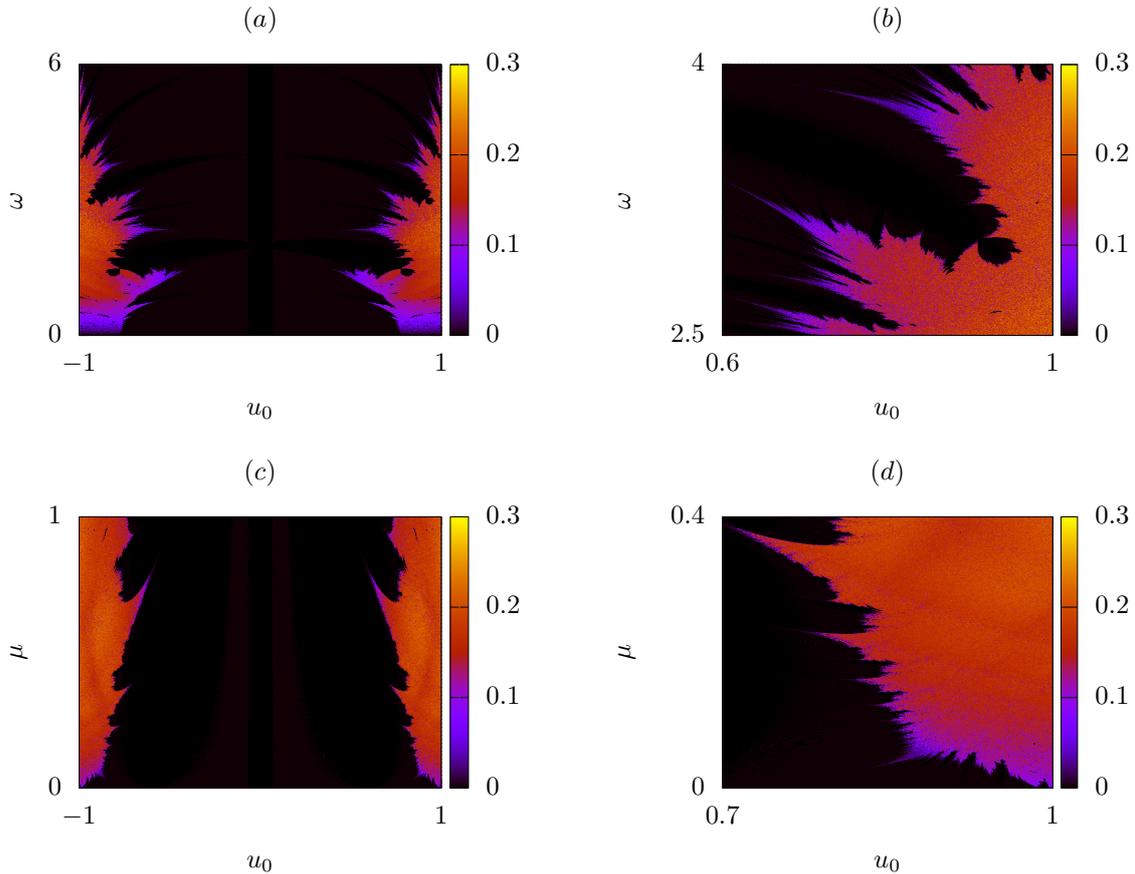
4.3.1 Mapeamento da dinâmica clássica

A Figura 28 mostra o espaço dos parâmetros de controle bidimensional. Tomada fixa uma condição inicial, cada ponto do gráfico é identificado com uma cor que fornece o valor do expoente de Lyapunov dominante (maior expoente). Um expoente dominante positivo implica em caos.

As ampliações mostram detalhes das fronteiras entre os regimes regular e caótico. Possivelmente devem ter estrutura fractal. Além disso, a região de comportamento regular, para o intervalo de parâmetros em questão, é consideravelmente maior que a caótica.

De maneira análoga ao que foi feito na Figura 28, um estudo do comportamento do sistema clássico com relação às condições iniciais é realizado. Um conjunto de parâmetros

Figura 28 – Espaço de parâmetros para o expoente de Lyapunov dominante. Em todos os gráficos foram considerados 501×501 valores igualmente espaçados de parâmetros e condição inicial $(\theta, \phi) = (0, \pi)$. Em (a) e (b) temos o plano $u_0 \times \omega$, com $\mu = 0.3$. Em (c) e (d) o plano $u_0 \times \mu$, com $\omega = 1.8$. (b) e (d) são ampliações de (a) e (c) respectivamente.



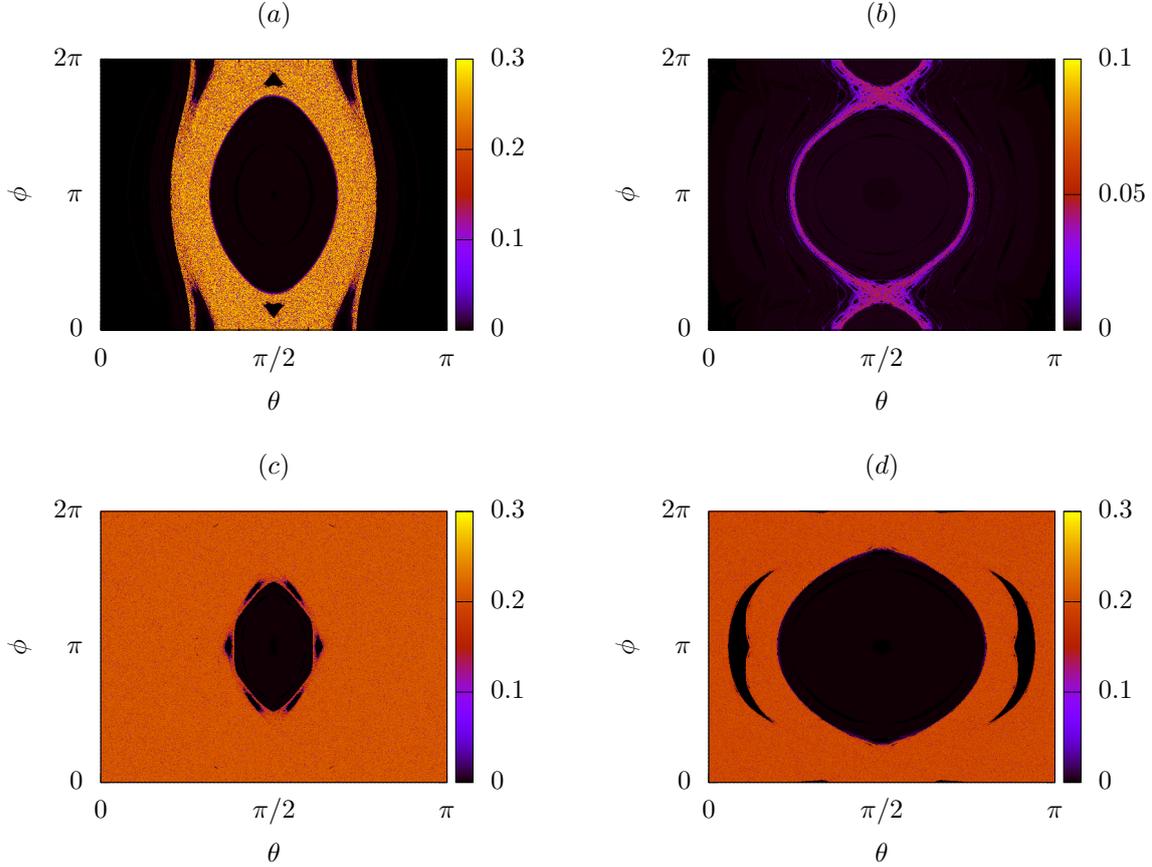
é tomado fixo e as condições iniciais dadas pelas variáveis θ e ϕ são variadas e todo o espaço de fase clássico é varrido. A Figura 29 mostra o expoente de Lyapunov dominante para quatro conjuntos de parâmetros diferentes.

As quatro figuras se destacam pela sua notável simetria e as áreas de comportamento regular e caótico são bem definidas, ao contrário do que foi apresentado na Figura 28, em que a fronteira entre os regimes é mais complexa.

É importante salientar que o algoritmo de Wolf apresentou boa convergência. Resultado análogo ao mencionado anteriormente pode ser obtido com o uso da seção de Poincaré. Tal técnica considera apenas a integração das equações de movimento para variadas condições iniciais. Por exemplo, a Figura 30 mostra a seção de Poincaré para os mesmos parâmetros da Figura 29(d).

Usualmente, o caos na dinâmica clássica, em diferentes contextos, é explorado usando a seção de Poincaré como mostra as referências [Madhok et al. (2015), Krivolapov et al. (2011)] e outras já citadas. É um ótimo método de estudo, porém se restringe ao espaço de fase ao contrário do expoente de Lyapunov que se estende ao espaço de

Figura 29 – Espaço de fase clássico $\theta \times \phi$ para o expoente de Lyapunov dominante. Em todos os gráficos foram considerados 501×501 valores igualmente espaçados de condições iniciais e quatro conjuntos de parâmetros (u_0, μ, ω) . (a) $(-0.4, 0.3, 1.8)$, (b) $(-1.0, 1.0, 1.8)$, (c) $(-0.4, 1.0, 1.8)$ e (d) $(-1.0, 0.3, 1.8)$



parâmetros. Abordagens utilizando o expoente de Lyapunov são menos numerosas [Kidd, Olsen e Corney (2019)].

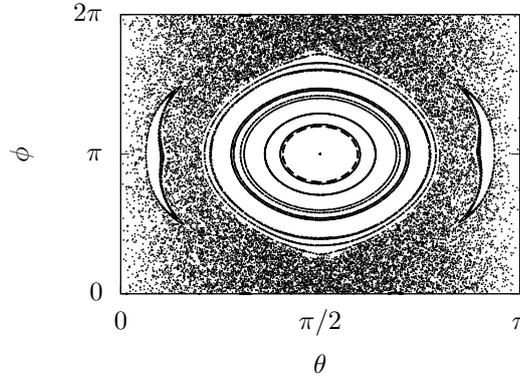
4.3.2 Mapeamento da dinâmica quântica

Com vistas a compreender como as métricas podem sinalizar os efeitos do caos clássico na dinâmica quântica, os correspondentes mapeamentos dos espaços de parâmetros e de fase foram realizados. A Figura 31 apresenta a versão quântica de dois exemplares clássicos, a saber, o espaço de parâmetros Figura 28(c) e o espaço de fase Figura 29(d).

Todos os gráficos obtidos mostram algum grau de correspondência qualitativa com suas contrapartidas clássicas. A barra de cores para os mapeamentos associados a \overline{M} e \overline{P} apresentam valores menores (preto/roxo) e maiores (laranja/amarelo). Quanto à entropia linear, optamos por avaliar $-\ln \overline{R}$, dado que os valores em todos os regimes, como mostrado anteriormente, são altos devido ao forte emaranhamento entre as armadilhas.

Com respeito ao eco Figura 31(a)(b), valores médios próximos de zero indicam caos. Comparando com os mapeamentos clássicos, as cores pretas se apresentam na região de caos

Figura 30 – Seção de Poincaré para os mesmos parâmetros da Fig. (29)(d), ou seja, $(u_0, \mu, \omega) = (-1.0, 0.3, 1.8)$. Um conjunto de condições iniciais (θ, ϕ) é evoluído e as soluções obtidas em intervalos de tempo múltiplos do período de modulação $2\pi/\omega$ são mostrados.



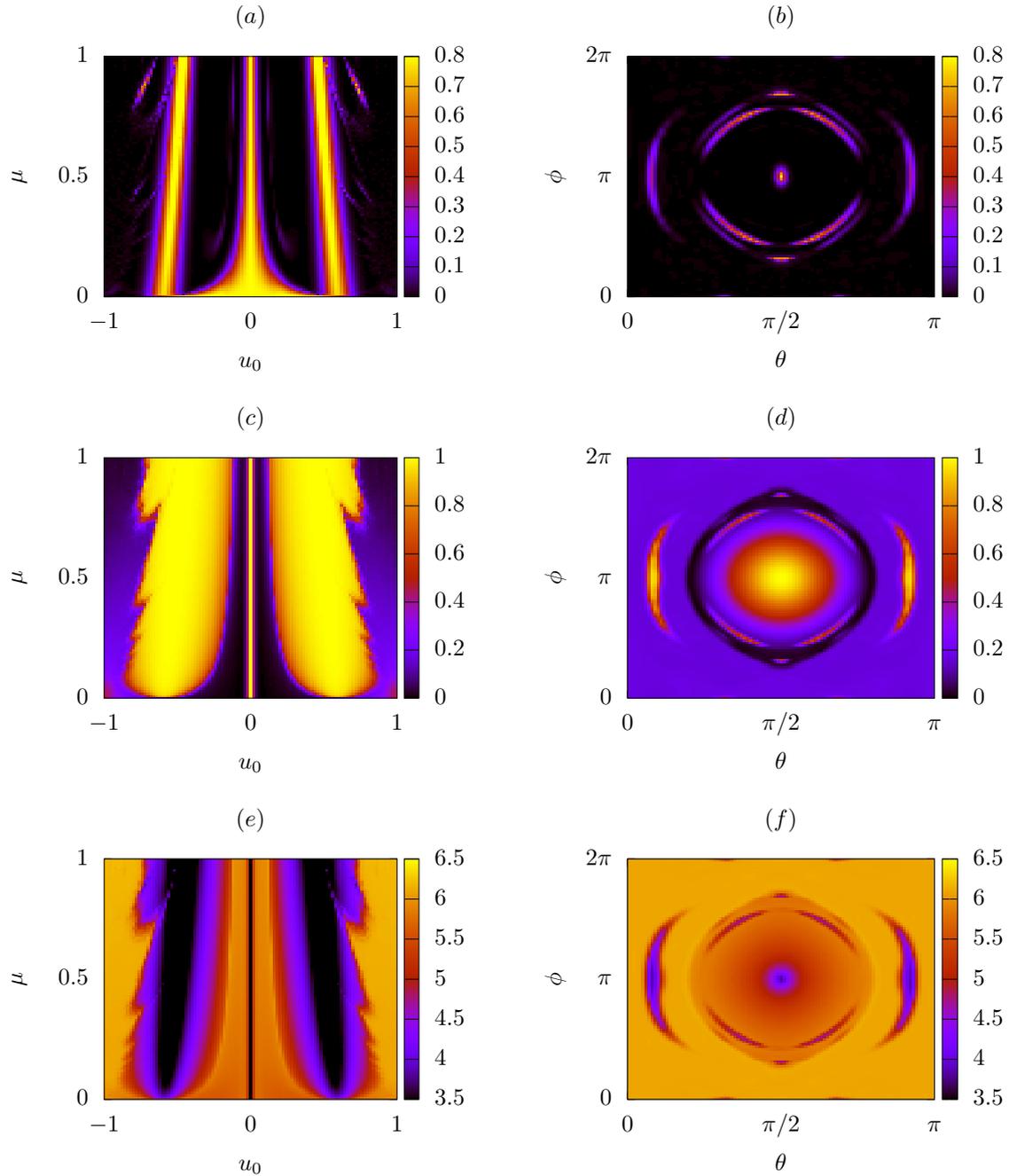
e a métrica foi capaz de separar a região regular-caótico. No entanto, uma região de baixo eco dentro da região regular foi observada e se trata de regimes de quase-periodicidade. Essa parece ser uma característica da métrica, qual seja, queda no seu valor tendendo a zero para uma ampla gama de parâmetros e condições iniciais.

No espaço de parâmetros, as faixas amarelas observadas se tratam de eco alto e, como vimos, estão associadas a regimes regulares com controle das oscilações de Josephson. Essas faixas aparecem próximas de $u_0 = 0$ e $u_0 = \pm 0.5$. Em tais regiões ocorre uma mudança no comportamento dos expoentes de Lyapunov como será discutido. No espaço de fase, o eco máximo foi observado no centro do mapeamento $(\pi/2, \pi)$. Cores intermediárias separam as regiões caótica-regular (ou quase-regular).

Em seguida, temos os mapeamentos associados a pureza Figura 31(c)(d). Valores baixos (roxo) indicam caos e, a região caótica, está bem definida. A fronteira com a região regular (amarelo) possui uma estrutura bastante irregular que provém do fato de as bordas parecerem ser fractais. Adentrando a região regular, temos uma ampla região amarela. Parâmetros nessa região levam a oscilações de Josephson com alto grau de controle. Em seguida, os menores valores (preto) aparecem. Se trata de regimes de quase-periodicidade (colapsos e quase-colapsos). Nessas regiões a pureza é baixa, menor até que na região caótica. Já no espaço de fase, o caos, região externa se mostra bem definida. Os valores elevados se apresentam na região central da figura.

Por último, temos a Figura 31(e)(f) que mostra os mapeamentos associados a entropia. Valores elevados se apresentam na região caótica e parâmetros e condições iniciais nessas regiões conferem alto grau de emaranhamento entre os subsistemas (sítios). As faixas centrais (preto), semelhantes àquelas exibidas pelo eco, qualificam um baixo grau de emaranhamento. É importante dizer que, para um número grande de partículas, o sistema, de maneira geral, é fortemente emaranhado. No espaço de fase, o menor valor foi observado apenas no centro do espaço de fase. Valores altos caracterizam regimes caótico

Figura 31 – 101×101 parâmetros e condições iniciais igualmente espaçadas. Esquerda: espaço de parâmetros $u_0 \times \mu$. Direita: espaço de fase $\theta \times \phi$. (a)(b) (\overline{M}) , (c)(d) (\overline{P}) e (e)(f) $(-\ln \overline{R})$.

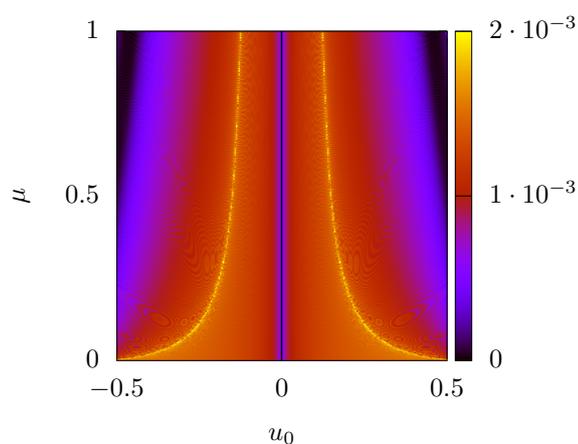


e quase-regular.

Como se pode notar, a análise dos mapeamentos realizados é bastante complexa. Os expoentes de Lyapunov, ao contrário, possuem um caráter binário (zero ou maior que zero) o que facilita a caracterização do sistema. A região regular, dos mapeamentos quânticos, apresentou outras regiões que não foram captadas no mapeamento clássico. A Figura 32 mostra uma ampliação de parte da região regular referente a Figura 28(c).

Todo o espaço de parâmetros, na região avaliada, apresenta expoente de Lyapunov

Figura 32 – Ampliação da Figura 28(c).



dominante próximo de zero. Todavia, existem curvas de bifurcação que estabelecem regimes dinâmicos clássicos diferentes capturados pelos mapeamentos quânticos realizados. Dessa maneira, observa-se que os expoentes de Lyapunov na região clássica regular necessitam de uma abordagem mais cuidadosa. A dinâmica quântica e seus mapeamentos mostraram outros regimes dinâmicos que, inicialmente, o mapeamento clássico não mostrou.

5 Conclusão

Neste trabalho, investigamos o modelo de Bose-Hubbard de dois modos com interações átomo-átomo nos sítios, moduladas temporalmente. Tal modulação já foi realizada experimentalmente. Como já discutido ao longo deste texto, com a introdução da modulação, a dinâmica clássica exibe caos que, como mostrado, se refletiu na dinâmica quântica dos observáveis associados ao modelo. Em especial, a evolução temporal do operador $\langle \hat{J}_z \rangle$, que está associado à diferença de população nos sítios, foi amplamente investigada.

Primeiramente, foi investigada a dinâmica clássica e o sistema exibe três regimes: regular, quase-regular e caótico. Tais regimes foram caracterizados quantitativamente pela computação dos expoentes de Lyapunov e, qualitativamente, pela dinâmica dos observáveis clássicos no espaço de fase. O método usado para o cálculo dos expoentes, o algoritmo de Wolf, se mostrou bastante eficiente e isso ficou demonstrado pela comparação com a seção de Poincaré. Além disso, a convergência dos expoentes para zero, característica da dinâmica regular ou quase-regular, se mostrou mais lenta para o segundo caso.

A dinâmica temporal da contrapartida quântica dos observáveis clássicos, os operadores de pseudospin, mostraram diversos comportamentos. Com respeito à dinâmica caótica, os resultados numéricos mostraram que o valor médio do observável $\langle \hat{J}_z \rangle$, de maneira geral, rapidamente passa a realizar oscilações irregulares em torno de zero. Para a dinâmica regular e quase-regular diversos comportamentos foram observados. Foram observados colapsos, quase-colapsos e oscilações regulares após um certo tempo. Além disso, o sistema exibe comportamentos diferentes a depender do tempo de evolução de um estado inicial. Por exemplo, foram observadas quedas da amplitude das oscilações durante um curto tempo, seguidas de oscilações que se mantiveram periódicas após esse tempo inicial.

A investigação do sistema, no espaço de fase, via função de Husimi, apresentou uma dinâmica rica e diversificada. A função de Husimi se difunde de maneira complexa no espaço de fase tal como a correspondente dinâmica clássica. A dinâmica regular e quase-regular exibiu superposição de estados que produziram estruturas no espaço de fase com formas bem interessantes. Além disso, o centroide da função de Husimi, quando comparado com as variáveis clássicas, no regime de tempo curto, rapidamente diverge quando se estabelece o regime caótico. No regime regular essa concordância se dá por um tempo maior. Assim, a função de Husimi bem como seu centroide, se mostraram, para a evolução de tempo curto, bons sinalizadores qualitativos das manifestações do caos.

Os valores máximos de j_z e $\langle \hat{J}_z \rangle$ se mostraram bons sinalizadores de caos a despeito da simplicidade dessa técnica. A dinâmica clássica caótica apresentou diversos valores. Todavia, a dinâmica do observável \hat{J}_z , após um período transiente, mostrou valores

máximos em torno de zero e, portanto, conforme os resultados já comentados. O expoente de Lyapunov delimitou bem a região caótica-regular. A passagem pela fronteira regular-caótica se dá com súbita elevação nos valores máximos $\langle \hat{J}_z \rangle$. Dentro da região regular, diversos comportamentos e valores foram observados.

Por exemplo, as séries dos valores máximos de j_z e $\langle \hat{J}_z \rangle$ em função de u_0 se mostraram qualitativa e quantitativamente semelhantes. Além disso, quando nos aproximamos de valores próximos de $u_0 = 0$, novas mudanças súbitas ocorrem, especialmente colapsos, pois, nessa sub-região, o sistema tende a ser não interagente (regime de Rabi). Importante observar que o controle das oscilações de Josephson foi observado para $u_0 = \pm 0.5$. Análise similar foi realizada para o ângulo ϕ e o controle não foi observado. Pelo contrário, a região regular não se mostrou elegível ao controle.

Os mapeamentos clássicos, obtidos via expoente de Lyapunov dominante, realizaram boa distinção entre comportamento regular e caótico. No espaço de parâmetros, a fronteira regular-caótica exibiu uma estrutura intrincada que se refletiu nos correspondentes mapeamentos quânticos. No espaço de fase, clássico e quântico, a fronteira regular-caótica se mostrou mais suave.

De maneira geral, é possível dizer que a três métricas quânticas (M , P e S) foram capazes de identificar parâmetros e condições iniciais cuja correspondente versão clássica exhibe caos. Com relação ao eco, a fronteira não ficou bem definida mas é possível determinar uma “região de segurança”, por assim dizer, que se trate de caos. A pureza e a entropia foram capazes de capturar a complexidade da fronteira.

Na região regular, diversos comportamentos foram observados, em especial, o controle das oscilações do observável $\langle \hat{J}_z \rangle$. Os resultados apresentados mostram que, tal controle é um regime bastante específico e somente parâmetros e condições iniciais que se originam de regiões regulares são elegíveis ao controle. Tal regime também ficou bem caracterizado. Importante acrescentar que o controle ótimo das oscilações foi identificada pelo eco e pela entropia. Uma pequena perda de controle é identificado pela entropia que sofre um aumento. Já o eco sofre uma forte queda. A pureza não é dotada dessa sensibilidade mas possui valor elevado.

Dessa forma, podemos concluir que uma correta identificação das manifestações do caos na mecânica, o caos quântico, necessita de abordagens conjuntas. Todavia, os resultados mostraram que parâmetros e condições iniciais que se encontram na região caótica vão produzir oscilações de baixa amplitude para o observável de interesse, nesse trabalho, \hat{J}_z . Caso se esteja em busca de oscilações de Josephson de elevado controle, tal condição só é possível na região regular. Colapsos, quase-colapsos e reavivamentos são observados apenas na região regular.

Como proposta de trabalho futuro, pretendemos estudar o modelo de Bose-Hubbard com presença de dissipação. A dinâmica clássica exhibe outros fenômenos que são característicos de sistemas clássicos dissipativos. Seria interessante verificar se as técnicas utilizadas

neste trabalho se aplicariam a sistemas como [Yusipov e Ivanchenko (2019), Ivanchenko et al. (2017)] ou análogos. Em outra direção, gostaríamos de verificar a possibilidade de usar quantificadores de não-classicalidade [Davis et al. (2021), Lemos et al. (2018)] como sinalizadores de caos.

Não é preciso dizer que o caos quântico é uma área grande e complexa da mecânica quântica. Este trabalho, em princípio, está restrito a um sistema específico. Esperamos que o presente trabalho possa contribuir para o estudo do caos quântico em modelo análogos.

Referências

- GERSCH, H. A.; KNOLLMAN, G. C. Quantum cell model for bosons. **Physical Review**, APS, v. 129, n. 2, p. 959, 1963. Citado na página 12.
- HUBBARD, J.; FLOWERS, B. Proceedings of the Royal Society of London, Series A. **Math. Phys. Sci.**, v. 276, n. 1365, p. 238, 1963. Citado na página 12.
- ANDERSON, M. H. et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995. Citado na página 12.
- DAVIS, K. B. et al. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. **Physical Review Letters**, APS, v. 75, n. 22, p. 3969, 1995. Citado na página 12.
- ZWIERLEIN, M. W. et al. Observation of Bose-Einstein condensation of molecules. **Physical Review Letters**, APS, v. 91, n. 25, p. 250401, 2003. Citado na página 12.
- KLAERS, J. et al. Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 468, n. 7323, p. 545–548, 2010. Citado na página 12.
- GRIFFIN, A.; SNOKE, D. W.; STRINGARI, S. **Bose-Einstein condensation**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. Citado na página 12.
- FISHER, M. P. et al. Boson localization and the superfluid-insulator transition. **Physical Review B**, APS, v. 40, n. 1, p. 546, 1989. Citado na página 12.
- MORSCH, O.; OBERTHALER, M. Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 78, n. 1, p. 179, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 16.
- GREINER, M. et al. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 415, n. 6867, p. 39–44, 2002. Citado na página 12.
- CHIN, C. et al. Feshbach resonances in ultracold gases. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 82, n. 2, p. 1225, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 17.
- KEVREKIDIS, P. et al. Feshbach resonance management for Bose-Einstein condensates. **Physical Review Letters**, APS, v. 90, n. 23, p. 230401, 2003. Citado na página 12.
- SAITO, H.; UEDA, M. Dynamically stabilized bright solitons in a two-dimensional Bose-Einstein condensate. **Physical Review Letters**, APS, v. 90, n. 4, p. 040403, 2003. Citado na página 13.
- STRZYS, M.; GRAEFE, E.; KORSCH, H. Kicked Bose-Hubbard systems and kicked tops—destruction and stimulation of tunneling. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 10, n. 1, p. 013024, 2008. Citado na página 13.
- WANG, J.; GONG, J. Butterfly Floquet spectrum in driven SU (2) systems. **Physical Review Letters**, APS, v. 102, n. 24, p. 244102, 2009. Citado na página 13.

- GONG, J.; MORALES-MOLINA, L.; HÄNGGI, P. Many-body coherent destruction of tunneling. **Physical Review Letters**, APS, v. 103, n. 13, p. 133002, 2009. Citado na página 13.
- WANG, J.; GONG, J. Generating a fractal butterfly Floquet spectrum in a class of driven SU (2) systems. **Physical Review E**, APS, v. 81, n. 2, p. 026204, 2010. Citado na página 13.
- WATANABE, G.; MÄKELÄ, H. Floquet analysis of the modulated two-mode Bose-Hubbard model. **Physical Review A**, APS, v. 85, n. 5, p. 053624, 2012. Citado na página 13.
- LOZADA-VERA, J.; BAGNATO, V. S.; OLIVEIRA, M. D. Coherent control of quantum collapse in a Bosonic Josephson junction by modulation of the scattering length. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 15, n. 11, p. 113012, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 13, 33 e 42.
- HOLTHAUS, M.; STENHOLM, S. Coherent control of the self-trapping transition. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 20, p. 451–467, 2001. Citado na página 13.
- LEE, C. et al. Chaotic and frequency-locked atomic population oscillations between two coupled Bose-Einstein condensates. **Physical Review A**, APS, v. 64, n. 5, p. 053604, 2001. Citado na página 13.
- WEISS, C.; TEICHMANN, N. Differences between mean-field dynamics and n-particle quantum dynamics as a signature of entanglement. **Physical Review Letters**, APS, v. 100, n. 14, p. 140408, 2008. Citado na página 13.
- ABDULLAEV, F. K.; KRAENKEL, R. A. Coherent atomic oscillations and resonances between coupled Bose-Einstein condensates with time-dependent trapping potential. **Physical Review A**, APS, v. 62, n. 2, p. 023613, 2000. Citado na página 13.
- SALMOND, G.; HOLMES, C.; MILBURN, G. J. Dynamics of a strongly driven two-component Bose-Einstein condensate. **Physical Review A**, APS, v. 65, n. 3, p. 033623, 2002. Citado na página 13.
- HAAKE, F.; KUŚ, M.; SCHARF, R. Classical and quantum chaos for a kicked top. **Zeitschrift für Physik B Condensed Matter**, Springer, v. 65, p. 381–395, 1987. Citado na página 13.
- CHAUDHURY, S. et al. Quantum signatures of chaos in a kicked top. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 461, n. 7265, p. 768–771, 2009. Citado na página 13.
- NEILL, C. et al. Ergodic dynamics and thermalization in an isolated quantum system. **Nature Physics**, Nature Publishing Group UK London, v. 12, n. 11, p. 1037–1041, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 34.
- KHRIPKOV, C.; COHEN, D.; VARDI, A. Coherence dynamics of kicked Bose-Hubbard dimers: Interferometric signatures of chaos. **Physical Review E**, APS, v. 87, n. 1, p. 012910, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 33.

TONEL, A.; LINKS, J.; FOERSTER, A. Behaviour of the energy gap in a model of Josephson coupled Bose-Einstein condensates. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 38, n. 31, p. 6879, 2005. Citado na página 13.

LINKS, J. et al. The two-site Bose-Hubbard model. In: SPRINGER. **Annales Henri Poincaré**. [S.l.], 2006. v. 7, p. 1591–1600. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.

GREINER, M. et al. Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 419, n. 6902, p. 51–54, 2002. Citado na página 13.

ANGLIN, J. R.; VARDI, A. Dynamics of a two-mode Bose-Einstein condensate beyond mean-field theory. **Physical Review A**, APS, v. 64, n. 1, p. 013605, 2001. Citado na página 14.

GRAEFE, E. M.; KORSCH, H.; NIEDERLE, A. Mean-field dynamics of a non-Hermitian Bose-Hubbard dimer. **Physical Review Letters**, APS, v. 101, n. 15, p. 150408, 2008. Citado na página 14.

RAGHAVAN, S. et al. Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates: Josephson effects, π oscillations, and macroscopic quantum self-trapping. **Physical Review A**, APS, v. 59, n. 1, p. 620, 1999. Citado na página 14.

WOLF, A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. **Physica D: nonlinear phenomena**, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985. Citado 3 vezes nas páginas 14, 37 e 67.

BONATTO, C.; GALLAS, J. A.; UEDA, Y. Chaotic phase similarities and recurrences in a damped-driven Duffing oscillator. **Physical Review E**, APS, v. 77, n. 2, p. 026217, 2008. Citado na página 14.

MADHOK, V. et al. Signatures of chaos in the dynamics of quantum discord. **Physical Review E**, APS, v. 91, n. 3, p. 032906, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 53.

JOHANSSON, J. R.; NATION, P. D.; NORI, F. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. **Computer Physics Communications**, Elsevier, v. 183, n. 8, p. 1760–1772, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 71.

GATI, R.; OBERTHALER, M. K. A bosonic Josephson junction. **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, IOP Publishing, v. 40, n. 10, p. R61, 2007. Citado na página 16.

DALTON, B.; GHANBARI, S. Two mode theory of Bose-Einstein condensates: interferometry and the Josephson model. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 59, n. 4, p. 287–353, 2012. Citado na página 16.

MOERDIJK, A.; VERHAAR, B.; AXELSSON, A. Resonances in ultracold collisions of ^6Li , ^7Li and ^{23}Na . **Physical Review A**, APS, v. 51, n. 6, p. 4852, 1995. Citado na página 17.

POLLACK, S. et al. Collective excitation of a Bose-Einstein condensate by modulation of the atomic scattering length. **Physical Review A**, APS, v. 81, n. 5, p. 053627, 2010. Citado na página 18.

- SCHWINGER, J. **Angular momentum**. [S.l.]: Springer, 2001. Citado na página 19.
- ARECCHI, F. T. et al. Atomic coherent states in quantum optics. **Physical Review A**, APS, v. 6, n. 6, p. 2211, 1972. Citado na página 21.
- SCHRÖDINGER, E. About Heisenberg uncertainty relation. **arXiv preprint quant-ph/9903100**, Citeseer, 1999. Citado na página 21.
- LIEB, E. H. The classical limit of quantum spin systems. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 31, p. 327–340, 1973. Citado na página 22.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical mechanics**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002. Citado na página 23.
- ALBIEZ, M. et al. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction. **Physical Review Letters**, APS, v. 95, n. 1, p. 010402, 2005. Citado na página 27.
- HUSIMI, K. Some formal properties of the density matrix. **Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series**, THE PHYSICAL SOCIETY OF JAPAN, The Mathematical Society of Japan, v. 22, n. 4, p. 264–314, 1940. Citado na página 30.
- PERES, A. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems. **Physical Review A**, APS, v. 30, n. 4, p. 1610, 1984. Citado na página 32.
- GOUSSEV, A. et al. Loschmidt echo. **arXiv preprint arXiv:1206.6348**, 2012. Citado na página 32.
- GORIN, T. et al. Dynamics of Loschmidt echoes and fidelity decay. **Physics Reports**, Elsevier, v. 435, n. 2-5, p. 33–156, 2006. Citado na página 32.
- LIU, J. et al. Fidelity of a Bose-Einstein condensates. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 353, n. 2-3, p. 216–220, 2006. Citado na página 32.
- ZHENG, Q. et al. Decay of Loschmidt echo in a Bose-Einstein condensate at a dynamical phase transition. **Physical Review E**, APS, v. 80, n. 1, p. 016214, 2009. Citado na página 32.
- ZHENG, Q. et al. Relatively-long time decay of Loschmidt echo of a Bose-Einstein condensate in a double-well potential. **The European Physical Journal D**, Springer, v. 58, p. 275–279, 2010. Citado na página 32.
- BHATTACHARYA, U.; DASGUPTA, S.; DUTTA, A. Exploring chaos in the Dicke model using ground-state fidelity and Loschmidt echo. **Physical Review E**, APS, v. 90, n. 2, p. 022920, 2014. Citado na página 32.
- VISCONDI, T. F.; FURUYA, K.; OLIVEIRA, M. D. Generalized purity and quantum phase transition for Bose-Einstein condensates in a symmetric double well. **Physical Review A**, APS, v. 80, n. 1, p. 013610, 2009. Citado na página 33.
- VISCONDI, T.; FURUYA, K.; OLIVEIRA, M. de. Phase transition, entanglement and squeezing in a triple-well condensate. **Europhysics Letters**, IOP Publishing, v. 90, n. 1, p. 10014, 2010. Citado na página 33.

- HINES, A. P.; MCKENZIE, R. H.; MILBURN, G. J. Entanglement of two-mode Bose-Einstein condensates. **Physical Review A**, APS, v. 67, n. 1, p. 013609, 2003. Citado na página 34.
- BHOSALE, U. T.; SANTHANAM, M. Periodicity of quantum correlations in the quantum kicked top. **Physical Review E**, APS, v. 98, n. 5, p. 052228, 2018. Citado na página 34.
- JULIÁ-DÍAZ, B. et al. Dynamic generation of spin-squeezed states in bosonic Josephson junctions. **Physical Review A**, APS, v. 86, n. 2, p. 023615, 2012. Citado na página 46.
- ANGELO, R. M. et al. Recoherence in the entanglement dynamics and classical orbits in the N-atom Jaynes-Cummings model. **Physical Review A**, APS, v. 64, n. 4, p. 043801, 2001. Citado na página 47.
- SZÉKELY, G. J.; RIZZO, M. L.; BAKIROV, N. K. Measuring and testing dependence by correlation of distances. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 35, n. 6, p. 2769 – 2794, 2007. Citado na página 52.
- KRIVOLAPOV, Y. et al. Quantum chaos of a mixed open system of kicked cold atoms. **Physical Review E**, APS, v. 83, n. 1, p. 016204, 2011. Citado na página 53.
- KIDD, R.; OLSEN, M.; CORNEY, J. Quantum chaos in a Bose-Hubbard dimer with modulated tunneling. **Physical Review A**, APS, v. 100, n. 1, p. 013625, 2019. Citado na página 54.
- YUSIPOV, I.; IVANCHENKO, M. Quantum Neimark-Sacker bifurcation. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group UK London, v. 9, n. 1, p. 17932, 2019. Citado na página 60.
- IVANCHENKO, M. V. et al. Classical bifurcation diagrams by quantum means. **Annalen der Physik**, Wiley Online Library, v. 529, n. 8, p. 1600402, 2017. Citado na página 60.
- DAVIS, J. et al. Wigner negativity in spin-j systems. **Physical Review Research**, APS, v. 3, n. 3, p. 033134, 2021. Citado na página 60.
- LEMOS, H. C. et al. Roughness as classicality indicator of a quantum state. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 382, n. 12, p. 823–836, 2018. Citado na página 60.

Apêndices

APÊNDICE A – Algoritmo de Wolf

Seja um sistema dinâmico descrito por n equações diferenciais de primeira ordem cujas variáveis são (x_1, x_2, \dots, x_n) . O sistema é descrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde \dot{x} denota a derivada de x em relação a uma variável independente. Para o nosso interesse será o tempo t .

Um sistema é dito ser autônomo se as variáveis \dot{x}_i com $(i = 1, 2, \dots, n)$ não dependem explicitamente do tempo. Caso contrário, é dito não-autônomo. Todavia, um sistema não-autônomo pode ser transformado em autônomo com a adição de uma nova variável. Fazendo $x_{n+1} = t$, o sistema dinâmico adquire mais uma equação, qual seja

$$\dot{x}_{n+1} = 1.\tag{A.2}$$

O número de equações diferenciais que descrevem um sistema dinâmico define a dimensão do sistema.

A computação numérica dos expoentes de Lyapunov, proposta por Wolf e colaboradores [Wolf et al. (1985)], consiste em monitorar, simultaneamente, a evolução temporal do sistema dinâmico no espaço de fase (equações de movimento não-lineares) e no espaço tangente. A trajetória fiducial ou de referência é o caminho realizado, no espaço de fase, do centro de uma hiper-esfera n -dimensional, centro esse que é uma condição inicial. Para o espaço tangente, temos n^2 equações lineares dadas pela matriz Jacobiana $J_{k,l} = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_l}$ com k e l de 1 até n . As condições iniciais para o sistema linearizado consistem em n vetores $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n$ ortogonais entre si. Dessa forma, os vetores definem os eixos principais da hiper-esfera e as componentes dos vetores evoluem no tempo pelas equações linearizadas.

Os eixos tendem a se expandir em determinadas direções e a se contrair em outras, fazendo com que a esfera se torne um elipsóide. Considerando que as expansões e contrações sejam exponenciais, a magnitude do i -ésimo eixo do elipsóide, p_i , é dado por

$$p_i(t) = p_i(0)e^{\lambda_i t}.\tag{A.3}$$

Os λ_i são os expoentes de Lyapunov e definem a expansão ou contração dos eixos nas direções x_i . Um sistema dinâmico n -dimensional possui n expoentes de Lyapunov.

Um sistema caótico exibe sensibilidade às condições iniciais. Assim, os vetores $\vec{\varphi}_i$ aumentam em módulo rapidamente e tendem a se alinhar a direção de maior expansão, tornando-se indistinguíveis, o que dificulta a computação dos expoentes. Tal dificuldade é superada pelo algoritmo de Wolf. Na prática, o que se faz é considerar não uma base de vetores ortogonais, mas sim ortonormais entre si, ou seja, $p_i(0) = 1$. Portanto, o i -ésimo expoente de Lyapunov, após um intervalo de tempo h pequeno, é dado aproximadamente por

$$\lambda_i(h) \approx \frac{1}{h} \ln |p_i(h)|. \quad (\text{A.4})$$

Mais aproximações são obtidas por reconstruir a base ortonormal, usando o método de Gram-Schmidt. Uma nova aproximação para λ_i é $\lambda_i(2h) \approx \frac{1}{2h} [\ln |p_i(h)| + \ln |p_i(2h)|]$. Ou seja, os expoentes são obtidos por uma média acumulada.

Em suma, a implementação do algoritmo de Wolf segue os seguintes passos:

1. Para um intervalo de tempo h , resolve-se numericamente as n equações não-lineares para uma dada condição inicial juntamente com as n^2 equações linearizadas via matriz Jacobiana. As condições iniciais para o sistema linearizado são dadas por n vetores $\vec{\varphi}$ ortonormais.
2. A cada intervalo de tempo h , os vetores $\vec{\varphi}$ não formam mais uma base ortonormal. Determinam-se os módulos desses novos vetores e a quantidade $\ln |\varphi_i|$ é armazenada.
3. Procede-se a construção de uma nova base ortonormal pelo método de Gram-Schmidt.
4. Repetem-se as etapas 1,2 e 3 por N vezes.
5. Após N aplicações do algoritmo, os expoentes de Lyapunov são dados por

$$\lambda_i = \frac{1}{Nh} \left(\sum_{i=1}^N \ln |\varphi_i| \right). \quad (\text{A.5})$$

O sistemas de n^2 equações diferenciais linearizadas é dado de forma geral como se segue

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1} & \dot{x}_{n+2} & \cdots & \dot{x}_{2n} \\ \dot{x}_{2n+1} & \dot{x}_{2n+2} & \cdots & \dot{x}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_{n^2+1} & \dot{x}_{n^2+2} & \cdots & \dot{x}_{n^2+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} \\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n1} & J_{n2} & \cdots & J_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n} \\ x_{2n+1} & x_{2n+2} & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n^2+1} & x_{n^2+2} & \cdots & x_{n^2+n} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{bmatrix} x_{n+1}(0) & x_{n+2}(0) & \cdots & x_{2n}(0) \\ x_{2n+1}(0) & x_{2n+2}(0) & \cdots & x_{3n}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n^2+1}(0) & x_{n^2+2}(0) & \cdots & x_{n^2+n}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Para o modelo estudado neste trabalho, vamos reescrever o sistema dinâmico dado pela Eq. (2.4.8) com as seguintes substituições: $x_1 = t$, $x_2 = \dot{j}_x$, $x_3 = \dot{j}_y$, $x_4 = \dot{j}_z$. A primeira substituição se faz necessária já que o sistema original é não-autônomo. Assim, temos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1, \\ \dot{x}_2 &= -2\Delta x_3 - 2ux_3x_4 \\ \dot{x}_3 &= \Omega x_4 + 2\Delta x_2 + 2ux_2x_4, \\ \dot{x}_4 &= -\Omega x_3, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

com $u = u_0[1 + \mu \cos(\omega x_1)]$ e condições iniciais $x_1(0) = t_0$, $x_2(0) = \cos \theta \sin \phi$, $x_3(0) = \sin \theta \sin \phi$ e $x_4(0) = \cos \theta$.

Os elementos da matriz Jacobiana para o sistema dado pela Eq. (A.8) são

$$\begin{aligned} J_{11} &= J_{12} = J_{13} = J_{14} = J_{22} = J_{33} = J_{41} = J_{42} = J_{44} = 0 \\ J_{21} &= -2x_3x_4L \quad J_{23} = -2(ux_4 + \Delta) \quad J_{24} = -2ux_3 \\ J_{31} &= 2x_2x_4L \quad J_{32} = 2(ux_4 + \Delta) \quad J_{34} = \Omega + 2ux_2 \quad J_{43} = -\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

com $L = \frac{\partial u}{\partial x_1} = -u_0\mu\omega \sin(\omega x_1)$.

O sistema de equações linearizadas é obtido pelo procedimento dado pela Eq. (A.6). Com os elementos da matriz Jacobiana, dada pela Eq. (A.9), o sistema linearizado é descrito de forma compacta como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{4+i} &= 0, \\ \dot{x}_{8+i} &= J_{21}x_{4+i} + J_{23}x_{12+i} + J_{24}x_{16+i}, \\ \dot{x}_{12+i} &= J_{31}x_{4+i} + J_{32}x_{8+i} + J_{34}x_{16+i}, \\ \dot{x}_{16+i} &= J_{43}x_{12+i}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

com i de 1 até 4.

Como se pode observar, o sistema dinâmico dado pela Eq. (A.8) é composto por $n = 4$ equações diferenciais e o número total de equações (Eq. (A.8) + Eq. (A.10)) é $n^2 + n = 20$ como já discutido. É também interessante notar que, o expoente de Lyapunov λ_1 associado a direção $x_1 = t$, é idênticamente nulo. A primeira equação do sistema Eq. (A.10) mostra que as componentes de $\vec{\varphi}_1 = (x_5, x_6, x_7, x_8)$ se mantêm constantes.

Assim, $\ln |\vec{\varphi}_1| = 0$ e $\lambda_1 = 0$. Para sistemas não-autônomos, sempre temos um expoente identicamente nulo com respeito a “direção” tempo do espaço de fase.

Neste trabalho, o algoritmo de Wolf foi implementado na linguagem C++. A solução numérica das equações diferenciais foi obtida pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem com um passo de tempo $h = 10^{-3}$.

APÊNDICE B – Solução Numérica da Equação de Schrödinger

O estado quântico de um sistema, em cada instante de tempo t , é especificado por um vetor de estado no espaço de Hilbert dado por

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ \vdots \\ c_N(t) \end{bmatrix}, \quad \langle n|\Psi(t)\rangle = c_n(t), \quad (\text{B.1})$$

em que $\{|n\rangle\}$ é a base computacional e os coeficientes c , em geral, são complexos. Além disso, para um estado normalizado temos, $\sum_{n=0}^N |c_n(t)|^2 = 1$, onde N é a dimensão do espaço de Hilbert.

A evolução temporal do estado $|\Psi(t)\rangle$ é dada pela equação de Schrödinger dependente do tempo

$$\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = -i\hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (\text{B.2})$$

com $\hbar = 1$ e \hat{H} é o operador hamiltoniano associado ao sistema.

Conhecer o estado do sistema ao longo do tempo permite acessar todas as informações deste. Para os propósitos desse trabalho, significa conhecer, em cada instante, os valores dos coeficientes c de $|\Psi\rangle$. Em termos dos coeficientes c , a equação de Schrödinger pode ser escrita como um conjunto de N equações diferenciais ordinárias dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_0(t) \\ \dot{c}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_N(t) \end{bmatrix} = -i\hat{H} \begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ \vdots \\ c_N(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

onde \hat{H} é uma matriz $N \times N$ e $\hat{H}_{mn} = \langle m|\hat{H}|n\rangle$.

Nesta tese, dada a elevada dimensão do espaço de Hilbert, bem como o fato da dinâmica quântica ser complexa, a solução da equação de Schrödinger deve ser realizada com métodos computacionais. Em suma, basta um método numérico eficiente para resolver o conjunto de $N + 1$ equações diferenciais ordinárias acopladas dado pela Eq. (B.3). Optamos pelo módulo QUTIP [Johansson, Nation e Nori (2012)] para Python 3 (ou superior) que tem se mostrado bastante robusto, rápido e de fácil utilização. Diversos trabalhos já foram publicados em vários periódicos e podem ser encontrados na página do projeto: <<https://qutip.org>>.

O sistema estudado neste trabalho é o MBH de dois modos, cujo hamiltoniano dependente do tempo é dado pela Eq. (2.3.5). É conveniente, para fins de implementação no QUTIP, escrever o hamiltoniano como a soma de dois termos \hat{H}_0 e \hat{H}_t . O termo \hat{H}_0 é a parte independente do tempo na expressão de \hat{H} e o termo \hat{H}_t é a dependente do tempo. As expressões para os dois termos são

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= -\Omega\hat{J}_x + 2\Delta\hat{J}_z + 2U_0\hat{J}_z^2, \\ \hat{H}_t &= 2U_0f(t)\hat{J}_z^2, \\ \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_t,\end{aligned}\tag{B.4}$$

onde $f(t) = \mu \cos(\omega t)$.

Segue um código básico acompanhado de comentários para evoluir um estado $|\Psi(0)\rangle$ governado pelo hamiltoniano dada pela Eq. (B.4).

```

1 \\Bibliotecas e módulo QUTIP
2
3 from qutip import *
4 import numpy as np
5 import math
6 from numpy import pi
7
8 \\Parâmetros: N, Ω, U0, μ e ω
9
10 N=10
11 j=N/2
12 Omega=1
13 U0=-1/N
14 mu=0.3
15 omega=1.8
16
17 \\Operadores de momento angular: Ji i = x,y,z
18
19 Jx=jmat(j, 'x')
20 Jy=jmat(j, 'y')
21 Jz=jmat(j, 'z')
22
23
24 \\Operador hamiltoniano: H = H0 + Ht
25
26 H0=-Omega*Jx+2*U0*Jz*Jz
27 H1=2*U0*Jz*Jz
28 args={'mu':mu, 'omega':omega}
29 def ft(t, args):
30     return mu*cos(omega*t)
31
32 H = [H0,[H1, ft]]

```

```

33
34 \\Estado inicial:  $|\Psi(0)\rangle = |\theta, \phi\rangle$ 
35
36 psi0=spin_coherent(j, pi/2, pi)
37
38 \\Tempo: 0 até tf com passo de amostragem dt
39
40 dt=0.1
41 tf=100
42 times=np.arange(0, tf+dt, dt)
43
44 \\Opções do solver: passo de integração 1/5000 Runge-Kutta quarta ordem por padrão
45
46 options=Options()
47 options.nsteps =5000
48
49 \\Solução da equação de Schrödinger. Psi é um vetor com os coeficientes c
50
51 result=solve(H, psi0, times, [], args=args, options=options, progress_bar=
    True)
52 Psi=result.states

```

Com o trecho de código mostrado, em síntese, temos toda a informação acessível do sistema na variável Psi. Quantidades como valor esperado dos \hat{J}_s , entropia linear, pureza generalizada, eco e função de Husimi podem ser calculadas. Por exemplo, o valor esperado de um operador \hat{A} , $\langle \hat{A}(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle$ pode ser obtido com os comandos

```

1 \\k é um elemento do vetor times
2 \\Os dois comandos abaixo são equivalentes
3
4 a=expect(A, Psi[k])
5
6 a=Psi[k].dag()*A*Psi[k]

```