CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

UMA NOVA ABORDAGEM PARA A REGULARIZAÇÃO IMPLÍCITA RESTRITA NO CÁLCULO DE INTEGRAIS DE FEYNMAN DIVERGENTES

BRUNO ZANOTELLI FELIPPE

Orientador: Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Prof. Dr. Alexandre Rodrigues Vieira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

BELO HORIZONTE
DEZEMBRO DE 2023

Bruno Zanotelli Felippe

UMA NOVA ABORDAGEM PARA A REGULARIZAÇÃO IMPLÍCITA RESTRITA NO CÁLCULO DE INTEGRAIS DE FEYNMAN DIVERGENTES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional.

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Prof. Dr. Alexandre Rodrigues Vieira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional
Belo Horizonte
Dezembro de 2023

F315n

Felippe, Bruno Zanotelli

Uma nova abordagem para a regularização implícita restrita no cálculo de integrais de Feynman divergentes / Bruno Zanotelli Felippe. – 2023.

125 f.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Antônio Paulo Baêta Scarpelli.

Coorientador: Alexandre Rodrigues Vieira.

Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Teoria quântica de campos – Teses. 2. Integrais de Feynman – Teses. 3. Teoria quântica – Matemática – Teses. I. Scarpelli, Antônio Paulo Baêta. II. Vieira, Alexandre Rodrigues. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 530.143

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

BRUNO ZANOTELLI FELIPPE

UMA NOVA ABORDAGEM PARA A REGULARIZAÇÃO IMPLÍCITA RESTRITA NO CÁLCULO DE INTEGRAIS DE FEYNMAN DIVERGENTES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Trabalho aprovado. Belo Horizonte, 04 de dezembro de 2023:

Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Alexandre Rodrigues Vieira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Dr. José Luiz Acebal Fernandes
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Luis Alberto D'Afonseca
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio
Universidade Federal do ABC, São Paulo

BELO HORIZONTE
DEZEMBRO DE 2023

Dedico essa Tese aos meus queridos avós
Frederico, Dina, Amâncio e Hermínia
(*in memoriam*) *que sempre batalharam*
para que os estudos fossem primordiais
na vida dos filhos, incentivando
e dando suporte sempre.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e a Nossa Senhora dos Anjos, pela fé que me dá força e saúde para seguir diariamente.

Agradeço aos meus filhos, Liz e Henri, por quem sinto um amor incondicional, e sou correspondido. Presentes mais preciosos da minha vida, luz no meu caminho e razão de querer me tornar uma pessoa melhor a cada dia.

Agradeço ao grande amor da minha vida, minha esposa Anna, companheira de todos os momentos, parceira de todas as batalhas, amiga de todas as horas.

Agradeço aos meus pais, Wanderley e Zanô, por me proporcionarem as melhores condições possíveis para que pudesse investir nos estudos e formação. E hoje, tendo a mesma profissão de ambos, a de professor e educador, posso me espelhar nos excelentes profissionais que são.

Agradeço a toda a minha família que, mesmo distante, sempre me apoiou e torceu por mim.

Agradeço aos meus sogros, Enock e Rita, que sempre me incentivaram e, em muitos momentos (incontáveis), seguraram as pontas em casa com as crianças para que eu tivesse tempo para estudar e me dedicar a esse doutorado.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli, pelo empenho no desenvolvimento desse trabalho. Pela disponibilidade em me atender sempre que solicitado. Pela paciência em ensinar a Teoria Quântica de Campos a um Matemático. Pelo compromisso em fazer, conferir e refazer cálculos intermináveis. Enfim, pela excelente orientação e parceria neste trabalho. Espero que eu tenha correspondido minimamente às suas expectativas.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Dr. Alexandre Rodrigues Vieira, pela disponibilidade, pelas contribuições e correções no texto, pelos conselhos e direções que o trabalho deveria seguir.

Agradeço aos professores da banca de Qualificação, Prof. Dr. José Luiz Acebal, Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco e Prof. Dr. Luis D'Afonseca, pela disponibilidade em ler o trabalho e dar contribuições para que o projeto pudesse "ganhar corpo" e se tornar uma tese. Espero que tenhamos conseguido.

Agradeço a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional que contribuíram com uma formação de excelência nesse Doutorado. Agradeço também a todos os funcionários do CEFET-MG que, de alguma forma, proporcionam o pleno funcionamento do PPGMMC e da Instituição como um todo.

Agradeço à Unifei, por me proporcionar um período de afastamento das atividades para que eu pudesse me dedicar ao Doutorado.

"Os conceitos de espaço e tempo que desejo exibir diante de vós brotaram do solo da Física Experimental e nisto reside sua força. Eles são radicais. De agora em diante, o espaço isolado e o tempo isolado estão destinados a esvaírem-se em meras sombras e somente uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente".

(*Hermann Minkowski,* 1908)

Resumo

Os cálculos perturbativos em Teoria Quântica de Campos podem ser representados graficamente em termos dos diagramas de Feynman. Os cálculos das amplitudes representadas pelos diagramas de Feynman além do nível árvore envolvem, muitas vezes, integrais divergentes . Essas integrais necessitam um tratamento conhecido como regularização, a fim de que o conteúdo físico da amplitude seja dela extraído. Uma das mais poderosas técnicas, a Regularização Dimensional, envolve extensões dimensionais não inteiras do espaço-tempo. Contudo, há modelos que envolvem objetos matemáticos cuja extensão dimensional é ambígua ou mal definida. Uma técnica, chamada Regularização Implícita, mostrou-se apropriada para o tratamento de modelos cuja extensão dimensional não é bem definida. O método permite que os cálculos sejam realizados na própria dimensão da teoria e prescreve regras simples para a preservação das simetrias dos modelos. No entanto, no caso de altos graus de divergência, para uma única integral de Feynman, a expansão para separar as divergências pode gerar um grande conjunto de integrais finitas. Além disso, as expansões geram altas potências de momentos no numerador e denominador, o que resulta em cálculos longos e trabalhosos. Desenvolvemos, nesse trabalho, um novo procedimento para aplicação da Regularização Implícita Restrita que simplifica o cálculo de amplitudes, incluindo as partes finitas.

Palavras-chave: Teoria Quântica de Campos, Integrais de Feynman, Regularização Implícita.

Abstract

Perturbative calculations in Quantum Field Theory can be represented, graphically, in terms of Feynman diagrams. The calculations of amplitudes represented by Feynman diagrams involve integrals, often divergent beyond tree level. These integrals require a treatment known as regularization, in order to extract the physical content of the amplitude. One of the most powerful techniques, Dimensional Regularization, involve non-integer dimensional extensions of space-time. However, there are models that involve mathematical objects whose the dimensional extension is ambiguous or ill-defined. A technique, called Implicit Regularization, proved to be appropriate for the treatment of models whose dimensional extension is not well defined. The method allows the calculations to be performed in the own theory dimension and prescribes simple rules for the preservation of the symmetries of the models. However, in case of high degrees of divergence, for a single Feynman integral, the expansion to separate divergences can generate a large set of finite integrals. In addition, expansions generate high powers of momenta in the numerator and denominator, which results in long and labor-intensive calculations. In this thesis, we developed a new procedure for the application of Constrained Implicit Regularization that simplifies the calculation of amplitudes, including finite parts.

Keywords: Quantum Field Theory, Feynman Integrals, Implicit Regularization.

Lista de Figuras

Figura 1 – Reprodução do primeiro diagrama que apareceu no trabalho de Feynman (1949). O diagrama representa espalhamento elástico de dois elétrons. A interação dos elétrons ocorre via troca de um fóton, representado pela linha ondulada. 42
Figura 2 – Elementos básicos que compõem os diagramas de Feynman para QED. As linhas são as representações do elétron, pósitron e fóton, respectivamente. . 42
Figura 3 – Diagramas de Feynman para interações: (a) elétron-fóton, (b) pósitron-fóton, (c) aniquilação do par elétron-pósitron, (d) criação do par elétron-pósitron . 43
Figura 4 – Contribuições para o espalhamento Bhabha, $e^+ + e^- \longrightarrow e^+ + e^-$. 44
Figura 5 – Diagrama de Feynman para 4 linhas, 4 extremidades externas e 1 vértice. . . 51
Figura 6 – Diagrama de Feynman para 7 linhas, 6 extremidades externas e 2 vértices. . 51
Figura 7 – Diagrama de Feynman para 6 linhas, 4 extremidades externas e 2 vértices. . 52
Figura 8 – Diagrama de Feynman para 2 linhas, 4 extremidades externas e nenhum vértice. 53
Figura 9 – Representação do propagador fermiônico. 57
Figura 10 – Representação do vértice elétron-fóton 57
Figura 11 – Representação do propagador do fóton 57
Figura 12 – Representação de um *loop* 57
Figura 13 – Tensor de polarização da QED. 68
Figura 14 – Diagrama de Feynman que contribui para a autoenergia de um campo vetorial massivo. Os campos fermiônicos no *loop* têm massas diferentes e o roteamento do momento na amplitude é $k + (\alpha - 1)p$ para o propagador com massa m_1 e $k + \alpha p$ para o propagador com massa m_2. 73
Figura 15 – Diagrama de Feynman da contribuição aninhada para a autoenergia do elétron na ordem de dois *loops*. As linhas onduladas e sólidas representam os propagadores de fótons e férmions, respectivamente. 79
Figura 16 – Gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$ 94
Figura 17 – Gráficos de $f(x) = x^n e^{-x^2}$, n ímpar. 96
Figura 18 – Gráficos de $f(x) = x^n e^{-x^2}$, n par. 96

Sumário

1 – Introdução **12**

2 – Introdução à Teoria Quântica de Campos **18**

2.1 Relatividade Especial 18

2.1.1 Métrica de Minkowski 18

2.1.2 Produto Escalar 20

2.1.3 Transformações de Lorentz 20

2.1.4 Derivadas na Notação Relativística 24

2.2 Equações de Campo Relativísticas 24

2.2.1 Equação de Klein-Gordon 24

2.2.2 Equação de Dirac 25

2.3 Formalismo Lagrangiano 27

2.3.1 Princípio da Ação Mínima 27

2.3.2 Momento Canônico e Hamiltoniana 28

2.3.3 Formalismo Lagrangiano para Campos 29

3 – Quantização de Campos Escalares **32**

3.1 Primeira Quantização 32

3.2 Segunda Quantização 32

3.3 Quantização de Campos Escalares 33

3.4 Estados na Teoria Quântica de Campos 35

3.4.1 Normalização dos Estados 36

3.5 Integrais de Caminho na Mecânica Quântica 37

4 – Integrais de Feynman **41**

4.1 Diagramas de Feynman 41

4.2 Regras de Feynman 44

4.2.1 Regras de Feynman para a Teoria Escalar na Mecânica Quântica 45

4.2.2 Regras de Feynman para a Teoria Escalar na Teoria Quântica de Campos 53

4.2.3 Regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica (QED) 56

4.3 Parametrização de Feynman 57

4.4 Integrais Finitas 59

5 – Regularização de Integrais Divergentes **63**

5.1 Regularização Implícita 64

6 – Resultados **70**

6.1 Uma nova abordagem para a Regularização Implícita Restrita 70
6.2 Uma sistematização para o cálculo de integrais de 1-*loop* 75
6.3 Cálculos em ordem superior 78

7 – Conclusão 83

Referências 85

Apêndices **89**

APÊNDICE A – Invariância do Produto Escalar sob Transformações de Lorentz . . 90

APÊNDICE B – Quantização de Campos Escalares 91

APÊNDICE C – Integrais Gaussianas 94

APÊNDICE D – Integrais Finitas sobre o momento (d^4k) 99

APÊNDICE E – Integral de Feynman I 103
E.1 Método Tradicional da Regularização Implícita 103
E.2 Novo Procedimento para a Regularização Implícita Restrita 105

APÊNDICE F – Integral de Feynman I_μ 106
F.1 Método Tradicional da Regularização Implícita 106
F.2 Novo Procedimento para a Regularização Implícita Restrita 110

APÊNDICE G – Integral de Feynman $I_{\mu\nu}$ 112
G.1 Método Tradicional da Regularização Implícita 112
G.2 Novo Procedimento para a Regularização Implícita Restrita 113

APÊNDICE H – Relações de Escala 116
H.1 Relação de Escala $I_{\log}(-H^2)$ 116
H.2 Relação de Escala $I_{\text{quad}}(-H^2)$ 118

APÊNDICE I – Funções Z_k 120

APÊNDICE J – Autoenergia do campo vetorial com 2 férmions com massas diferentes 123

1 Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) foi formulada a partir da necessidade de combinação da Mecânica Quântica e da Relatividade Especial (ou Relatividade Restrita, a qual não considera a ação de aceleração). O estudo do comportamento de pequenos sistemas e baixas velocidades é realizado na Mecânica Quântica [1]. A Relatividade Especial descreve o movimento de partículas e sistemas em velocidades próximas à velocidade da luz.

Na Mecânica Quântica não relativística, a equação de onda de Schrödinger descreve a dinâmica de um sistema com uma partícula se movendo sob a ação de um potencial, atribuindo ao sistema a probabilidade de se encontrar determinada partícula no ponto $\vec{x}$ no instante t. O formalismo pode ser estendido para mais de uma partícula, desde que esse número (e tipos de partículas) seja fixo.

Uma primeira tentativa de desenvolver uma equação de onda relativística foi feita pelo próprio Erwin Schrödinger, antes mesmo de chegar à equação que leva seu nome. Contudo, algumas dificuldades relacionadas à interpretação dos resultados obtidos com a resolução da equação o fizeram abandoná-la. Essa equação foi mais tarde descoberta independentemente por Oskar Klein e Walter Gordon, e hoje é conhecida como equação de Klein-Gordon. Contudo, surge nesse ponto o primeiro problema para a interpretação da solução da equação de Klein-Gordon como uma função de onda para uma partícula relativística: a equação resulta em densidades de probabilidade negativas, contradizendo a estatística da Mecânica Quântica. Além disso, soluções da equação possibilitam estados de energia positivos e negativos, mostrando que a equação de Klein-Gordon não poderia descrever a Mecânica Quântica relativística de uma única partícula. O problema dos estados de energia negativos foi contornado com a descoberta das antipartículas. Mas as probabilidades negativas ainda não puderam ser justificadas (McMAHON, 2008).

Dirac (1928) desenvolveu uma versão relativística da equação de onda, com a condição de que as suas soluções fossem também soluções da equação de Klein-Gordon para a partícula livre, o que, em princípio, garantiria a obediência à equação relativística de energia e momento. Dirac postulou que a equação de onda para uma partícula livre fosse de primeira ordem nas derivadas temporal e espaciais, o que, em princípio, resolveria as inconsistências da equação de Klein-Gordon com relação às densidades de probabilidade.

A equação de Dirac forneceu uma descrição para o comportamento dos elétrons, e um entendimento *a priori* sobre o *spin* do elétron, e sobre o fenômeno que ele chamou de duplexidade, devido ao fato de haver o dobro de estados estacionários para um elétron no átomo. Para Dirac, sua equação descrevia a evolução do estado quântico do elétron, mas essa interpretação continha alguns problemas. Existiam soluções para a equação de movimento cujas energias eram negativas

[1] Embora a Mecânica Quântica tenha surgido com o estudo e descrição de sistemas microscópicos, os seus efeitos específicos não são somente perceptíveis em tal escala. Por exemplo, a explicação de fenômenos macroscópicos como a super fluidez e a supercondutividade só é possível se considerarmos que o comportamento microscópico da matéria é quântico.

e sem um limite inferior. Dirac (1931) previu a existência do pósitron, antipartícula do elétron. Isso conseguia justificar a presença de estados de energia negativa, que seriam, na verdade, estados de energia positiva do pósitron. A comprovação experimental da existência do pósitron se deu um ano após sua previsão. As equações de Klein-Gordon e Dirac só tiveram um entendimento correto a partir do momento em que passaram a ser interpretadas como equações de campos quânticos, que descrevem sistemas de múltiplas partículas e sua evolução no tempo.

Entendemos por campo uma função definida em todos os pontos do espaço. Por ser definido sobre um conjunto contínuo de pontos, um único campo incorpora um número infinito de graus de liberdade. A proposta da TQC é quantizar esses objetos matemáticos. De acordo com a quantização canônica, a forma de fazer isso é escrever os campos em termos de operadores conhecidos como *quanta* de excitação que, por sua vez, aumentam ou diminuem o número de certas quantidades discretas no sistema. Tais quantidades discretas estão associadas aos estados que são identificados com partículas elementares, com propriedades como massa, carga elétrica e *spin*.

Como toda a informação sobre o número e o estado das partículas pode ser resumida na descrição do estado do campo, o formalismo de Teoria de Campos é conveniente para tratar sistemas de muitas partículas. Mais do que isso: numa teoria relativística, com possibilidade de criação e aniquilação de partículas, a função de onda de uma partícula perde o significado, e o formalismo de campos é essencial e inevitável (BOGOLIUBOV; SHIRKOV, 1982).

A principal aplicação da TQC é o estudo da física de partículas. Isso ocorre porque a TQC descreve as partículas fundamentais e suas interações, usando o que os cientistas chamam de Modelo Padrão (MP). Neste sentido, o Modelo Padrão descreve três das quatro interações fundamentais da natureza: a interação eletromagnética, a interação fraca e a interação forte. A Eletrodinâmica Quântica (QED - *Quantum Electrodynamics*) é uma TQC do Eletromagnetismo. A QED descreve todos os fenômenos envolvendo partículas eletricamente carregadas interagindo por meio da força eletromagnética. No Modelo Padrão, as forças eletromagnética e nuclear fraca foram combinadas em uma Teoria Eletrofraca unificada. A teoria que descreve a força forte é chamada de Cromodinâmica Quântica (QCD - *Quantum Chromodynamics*) (McMAHON, 2008).

Antes de 1970, a comunidade da Física de Partículas estava dividida em relação ao avanço de campos quantizados para a compreensão de partículas subatômicas e suas interações. Acima de tudo estava o sentimento geral de que essa teoria era feia, exigindo várias correções para encobrir suas inconsistências matemáticas internas. A primeira incoerência era o fato de que as correções nas propriedades de interação das partículas, geradas por efeitos quânticos de ordem superior, invariavelmente pareciam ser infinitamente fortes. O conteúdo de energia de um campo ao redor de uma partícula adicionaria uma correção infinitamente grande para sua massa, e também carga elétrica e outros parâmetros das interações receberiam correções infinitas por autointerações nas proximidades de uma partícula ('t HOOFT, 2016). A autointeração no eletromagnetismo pode ser interpretada como a capacidade de uma partícula carregada, em movimento acelerado, ser capaz de emitir momento e energia na forma de radiação.

No contexto de cálculos perturbativos, as correções radiativas geram amplitudes de probabilidade frequentemente divergentes. Isso ocorre no limite de altos valores do momento das partículas virtuais (domínio ultravioleta). Há outro tipo de divergência no caso de teorias não massivas, as chamadas divergências infravermelhas, peculiares no regime de baixos valores do momento. Os infinitos ultravioletas de alta energia parecem ser intrínsecos à TQC, e nenhuma consideração física pode contorná-los: ao contrário das divergências infravermelhas, as ultravioletas não podem ser dispensadas (JACKIW, 1996).

Um "remédio" havia sido proposto para esta doença em particular, ou seja as amplitudes de probabilidade divergentes. Primeiro talvez por Hans Kramers, por volta de 1933, e mais precisamente por Julian Schwinger, Freeman Dyson, Sin-Itiro Tomonaga, Richard Feynman e outros: as massas "originais" (nuas) e as forças de interação de uma partícula são mal definidas, de modo que estas poderiam ser ajustadas para cancelar os infinitos indesejados, que agora foram substituídos por regiões experimentalmente inacessíveis perto dos núcleos dessas partículas. Uma aplicação sistemática deste procedimento, chamado de Renormalização, acabou por ser bastante bem sucedida no estudo de forças eletromagnéticas entre partículas. O momento magnético anômalo do elétron assim obtido concordou extremamente bem com as determinações experimentais, e outros sucessos da QED logo se seguiram. Talvez esses argumentos fossem aproximadamente corretos para a QED, mas ainda precisavam ser definidos os princípios por trás das outras interações, ou seja, o procedimento de Renormalização precisava ser formalizado ('t HOOFT, 2016).

A Renormalização foi originalmente uma resposta às divergências ultravioletas que apareceram nos cálculos de correções radiativas em QED. Apesar de bem sucedidos, muitos físicos ficaram desconfortáveis com a Renormalização, sentindo que era apenas um truque que varria o problema fundamental das divergências ultravioletas para debaixo do tapete (GROSS, 1997).

Por muito tempo acreditou-se que as simetrias e as leis de conservação de uma teoria não são afetadas pela transição das regras clássicas para as quânticas. Por exemplo, se um modelo possui invariância de translação e calibre no nível clássico e, consequentemente, energia/momento e carga são conservados classicamente, acreditava-se que após a quantização o modelo quântico ainda seria invariante de translação e calibre, de modo que os operadores de energia/momento e carga seriam conservados dentro da Mecânica Quântica, isto é, eles comutariam com o operador Hamiltoniano. Mas em geral não precisa ser assim. Sob quantização, algumas simetrias da Física Clássica podem desaparecer quando a Teoria Quântica é propriamente definida na presença de seus infinitos. Tais simetrias tênues são ditas estar anomalamente quebradas; embora presentes classicamente, elas estão ausentes na versão quântica da teoria, a menos que o modelo seja cuidadosamente organizado para evitar esse efeito. A nomenclatura é enganosa. Na sua descoberta, o fenômeno foi inesperado e apelidado de "anômalo". Simetrias anômalas quebradas desempenham vários e cruciais papéis em Teorias Físicas atuais. Em alguns casos, elas salvam um modelo do inconveniente de possuir demasiada simetria, o que não estaria de acordo com a experiência. Em outros casos, o desejo de preservar uma simetria na Teoria Quântica coloca fortes restrições à construção do modelo e dá previsões experimentalmente verificáveis. Assim, os infinitos da TQC – sejam eles divergências ultravioleta, ou uma medida funcional infinita, ou o "mar" infinito de energia negativa – não são apenas máculas indesejáveis na teoria que devem ser escondidas. Pelo contrário, os sucessos de várias Teorias de Campos na descrição de fenômenos físicos dependem da ocorrência desses infinitos. Concluímos que a natureza faz uso de quebras de simetrias da forma chamada anômala, que ocorrem na Teoria de Campos local, em decorrência dos infinitos subjacentes à descrição matemática (JACKIW, 1996).

Os termos das expansões perturbativas em TQC podem ser representados, de forma gráfica, pelos chamados diagramas de Feynman. Os diagramas além do nível árvore, ou seja, aqueles contendo *loops* (e, portanto, integrações), podem ser mapeados, por meio das regras de Feynman, em integrais multidimensionais, que frequentemente são divergentes. É nesse momento que, para superar o "problema" associado aos infinitos e para um entendimento físico da amplitude, é necessário um tratamento matemático nessas integrais divergentes conhecido como regularização. A técnica de regularização a ser utilizada deve atender a algumas características importantes da matriz S, como a preservação da unitariedade e da causalidade, a preservação de algumas simetrias, entre outros. Além disso, é desejável que o método seja amigável do ponto de vista da computação algébrica dos valores.

A Regularização pode ser compreendida, grosso modo, como uma forma de se tornar, em um passo intermediário, as amplitudes de probabilidade finitas, mudando a estrutura do integrando (como no esquema de regularização de Pauli-Villars) (PAULI; VILLARS, 1949), a dimensão espaço-temporal (Regularização Dimensional) ('t HOOFT, 1971), ('t HOOFT; VELTMAN, 1972) ou ainda usando um *cutoff* (corte das altas energias). Posteriormente, um limite de conexão é tomado e as antigas divergências reaparecerão como funções de parâmetros do método empregado. Neste ponto, entra a Teoria de Renormalização, que proporciona formas consistentes de redefinição das grandezas físicas, de tal maneira que as partes dependentes da regularização sejam subtraídas.

A Regularização Implícita (RI), por outro lado, é realizada no espaço-momento, também na dimensão física da teoria, e se mostrou apropriada para o tratamento de modelos cuja extensão dimensional não é bem definida, e ainda prescreve regras simples para a preservação das simetrias dos modelos (BATTISTEL; MOTA; NEMES, 1998), (SCARPELLI; BATTISTEL; NEMES, 1998), (BATTISTEL, 1999). A ideia básica do procedimento de Regularização Implícita de uma integral de Feynman deve considerar a presença implícita de algum esquema de regularização. O esquema compõe a integral originalmente divergente e permite a separação de sua parte dependente de regularização da parte finita, que deve ser independente da regularização utilizada. A separação pode ser feita aplicando uma identidade algébrica simples ao integrando, de modo que as partes divergentes sejam escritas apenas em termos dos momentos internos nos *loops* e não precisem ser avaliadas. A independência das integrais divergentes do momento externo é uma característica altamente desejável, uma vez que precisaremos apenas de contratermos locais na Lagrangiana do modelo, a fim de eliminar quaisquer divergências que surjam no cálculo perturbativo. Além disso, essas integrais divergentes podem ser escritas como funções de um parâmetro de massa arbitrário que caracteriza a liberdade de separação da parte divergente de uma amplitude e desempenha o papel de escala na equação do grupo de Renormalização. Simetrias do modelo ou requisitos fenomenológicos determinam parâmetros arbitrários que são termos de superfícies, que se manifestam como diferenças finitas entre integrais divergentes com mesmo grau de divergência, e surgem do procedimento. A Regularização Implícita trata corretamente as anomalias, bastando para isto parametrizar os termos de superfície, fixando-os de acordo com a simetria preferencial no estudo em questão (SCARPELLI et al., 2001).

O procedimento descrito acima é o tradicional para Regularização Implícita. É importante notar que o procedimento é aplicado após realizar a álgebra do grupo de simetria na amplitude, que é decomposta em uma combinação de integrais. É nessas integrais que a Regularização Implícita é aplicada. Cada integral, então, é separada em partes finitas e divergentes. O processo de parametrização de Feynman é aplicado apenas a integrais finitas. No entanto, para uma única integral de Feynman, a expansão para separar as divergências gera um conjunto de integrais finitas, que pode ser grande no caso de altos graus de divergência. Além disso, as expansões geram altas potências de momentos no numerador e no denominador, o que pode complicar demasiadamente os cálculos. A Regularização Implícita foi aplicada com sucesso a um ampla variedade de problemas (SCARPELLI; SAMPAIO; NEMES, 2001), (BATTISTEL; DALLABONA, 2006), (OTTONI et al., 2006), (PONTES et al., 2006) , (SAMPAIO et al., 2006) e (DIAS et al., 2008).

É importante a discussão sobre o papel dos termos de superfície que aparecem na Regularização Implícita na preservação das simetrias em nível quântico. Como os termos de superfície estão ligados a translações nas variáveis de integração das integrais divergentes, torná-los nulos em princípio automaticamente assegura que as amplitudes não dependerão de como são atribuídos os momentos às linhas internas dos gráficos de Feynman (diferentes atribuições de momentos são conectadas por translações nas variáveis de integração). Em outras palavras, se os termos de superfície são eliminados, as translações no momento de integração passam a ser permitidas (invariância por roteamento nos *loops*).

Algumas dificuldades ainda são encontradas quando são utilizados os procedimentos de regularização descritos acima. A manipulação algébrica dos integrandos muitas vezes é longa e trabalhosa, principalmente quando se realizam cálculos em ordens superiores. Este trabalho propõe o desenvolvimento de um novo procedimento para aplicação da Regularização Implícita em sua versão restrita, que simplifica muito o cálculo das amplitudes, principalmente das partes finitas. Supondo a existência de uma regularização, aplicamos a parametrização de Feynman à amplitude completa e eliminamos os termos de superfície, tornando-os nulos, através do que chamamos de relações de consistência, de modo a ter apenas integrais divergentes escalares. Em seguida, fazemos uso de identidades algébricas para expandir os integrandos para obter divergências básicas que são livres do momento externo. Essas identidades algébricas estabelecem um conjunto de relações de escala que são sempre as mesmas e não precisam ser calculadas em cada situação. Como um subproduto, as relações de escala permitem introduzir uma escala de massa arbitrária que será útil no processo de Renormalização. Os resultados deste novo procedimento são os mesmos da Regularização Implícita Restrita. No entanto, o procedimento também permite a introdução de parâmetros arbitrários locais para os modelos em que são necessários.

Este trabalho está organizado em capítulos, incluindo o presente, que apresentou a introdução do trabalho, com alguns dados históricos, além da caracterização do problema a ser desenvolvido nesta tese de doutorado.

O Capítulo 2 apresenta uma introdução à Teoria Quântica Campos desde os conceitos iniciais que definem a Teoria da Relatividade Especial e a Mecânica Quântica, assim como as notações que serão utilizadas ao longo do texto.

O Capítulo 3 apresenta o procedimento de quantização de campos, a definição de estados dos campos e a construção das integrais de caminhos na Mecânica Quântica, necessárias à dedução das regras de Feynman para a Teoria Escalar Livre.

O Capítulo 4 apresenta um breve histórico dos diagramas e regras de Feynman, assim como a parametrização de Feynman e os cálculos de integrais de Feynman finitas.

O Capítulo 5 é dedicado ao método tradicional de aplicação da Regularização Implícita, tópico de fundamental importância no desenvolvimento deste trabalho, quando são apresentados os procedimentos para a aplicação do método.

O Capítulo 6 apresenta os resultados obtidos, os quais integram o artigo "*Advances towards the systematization of calculations with Implicit Regularization*" (Avanços em direção a uma sistematização de cálculos com Regularização Implícita) (FELIPPE et al., 2022), onde é apresentado um novo procedimento para a aplicação da Regularização Implícita Restrita.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta a conclusão deste trabalho e as perspectivas para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

2 Introdução à Teoria Quântica de Campos

2.1 Relatividade Especial

Em 1905, Albert Einstein propôs uma teoria que corajosamente alterou completamente nossa noção de espaço e tempo (EINSTEIN; DAVIS, 2013). Einstein baseou sua Teoria da Relatividade em dois postulados.

1. O Princípio da Relatividade: Todas as leis da física têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais.
2. A Constância da Velocidade da Luz: A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor, $c = 299\,792\,458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, em todos os referenciais inerciais, independentemente da velocidade do observador ou da velocidade da fonte que emite a luz.

Em 1908, Hermann Minkowski, em uma conferência, denominada Espaço e Tempo, apresentada no 80º Congresso dos Cientistas e Médicos Alemães, na cidade de Colônia, na Alemanha afirmou:

"Os conceitos de espaço e tempo que desejo exibir diante de vós brotaram do solo da Física Experimental e nisto reside sua força. Eles são radicais. De agora em diante, o espaço isolado e o tempo isolado estão destinados a esvaírem-se em meras sombras e somente uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente".

Isto implica, na Teoria Relativística, que tempo t e posição $\vec{r}$ estão em pé de igualdade. O que de fato existe é o espaço-tempo, quadridimensional. Em Relatividade Especial (ou Relatividade Restrita), caracterizamos espaço-tempo por um evento, que é algo que acontece em um determinado momento t e alguma localização espacial (x,y,z). Observe também que a velocidade da luz c pode servir como um fator de conversão, transformando o tempo em espaço e vice-versa. Espaço e tempo, portanto, formam uma estrutura unificada e nós denotamos as coordenadas por (ct,x,y,z). Observe que, com a definição da primeira coordenada ct do quadrivetor, sua dimensão é igual à dimensão das demais coordenadas (dimensão de comprimento). Definimos o quadrivetor contravariante por $x^\mu = (x^0,x^1,x^2,x^3) = (ct,x,y,z)$ e o quadrivetor covariante por $x_\mu = (x_0,x_1,x_2,x_3) = (ct,-x,-y,-z)$.

2.1.1 Métrica de Minkowski

É conveniente introduzir um objeto conhecido como métrica. A métrica da Relatividade Especial é dada por um tensor métrico de Minkowski:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Pelo fato de não considerar a gravidade, a Relatividade Especial é desenvolvida em um espaço-tempo plano, onde a curvatura é nula, chamado espaço de Minkowski. Nesse caso específico, podemos dizer que o tensor métrico $\eta^{\mu\nu}$ é uma matriz. Essa métrica tem uma inversa, denotada por $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$, uma vez que a matriz inversa correspondente é a própria matriz. Na notação tensorial, temos $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}$, sendo δ^{μ}_{ρ} a função delta de Kronecker, definida por:

$$\delta^{\mu}_{\rho} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \mu = \rho \\ 0, & \text{se} \quad \mu \neq \rho \end{cases}. \tag{2}$$

Dessa forma, fica evidente que $\eta\eta^{-1} = I_4$, em que I_4 é a matriz identidade de ordem 4. Utilizando a métrica, um índice pode ser levantado ou abaixado: $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$ ou $x^\mu = \eta^{\mu\nu}x_\nu$.

Nesse ponto, percebemos a simplicidade da notação utilizada na álgebra tensorial. Abrindo os cálculos, temos a seguinte equação matricial:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x_0 = x^0 \\ x_1 = -x^1 \\ x_2 = -x^2 \\ x_3 = -x^3 \end{cases}. \tag{5}$$

Observe que já havíamos visto na definição de vetor contravariante x^μ e vetor covariante x_μ: a cordenada temporal é a mesma, enquanto as coordenadas espaciais são opostas.

$$\begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{6}$$

2.1.2 Produto Escalar

O produto escalar é um invariante relativístico, o que significa que, independente do referencial inercial adotado, o valor é a mesma constante.

Considere os quadrivetores $a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ e $b^\mu = (b^0, b^1, b^2, b^3)$. O produto escalar $a \cdot b = a_\mu b^\mu$ é um somatório nos índices (abaixado e levantado) das quatro coordenadas. Quando um índice é repetido em uma expressão uma vez em uma posição abaixada e uma vez em uma posição levantada, isso indica uma soma, sobre o índice que se repete, isto é:

$$a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \,. \tag{7}$$

Observe que $\vec{a} \cdot \vec{b}$ se refere ao produto escalar usual em $\mathbb{R}^3$. Por simplificação, a escrita do somatório é muitas vezes suprimida. Essa notação simplificada é conhecida como convenção da soma de Einstein, ou notação de Einstein (McMAHON, 2008). Com base nessa convenção, a expressão de contração $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ é uma simplificação para $x_\mu = \eta_{\mu 0} x^0 + \eta_{\mu 1} x^1 + \eta_{\mu 2} x^2 + \eta_{\mu 3} x^3$.

Considere o exemplo de um flash de luz emitido na origem $(0,0,0,0)$. Após um tempo t, a frente da onda da luz tem a forma esférica descrita por:

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \,, \tag{8}$$

ou seja,

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \,. \tag{9}$$

Nesse caso, observe que $x_\mu x^\mu = 0$. Sabendo que a velocidade da luz é invariante, de acordo com o segundo postulado, este produto escalar será sempre igual a zero, independentemente do referencial adotado.

2.1.3 Transformações de Lorentz

A transformação Galileana, utilizada na Mecânica Newtoniana, não é válida quando a velocidade v se aproxima da velocidade da luz. Vamos apresentar as transformações das coordenadas que se aplicam a todas as velocidades na faixa de $0 \leq v < c$. Essa transformação, conhecida como transformação de Lorentz, foi laboriosamente derivada pelo físico holandês Hendrik A. Lorentz (1853-1928) em 1890 (SERWAY; MOSES; MOYER, 2004).

Uma transformação de Lorentz, denotada por Λ, nos permite transformar entre diferentes referenciais inerciais. Para simplificar, considere um referencial inercial x'^μ em movimento com velocidade v $(0 \leq v < c)$ ao longo do eixo x em relação a outro referencial inercial x^μ (McMAHON, 2008). Por simplicidade de notação, definimos: $\beta = \dfrac{v}{c}$ e, portanto, o fator de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \,. \tag{10}$$

Então, a transformação de Lorentz que conecta os dois refenciais inerciais é dada pela matriz:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{11}$$

Dessa forma, se o referencial x'^{μ} se move com velocidade constante v, no sentido positivo do eixo x, em relação ao referencial x^{μ}, podemos escrever as equações das transformações de Lorentz na notação tensorial.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} . \tag{12}$$

Abrindo os cálculos, teremos as quatro equações que definem as transformações de Lorentz:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1), \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0), \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3. \end{aligned} \tag{14}$$

Ou então, escrito na notação à qual nos acostumamos:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma v}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right) & \qquad & & t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x' &= \gamma\left(x - \frac{v}{c}ct\right) & & \Rightarrow & x' &= \gamma\left(x - vt\right) \\ y' &= y & & & y' &= y \\ z' &= z & & & z' &= z \end{aligned} . \tag{16}$$

Podemos fazer a transformação inversa de variáveis, ou seja, conhecidas as coordenadas de um referencial inercial x'^{μ} com velocidade $0 \leq v < c$ no sentido positivo do eixo x em relação ao referencial inercial x^{μ}, é possível determinar as coordenadas no referencial x^{μ}. Para isso, a partir da equação matricial $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, basta multiplicarmos à esquerda pela matriz inversa da transformação de Lorentz, isto é

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ (\Lambda^{\mu}_{\nu})^{-1} x'^{\mu} &= (\Lambda^{\mu}_{\nu})^{-1} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ (\Lambda^{\mu}_{\nu})^{-1} x'^{\mu} &= x^{\nu}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Na notação tensorial, escrevemos $\Lambda^{\mu\nu}\Lambda_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}$, em que δ^{μ}_{ρ} é a função delta de Kronecker. Fazendo os cálculos da matriz inversa da transformação de Lorentz, obtemos:

$$(\Lambda^{\mu}_{\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{\gamma v}{c} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

que corresponde exatamente à transformação de Lorentz trocando o sinal da velocidade para $-v$. Isso decorre do primeiro postulado da Relatividade de Einstein, que exige as leis da Física tenham mesma forma em ambos os referenciais inerciais S e S' e onde o sinal de v foi mudado para levar em conta a diferença no sentido do movimento dos dois referenciais. De fato, devemos ressaltar que essa importante técnica para obter o inverso de uma transformação de Lorentz pode ser seguida como uma regra geral: para obter a transformação inversa de Lorentz de qualquer quantidade, simplesmente troque variáveis x por x' e vice-versa e reverta o sinal da velocidade do referencial (SERWAY; MOSES; MOYER, 2004). Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

O produto escalar $x^{\mu}x_{\mu}$ é conhecido como a magnitude de um quadrivetor. Essa magnitude é um escalar, invariante sob as transformações de Lorentz, conforme apresentado no Apêndice A. Quando uma quantidade é invariante sob as transformações de Lorentz, todos os observadores inerciais concordam com o seu valor (McMAHON, 2008). Vale ressaltar que os cálculos também podem ser realizados com um produto escalar genérico $a^{\mu}b_{\mu}$.

Um quadrivetor que é de particular importância é o energia-momento, que unifica a energia e o momento linear em um único objeto (McMAHON, 2008). Observe que na Teoria da Relatividade, assim como espaço e tempo não podem mais ser dissociados, o mesmo ocorre com energia e momento:

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, p^1, p^2, p^3\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \tag{20}$$

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, p_1, p_2, p_3\right) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) . \tag{21}$$

Observe a necessidade do denomidador c na primeira componente do quadrivetor energia-momento a fim de manter a mesma dimensão de momento das demais componentes. Assim, o produto escalar fornece:

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 = \frac{E^2}{c^2} - \|\vec{p}\|^2 . \tag{22}$$

Lembramos, da definição de momento relativístico:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} , \tag{23}$$

em que m_0 é a chamada massa de repouso da partícula. Lembramos, também, da definição de energia relativística:

$$E = \gamma m_0 c^2 . \tag{24}$$

Utilizando ambas definições para escrever o quadrivetor energia-momento, temos:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}) , \tag{25}$$

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) = (\gamma m_0 c, -\gamma m_0 \vec{v}) . \tag{26}$$

Nesse caso, o produto escalar fornece:

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= \gamma^2 m_0^2 c^2 - \gamma^2 m_0^2 \|\vec{v}\|^2 \\ &= \gamma^2 m_0^2 \left(c^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\ &= \gamma^2 m_0^2 \left(1 - \frac{\|\vec{v}\|^2}{c^2}\right) c^2 \\ &= \gamma^2 m_0^2 \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) c^2 \\ &= m_0^2 c^2 . \end{aligned} \tag{27}$$

Como o produto escalar é um invariante relativístico, ambos os resultados calculados devem ser iguais, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{c^2} - \|\vec{p}\|^2 &= m_0^2 c^2, \\ \frac{E^2}{c^2} &= \|\vec{p}\|^2 + m_0^2 c^2, \\ E^2 &= c^2 \|\vec{p}\|^2 + m_0^2 c^4 . \end{aligned} \tag{28}$$

Esta última equação é a conhecida equação relativística para a energia de uma partícula livre. A magnitude do quadrivetor energia-momento nos dá a relação de Einstein conectando energia, momento e massa.

Para o caso de partículas com massa zero, como fótons, usamos $m_0 = 0$ na equação relativística e encontramos a relação energia-momento (SERWAY; MOSES; MOYER, 2004):

$$E = \|\vec{p}\|c\,. \tag{29}$$

2.1.4 Derivadas na Notação Relativística

Vamos agora considerar as derivadas na notação Relativística. A derivada de um campo φ é escrita como:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu}\varphi\,. \tag{30}$$

O índice é abaixado porque, conforme escrito, a derivada é um quadrivetor covariante. As componentes do quadrivetor são:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right) = \left(\partial_0\varphi, \partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi\right)\,. \tag{31}$$

De forma análoga, temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) = \partial^{\mu}\varphi = \left(\partial^0\varphi, \partial^1\varphi, \partial^2\varphi, \partial^3\varphi\right)\,, \tag{32}$$

que é um vetor contravariante. Como qualquer quadrivetor, podemos calcular um produto escalar, obtendo a generalização quadridimensional do laplaciano, chamado Operador D'Alembertiano, dado, na notação ordinária, por $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \equiv \Box$. Utilizando a notação relativístiva para derivadas junto com o produto escalar generalizado, temos:

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \equiv \Box\,. \tag{33}$$

2.2 Equações de Campo Relativísticas

2.2.1 Equação de Klein-Gordon

Começamos pela relação fundamental entre energia, momento e massa utilizada na Relatividade Especial, a conhecida Relação Relativística (28):

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4\,, \tag{34}$$

em que estamos omitindo o índice 0 da massa de repouso.

Considere a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \,, \tag{35}$$

em que $\hbar$ é a constante de Planck h dividida por 2π, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}054572 \cdot 10^{-34}$J s. Na Mecânica Quântica, os observáveis se transformam em operadores matemáticos:

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{36}$$

$$\vec{p} \longrightarrow -i\hbar\nabla \,. \tag{37}$$

Para obtermos a equação de Klein-Gordon, fazemos as substituições na equação de Einstein que envolve energia, momento e massa, e aplicamos a uma função de onda φ. Assim,

$$E^2 \longrightarrow -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad p^2 \longrightarrow -\hbar^2\nabla^2 \,. \tag{38}$$

Dessa forma, em termos de operadores a Relação Relativística pode ser escrita como:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4 \,. \tag{39}$$

Aplicando esse operador à função de espaço-tempo $\varphi = \varphi(x,t)$, temos:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\nabla^2\varphi + m^2c^4\varphi \,. \tag{40}$$

Organizando melhor a equação, dividindo por $\hbar^2c^2$, escrevemos

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0 \,. \tag{41}$$

Relembrando do operador D'Alembertiano $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \equiv \Box$, obtemos a equação de Klein-Gordon (42):

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0 \,. \tag{42}$$

2.2.2 Equação de Dirac

Dirac notou que, enquanto a equação de Klein-Gordon (42) contém uma derivada temporal de segunda ordem em ψ, a Eq. de Schrödinger (35) contém uma derivada temporal de primeira ordem em ψ e, por isso, não implica em densidades de probabilidades indefinidas.

O ponto de partida tomado por Dirac foi fatorar o operador de Energia-Momento na forma covariante,

$$p_\mu p^\mu - m^2c^2 = 0 \tag{43}$$

em um produto de termos lineares em p^μ, com coeficientes β^k e γ^j,

$$\left(\beta^k p_k + mc\right)\left(\gamma^j p_j - mc\right) = 0\,. \tag{44}$$

Abrindo o produto da eq (44), temos:

$$\beta^k \gamma^j p_k p_j - mc\left(\beta^k p_k - \gamma^j p_j\right) - m^2c^2 = 0\,. \tag{45}$$

Comparando com a relação (43), devemos eliminar os termos lineares em p_k, bastando, para isso, fazer $\beta^k = \gamma^k$.

$$\beta^k \gamma^j p_k p_j - m^2c^2 = 0\,. \tag{46}$$

Nos resta, ainda, encontrar os coeficientes γ^j tal que a igualdade

$$\beta^k \gamma^j p_k p_j = p^\mu p_\mu \tag{47}$$

seja satisfeita. Ou seja:

$$\begin{aligned}
\left(p^0\right)^2 - \left(p^1\right)^2 - \left(p^2\right)^2 - \left(p^3\right)^2 \;=\;& \left(\gamma^0\right)^2 (p_0)^2 + \left(\gamma^1\right)^2 (p_1)^2 + \left(\gamma^2\right)^2 (p_2)^2 + \left(\gamma^3\right)^2 (p_3)^2 \\
+\;& \left(\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0\right) p_0\,p_1 + \left(\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0\right) p_0\,p_2 \\
+\;& \left(\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0\right) p_0\,p_3 + \left(\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1\right) p_1\,p_2 \\
+\;& \left(\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1\right) p_1\,p_3 + \left(\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2\right) p_2\,p_3\,.
\end{aligned} \tag{48}$$

Dirac constatou que os coeficitentes γ^μ satisfazem o anticomutador

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\,, \tag{49}$$

em que $\eta^{\mu\nu}$ são os elementos da matriz que define a métrica de Minkowski e as chaves denotam o anticomutador $\{A, B\} = AB + BA$. Ou seja, γ^μ é uma matriz.

As matrizes γ^μ exigem uma base com as quatro coordenadas ($\mu = 0{,}1{,}2{,}3$). É possível mostrar que a menor ordem para matrizes quadradas em que o anticomutador (49) é satisfeito é 4×4. As matrizes γ foram construídas por Dirac da seguinte forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{(i)} \\ -\sigma^{(i)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

em que $\sigma^{(i)}$ são as matrizes de Pauli definidas por:

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

As matrizes γ^μ passaram a ser conhecidas como matrizes de Dirac.

Retornando à equação (44),

$$\left(\beta^k p_k + mc\right)\left(\gamma^j p_j - mc\right) = 0\,,$$

escolhe-se, por convenção, o termo negativo

$$\left(\gamma^j p_j - mc\right) = 0\,, \tag{52}$$

e, por meio do princípio de correspondência,

$$p_\mu \to -i\hbar\partial_\mu\,, \tag{53}$$

obtém-se, finalmente, a Equação de Dirac na forma covariante:

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\Psi = 0\,, \tag{54}$$

2.3 Formalismo Lagrangiano

Na Mecânica Clássica, o formalismo Lagrangiano é equivalente ao formalismo Newtoniano. A Lagrangiana pode ser usada para derivar as equações de movimento. Quando métodos Lagrangianos são aplicados a campos, podemos usar as mesmas técnicas para derivar as equações de campo. A Lagrangiana é um conceito fundamental que captura toda a dinâmica do sistema e permite determinar muitas propriedades úteis, como médias e comportamento dinâmico.

Inicialmente, considere o movimento de uma única partícula em uma dimensão espacial x e seja K a energia cinética da partícula movendo-se em um potencial V. A Lagrangiana L é definida como:

$$L = K - V\,. \tag{55}$$

Definimos a ação S como:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (K - V)\,dt\,. \tag{56}$$

2.3.1 Princípio da Ação Mínima

Quando uma partícula de desloca de um ponto P_1, no instante t_1, ao ponto P_2, no instante t_2, sob uma energia potencial $V(x)$, a trajetória será a de ação mínima. Para que a ação seja mínima, uma variação infinitesimal $\delta x(t)$ na trajetória real deverá produzir uma variação nula em S em 1ª ordem.

$$(\delta S)_{1^{\text{a}}\text{ ordem}} = \left(\int_{t_1}^{t_2} \delta L\,dt\right)_{1^{\text{a}}\text{ ordem}} = 0\,. \tag{57}$$

Assim, se $L = L(x,\dot{x})$, em que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, temos:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} \ , \tag{58}$$

em que $\delta \dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x$. Assim,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} \right) dt \ . \tag{59}$$

Utilizando integração por partes na segunda parcela do integrando, considerando $u = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ e $dv = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x\right) dt$, temos:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x \right) dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x \right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x \right) dt \ . \end{aligned} \tag{60}$$

Como δx é nulo nas extremidades, ou seja, $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, ficamos com:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x \ dt \ . \tag{61}$$

Sabendo que δx é arbitrário, para que a ação seja mínima é obrigatório que

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \ . \tag{62}$$

A equação (62) é conhecida como Equação de Euler-Lagrange e pode ser utilizada para obter as equações de movimento.

2.3.2 Momento Canônico e Hamiltoniana

Definimos o momento canônico como

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ . \tag{63}$$

O Hamiltoniano pode ser entendido, grosso modo, como a energia do sistema, a qual é a soma da energia cinética K com a energia potencial V, no caso de sistemas não dissipativos:

$$H = K + V \ . \tag{64}$$

Baseando-nos no momento canônico e na Lagrangiana, podemos definir a função Hamiltoniana, a partir de uma transformação de Legendre:

$$\begin{aligned} H(x,p) &= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} \right) - L \\ &= p\dot{x} - L \end{aligned} \tag{65}$$

2.3.3 Formalismo Lagrangiano para Campos

Na Mecânica Quântica, o tempo t é um parâmetro e x é um operador, como será apresentado na seção 3.1. Em teorias relativísticas, o tempo e o espaço devem ser tratados em pé de igualdade. Assim, as coordenadas espaciais passam ao *status* de parâmetros nas teorias quânticas relativísticas. Vamos agora generalizar as técnicas descritas nas subseções anteriores e aplicá-las a campos, ou seja, funções no espaço-tempo $\varphi\,(x,t)$, que escrevemos de forma mais compacta como $\varphi\,(x)$, em que x é um quadrivetor. No caso contínuo, tratamos de uma densidade Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\varphi, \partial_\mu \varphi\right)$, tal que:

$$L = \int d^3x\, \mathcal{L}\,. \tag{66}$$

Dessa forma,

$$S = \int L\, dt = \int d^4x\, \mathcal{L}\,. \tag{67}$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado para a minimização da ação, tal que $\delta S = 0$ em 1ª ordem para a obtenção da Equação de Euler-Lagrange para campos relativísticos:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\, \delta\mathcal{L} \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)}\delta\left(\partial_\mu \varphi\right)\right]\,. \end{aligned} \tag{68}$$

Utilizando o fato de que

$$\delta\left(\partial_\mu \varphi\right) = \partial_\mu\left(\delta\varphi\right)\,, \tag{69}$$

e aplicando integração por partes no segundo membro da equação (68), considerando $u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)}$ e $dv = \partial_\mu\left(\delta\varphi\right) d^4x$, obtemos:

$$\delta S = \int d^4x\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\,\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)}\,\delta\varphi\Big|_{x_1}^{x_2} - \int d^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)}\right]\delta\varphi\,.$$

Observe que o termo central da expressão é igual a zero uma vez que os pontos extremos são fixos, e não há variação. Assim:

$$\delta S = \int d^4x \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)}\right]\right\}\delta\varphi = 0\,. \tag{70}$$

Para que a integral seja nula em todo o domínio de integração, é necessário que o integrando seja nulo, e sabendo que $\delta\varphi$ é arbitrário, a expressão entre chaves obrigatoriamente precisa ser nula:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)}\right] = 0\,, \tag{71}$$

que é a equação de Euler-Lagrange (71) para campos relativísticos.

Exemplo: Campo Escalar Livre

Considere a Lagrangiana para um campo escalar φ livre,

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2} \left(\partial_\mu \varphi\right) \left(\partial^\mu \varphi\right) - \frac{1}{2} m^2 c^2 \varphi^2 \,. \tag{72}$$

Efetuando os cálculos, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 c^2 \varphi \tag{73}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \varphi\right)} = \hbar^2 \partial^\mu \varphi \,. \tag{74}$$

Portanto,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \varphi\right)} \right) = \hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu \varphi. \tag{75}$$

Voltando à equação de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} -m^2 c^2 \varphi - \hbar^2 \Box \varphi &= 0, \\ \left(m^2 c^2 + \hbar^2 \Box\right) \varphi &= 0, \\ \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \Box\right) \varphi &= 0 \,. \end{aligned} \tag{76}$$

Assim obtemos a equação de Klein-Gordon (42) na notação relativística (notação covariante), conforme já apresentada anteriomente.

Exemplo: Lagrangiana de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \left(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc\right) \Psi \,. \tag{77}$$

Efetuando os cálculos para o espinor adjunto $\bar{\Psi}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = \left(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc\right) \Psi \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \bar{\Psi}\right)} = 0 \,. \tag{78}$$

Pela equação de Euler-Lagrange, obtemos a Equação de Dirac para o spinor Ψ:

$$\left(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc\right) \Psi = 0 \,. \tag{79}$$

Efetuando os cálculos para o espinor Ψ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = -\bar{\Psi} mc \qquad \text{e} \qquad \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \Psi\right)} \right] = \partial_\mu \left[\bar{\Psi} i\hbar \gamma^\mu\right] = \bar{\Psi} i\hbar \gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} \,. \tag{80}$$

Pela equação de Euler-Lagrange, obtemos a Equação de Dirac para o spinor adjunto $\bar{\Psi}$:

$$\bar{\Psi}\left(i\hbar\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial_{\mu}} + mc\right) = 0\,. \tag{81}$$

De maneira prática, podemos considerar que o princípio da ação mínima exige que $\delta S = 0$, e portanto, $\delta S = \int d^4x\, \delta\mathcal{L} = 0$, o que implica em $\delta\mathcal{L} = 0$.

Exemplo: Eletromagnetismo

Considere a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_{\mu}J^{\mu}\,, \tag{82}$$

sendo que A^{μ} é o quadrivetor potencial, J^{μ} a densidade de corrente e $F_{\mu\nu}$ o tensor de campo eletromagnético antissimétrico, ou seja $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{83}$$

em que $\boldsymbol{E}$ é o campo elétrico e $\boldsymbol{B}$ o campo magnético. Calculando a variação $\delta\mathcal{L}$, obtemos:

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}2F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} - J_{\mu}\delta A^{\mu}\,, \tag{84}$$

em que

$$\delta F^{\mu\nu} = \delta\left(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}\right) = \partial^{\mu}\delta A^{\nu} - \partial^{\nu}\delta A^{\mu}\,. \tag{85}$$

Considerando a presença da integral da ação, podemos realizar a integração por partes e escrever

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\,\delta F^{\mu\nu} &= -\left(\partial^{\mu}F_{\mu\nu}\right)\delta A^{\nu} + \left(\partial^{\nu}F_{\mu\nu}\right)\delta A^{\mu} \\ &= -\left(\partial^{\mu}F_{\mu\nu}\right)\delta A^{\nu} - \left(\partial^{\nu}F_{\nu\mu}\right)\delta A^{\mu} \\ &= -2\left(\partial^{\mu}F_{\mu\nu}\right)\delta A^{\nu}\,. \end{aligned} \tag{86}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left(\frac{1}{\mu_0}\partial^{\mu}F_{\mu\nu}\right)\delta A^{\nu} - J_{\nu}\delta A^{\nu} \\ &= \left(\frac{1}{\mu_0}\partial^{\mu}F_{\mu\nu} - J_{\nu}\right)\delta A^{\nu} = 0\,. \end{aligned} \tag{87}$$

Como δA^{ν} é arbitrário, obtemos as equações de Maxwell não homogêneas:

$$\partial^{\mu}F_{\mu\nu} = \mu_0 J_{\nu} \tag{88}$$

3 Quantização de Campos Escalares

3.1 Primeira Quantização

O processo de quantização basicamente significa criar uma teoria quântica a partir de uma teoria clássica impondo relações de comutação. Inicialmente posição x e momento p são promovidos a operadores.

$$x \to \hat{x}$$
$$p \to \hat{p} \tag{89}$$

Os observáveis físicos tornam-se autovalores de operadores. Em particular, o operador de posição atua em uma função de onda como mostrado abaixo:

$$\hat{X}\Psi(x) = x\Psi(x)\,. \tag{90}$$

O operador momento atua em uma função de onda de acordo com

$$\hat{p}\Psi(x) = -i\hbar\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\,. \tag{91}$$

A quantização canônica refere-se ao processo de impor a relação de comutação fundamental nos operadores de posição e momento.

$$[\hat{x},\hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar\,. \tag{92}$$

Em resumo, o procedimento de primeira quantização consiste em:

- promover funções de posição e momento para operadores;
- impor a relação de comutação da equação (92).

3.2 Segunda Quantização

Na Teoria Quântica de Campos, tempo e posição são tratados em pé de igualdade, conforme já vimos na definição dos quadrivetores. Sendo assim, tempo t e posição x são apenas parâmetros que rotulam uma posição no espaço-tempo para um campo $\varphi(x,\, t)$.

Como estamos quantizando os campos e, portanto, os próprios campos devem ser tratados como operadores, chamamos este procedimento de segunda quantização. O procedimento consiste em:

- promover os campos $\varphi(x,\, t)$ e seus campos de momento conjugado $\pi(x,\, t)$ a operadores

$$\varphi(x,\, t) \to \hat{\varphi}(x,\, t) \quad \text{e} \quad \pi(x,\, t) \to \hat{\pi}(x,\, t) \tag{93}$$

- impor relações de comutação nos campos e seus momentos conjugados

$$[\hat{\varphi}(x,\, t),\, \hat{\pi}(x,\, t)] = i\hbar\delta(\vec{x} - \vec{y}) \tag{94}$$

Os campos são operadores no seguinte sentido: assim como na Mecânica Quântica existem os estados quânticos, na TQC existem os estados do campo. Os operadores de campo atuam nesses estados para destruir ou criar partículas. Dessa forma, o número da partícula não é fixo. E, para criar uma partícula, precisa-se de pelo menos o dobro da energia da massa de repouso $E = mc^2$ (McMAHON, 2008).

3.3 Quantização de Campos Escalares

Para exemplificar a quantização de campos escalares, considere o campo escalar real que satisfaz a equação de Klein-Gordon.

$$\begin{aligned}
\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi &= 0, \\
\left(\partial^\mu\partial_\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi &= 0, \\
\partial^\mu\partial_\mu\varphi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi &= 0, \\
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\varphi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi &= 0\,.
\end{aligned} \tag{95}$$

Considere uma solução de campo livre para a equação de Klein-Gordon da forma:

$$\varphi(x,t) \sim e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}\,. \tag{96}$$

Utilizado o número de onda $\vec{k}$, e considerando E definido como $k_o = \omega_k$ e $\vec{p} = \vec{k}$, e o quadrivetor $x = \left(x^0, \vec{x}\right)$ (a partir de agora estamos adotando o sistema de unidades naturais, no qual $c = \hbar = 1$), escrevemos a solução como:

$$\varphi(x) \sim e^{-i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\,. \tag{97}$$

Apresentamos a solução geral da equação de Klein-Gordon em termos de uma expansão de Fourier,

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}\left[\varphi(\vec{k})e^{-i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + \varphi^*(\vec{k})e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right]\,. \tag{98}$$

Neste ponto, aplicamos o primeiro passo do processo de quantização; o campo $\varphi(x)$ é promovido a operador $\hat{\varphi}(\vec{k})$. Fazemos isso substituindo as transformadas de Fourier dos campos $\varphi(\vec{k})$ e $\varphi^*(\vec{k})$ pelos operadores de aniquilação e criação respectivamente:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\vec{k}\right) &\rightarrow \hat{a}\left(\vec{k}\right) \\ \varphi^*\left(\vec{k}\right) &\rightarrow \hat{a}^\dagger\left(\vec{k}\right) , \end{aligned} \tag{99}$$

em que

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\left(m\omega\hat{x} + i\hat{p}\right) \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\left(m\omega\hat{x} - i\hat{p}\right) . \end{aligned} \tag{100}$$

Como consequência da definição (100) temos a relação de comutação

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1 . \tag{101}$$

Em termos dos operadores de criação e aniquilação, o campo é escrito como

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}\left[\hat{a}(\vec{k})e^{-i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right] . \tag{102}$$

O segundo passo para a quantização dos campos é considerar um momento conjugado ao campo, de forma que possamos impor relações de comutação. Para isso, voltamos à Lagrangiana para um campo escalar φ livre,

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2}\left(\partial_\mu\varphi\right)\left(\partial^\mu\varphi\right) - \frac{1}{2}m^2c^2\varphi^2 . \tag{103}$$

O momento conjugado do campo é

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\varphi\right)} = \hbar^2\partial_0\varphi . \tag{104}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(x) &= \hbar^2\partial_0\hat{\varphi}(x) \\ &= \hbar^2\partial_0\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}\left[\hat{a}(\vec{k})e^{-i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right] \\ &= \hbar^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}\left\{\hat{a}(\vec{k})\partial_0\left[e^{-i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right] + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\partial_0\left[e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right]\right\} \\ &= \hbar^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}}\left[\hat{a}(\vec{k})\left(-i\omega_k\right)e^{-i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\left(i\omega_k\right)e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right] \\ &= -i\hbar^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\left[\hat{a}(\vec{k})e^{-i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} - \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right] . \end{aligned} \tag{105}$$

As relações de comutação que impomos decorrem das relações de comutação canônica usadas na Mecânica Quântica. Para coordenadas cartesianas x_i temos

$$\begin{aligned} \left[x_i, p_j\right] &= i\hbar\delta_{ij} \\ \left[x_i, x_j\right] &= \left[p_i, p_j\right] = 0\,, \end{aligned} \tag{106}$$

em que δ_{ij} é a função delta de Kronecker. Passando dos índices discretos para os contínuos

$$\delta_{ij} \longrightarrow \delta(\vec{x} - \vec{y})\,, \tag{107}$$

em que $\delta(\vec{x} - \vec{y})$ é a função delta de Dirac. Considerando os comutadores entre os campos avaliados ao mesmo tempo $\left(x^0 = y^0\right)$, mas em diferentes localizações $(\vec{x} \neq \vec{y})$, temos

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(x),\, \hat{\pi}(y)] &= i\hbar\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\hat{\varphi}(x),\, \hat{\varphi}(y)] &= 0 \\ [\hat{\pi}(x),\, \hat{\pi}(y)] &= 0\,. \end{aligned} \tag{108}$$

No Apêndice B fazemos o cálculo detalhado da quantização de um campo escalar real (Mc-MAHON, 2008).

3.4 Estados na Teoria Quântica de Campos

Um vez que sabemos como escrever os campos escalares em termos de operadores de criação e de aniquilação, estamos prontos para ver como os operadores agem nos estados do campo. Vamos começar com o caso mais simples, o estado de menor energia ou o estado fundamental, que é comumente referido como o vácuo na Teoria Quântica de Campos. O vácuo, representado por $|0\rangle$, é destruído pelo operador de aniquilação. Em outras palavras, exibe autovalor zero, ou seja,

$$\hat{a}(\vec{k})\,|0\rangle = 0\,. \tag{109}$$

O estado de uma partícula com momento $\vec{k}$ pode ser denotado considerando o operador de criação agindo no vácuo:

$$\left|\vec{k}\right\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle\ . \tag{110}$$

Para mais de uma partícula temos:

$$\begin{aligned} \left|\vec{k}_1, \vec{k}_2\right\rangle &= \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1)\hat{a}^\dagger(\vec{k}_2)\,|0\rangle \\ \left|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \cdots, \vec{k}_n\right\rangle &= \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1)\hat{a}^\dagger(\vec{k}_2)\cdots\hat{a}^\dagger(\vec{k}_n)\,|0\rangle\ . \end{aligned} \tag{111}$$

Cada operador de criação $\hat{a}^\dagger(\vec{k}_i)$ cria uma única partícula com momento $\vec{k}_i$ e energia ω_{k_i} ($\hbar = c = 1$), em que:

$$\omega_{k_i} = \sqrt{\vec{k}_i^2 + m^2}\,. \tag{112}$$

Cada operador de aniquilação $\hat{a}(\vec{k}_i)$ destrói uma partícula com momento e energia definidos acima (McMAHON, 2008).

Considerando um campo definido em termos de superposições dos operadores de criação e aniquilação, escrevemos:

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}(\vec{k})e^{-i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right], \tag{113}$$

e considerando a atuação do campo no vácuo, temos:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(x)\,|0\rangle &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}(\vec{k})e^{-i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right]|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[e^{-i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\hat{a}(\vec{k})\,|0\rangle + e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle\right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{i\left(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\left|\vec{k}\right\rangle .
\end{aligned} \tag{114}$$

3.4.1 Normalização dos Estados

Uma questão importante que sempre surge na Teoria Quântica é a normalização de um determinado estado (McMAHON, 2008). Em primeiro lugar partimos da premissa de que o vácuo é normalizado para unidade:

$$\langle 0|0\rangle = 1\,. \tag{115}$$

Para normalizar um estado arbitrário $\left|\vec{k}\right\rangle$, consideramos o produto escalar $\left\langle\vec{k}\middle|\vec{k}'\right\rangle$ e utilizamos a relação de comutação

$$\left[a\left(\vec{k}\right), a^\dagger\left(\vec{k}'\right)\right] = \delta\left(\vec{k} - \vec{k}'\right)\,. \tag{116}$$

Uma vez que $\left|\vec{k}\right\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k})\left|0\right\rangle$ e a expressão adjunta fornece $\left\langle\vec{k}\right| = \left\langle 0\right|\hat{a}(\vec{k})$, temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle\vec{k}\middle|\vec{k}'\right\rangle &= \langle 0|\,\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\,\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}') - \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k})\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\left[\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}'), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k})\right] + \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k})\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\,\delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right) + \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k})\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\,\delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)|0\rangle + \langle 0|\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k})\,|0\rangle \\
&= \delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\langle 0|0\rangle \\
&= \delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right) \, .
\end{aligned} \tag{117}$$

3.5 Integrais de Caminho na Mecânica Quântica

O produto ordenado no tempo é uma representação matemática do fato físico de que uma partícula tem que ser criada antes de ser destruída. Essa é uma forma de causalidade em Teoria Quântica de Campos. A ordenação no tempo é realizada usando o operador de ordenação temporal que atua no produto $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$ como:

$$T\left[\varphi(t_1)\varphi(t_2)\right] = \begin{cases} \varphi(t_1)\varphi(t_2) & \text{se } \ t_1 > t_2 \\ \varphi(t_2)\varphi(t_1) & \text{se } \ t_2 > t_1 \, . \end{cases} \tag{118}$$

A amplitude de probabilidade do processo correspondente à partícula ir da posição $\vec{0}$, no instante $t = 0$, para a posição $\vec{x}$, no intante t, é definida por:

$$\langle 0|\,T[\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{0},0)]\,|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[\theta(t)e^{-i\left(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + \theta(-t)e^{i\left(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right] , \tag{119}$$

em que definimos a função $\theta(t)$ como

$$\theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ x_0 > y_0 \\ 0, & \text{se } \ x_0 < y_0 \, . \end{cases} \tag{120}$$

Definimos o propagador $D(x)$ de forma que

$$iD(x) = \langle 0|\,T[\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{0},0)]\,|0\rangle \, . \tag{121}$$

Com base no resultado de algumas integrais gaussianas, feitas no Apêndice C, é possível definir as integrais de caminho da Mecânica Quântica em função do Hamiltoniano que descreve a dinâmica do sistema. Essa formulação foi proposta por Dirac. Nesse ponto, seguimos a abordagem apresentada em (ZEE, 2010).

Uma integral de caminho é uma maneira de calcular a amplitude de um sistema que começa em algum estado inicial $|i\rangle$ para terminar em um estado final $|f\rangle$ somando as amplitudes para o sistema passar por todos os caminhos possíveis de $|i\rangle$ a $|f\rangle$. Como um exemplo específico, a integral de caminho pode ser construída considerando a amplitude para uma partícula passar de um ponto x_0 a um ponto x_N:

$$\langle x_N| e^{-i\hbar\hat{H}t} |x_0\rangle \ . \tag{122}$$

A fim de reescrever a amplitude probabilidade da equação (122), iniciamos considerando todos os possíveis caminhos de x_0 a x_N. Para isso, subdividimos o caminho em N subintervalos de mesmo tamanho $\Delta t = {}^t/_N$ de forma que:

$$\begin{aligned} e^{-i\hbar\hat{H}t} &= e^{-i\hbar\hat{H}(N\Delta t)} \\ &= e^{-i\hbar\hat{H}(\Delta t+\Delta t+\cdots+\Delta t)} \\ &= e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t}e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t}\cdots e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} \,, \end{aligned} \tag{123}$$

e a amplitude de probabilidade pode ser reescrita como:

$$\langle x_N| e^{-i\hbar\hat{H}t} |x_0\rangle = \langle x_N| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t}e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t}\cdots e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} |x_0\rangle \ . \tag{124}$$

Utilizando o fato de que os autoestados $|x\rangle$ formam um conjunto completo de estados, isto é

$$\int dx\, |x\rangle \langle x| = I \,, \tag{125}$$

e, por analogia,

$$\int dx_j\, |x_j\rangle \langle x_j| = I \,, \tag{126}$$

podemos inserir essa matriz identidade I entre todos os fatores $e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t}$ para obter

$$\begin{aligned} \langle x_N| e^{-i\hbar\hat{H}t} |x_0\rangle &= \langle x_N| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} I e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} I \cdots I e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} |x_0\rangle \\ &= \langle x_N| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} \int dx_{N-1}\, |x_{N-1}\rangle \langle x_{N-1}| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} \int dx_{N-2}\, |x_{N-2}\rangle \\ &\times \cdots \times \langle x_2| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} \int dx_1\, |x_1\rangle \langle x_1| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} |x_0\rangle \\ &= \prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j\, \langle x_N| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t} |x_{N-1}\rangle \langle x_{N-1}| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} |x_{N-2}\rangle \\ &\times \cdots \times \langle x_2| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} |x_1\rangle \langle x_1| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} |x_0\rangle \ . \end{aligned} \tag{127}$$

Considerando o caso de partícula livre, em que

$$H = \frac{p^2}{2m} \to \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}\,, \tag{128}$$

e considerando que os autoestados $|p\rangle$ também formam um conjunto completo de estados tal que

$$\frac{1}{2\pi}\int dp\,|p\rangle\langle p| = I\,, \tag{129}$$

e ainda que

$$\langle x|p\rangle = e^{ipx} \quad \text{e} \quad \langle p|x\rangle = e^{-ipx}\,. \tag{130}$$

temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle x_j\right| e^{-i\hbar\hat{H}t}\left|x_{j-1}\right\rangle &= \left\langle x_j\right| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} I \left|x_{j-1}\right\rangle \\
&= \left\langle x_j\right| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t}\frac{1}{2\pi}\int dp\,|p\rangle\left\langle p|x_{j-1}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\langle x_j\right| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t}\int dp\,|p\rangle\, e^{-ipx_{j-1}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int dp\;\exp\left\{-i\hbar\frac{\hat{p}^2}{2m}\Delta t\right\}\left\langle x_j|p\right\rangle \exp\left\{-ipx_{j-1}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int dp\;\exp\left\{\frac{-i\hbar\Delta t}{2m}\hat{p}^2\right\}\exp\left\{ipx_j\right\}\exp\left\{-ipx_{j-1}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int dp\;\exp\left\{\frac{-i\hbar\Delta t}{2m}\hat{p}^2 + ip(x_j - x_{j-1})\right\}.
\end{aligned} \tag{131}$$

Neste ponto utilizamos os resultados da integral gaussiana (360) e da rotação de Wick (368):

$$\begin{aligned}
\left\langle x_j\right| e^{-i\hbar\hat{H}t}\left|x_{j-1}\right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-i\pi 2m}{\hbar\Delta t}}\exp\left\{i(x_j - x_{j-1})^2\frac{m}{2\hbar\Delta t}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_j - x_{j-1}\right)^2}{\Delta t}\right\}.
\end{aligned} \tag{132}$$

Utilizando esse resultado no produto definido em (127),

$$\begin{aligned}
\langle x_N| e^{-i\hbar\hat{H}t}|x_0\rangle &= \prod_{j=1}^{N-1}\int dx_j\,\langle x_N| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t}|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t}|x_{N-2}\rangle \times \\
&\times \cdots \times \langle x_2| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t}|x_1\rangle\langle x_1| e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t}|x_0\rangle \\
&= \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{N/2}\prod_{j=1}^{N-1}\int dx_j\;\exp\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_j - x_{j-1}\right)^2}{\Delta t}\right\} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{N/2}\prod_{j=1}^{N-1}\int dx_j\;\exp\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\frac{i}{\hbar}\frac{m\Delta t}{2}\left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t}\right)^2\right\}.
\end{aligned} \tag{133}$$

Tomando o limite com $\Delta t \to 0$, o termo $\frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t}$ corresponde a uma derivada, ou seja,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\,, \tag{134}$$

e o somatório corresponde a uma integral:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \to \int_0^t dt\,. \tag{135}$$

Dessa forma, escrevemos

$$\langle x_N|\, e^{-i\hbar\hat{H}t}\, |x_0\rangle = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{N/2} \prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt\ \frac{m}{2}\dot{x}^2\right\}. \tag{136}$$

De forma a simplificar a expressão, define-se Dx, tal que:

$$\int_{x_0}^{x_N} Dx = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{N/2} \prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j\,, \tag{137}$$

em que $\Delta t = \frac{t}{N}$. E escrevemos a integral de caminho da Mecânica Quântica para a partícula livre:

$$\begin{aligned} \langle x_N|\, e^{-i\hbar\hat{H}t}\, |x_0\rangle &= \int_{x_0}^{x_N} Dx\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt\ \frac{m}{2}\dot{x}^2\right\} \\ &= \int_{x_0}^{x_N} Dx\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t L dt\right\}, \end{aligned} \tag{138}$$

uma vez que, para a partícula livre, a Lagrangiana corresponde a $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2$.

Já definimos anteriormente para campos

$$S = \int L\, dt = \int d^4x \mathcal{L}\,. \tag{139}$$

Na Teoria Quântica de Campos, considerando o limite contínuo em que $S(x) \to S(\varphi)$, podemos escrever a amplitude de probabilidade de transição de um estado $|i\rangle = |\varphi_1(t_1)\rangle$ para o estado $|f\rangle = |\varphi_2(t_2)\rangle$ como

$$\begin{aligned} \langle\varphi_2(t_2)|\varphi_1(t_1)\rangle &= \langle\varphi_2|\, e^{-i\hbar\hat{H}(t_2-t_1)}\, |\varphi_1\rangle \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(\varphi)\right\} \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}\right\}. \end{aligned} \tag{140}$$

Quando uma interação externa J(x) é introduzida, a integral do caminho torna-se

$$Z\,[J] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ [\mathcal{L} + J(x)\varphi(x)]\right\}. \tag{141}$$

4 Integrais de Feynman

4.1 Diagramas de Feynman

Hoje em dia, é quase impossível pensar em discutir Física de Partículas sem utilizar os diagramas de Feynman. Estes diagramas são representações esquemáticas de como as partículas interagem entre si, dentro de uma determinada teoria ou modelo. Em 1948, Feynman resolveu com sucesso o problema da formulação da Eletrodinâmica Quântica (QED - *Quantum Electrodynamics*). E isso lhe rendeu o prêmio Nobel de Física, em 1965, juntamente com Julian Schwinger e Sin-Itiro Tomonaga, que também haviam desenvolvido uma formulação para a QED de forma independente. Embora equivalentes, a versão de Feynman para a QED apresentou grandes vantagens práticas sobre as de Tomonaga e Schwinger. Uma das mais importantes foi que os cálculos poderiam ser feitos de uma maneira mais simples, associando, a cada termo que deve ser calculado, uma representação gráfica denominada diagrama. O objetivo dos cálculos feitos por Feynman era determinar a chamada amplitude de probabilidade de um determinado processo (AGUILAR, 2018).

Entretanto, vale ressaltar que a importância e a praticidade dos diagramas de Feynman não foram imediatamente reconhecidas pela comunidade de físicos que trabalhavam com a QED. O método diagramático de Feynman estava longe de ser claro. Afinal, não existem trajetórias bem definidas em Mecânica Quântica, e Feynman não era claro a respeito dos seus diagramas representarem fenômenos, serem abreviações de fórmulas ou apenas uma "muleta" para o pensamento (AGUILAR, 2018).

Coube a Freeman Dyson (1949a) mostrar a equivalência matemática entre os métodos propostos por Feynman, Schwinger e Tomonaga em um artigo publicado. Dyson (1949b) ainda publicou outro artigo estabelecendo como devem ser desenhados e as regras que regem os diagramas de Feynman. Com a permissão de Feynman, Dyson chegou a apresentar alguns diagramas em seus artigos. Richard Feynman (1949) somente teve seu artigo publicado meses depois, no qual introduzia a sua formulação para a QED e apresentava um primeiro diagrama de Feynman, como na figura 1.

Podemos dizer que um diagrama de Feynman da QED é constituído de alguns elementos básicos, dentre eles, linhas estilizadas para cada tipo de partícula e de um eixo bidimensional (que denota o espaço e o tempo).

Para calcular a probabilidade de um processo de espalhamento relativístico, precisamos determinar a chamada amplitude de espalhamento invariante de Lorentz $\mathcal{M}_{f_i}$, que conecta um estado inicial $|\Psi_i\rangle$, caracterizado por um conjunto de partículas que possuem momentos bem definidos, a um estado final $\left|\Psi_f\right\rangle$, contendo outras partículas (na maioria das vezes diferentes) que também possuem momentos bem definidos (AGUILAR, 2018).

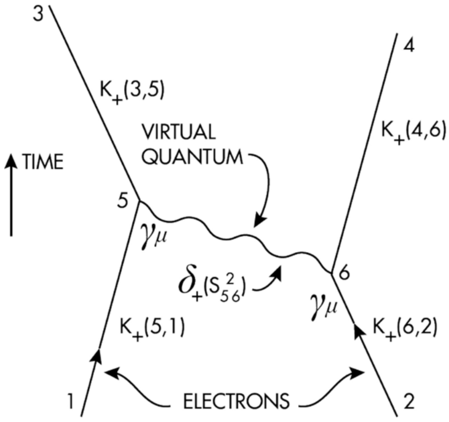

Figura 1 – Reprodução do primeiro diagrama que apareceu no trabalho de Feynman (1949). O diagrama representa espalhamento elástico de dois elétrons. A interação dos elétrons ocorre via troca de um fóton, representado pela linha ondulada.

Para fazer uso da técnica gráfica criada por Feynman é importante saber que cada diagrama de Feynman representa uma contribuição para $\mathcal{M}_{f_i}$. Isto significa que cada diagrama representa uma função complexa escrita em termos dos momentos externos. Ou seja, os diagramas fornecem uma maneira pictórica de representar as contribuições para a amplitude $\mathcal{M}_{f_i}$. Uma vez determinada uma amplitude é possível calcular grandezas físicas mensuráveis (AGUILAR, 2018).

De forma esquemática, um processo de espalhamento de partículas é composto pelos seguintes elementos:

$$\text{partículas iniciais} \longrightarrow \text{interação} \longrightarrow \text{partículas finais}\,. \tag{142}$$

São exatamente estes estágios que são representados pictoricamente nos diagramas de Feynman (AGUILAR, 2018).

Vamos começar mostrando na figura 2 os tipos de linhas que podem ser encontradas em um diagrama que representa um processo físico da QED. Cada “estilo” de linha representa uma partícula específica da teoria. No caso da QED, o elétron e^- (partícula) e o pósitron e^+ (antipartícula) são ambos representados por linhas sólidas. Já o fóton, denotado pelo símbolo γ, é representado pela linha ondulada (AGUILAR, 2018).

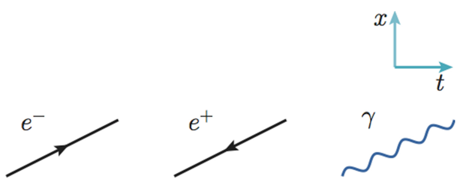

Figura 2 – Elementos básicos que compõem os diagramas de Feynman para QED. As linhas são as representações do elétron, pósitron e fóton, respectivamente.

Como os diagramas de Feynman são representações espaço-temporais que contam a história de como um conjunto de partículas iniciais interagem, é importante definir o significado de cada eixo (apesar de eles serem omitidos na grande maioria das figuras). O eixo horizontal indica o fluxo do tempo enquanto o vertical representa o espaço. Uma vez fixado o sentido do fluxo temporal, a figura 2 deve ser lida da esquerda para a direita [1]. As linhas sólidas que aparecem nas duas primeiras figuras representam o elétron e o pósitron se propagando entre duas coordenadas espaço-temporais. Uma convenção importante é que partículas (como é o caso do elétron) são representadas por uma linha com uma flecha apontando na mesma direção do fluxo do tempo enquanto que antipartículas (como o pósitron) tem a sua flecha apontando na direção oposta. Já a linha ondulada representa o propagador do fóton, que fornece informações de como o campo eletromagnético se propaga entre os pontos. Os propagadores são funções de *Green* que conectam dois pontos do espaço-tempo (AGUILAR, 2018).

Nos diagramas de Feynman interações são representadas como "vértices", isto é, a junção de três linhas em um mesmo ponto do espaço-tempo. Os vértices representam os pontos onde as partículas são criadas ou destruídas. No caso da interação eletromagnética existe somente um vértice básico. Este vértice acopla um fóton a uma partícula carregada (elétron/pósitron). Além disso, em cada vértice, sempre é conservado o quadrimomento (a mesma lei de conservação vale para a carga elétrica, spin, etc) (AGUILAR, 2018).

Na figura 3, no diagrama (a), um elétron emite um fóton e continua se propagando. Já em (b) um pósitron absorve um fóton e continua seu caminho. Em (c) estão representados um elétron e um pósitron se aniquilando em um fóton. Por fim o diagrama (d) representa a produção espontânea de um par elétron-pósitron por um fóton (AGUILAR, 2018).

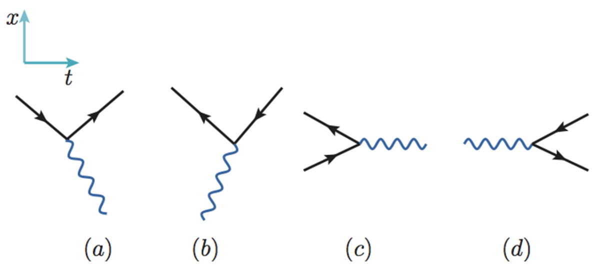

Figura 3 – Diagramas de Feynman para interações: (a) elétron-fóton, (b) pósitron-fóton, (c) aniquilação do par elétron-pósitron, (d) criação do par elétron-pósitron

Na figura 4 temos a representação do espalhamento de um elétron e um pósitron conhecido por espalhamento Bhabha, também denotado por:

$$e^{+} + e^{-} \rightarrow e^{+} + e^{-}\,, \tag{143}$$

sendo que há apenas duas possibilidades para este evento. Logo, é necessário somar a contribuição para a amplitude oriunda de cada um dos dois diagramas ditos topologicamente distintos. No

[1] Observe que o primeiro diagrama de Feynman representado na figura 1 indica o fluxo temporal no sentido vertical. A convenção para a direção do fluxo temporal e do fluxo espacial foi acordada posteriormente.

primeiro diagrama (a), um elétron e um pósitron se aniquilam, um fóton virtual[2] é produzido e, então, um par elétron-pósitron é gerado. No segundo diagrama (b), o elétron e o pósitron trocam um fóton (GRANDE, 2021).

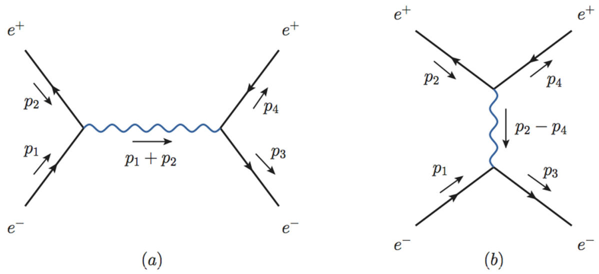

Figura 4 – Contribuições para o espalhamento Bhabha, $e^+ + e^- \longrightarrow e^+ + e^-$.

De modo geral, para uma quantidade arbitrária de diagramas, a amplitude de espalhamento é obtida pela adição de todas as amplitudes, isto é, a cada diagrama está associada uma amplitude $\mathcal{M}_k$ e a amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ é dada por $\sum_k \mathcal{M}_k$. A necessidade de se adicionar as amplitudes pode ser justificada a partir da formulação de Feynman da Mecânica Quântica por integrais de caminhos. Nesta formulação, atribui-se uma amplitude de probabilidade a cada trajetória e o resultado final é obtido pela adição de todas elas (GRANDE, 2021).

4.2 Regras de Feynman

Uma TQC, em solução perturbativa, pode ser representada pelo seu conjunto de regras de Feynman. Espera-se que todas as simetrias fundamentais implementadas na Lagrangiana, por ocasião da sua construção estejam contidas nas amplitudes calculadas através destas regras correspondentes a processos físicos específicos de interesse,. Entretanto, para a determinação dessas amplitudes nos deparamos, em geral, com o cálculo das chamadas Integrais de Feynman (BATTISTEL, 1999).

Por meio das regras de Feynman, pode-se construir a expressão matemática referente ao termo da expansão que, no espaço dos momentos, é dada por integrais nos momentos internos. Estas regras podem ser “lidas” diretamente da Lagrangiana, ou calculadas através da técnica de integrais de caminho.

[2] Partículas virtuais existem durante um período de tempo ínfimo e não precisam satisfazer à equação relativística de energia, enquanto que as partículas reais necessariamente o fazem. Partículas virtuais não podem ser observadas diretamente, todavia, os seus efeitos são deduzidos através das partículas reais.

4.2.1 Regras de Feynman para a Teoria Escalar na Mecânica Quântica

Para a dedução das regras de Feynman para a Teoria Escalar, seguimos a construção apontada por Zee (2010). Definimos a integral de caminhos como:

$$Z = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\varphi) \right\}. \tag{144}$$

Considerando a Lagrangiana para um campo escalar φ livre

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2} \left(\partial_\mu \varphi\right) \left(\partial^\mu \varphi\right) - \frac{1}{2} m^2 c^2 \varphi^2 , \tag{145}$$

escrevemos a integral de caminhos como:

$$Z = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \left[\frac{\hbar^2}{2} \left(\partial_\mu \varphi\right) \left(\partial^\mu \varphi\right) - \frac{1}{2} m^2 c^2 \varphi^2 \right] \right\}. \tag{146}$$

Utilizando a técnica de integração por partes, considerando $u = \partial^\mu \varphi$ e $dv = \partial_\mu \varphi \; d^4x$, reescrevemos a integral

$$\begin{aligned} \int d^4x \left(\partial_\mu \varphi\right) \left(\partial^\mu \varphi\right) &= \varphi \partial^\mu \varphi \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int d^4x \; \varphi \partial_\mu \partial^\mu \varphi \\ &= - \int d^4x \; \varphi \partial_\mu \partial^\mu \varphi \\ &= - \int d^4x \; \varphi \Box \varphi , \end{aligned} \tag{147}$$

utilizando a definição do operador D'Alembertiano $\partial_\mu \partial^\mu \equiv \Box$. Dessa forma, a integral Z pode ser escrita como:

$$Z = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \left[-\frac{\hbar^2}{2} \varphi \left(\Box + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi \right] \right\}. \tag{148}$$

Introduzindo uma interação externa por meio do termo $J(x)\varphi(x)$, teremos:

$$Z[J] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \left[-\frac{\hbar^2}{2} \varphi \left(\Box + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi + J(x)\varphi(x) \right] \right\}, \tag{149}$$

conforme já apresentado na equação (141).

A partir desse momento, vamos considerar unidades naturais da TQC, tais que $\hbar = c = 1$. Dessa forma, escrevemos

$$Z[J] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi \, \exp\left\{ \int d^4x \left[-\frac{i}{2} \varphi \left(\Box + m^2 \right) \varphi + iJ(x)\varphi(x) \right] \right\}, \tag{150}$$

A fim de utilizar o resultado obtido no Apêndice C, referente a integraia gaussianas (367),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{i}{2}x^T Ax + iJx\right\} d^n x = \frac{(2\pi i)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\left\{-\frac{i}{2}JA^{-1}J\right\}, \tag{151}$$

denotamos o coeficiente da exponencial como $Z[0]$:

$$Z[0] = \frac{(2\pi i)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}. \tag{152}$$

O operador diferencial $-\left(\Box + m^2\right)$ faz o papel da matriz A no cálculo de $Z[J]$. O operador inverso A^{-1} será denotado por $D(x-y)$ e é conhecido como propagador do campo $\varphi(x)$, de forma que:

$$-\left(\Box + m^2\right) D(x-y) = \delta^{(4)}(x-y), \tag{153}$$

em que

$$\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik(x-y)}. \tag{154}$$

Assim, voltando à equação (150) e utilizando o resultado da integral gaussiana, temos:

$$Z[J] = Z[0] \exp\left\{\frac{-i}{2}\int d^4x \int d^4y\, J(x)D(x-y)J(y)\right\}. \tag{155}$$

Para garantir que a equação (150) seja convergente, faz-se a substituição $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$, com ε positivo e infinitesimal, de forma que:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi\, \exp\left\{\int d^4x \left[-\frac{i}{2}\varphi\left(\Box + m^2 - i\varepsilon\right)\varphi + iJ(x)\varphi(x)\right]\right\} \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi\, \exp\left\{\int d^4x \left[-\varepsilon\varphi^2 - \frac{i}{2}\varphi\left(\Box + m^2\right)\varphi + iJ(x)\varphi(x)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{156}$$

Escrevemos $D(x-y)$ como

$$D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \tilde{D}(k)e^{ik(x-y)}. \tag{157}$$

e combinamos as equações (153), (154) e (157) para escrever

$$-\left(\Box + m^2\right)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \tilde{D}(k)e^{ik(x-y)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik(x-y)}. \tag{158}$$

Substituindo $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$, temos:

$$\begin{aligned} -\left(\Box + m^2 - i\varepsilon\right)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \tilde{D}(k)e^{ik(x-y)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik(x-y)} \\ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(k^2 - m^2 + i\varepsilon\right)\tilde{D}(k)e^{ik(x-y)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik(x-y)}. \end{aligned} \tag{159}$$

Dessa forma, obtemos o resultado para $\tilde{D}(k)$ e para $D(x-y)$:

$$\tilde{D}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad \text{e} \quad D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, \tag{160}$$

e podemos escrever a equação (155) da seguinte forma:

$$Z[J] = Z[0] \exp\left\{ \frac{-i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J(k)^* \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} J(k) \right\}, \tag{161}$$

utilizando a tranformada de Fourier

$$J(k) = \int d^4x \, e^{-ikx} J(x), \tag{162}$$

e $J(k)^*$ o conjugado de $J(k)$.

Para determinar o valor de $D(x)$, integramos primeiro com relação a k^0 através do método de integrais de contorno no plano complexo. Reescrevemos o denominador

$$\begin{aligned} k^2 - m^2 + i\varepsilon &= k_0^2 - |\vec{k}|^2 - m^2 + i\varepsilon \\ &= k_0^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon, \end{aligned} \tag{163}$$

uma vez que $\omega_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$. Quando $\varepsilon \to 0$, podemos fatorar o denominador da seguinte forma:

$$k_0^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon = (k_0 - \omega_k + i\varepsilon)(k_0 + \omega_k - i\varepsilon) \, . \tag{164}$$

Essa fatoração indica que o integrando tem dois pólos no plano complexo:

$$\begin{aligned} k_0 &= \omega_k - i\varepsilon \\ k_0 &= -\omega_k + i\varepsilon \, . \end{aligned} \tag{165}$$

Considere o caso k_0 positivo, ou seja $k_0 = \omega_k - i\varepsilon$:

$$\begin{aligned} D(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\cdot x}}{(k_0 - \omega_k + i\varepsilon)(k_0 + \omega_k - i\varepsilon)} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \int dk_0 \frac{e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}}{(k_0 - \omega_k + i\varepsilon)(k_0 + \omega_k - i\varepsilon)} \, . \end{aligned} \tag{166}$$

Considere

$$f(k) = \frac{e^{i(k\cdot x)}}{(k_0 + \omega_k - i\varepsilon)}, \tag{167}$$

de modo que

$$f(k_0) = \frac{e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}}{2\omega_k}, \tag{168}$$

no limite em que $\varepsilon \to 0$. Assim, utilizamos o resultado das integrais de Cauchy no plano complexo:

$$\oint \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)\,, \tag{169}$$

e escrevemos, com base nas equações (166) e (169):

$$\begin{aligned} D(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\,\frac{2\pi i e^{i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}}{2\omega_k} \\ &= -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}}{2\omega_k}\,. \end{aligned} \tag{170}$$

Para k_0 negativo, ou seja $k_0 = -\omega_k + i\varepsilon$, redefinimos

$$f(k) = \frac{e^{i(k\cdot x)}}{(k_0 - \omega_k + i\varepsilon)}\,, \tag{171}$$

de modo que

$$f(k_0) = \frac{e^{i\left(k_0 t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}}{-2\omega_k}\,, \tag{172}$$

no limite em que $\varepsilon \to 0$. Assim,

$$D(x) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}}{2\omega_k}\,. \tag{173}$$

Juntando os resultados obtidos em ambos os pólos, ecrevemos:

$$D(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[\theta(t)e^{-i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + \theta(-t)e^{i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right]\,. \tag{174}$$

Já havíamos definido anteriormente o propagador $D(x)$ na equação (121) de forma que

$$iD(x) = \langle 0|\, T[\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{0},0)]\, |0\rangle\ , \tag{175}$$

assim como havíamos definido o produto ordenado no tempo

$$\langle 0|\, T[\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{0},0)]\, |0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[\theta(t)e^{-i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + \theta(-t)e^{i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right]\,, \tag{176}$$

em que a função $\theta(t)$ admite os valores

$$\theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 1 \ \text{ se } \ x_0 > y_0 \\ 0 \ \text{ se } \ x_0 < y_0\,. \end{cases}\,. \tag{177}$$

Observe que o resultado encontrado concorda exatamente com a construção feita anteriormente.

Introduzindo um termo de autointeração $-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ no campo escalar, $Z[J]$ pode ser escrito como

$$Z[J] = \int D\varphi \, \exp\left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\varphi \left(\Box + m^2 \right) \varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + J\varphi) \right] \right\} . \tag{178}$$

Vamos considerar, para efeito de cálculo, um caso simples em que a integral ordinária $Z[J]$, já incluindo um termo de autointeração $-\frac{\lambda}{4!}q^4$, é definida por

$$Z[J] = \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2 - \frac{\lambda}{4!}q^4 + Jq\right)} . \tag{179}$$

Para $\lambda = 0$ já temos a solução baseada nas integrais gaussianas desenvolvidas no Apêndice C, mais precisamente, a equação (360):

$$Z[J] = \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2 + Jq\right)} = e^{\frac{J^2}{2m^2}} \sqrt{\frac{2\pi}{m^2}} . \tag{180}$$

Para $\lambda = 0$ e $J = 0$ também temos a solução baseada nas integrais gaussianas desenvolvidas no Apêndice C, mais precisamente, a equação (353):

$$Z[J = 0, \lambda = 0] = \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2\right)} = \sqrt{\frac{2\pi}{m^2}} . \tag{181}$$

Considere a expansão em série de Taylor da exponencial $e^{-\frac{\lambda}{4!}q^4}$:

$$e^{-\frac{\lambda}{4!}q^4} = 1 - \frac{\lambda}{4!}q^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2 q^8 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^3 q^{12} + \cdots . \tag{182}$$

Assim, podemos reescrever

$$Z[J] = \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2 + Jq\right)} \left[1 - \frac{\lambda}{4!}q^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2 q^8 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^3 q^{12} + \cdots \right] . \tag{183}$$

Calculando a derivada de $Z[J]$ (sem o termo de autointeração) com relação a J, temos:

$$\frac{d}{dJ} \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2 + Jq\right)} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2 + Jq\right)} \cdot q \ . \tag{184}$$

Calculando a derivada segunda

$$\frac{d^2}{dJ^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2 + Jq\right)} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2 + Jq\right)} \cdot q^2 \ . \tag{185}$$

Generalizando, calculando a derivada de ordem $(4n)$

$$\frac{d^{(4n)}}{dJ^{(4n)}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2 + Jq\right)} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2 + Jq\right)} \cdot q^{4n} \ . \tag{186}$$

Vamos denotar $\dfrac{d^{(4n)}}{dJ^{(4n)}}$ por $\left(\dfrac{d}{dJ}\right)^{(4n)}$ e temos o resultado para $Z\,[J]$

$$Z\,[J] = \left[1 - \frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^{(4)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^{2}\left(\frac{d}{dJ}\right)^{(8)} - \cdots\right]\int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2+Jq\right)}\,. \tag{187}$$

De forma mais compacta, podemos escrever:

$$\begin{aligned} Z\,[J] &= \exp\left\{-\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^{(4)}\right\}\int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{\left(-\frac{1}{2}m^2q^2+Jq\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{m^2}}\exp\left\{-\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^{(4)}\right\}\exp\left\{\frac{J^2}{2m^2}\right\} \\ &= Z\,[J=0,\lambda=0]\exp\left\{-\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{d}{dJ}\right)^{(4)}\right\}\exp\left\{\frac{J^2}{2m^2}\right\}. \end{aligned} \tag{188}$$

Por meio da expansão em série de Taylor de ambas exponenciais da equação (188) pode-se obter qualquer termo envolvendo um produto de λ e J (e suas possíveis potências). Por simplicidade, uma vez que o fator $\sqrt{\dfrac{2\pi}{m^2}} = Z\,[J=0,\lambda=0] = Z\,[0{,}0]$ é comum a todos os termos, definimos $\tilde{Z} = \dfrac{Z\,[J]}{Z\,[0{,}0]}$. Como exemplos, vamos determinar:

1. o termo de ordem λ e J^4 em $\tilde{Z}$. Para obter J^4, consideramos um termo com potência J^8 que, após 4 derivações, irá gerar o termo J^4. Assim:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(-\lambda)}{4!}\frac{d^4}{dJ^4}\right)\left[\frac{1}{4!}\left(\frac{J^2}{2m^2}\right)^{4}\right] &= \frac{(-\lambda)}{(4!)^2}\frac{1}{\left(2m^2\right)^4}\,8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\,J^4 \\ &= -\frac{\lambda}{(4!)^3}\,8!\,\frac{1}{\left(2m^2\right)^4}\,J^4\,. \end{aligned} \tag{189}$$

2. o termo de ordem λ^2 e J^6 em $\tilde{Z}$. Nesse caso, é necessário considerar o termo em que λ está elevado ao quadrado, o que implica em 8 derivações com relação a J. Assim, para obter um termo de ordem J^6, partimos de J^{14}:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{4!}\frac{d^4}{dJ^4}\right)^{2}\left[\frac{1}{7!}\left(\frac{J^2}{2m^2}\right)^{7}\right] &= \frac{1}{2}\frac{(-\lambda)^2}{(4!)^2}\frac{1}{7!}\frac{1}{\left(2m^2\right)^7}\,14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\,J^6 \\ &= (-\lambda)^2\frac{14!}{2\cdot 7!\,6!\,(4!)^2}\frac{1}{\left(2m^2\right)^7}\,J^6\,. \end{aligned} \tag{190}$$

3. o termo de ordem λ^2 e J^4 em $\tilde{Z}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{4!}\frac{d^4}{dJ^4}\right)^{2}\left[\frac{1}{6!}\left(\frac{J^2}{2m^2}\right)^{6}\right] &= \frac{1}{2}\frac{(-\lambda)^2}{(4!)^2}\frac{1}{6!}\frac{1}{\left(2m^2\right)^6}\,12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\,J^4 \\ &= \frac{1}{2}(-\lambda)^2\frac{12!}{(4!)^3 6!}\frac{1}{\left(2m^2\right)^6}\,J^4\,. \end{aligned} \tag{191}$$

4. o termo de ordem λ e J^0 em $\tilde{Z}$:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\lambda}{4!}\frac{d^4}{dJ^4}\right)\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{J^2}{2m^2}\right)^2\right] &= \frac{(-\lambda)}{4!}\frac{1}{2!}\frac{1}{\left(2m^2\right)^2}\,4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,J^0\\ &= \frac{-\lambda}{2\left(2m^2\right)^2}\,. \qquad (192)\end{aligned}$$

Os cálculos apresentados se referem a diagramas de Feynman, em que as extremidades são representadas por J, associados às partículas iniciais x_1 e x_2, e às partículas finais x_3 e x_4. E os vértices, responsáveis pelas autointerações, $(-\lambda)$.

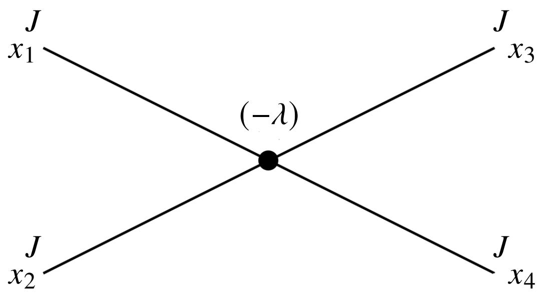

Figura 5 – Diagrama de Feynman para 4 linhas, 4 extremidades externas e 1 vértice.

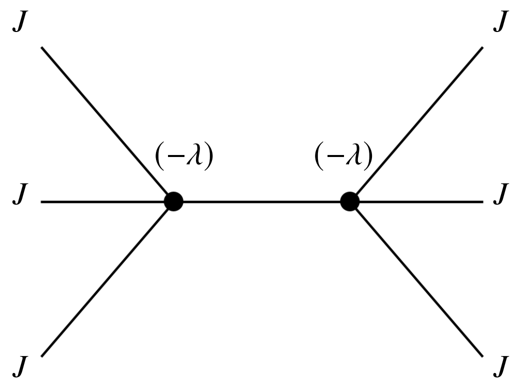

Figura 6 – Diagrama de Feynman para 7 linhas, 6 extremidades externas e 2 vértices.

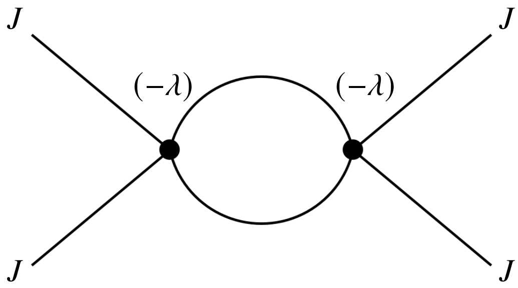

Figura 7 – Diagrama de Feynman para 6 linhas, 4 extremidades externas e 2 vértices.

As regras de Feynman para a Teoria Escalar na Mecânica Quântica associam-se a uma interpretação gráfica da seguinte forma (ZEE, 2010):

- os diagramas são formados por linhas e vértices, em que quatro linhas se encontram em cada vértice;
- para cada vértice atribuímos um fator $(-\lambda)$;
- para cada linha atribui-se um fator $\frac{1}{m^2}$;
- para cada final externo de uma linha, atribuímos um fator J.

Na figura (5) há 4 linhas, 4 pontos finais e 1 vértice. Dessa forma, a amplitude será proporcional a $(-\lambda)\frac{1}{(m^2)^4}J^4$, conforme apresentado no primeiro exemplo.

Na figura (6) há 7 linhas, 6 pontos finais e 2 vértices. Dessa forma, a amplitude será proporcional a $(-\lambda)^2\frac{1}{(m^2)^7}J^6$, conforme apresentado no segundo exemplo.

Na figura (7) há 6 linhas, 4 pontos finais e 2 vértices. Dessa forma, a amplitude será proporcional a $(-\lambda)^2\frac{1}{(m^2)^6}J^4$, conforme apresentado no terceiro exemplo.

Uma outra forma de se fazer a expansão perturbativa de $Z[J]$ seria em termos de potências de J.

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \sum_{s=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{-\frac{1}{2}m^2q^2-(\lambda/4!)q^4}\, q^s \\
&\equiv Z(0{,}0)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{J^s}{s!}G^{(s)}\,,
\end{aligned}
\tag{193}
$$

em que $G^{(s)}$ são Funções de *Green*. $G^{(s)}$ pode ser escrito como uma série em λ com cada termo determinado por contrações de Wick, que seriam maneiras de conectar as linhas para cada quantidade λ. Por exemplo, $G^{(4)}$ está associado a 4 vértices externos, que por sua vez podem estar associados a nenhum vértice interno ($\lambda = 0$), conforme figura (8) a um vértice interno ($\lambda = 1$), conforme figura (5) ou 2 vértices internos ($\lambda = 2$), conforme a figura (7).

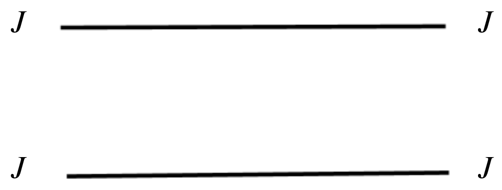

Figura 8 – Diagrama de Feynman para 2 linhas, 4 extremidades externas e nenhum vértice.

Nesse tipo de procedimento, calcula-se a função de s pontos, ou seja, a contribuição com s pontos finais e com todas as possibilidades intermediárias. Em Teoria Quântica de Campos, $G^{(s)}$ são as chamadas Funções de *Green* de s pontos.

Para múltiplas integrais, pelo método definido anteriormente:

$$\begin{aligned} Z\left[J\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_n \, \exp\left\{-\frac{1}{2}q^T A q - \frac{\lambda}{4!}q^4 + J^T q\right\} \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det A}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{4!}\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial J_i}\right)^{(4)}\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}J^T A^{-1} J\right\}. \end{aligned} \tag{194}$$

E, pelo método da expansão em potências de J:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{N}\cdots\sum_{i_s=0}^{N} \frac{1}{s!} J_{i_1}\cdots J_{i_s} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_l dq_l \, \exp\left\{-\frac{1}{2}q^T A q - (\frac{\lambda}{4!})q^4\right\} q_{i_1}\cdots q_{i_N} \\ &= Z(0{,}0) \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{N}\cdots\sum_{i_s=0}^{N} \frac{1}{s!} J_{i_1}\cdots J_{i_s} \, G_{i_1\cdots i_s}(s). \end{aligned} \tag{195}$$

(ZEE, 2010)

4.2.2 Regras de Feynman para a Teoria Escalar na Teoria Quântica de Campos

Para os campos φ escalares, escrevemos, conforme a equação (150),

$$Z\left[J\right] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi \, \exp\left\{\int d^4x \left[-\frac{i}{2}\varphi\left(\Box + m^2\right)\varphi + iJ(x)\varphi(x)\right]\right\},$$

baseada em uma integral funcional em $D\varphi$. O operador diferencial $-\left(\Box + m^2\right)$ faz o papel da matriz A no cálculo de $Z\left[J\right]$. O operador inverso A^{-1} foi denotado por $D(x-y)$ e é conhecido como propagador do campo $\varphi(x)$ ou Função de *Green* de 2 pontos, de forma que:

$$-\left(\Box + m^2\right) D(x-y) = \delta^{(4)}(x-y),$$

em que

$$\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, e^{ik(x-y)},$$

e $D(x-y)$ calculado:

$$D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\,, \tag{196}$$

Dessa forma, obtivemos a equação (155)

$$\begin{aligned} Z[J] &= Z[0]\exp\left\{\frac{-i}{2}\int d^4x \int d^4y\, J(x)D(x-y)J(y)\right\} \\ &= Z[0]\exp\{iW[J]\}\,, \end{aligned} \tag{197}$$

De forma análoga ao desenvolvimento feito na Mecânica Quântica, é possível introduzir um termo de autointeração λ para φ:

$$Z[J] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\varphi\, \exp\left\{i\int d^4x\, \left[-\frac{1}{2}\varphi\left(\Box + m^2\right)\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + J(x)\varphi(x)\right]\right\},$$

Fazendo a expansão em λ, escrevemos:

$$Z[J] = Z[0{,}0]\exp\left\{-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4w\left[\frac{\delta}{\delta J(W)}\right]^{(4)}\right\}\exp\{iW[J]\}\,, \tag{198}$$

em que $\frac{\delta}{\delta J}$ representa a derivada funcional em relação ao campo J.

Se $Z[J]$ é expandido em série de J, as potências de J indicarão o número de partículas envolvidas no processo. Para a expansão em J, escrevemos:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_s)\int D\varphi\, \exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\varphi\left(\Box + m^2\right)\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right]\right\} \\ &\quad \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_s) \\ &= Z[0{,}0]\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}J(x_1)\cdots J(x_s)\, G^{(s)}(x_1,\cdots,x_s)\,. \end{aligned} \tag{199}$$

Como exemplo, vamos calcular a Função de *Green* de 2 pontos:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \left[1 + J(x_1) + \frac{1}{2}J(x_1)J(x_2)\right]\int D\varphi\, \exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\varphi\left(\Box + m^2\right)\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right]\right\} \\ &\quad \varphi(x_1)\varphi(x_2) \\ &= Z[0{,}0]\left[1 + J(x_1) + \frac{1}{2}J(x_1)J(x_2)\right]\, G^{(2)}(x_1,x_2)\,. \end{aligned} \tag{200}$$

Dessa forma, $Z[J]$ é um funcional gerador das Funções de *Green*. Portanto,

$$G^{(2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{Z[0{,}0]}\int D\varphi\, \exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\varphi\left(\Box + m^2\right)\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right]\right\}\varphi(x_1)\varphi(x_2)\,. \tag{201}$$

Para $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned}
G^{(2)}(x_1,x_2) &= \frac{1}{Z[0,0]}\int D\varphi\ \exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\varphi\left(\Box + m^2\right)\varphi\right]\right\}\varphi(x_1)\varphi(x_2) \\
&= \frac{1}{Z[0,0]}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}Z[0,0]\,e^{iW[J]} \\
&= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J(x)D(x-y)J(y)\right\} \\
&= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[e^{iW[J]}(-i)\int d^4xD(x-x_2)J(x)\right] \\
&= e^{iW[J]}(-i)^2\int d^4xD(x-x_2)J(x)\int d^4yD(y-x_1)J(y) + \\
&+ e^{iW[J]}(-i)D(x_1-x_2) \\
&= -iD(x_1-x_2) \\
&= -i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-m^2+i\varepsilon}\,,
\end{aligned} \tag{202}$$

quando $J = 0$.

Um outro exemplo é a Função de *Green* de 4 pontos. Trata-se de um espalhamento com 2 partículas iniciais x_1 e x_2, denominadas fontes, e 2 partículas finais x_3 e x_4, denominadas “ralos”:

$$\begin{aligned}
G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \frac{1}{Z[0,0]}\int D\varphi\ \exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\varphi\left(\Box + m^2\right)\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right]\right\} \\
&\quad \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\,.
\end{aligned} \tag{203}$$

Expandindo em termos de λ, esse processo é uma série infinita. Vejamos o conteúdo de 1ª ordem.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{Z[0,0]}\left(-i\frac{\lambda}{4!}\right)\int d^4w\int D\varphi\ \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\varphi^4(w) \\
&\quad \exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\varphi\left(\Box + m^2\right)\varphi\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{204}$$

Olhando de outra forma,

$$Z[J] = Z[0,0]\exp\left\{-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4w\left[\frac{\delta}{\delta J(w)}\right]^{(4)}\right\}\exp\{iW[J]\}\,, \tag{205}$$

em que

$$e^{iW[J]} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(iW[J]\right)^n\ . \tag{206}$$

Em ambos desenvolvimentos, obtém-se a amplitude espalhamento proporcional a

$$-i\lambda\int d^4w\ D(x_1-w)D(x_2-w)D(x_3-w)D(x_4-w)\,, \tag{207}$$

com cada propagador escrito no espaço dos momentos como:

$$D(x_a - w) = \int \frac{d^4 k_a}{(2\pi)^4} \frac{e^{\pm i k_a (x_a - w)}}{k_a^2 - m^2 + i\varepsilon} \,. \tag{208}$$

Na integração em relação a w em (207), obtém-se

$$\int d^4 w \; e^{-i(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)w} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \,, \tag{209}$$

de forma que $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$. Ou seja, o momento é conservado (a soma dos momentos nas fontes é igual à soma dos momentos nos "ralos").

As regras de Feynman para a Teoria de Campo Escalar no espaço dos momentos podem ser definidas por:

- para cada linha com momento k associa-se o propagador $\dfrac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}$;
- para cada vértice λ de interação, associa-se o termo $(-i\lambda)$ e $(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_i k_i - \sum_j k_j \right)$, de forma que a soma dos momentos de chegada ao vértice seja igual à soma dos momentos de saída do vértice;
- momentos associados a linhas internas são integrados sob $\dfrac{d^4 k}{(2\pi)^4}$;
- não associa-se propagador às linhas externas.

Como exemplo de aplicação das regras de Feynman ao espalhamento descrito anteriormente, a amplitude é proporcional a

$$(-i\lambda) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \prod_{a=1}^{4} \left(\frac{1}{k_a^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \,. \tag{210}$$

Contudo, uma vez que não se deve associar um propagador às linhas externas, os termos do produtório não são escritos, já que todas as linhas são externas. Esse fato ocorre para o caso de funções de Green irredutíveis de partícula única. Portanto, sob integração, $\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) = 1$, já que o momento no vértice é conservado e $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$, e $(2\pi)^4$ é simplificado com o denominador e resta somente $(-i\lambda)$ (ZEE, 2010).

4.2.3 Regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica (QED)

Para a QED vamos apenas enunciar as regras de Feynman:

- Propagador Fermiônico $\dfrac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m} = \dfrac{i}{\not{p} - m} = i \dfrac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$;
- Para cada vértice μ elétron-fóton, associa-se um fator $-ie\gamma^\mu$;

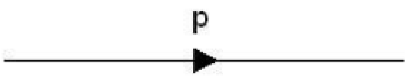

Figura 9 – Representação do propagador fermiônico.

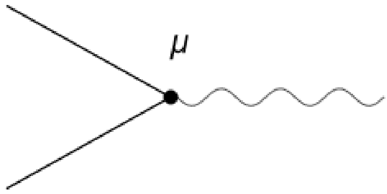

Figura 10 – Representação do vértice elétron-fóton

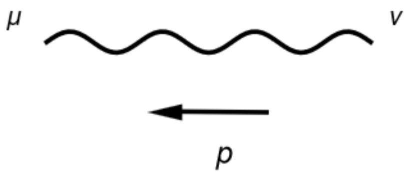

Figura 11 – Representação do propagador do fóton

- Para cada propagador fotônico, no calibre de Feynman, associa-se um fator $\dfrac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2}$.
- Para cada *loop* de férmions, associa-se um fator -1, e os índices espinoriais no *loop* se contraem para produzir um traço;

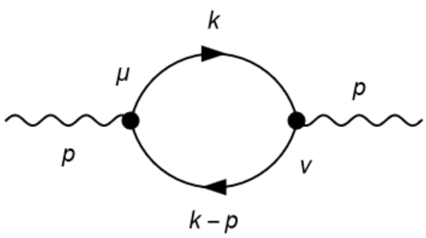

Figura 12 – Representação de um *loop*

4.3 Parametrização de Feynman

A parametrização de Feynman é uma forma, inventada por Richard Feynman, de escrever frações com produtos no denominador, com o objetivo de calcular integrais de *loops* (KANNILE, 2013).

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1 - x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_n)}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n)^n}. \tag{211}$$

Fazendo $x_n = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_{n-1}$, a integral $\int_0^1 dx_n$ fica igual a 1, devido à função delta de Dirac, e temos:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-X} \frac{dx_{n-1}}{[(a_1 - a_n)x_1 + (a_2 - a_n)x_2 + \cdots + a_n]^n} \tag{212}$$

em que $X = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}$. Baseando-nos na equação (212), podemos escrever, por exemplo,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \, \frac{1}{[(a-b)x + b]^2}, \tag{213}$$

$$\frac{1}{abc} = 2! \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, \frac{1}{[(a-c)x + (b-c)y + c]^3}, \tag{214}$$

$$\frac{1}{abcd} = 3! \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \, \frac{1}{[(a-d)x + (b-d)y + (c-d)z + d]^4}. \tag{215}$$

Derivando ambos os lados da equação (213) em relação a b, temos

$$\frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{1}{ab}\right] = -\frac{1}{ab^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{1}{[(a-b)x + b]^2}\right] = -\frac{2(1-x)}{[(a-b)x + b]^3}. \tag{216}$$

e chegamos à seguinte equação:

$$\frac{1}{ab^2} = 2 \int_0^1 dx \, \frac{(1-x)}{[(a-b)x + b]^3}. \tag{217}$$

Após n derivadas parciais com em relação a b, obtemos:

$$\frac{1}{ab^n} = n \int_0^1 dx \, \frac{(1-x)^{n-1}}{[(a-b)x + b]^{n+1}}. \tag{218}$$

Ainda podemos considerar, se necessário, as derivadas parciais em relação a a para obter as potências associadas ao denominador a.

$$\frac{1}{a^m b^n} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 dx \, \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{[(a-b)x + b]^{m+n}}, \tag{219}$$

em que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para n inteiro positivo.

Podemos definir, aplicando derivadas parciais com relação a cada um dos denominadores, uma forma geral para a parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{a_1^{\eta_1} a_2^{\eta_2} \cdots a_n^{\eta_n}} = \frac{\Gamma(\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n)}{\Gamma(\eta_1)\Gamma(\eta_2)\cdots\Gamma(\eta_n)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots$$

$$\int_0^{1-X} dx_{n-1} \frac{x_1^{\eta_1 - 1} x_2^{\eta_2 - 1} \cdots x_{n-1}^{\eta_{(n-1)}-1} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^{\eta_n - 1}}{[(a_1 - a_n)x_1 + (a_2 - a_n)x_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)x_{n-1} + a_n]^{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n}} \tag{220}$$

em que $X = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}$.

4.4 Integrais Finitas

O problema geral, no que diz respeito a integrais de Feynman, é aquele relativo a integrais finitas. Isto porque, mesmo no caso de integrais divergentes, o cálculo somente é de fato efetuado após as tornarmos finitas, através de algum procedimento (BATTISTEL, 1999).

Para ilustrar os procedimentos envolvidos no cálculo de integrais de Feynman consideraremos o cálculo explícito de uma típica integral finita J:

$$J = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 \left[(p-k)^2 - m^2\right] \left[(p'-k)^2 - m^2\right]} \tag{221}$$

Neste ponto, precisamos utilizar a parametrização de Feynman para reescrever o integrando de J em termos de integrais nos parâmetros de Feynman, conforme descrito na seção 4.3, de acordo com a equação (214). Para comparar $\frac{1}{abc}$ ao integrando de J, consideramos:

$$a = (p-k)^2 - m^2 \quad ; \quad b = (p'-k)^2 - m^2 \quad \text{e} \quad c = k^2. \tag{222}$$

Assim,

$$[(a-c)x + (b-c)y + c] = (p^2 - 2p \cdot k - m^2)x + (p'^2 - 2p' \cdot k - m^2)y + k^2. \tag{223}$$

Somando e subtraindo p^2x^2, p'^2y^2 e $2p \cdot p'xy$, escrevemos o denominador como

$$\begin{aligned}
[(a-c)x + (b-c)x + c] &= \left[k^2 - 2(p \cdot k)x - 2(p' \cdot k)y + p^2x^2 + 2(p \cdot p')xy + p'^2y^2\right] + \\
&+ \; p^2x(1-x) + p'^2y(1-y) - m^2(x+y) - 2(p \cdot p')xy \\
&= [k - (px + p'y)]^2 + Q^2
\end{aligned} \tag{224}$$

em que $Q^2 = p^2x(1-x) + p'^2y(1-y) - m^2(x+y) - 2(p \cdot p')xy$. Definimos $K' = k - (px + p'y)$, portanto $k = K' + px + p'y$. Neste ponto observamos que o *shift* aplicado não altera o modo de cálculo da integral sobre os momentos, de forma que

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = \int \frac{d^4K'}{(2\pi)^4}.$$

Sendo assim, vamos manter k no cálculo da integral a fim de simplificar a notação. Logo,

$$J = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[k^2 + Q^2\right]^3}. \tag{225}$$

Temos agora que integrar nos momentos (k). Para tal, lembramos que estamos num espaço de Minkowski, onde $k = (k_0, -k_1, -k_2, -k_3)$ e:

$$\begin{cases} d^4k = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3 \\ k^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = k_0^2 - |\vec{k}|^2 \\ k^2 + Q^2 = \left(k_0^2 - |\vec{k}|^2\right) + Q^2. \end{cases}$$

Fazendo $k_0 = ik_4$ (chamada rotação de Wick), e portanto $k_4 = -ik_0$ com o intuito de alterar k (do espaço de Minkowski) para k_E (espaço Euclidiano), temos:

$$\begin{aligned} d^4k_E &= dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \\ &= dk_1 dk_2 dk_3 (-idk_0) \\ &= -id^4k. \end{aligned} \tag{226}$$

Dessa forma, $d^4k = id^4k_E$, e a integral será dada por

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[k^2 + Q^2\right]^3} = \int i\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[-k_E^2 + Q^2\right]^3}, \tag{227}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} k^2 + Q^2 &= \left(k_0^2 - |\vec{k}|^2\right) + Q^2 \\ &= \left[(ik_4)^2 - |\vec{k}|^2\right] + Q^2 \\ &= \left(-k_4^2 - |\vec{k}|^2\right) + Q^2 \\ &= \left(-k_4^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2\right) + Q^2 \\ &= -k_E^2 + Q^2. \end{aligned} \tag{228}$$

Vamos agora olhar especificamente para a integral $\int d^4k_E$ e fazer uma mudança para coordenadas esféricas quadridimensionais:

$$\begin{cases} k_1 = k_E \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \\ k_2 = k_E \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ k_3 = k_E \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ k_4 = k_E \cos\theta_1. \end{cases}$$

O elemento de volume da integral em coordenadas esféricas quadridimensionais é:

$$d^4k_E = k_E^3 dk_E \; d\theta_1 \; \sin\theta_2 d\theta_2 \; \sin^2\theta_3 d\theta_3$$

e a integral fica

$$\int d^4k_E = \int_0^\infty k_E^3 dk_E \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin\theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2\theta_3 d\theta_3. \tag{229}$$

Calculando as integrais separadamente, temos

$$\int_0^{2\pi} d\theta_1 = \theta_1 \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\int_0^\pi \sin\theta_2 d\theta_2 = -\cos\theta_2 \Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2\theta_3 d\theta_3 &= \int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta_3}{2} d\theta_3 \\
&= \int_0^\pi \frac{d\theta_3}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2\theta_3 d\theta_3 \\
&= \frac{1}{2}\theta_3 \Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta_3}{2}\Big|_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \tag{230}$$

Dessa forma, a integral (227) fica

$$\begin{aligned}
\int i\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\frac{1}{\left[-k_E^2+Q^2\right]^3} &= -\frac{i}{(2\pi)^4}(2\pi)(2)\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^\infty \frac{k_E^3 dk_E}{\left[k_E^2-Q^2\right]^3} \\
&= -\frac{i}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{k_E^3 dk_E}{\left[k_E^2-Q^2\right]^3}
\end{aligned} \tag{231}$$

Fazendo a substituição $u = k_E^2 - Q^2$, temos $k_E^2 = u + Q^2$ e $du = 2k_E dk_E$, temos

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{8\pi^2}\int_{-Q^2}^\infty \frac{u+Q^2}{u^3}\frac{du}{2} &= -\frac{i}{16\pi^2}\left\{\int_{-Q^2}^\infty \frac{du}{u^2} + Q^2\int_{-Q^2}^\infty \frac{du}{u^3}\right\} \\
&= -\frac{i}{16\pi^2}\left\{\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\Big|_{-Q^2}^t\right] + Q^2\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2u^2}\Big|_{-Q^2}^t\right]\right\} \\
&= -\frac{i}{16\pi^2}\left[-\frac{1}{Q^2}+\frac{1}{2Q^2}\right] \\
&= -\frac{i}{16\pi^2}\left[-\frac{1}{2Q^2}\right] \\
&= \frac{i}{32\pi^2}\frac{1}{Q^2}.
\end{aligned} \tag{232}$$

Voltando à integral (225),

$$J = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \; \frac{i}{32\pi^2}\frac{1}{Q^2}$$
$$= \frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \; \frac{1}{Q^2} \tag{233}$$

e restam apenas integrais em x e y para serem resolvidas.

Visando facilitar o processo de integração sobre os momentos (mais precisamente as integrais em d^4k), uma tabela pode ser construída para consulta sempre que necessário, de forma a não se precisar de todo o processo de mudança de coordenadas do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano a cada resolução de integral. No Apêndice D são apresentados os cálculos das integrais sobre o momento d^4k, onde é desenvolvido o cálculo da primeira integral (234) e as derivadas que levam à construção de cada integral seguinte, muito útil na resolução das integrais de Feynman. Apresentaremos aqui somente os resultados de cinco integrais.

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}}\frac{1}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^w}\frac{1}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}}\frac{\Gamma(\alpha-w)}{\Gamma(\alpha)} \tag{234}$$

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}}\frac{k_\mu}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^\alpha} = -\frac{i}{(4\pi)^w}\frac{p_\mu}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}}\frac{\Gamma(\alpha-w)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{235}$$

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}}\frac{k_\mu k_\nu}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^w}\left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{2(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}}+ + \frac{(\alpha-w-1)p_\mu p_\nu}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}}\right]\frac{\Gamma(\alpha-w-1)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{236}$$

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}}\frac{k_\mu k_\nu k_\beta}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^\alpha} = -\frac{i}{(4\pi)^w}\frac{\Gamma(\alpha-w-1)}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(\alpha-w-1)p_\mu p_\nu p_\beta}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}}+ + \frac{p_\beta\eta_{\mu\nu}+p_\nu\eta_{\mu\beta}+p_\mu\eta_{\nu\beta}}{2(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}}\right]. \tag{237}$$

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}}\frac{k_\mu k_\nu k_\beta k_\gamma}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^\alpha} =$$
$$= \frac{i}{(4\pi)^w}\frac{\Gamma(\alpha-w-2)}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{(\alpha-w-1)(\alpha-w-2)p_\mu p_\nu p_\beta p_\gamma}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}}+\right.$$
$$+\frac{(\alpha-w-2)}{2(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}}\left[\eta_{\mu\gamma}p_\nu p_\beta+\eta_{\nu\gamma}p_\mu p_\beta+\eta_{\beta\gamma}p_\mu p_\nu+\eta_{\mu\nu}p_\beta p_\gamma+\eta_{\mu\beta}p_\nu p_\gamma+\eta_{\nu\beta}p_\mu p_\gamma\right]+$$
$$\left.+\frac{1}{4(H^2-p^2)^{\alpha-w-2}}\left[\eta_{\beta\mu}\eta_{\nu\gamma}+\eta_{\beta\nu}\eta_{\mu\gamma}+\eta_{\beta\gamma}\eta_{\mu\nu}\right]\right\} \tag{238}$$

5 Regularização de Integrais Divergentes

Diversas técnicas de regularização são utilizadas atualmente. Pauli e Villars (1949) propuseram a mudança do integrando, de forma a modificar dependência dos momentos na região de altos valores ($k \to \infty$), responsáveis pelas divergências, com o objetivo de tornar a integral finita. Para isto, faz-se a introdução, na integral, de uma função ou distribuição, caracterizada por um conjunto de parâmetros, que converge para zero em altos valores dos momentos mais rapidamente do que a integral original diverge. A conexão com a integral original se dá através de alguma situação limite na qual a função introduzida se reduz à unidade (BATTISTEL, 1999).

Seja a integral

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \tag{239}$$

tal que

$$\lim_{k\to\infty} k^4 |f(k)| = \infty. \tag{240}$$

O objetivo é definir $G_\Lambda(k^2{,}\Lambda^2)$ de modo que a integral

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \left[G_\Lambda(k^2,\, \Lambda^2)\right] \tag{241}$$

seja finita e a integral original seja restaurada no limite de um parâmetro Λ. $G_\Lambda(k^2,\, \Lambda^2)$ deve atender às seguintes condições:

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} G_\Lambda(k^2,\, \Lambda^2) = 0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} k^4\, f(k)\, G_\Lambda(k^2,\, \Lambda^2) = 0 \\ \lim\limits_{\Lambda\to\infty} G_\Lambda(k^2,\, \Lambda^2) = 1\,. \end{cases} \tag{242}$$

Pode-se propor a forma

$$G_\Lambda(k^2,\, \Lambda^2) = \left(\frac{\mu^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2}\right)^n. \tag{243}$$

Outra forma de regularizar uma integral é através da alteração dos limites de integração, evitando os altos valores do momento. Esse método é chamado *cutoff*, e regulariza a integral supondo um corte nos limites da integral, que então se torna própria dentro de uma região. Depois toma-se o limite ($\lim \Lambda \to \infty$) como forma de conexão à integral original (BATTISTEL, 1999).

$$\int_0^\infty k^3 dk \to \int_0^\Lambda k^3 dk. \tag{244}$$

Há ainda a possibilidade de modificação da dimensão espaço-temporal, utilizando Regularização Dimensional ('t HOOFT, 1971), ('t HOOFT; VELTMAN, 1972). A ideia básica desta filosofia está na constatação de que algumas integrais que são divergentes na dimensão física ($4D$), não o seriam em dimensões inferiores (BATTISTEL, 1999). A Regularização Dimensional lança mão de uma continuação analítica do número de dimensões do espaço-tempo para fazer com que a integral seja convergente, e então aplica o limite para quatro dimensões (CAMARGO, 2013).

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \to \int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} f(k). \tag{245}$$

A Regularização Dimensional é poderosa devido à preservação da simetria de calibre em todas as ordens da teoria de perturbação. A extensão dimensional, no entanto, causa dificuldades quando o modelo sob investigação abrange objetos matemáticos topologicamente dependentes da dimensão, objetos matemáticos cuja extensão dimensional é ambígua ou mal definida, como a matriz γ_5. Nesse caso, acarretaria resultados pouco confiáveis ou que requerem procedimentos trabalhosos para o restabelecimento de simetrias violadas de forma espúria. É o caso das teorias topológicas e supersimétricas. Redução Dimensional (SIEGEL, 1979) é uma saída deste problema para estender apenas a dimensão das integrais de Feynman, mas preservando a álgebra do grupo de simetria na dimensão espaço-temporal original. No entanto, existem algumas inconsistências matemáticas no procedimento quando o cálculo é executado além da ordem de 1-*loop* (integração em um momento interno). Essas dificuldades com a extensão dimensional são o fato motivador para vários desenvolvimentos de procedimentos de regularização que são realizados na dimensão adequada do modelo (uma boa discussão sobre este tópico é realizada por Gnendiger et al. (2017) e Bobadilla et al. (2021)).

A Renormalização Diferencial é uma dessas abordagens (FREEDMAN; JOHNSON; LATORRE, 1992). Funciona na dimensão adequada da teoria no espaço de coordenadas e provou ser simples e poderosa em muitas aplicações (HAAGENSEN; LATORRE, 1992), (FREEDMAN et al., 1993) e (MUÑOZ-TAPIA, 1992). Consiste na manipulação de distribuições singulares atribuindo-lhes propriedades de distribuições regulares. No final, essas singularidades são substituídas por funções renormalizadas e diversos parâmetros de massa são introduzidos nos resultados. As relações entre esses parâmetros são estabelecidas a fim de preservar simetrias. Um desenvolvimento adicional a fim de satisfazer automaticamente simetrias veio com a versão restrita de Renormalização Diferencial (ÁGUILA et al., 1998) e (PÉREZ-VICTORIA, 1998).

5.1 Regularização Implícita

A maior parte das integrais decorrentes das interações entre as partículas elementares é divergente. A Teoria de Renormalização contorna tais dificuldades através da redefinição das grandezas físicas. Neste processo, os infinitos são subtraídos, de acordo com alguns critérios relacionados a simetrias que devem ser preservadas ou a resultados experimentais. O sucesso da Teoria de Renormalização foi enorme e resultados com altíssimo grau de precisão foram obtidos dentro do contexto do Modelo Padrão das partículas elementares. Contudo, considerando-se que estamos lidando com integrais de Feynman, a renormalização depende da aplicação de um método de regularização às integrais divergentes, de forma que se possa separar o conteúdo físico das amplitudes. Há muitas formas de se regularizar uma integral, sendo o método mais eficiente a Regularização Dimensional (BREITENLOHNER; MAISON, 1977), ('t HOOFT, 1971), ('t HOOFT; VELTMAN, 1972).

Esse procedimento, entretanto, encontra dificuldades no tratamento de modelos que se tornam mal definidos fora da sua dimensão física. Em teorias supersimétricas (de forma simplificada, teorias com simetria entre bósons e férmions), por exemplo, a extensão analítica das dimensões do espaço-tempo de 4 para d conduz a um desajuste entre os graus de liberdade fermiônicos e bosônicos da teoria, originando uma quebra de simetria nas relações supersimétricas. Isso motiva a utilização de um esquema de regularização que, além de preservar as simetrias do modelo, seja amigável do ponto de vista de cálculo das amplitudes de probabilidade. Um esquema de regularização ideal deveria possuir as seguintes características:

1. funcionar diretamente na dimensão física do modelo;
2. preservar simetrias de maneira automática, para teorias sem conteúdo anômalo;
3. tratar as anomalias de maneira adequada
4. ser aplicável a teorias não-massivas originalmente livres de divergências infravermelhas de maneira segura, mantendo a teoria livre de tais divergências;
5. não introduzir novas estruturas na Lagrangiana da teoria;
6. não ser complicado do ponto de vista do cálculo algébrico das integrais de Feynman.

Há algum tempo, um procedimento no espaço dos momentos que compartilha algumas das características da Regularização Diferencial (FREEDMAN; JOHNSON; LATORRE, 1992) (que é executada com as amplitudes escritas como distribuições no espaço das configurações) foi proposto, tendo sido usado com grande sucesso em muitas teorias. Tal procedimento, batizado de Regularização Implícita (RI) (BATTISTEL; MOTA; NEMES, 1998) (BATTISTEL, 1999), opera no espaço dos momentos e na dimensão física da teoria.

A Regularização Implícita pode ser formulada por um conjunto de regras. A ideia básica do procedimento de Regularização Implícita de uma integral de Feynman é assumir, antes de manipular os integrandos, a presença implícita de algum esquema ou função genérica reguladora $\rho(k^2, \Lambda)$, que permite a manipulação algébrica dos integrandos com o objetivo de separar sua parte dependente de regularização da parte finita (CAMARGO, 2013):

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \to \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k)\rho(k^2,\Lambda) \equiv \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k)\,, \tag{246}$$

em que o índice Λ nas integrais é para indicar que elas estão regularizadas. Importante destacar que a função reguladora deve definir uma integral absolutamente convergente, ou seja

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left| f(k)\rho(k^2,\Lambda) \right| < \infty\,. \tag{247}$$

A primeira coisa a ser feita é supor que uma regularização é aplicada à amplitude completa, de modo que as manipulações algébricas podem ser realizadas no integrando. Em seguida, realizamos a álgebra do grupo de simetrias e escrevemos a amplitude no espaço dos momentos como uma combinação de integrais básicas, multiplicadas por polinômios do momento externo ao *loop* e objetos típicos do grupo de simetrias. Damos abaixo exemplos de integrais básicas:

$$\begin{aligned} I &= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}, \\ I_\mu &= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}, \\ I_{\mu\nu} &= \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}\,. \end{aligned} \tag{248}$$

Cada uma dessas integrais básicas pode ser tratada de acordo com um conjunto de regras. Assim, uma tabela com seus resultados pode ser usada sempre que um novo cálculo está sendo executado. As regras de Regularização Implícita Restrita para cálculos na ordem de 1-*loop* podem ser descritas como:

1. uma amplitude é considerada regularizada com uma técnica que é mantida implícita e que tem as propriedades de não modificar nem o integrando nem a dimensão do espaço-tempo. A primeira propriedade é para preservar a parte finita e a segunda é um requisito para não violar Supersimetria;

2. para obter a parte divergente de uma integral básica, aplicamos recursivamente a identidade,

$$\frac{1}{(p-k)^2-m^2} = \frac{1}{(k^2-m^2)} - \frac{p^2-2p\cdot k}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}, \tag{249}$$

   até que a parte divergente não apresente o momento externo p no denominador. Isso vai garantir contratermos locais. Os integrandos das partes divergentes são escritos somente em termos do momento interno nos *loops*, de forma que essas integrais não precisam ser avaliadas. A independência das integrais divergentes do momento externo é uma característica altamente desejável, já que necessitamos de contratermos locais na Lagrangiana do modelo, para fins de renormalização. Além disso, essas integrais divergentes podem ser escritas como uma função de um parâmetro de massa arbitrário que caracteriza a liberdade de separação da parte divergente de uma amplitude e desempenha o papel de escala na equação do grupo de renormalização (DIAS, 2008). As integrais divergentes restantes têm a forma

$$\int_k^\Lambda \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2} \cdots}{(k^2 - m^2)^\alpha}, \tag{250}$$

em que usamos $\int_k$ como uma notação simplificada de $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$;

3. as integrais divergentes com índices de Lorentz devem ser expressas em termos de integrais escalares divergentes e termos de superfície. Os termos que possivelmente quebram as simetrias são os chamados termos de superfície, que são identificados como diferenças entre divergências básicas de mesmo grau de divergência. Essas diferenças são finitas, mas dependentes de regularização. Por exemplo:

$$\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} = \frac{1}{4} \left\{ \eta_{\mu\nu} \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left[\frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \right] \right\}. \tag{251}$$

Elas podem ser parametrizadas por constantes a serem ajustadas. Pode-se lidar com os termos de superfície por meio da adição de contratermos locais à Lagrangiana, de tal forma que as identidades de Slavnov-Taylor sejam satisfeitas. No entanto, um procedimento que automaticamente as satisfaça é desejável. Termos de superfície não nulos implicam que a amplitude depende da escolha de roteamento do momento. Na prática, defini-los como zero desde o início é equivalente a cancelar esses termos de superfície por meio de contratermos de restauração da simetria local;

4. finalmente, a parte divergente das integrais é escrita como uma combinação das divergências básicas

$$I_{\log}\left(m^2\right) = \int_k^\Lambda \frac{1}{\left(k^2 - m^2\right)^2} \quad \text{e} \quad I_{\text{quad}}\left(m^2\right) = \int_k^\Lambda \frac{1}{\left(k^2 - m^2\right)}, \tag{252}$$

o que exigirá contratermos locais no processo de renormalização.

Vamos agora apresentar um exemplo para mostrar como a regularização implícita tradicional se aplica a uma amplitude completa, a fim de comparar com o novo procedimento proposto. Consideramos o tensor de polarização do vácuo da Eletrodinâmica Quântica espinorial, representado na Figura 13.

Após o uso das regras de Feynman, temos a amplitude

$$-iq\Pi^{\mu\nu} = q^2 \int_k^\Lambda \frac{\text{tr}\left\{\gamma^\mu (\not{k} - \not{p} + m)\gamma^\nu (\not{k} + m)\right\}}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]}. \tag{253}$$

Seguindo os passos listados acima, primeiramente calculamos o traço e escrevemos a amplitude como uma combinação de integrais básicas. Ficamos com:

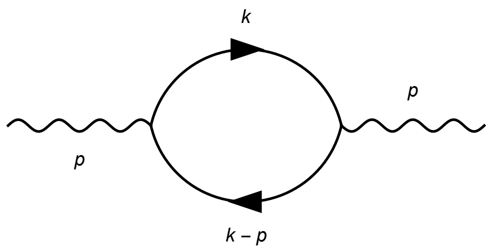

Figura 13 – Tensor de polarização da QED.

$$-iq\Pi^{\mu\nu} = -4q^2 \left\{ 2I^{\mu\nu} - p^\mu I^\nu - p^\nu I^\mu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left[I_{quad}(m^2) + I_1 - p^2 I \right] \right\}, \tag{254}$$

em que I, I_μ e $I_{\mu\nu}$ são definidas na equação (248), $I_{quad}(m^2)$ dado por (252) e

$$I_1 = \int_k^\Lambda \frac{1}{(k-p)^2 - m^2}. \tag{255}$$

A próxima etapa é calcular cada uma das integrais. Nos Apêndices E e F apresentamos os cálculos detalhados das integrais I e I_μ respectivamente. No apêndice G apresentamos a parte inicial, detalhada, dos cálculos de $I_{\mu\nu}$, com a aplicação recursiva da identidade (249) a fim de separar a parte finita da parte dependente de regularização. Temos, depois de descartar as integrais nulas

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^2} - p^2 \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3} + 4p^\alpha p^\beta \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2-m^2)^4} + \\ &+ p^4 \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^4} - \int_k \frac{[p^2 - 2(p\cdot k)]^3 k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^4[(k-p)^2 - m^2]}. \end{aligned} \tag{256}$$

A primeira integral é quadraticamente divergente e a segunda e terceira integrais são logaritmicamente divergentes. Usamos o procedimento de (251) para obter as divergências básicas escalares e seguimos a notação de Vieira, Cherchiglia e Sampaio (2016):

$$\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^2} = \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left[I_{quad}(m^2) - \upsilon_2 \right], \tag{257}$$

$$\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3} = \frac{\eta_{\mu\nu}}{4}\left[I_{log}(m^2) - \upsilon_0 \right], \tag{258}$$

$$\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2-m^2)^4} = \frac{\eta_{\mu\nu\alpha\beta}}{24}\left[I_{log}(m^2) - \xi_0 \right], \tag{259}$$

sendo $\eta_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}$ e onde υ_0, υ_2 e ξ_0 são termos de superfície. Esses termos são arbitrários e dependentes de regularização por serem diferenças entre duas integrais com o mesmo grau de divergência, como mostrado na equação (251). Nesse caso, os índices 0 e 2 correspondem às divergências logarítmicas e quadráticas, respectivamente.

As duas últimas integrais em (256) são finitas e podem ser resolvidas. A parametrização de Feynman pode ser aplicada quando necessária, como na última integral. Note que a alta potência do momento no numerador e no denominador resulta em um cálculo longo e trabalhoso. O resultado final para $I_{\mu\nu}$ é dado por

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} I_{quad}(m^2) + \frac{1}{12}\left(-p^2\eta_{\mu\nu} + 4p_\mu p_\nu\right) I_{log}(m^2) - \frac{\eta_{\mu\nu}}{12}(6\upsilon_2 - 3p^2\upsilon_0 + 2p^2\xi_0) + \\ &- \frac{p_\mu p_\nu}{3}\xi_0 + \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{\frac{1}{18}(p_\mu p_\nu - p^2\eta_{\mu\nu}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12p^2}\left[(p^2 - 4m^2)p^2\eta_{\mu\nu} - 4(p^2 - m^2)p_\mu p_\nu\right] Z_0(p^2, m^2, m^2, m^2)\right\}, \end{aligned} \tag{260}$$

sendo

$$Z_k(p^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \int_0^1 dz\ z^k \ln\left\{\frac{p^2 z(1-z) + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2}{(-m_3^2)}\right\}. \tag{261}$$

O mesmo procedimento é usado para calcular as outras integrais de Feynman. Obtemos, para o tensor de polarização do vácuo,

$$\begin{aligned} -iq\Pi^{\mu\nu} &= -\frac{4}{3}(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\left\{I_{log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}\left[\frac{(p^2 + 2m^2)}{p^2} Z_0(p^2, m^2) + \frac{1}{3}\right]\right\} + \\ &- 4\upsilon_2\eta^{\mu\nu} + \frac{4}{3}\left\{\upsilon_0(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) - (2p^\mu p^\nu + p^2\eta^{\mu\nu})(\xi_0 - 2\upsilon_0)\right\}, \end{aligned} \tag{262}$$

no qual, por economia, usamos $Z_k(p^2, m^2, m^2, m^2) \equiv Z_k(p^2, m^2)$. Note que a amplitude é transversal se $\upsilon_2 = 0$ e $\xi_0 = 2\upsilon_0$. Essa abordagem da Regularização Implícita, em que os termos de superfície são parametrizados e fixados no final é útil quando o modelo sob investigação apresenta ambiguidades como nos casos de anomalias chirais ou teorias de campo topológicas (VIGLIONI et al., 2016). Uma versão restrita da Regularização Implícita, na qual os termos de superfície são fixados nulos de início, preserva as simetrias de calibre abeliana e não-abeliana (DIAS et al., 2008), (OTTONI et al., 2006), (SCARPELLI; SAMPAIO; NEMES, 2001), (SCARPELLI et al., 2001), e a Supersimetria (SAMPAIO et al., 2006).

6 Resultados

Este capítulo apresenta os resultados obtidos e foi escrito com base no artigo *Advances towards the systematization of calculations with Implicit Regularization* (Avanços em direção a uma sistematização de cálculos com Regularização Implícita) (FELIPPE et al., 2022), publicado em julho de 2022 no periódico *European Physical Journal C*. Nesse artigo, desenvolvemos um novo procedimento para aplicação da Regularização Implícita Restrita. Ressaltamos ainda que aplicamos esse novo procedimento no cálculo de uma Integral de Feynman no artigo *Gauge embedding procedure: classical and quantum equivalence between dual models* (Procedimento de imersão em calibre: equivalência clássica e quântica entre modelos duais) (MARQUES et al., 2022), publicado em março de 2022 no periódico *European Physical Journal C*.

6.1 Uma nova abordagem para a Regularização Implícita Restrita

A ideia básica da Regularização Implícita Restrita, como já discutimos, é supor a presença de uma regularização com o objetivo de usar identidades matemáticas para separar a parte dependente de regularização da parte finita. A parte divergente é uma combinação de divergências básicas escalares, que são obtidas após o uso de relações de consistência que eliminam termos de superfície. Aqui, propomos um novo procedimento para aplicação da Regularização Implícita Restrita que mantém os princípios do procedimento original, mas que simplifica enormemente o processo de cálculo. As regras estão listadas abaixo:

1. como no procedimento original, presume-se que um esquema de regularização mantido implícito está agindo de forma completa na amplitude com as mesmas características desejáveis já apresentadas;

2. a parametrização de Feynman é aplicada à amplitude completa. Isso irá garantir que o *shift* necessário no momento de integração é apenas uma modificação no momento interno do *loop*;

3. realiza-se a álgebra do grupo de simetria;

4. as integrais nos momentos são separadas por grau de divergência, todas com potências pares do momento de integração no numerador, do tipo

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1,\ k_\mu k_\nu,\ k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta,\ \cdots}{(k^2+H^2)^n}, \tag{263}$$

sendo H^2 função dos momentos externos, das massas e dos parâmetros de Feynman. Se fatores de k^2 aparecem no numerador, eles devem ser cancelados com fatores do denominador adicionando e subtraindo H^2;

5. para as partes divergentes, os termos de superfície são eliminados por meio das relações de consistência, a fim de obter integrais escalares. Para integrais logaritmicamente e quadraticamente divergentes de 1-*loop*, definimos, respectivamente,

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2} \cdots k_{\mu_n}}{(k^2+H^2)^{2+\frac{n}{2}}} = \frac{\eta_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}}{2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}+1)!} \left\{ \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+H^2)^2} - \alpha_{\frac{n}{2}} \right\}, \tag{264}$$

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2} \cdots k_{\mu_n}}{(k^2+H^2)^{1+\frac{n}{2}}} = \frac{\eta_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}}{2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!} \left\{ \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+H^2)} - \beta_{\frac{n}{2}} \right\}, \tag{265}$$

em que n é par e $\eta_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ é a combinação simétrica dos produtos dos tensores métricos, $\eta_{\mu_1\mu_2} \cdots \eta_{\mu_{n-1}\mu_n}$, com coeficiente 1. Na expressão acima, deixamos os parâmetros para os termos de superfície $\alpha_{\frac{n}{2}}$ e $\beta_{\frac{n}{2}}$ apenas para completude, já que na versão restrita da Regularização Implícita eles são fixados nulos. Para obter as relações acima, usamos recursivamente a relação,

$$\int_k^{\Lambda} \frac{\partial}{\partial k^{\mu_n}} \left(\frac{k_{\mu_1} \cdots k_{\mu_{n-1}}}{(k^2+H^2)^{m-1}} \right) = \int_k^{\Lambda} \frac{S[\eta_{\mu_1\mu_n} k_{\mu_2} \cdots k_{\mu_{n-1}}]}{(k^2+H^2)^{m-1}} - 2(m-1) \int_k^{\Lambda} \frac{k_{\mu_1} \cdots k_{\mu_n}}{(k^2+H^2)^m}, \tag{266}$$

até que a primeira integral do segundo membro da equação seja escalar. Além de duas integrais, incluindo a escalar, todas as outras serão termos de superfície e são reunidas em um parâmetro. Na equação acima, definimos $S[T_{\mu_1\cdots\mu_n}]$ como a simetrização mínima do tensor T, no sentido de que apenas termos distintos são considerados e todos eles têm coeficiente 1. Por exemplo, $S[k_\mu k_\nu p_\alpha] = k_\mu k_\nu p_\alpha + k_\mu k_\alpha p_\nu + k_\nu k_\alpha p_\mu$. É importante notar que $m = \frac{n}{2} + 2$ para divergências logarítmicas e $m = \frac{n}{2} + 1$ para divergências quadráticas. Pelas definições da equação (252), as divergências escalares restantes acima são

$$I_{\log}\left(-H^2\right) = \int_k^{\Lambda} \frac{1}{(k^2+H^2)^2}, \tag{267}$$

$$I_{\text{quad}}\left(-H^2\right) = \int_k^{\Lambda} \frac{1}{\left(k^2+H^2\right)}. \tag{268}$$

6. o próximo passo, que é uma das ideias básicas da Regularização Implícita, é o uso de identidades algébricas para obter as integrais divergentes livres dos momentos externos. Aqui, usamos recursivamente uma expansão mais simples,

$$\frac{1}{k^2+H^2} = \frac{1}{k^2-\lambda^2} - \frac{\lambda^2+H^2}{(k^2-\lambda^2)(k^2+H^2)}. \tag{269}$$

Temos a vantagem de obter expressões fechadas para serem usadas em qualquer cálculo:

$$I_{\log}\left(-H^2\right) = I_{\log}\left(\lambda^2\right) - \frac{i}{16\pi^2}\ln\left(-\frac{H^2}{\lambda^2}\right), \tag{270}$$

$$I_{\text{quad}}\left(-H^2\right) = I_{\text{quad}}\left(\lambda^2\right) - \left(\lambda^2 + H^2\right) I_{\log}\left(\lambda^2\right) - \frac{i}{16\pi^2}\left[\lambda^2 + H^2 - H^2\ln\left(-\frac{H^2}{\lambda^2}\right)\right]. \tag{271}$$

Estas são chamadas de relações de escala, que, como subproduto, introduzem uma escala de energia $\left(\lambda^2\right)$ para o grupo de renormalização que pode ser simplesmente uma das massas do modelo. No Apêndice (H), as relações de escala (270) e (271) são calculadas passo-a-passo. As divergências básicas agora são fatoradas a partir das integrais nos parâmetros de Feynman, que podem ser calculados. Como na formulação tradicional da Regularização Implícita, a parte divergente das amplitudes é escrita em termos dessas divergências básicas: $I_{\log}\left(\lambda^2\right)$, $I_{\text{quad}}\left(\lambda^2\right)$, etc.

Essa nova formulação simplifica muito os cálculos das partes finitas. Uma vantagem adicional está relacionada a modelos que apresentam campos com massas diferentes ou campos não massivos. Em modelos não massivos, a formulação tradicional requer que uma massa fictícia seja introduzida no propagador para que a expansão no integrando possa ser realizada. No final do cálculo, as relações de escala são usadas para remover a massa fictícia da parte divergente de forma que o limite da massa indo para zero possa ser tomado. Na nova formulação, o procedimento é unificado, pois toda a dependência de massa está dentro de H^2.

Vamos agora realizar o mesmo cálculo para o tensor de polarização do vácuo da QED do ponto de vista do presente procedimento. Depois de aplicar a parametrização de Feynman em (253) e realizar a mudança (*shift*) $k \longrightarrow k + px$, obtemos

$$-iq\Pi^{\mu\nu} = q^2 \int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{\operatorname{tr}\{\gamma^\mu[\not{k} + (x-1)\not{p} + m]\gamma^\nu[\not{k} + x\not{p} + m]\}}{(k^2 + H^2)^2}, \tag{272}$$

com $H^2 = p^2 x(1-x) - m^2$. Após calcular o traço, e ficando apenas com termos pares em k^μ, e cancelando termos em k^2 pela adição e subtração de H^2, ficamos com

$$\begin{aligned} -iq\Pi^{\mu\nu} &= 4q^2 \int_0^1 dx \left\{ -\eta^{\mu\nu} \int_k^\Lambda \frac{1}{k^2 + H^2} + 2\int_k^\Lambda \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + H^2)^2} + \right. \\ &+ \left. 2(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)x(1-x)\int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 + H^2)^2} \right\}. \end{aligned} \tag{273}$$

As duas primeiras integrais, que são quadraticamente divergentes, se cancelam se usarmos a equação (257) e fixarmos $\upsilon_2 = 0$, como prescrito pela Regularização Implícita Restrita. Para a integral restante, $I_{\log}(-H^2)$, usamos a relação de escala (270), com a massa m no lugar de λ, e então a amplitude é escrita como

$$-iq\Pi^{\mu\nu} = 8q^2(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\int_0^1 dx\, x(1-x)\left\{I_{\log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2}\ln\left(-\frac{H^2}{m^2}\right)\right\}. \tag{274}$$

Finalmente, obtemos

$$-iq\Pi^{\mu\nu} = \frac{4}{3}(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\left\{I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}\left[\frac{(p^2+2m^2)}{p^2}Z_0(p^2,m^2) + \frac{1}{3}\right]\right\}, \tag{275}$$

onde foi utilizada a relação

$$Z_k(p^2,m^2) = \frac{1}{(k+1)p^2}\left\{kp^2 Z_{k-1}(p^2,m^2) - (k-1)m^2 Z_{k-2}(p^2,m^2) - \frac{(k-1)}{k(k+1)}p^2\right\}. \tag{276}$$

No Apêndice I, desenvolvemos os cálculos detalhados que dão origem à relação (276) entre as funções Z_k definidas por (261).

Este é um cálculo muito direto e compacto. Observe que o procedimento seria idêntico no caso da QED não massiva, com a modificação de H^2 e o uso de uma escala arbitrária λ no lugar da massa m.

Vamos agora apresentar um outro exemplo de cálculo, representado na Figura 14, o qual é um pouco mais elaborado que o tensor de polarização do vácuo da QED. Vamos considerar a

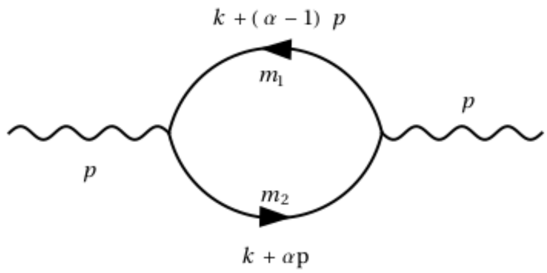

Figura 14 – Diagrama de Feynman que contribui para a autoenergia de um campo vetorial massivo. Os campos fermiônicos no *loop* têm massas diferentes e o roteamento do momento na amplitude é $k + (\alpha - 1)p$ para o propagador com massa m_1 e $k + \alpha p$ para o propagador com massa m_2.

autoenergia do campo vetorial em que os dois férmions no *loop* têm massas diferentes. É o caso da influência dos quarks pesados, o *doublet* (t,b), nas correções na massa do bóson W. Vamos também, por razões pedagógicas, atribuir uma distribuição arbitrária de momentos nas linhas internas. A amplitude é proporcional a

$$\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) = \int_k^\Lambda \frac{\mathrm{tr}\gamma^\mu\left[\not{k} + (\alpha-1)\not{p} + m_2\right]\gamma^\nu\left[\not{k} + \alpha\not{p} + m_1\right]}{[(k+\alpha p)^2 - m_1^2]\{[k+(\alpha-1)p]^2 - m_2^2\}}, \tag{277}$$

a qual, após a parametrização de Feynman, com o *shift* $k \to k + (x-\alpha)p$, resulta em

$$\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) = \int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{\mathrm{tr}\,\{\gamma^\mu[\not{k} + (x-1)\not{p} + m_2]\gamma^\nu[\not{k} + x\not{p} + m_1]\}}{(k^2+H^2)^2}, \tag{278}$$

com $H^2 = p^2x(1-x) + (m_1^2 - m_2^2)x - m_1^2$. Note que toda a dependência do parâmetro α desaparece. Em outras palavras, quando a parametrização de Feynman é aplicada em toda a amplitude, preserva-se a invariância de roteamento do momento. Depois de calcular o traço, e restando apenas os termos pares em k^μ, e cancelando os termos em k^2 pela adição e subtração de H^2, ficamos com

$$\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) = 4\int_0^1 dx \left\{ -\eta^{\mu\nu}\int_k^\Lambda \frac{1}{k^2+H^2} + 2\int_k^\Lambda \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2+H^2)^2} + \right.$$
$$\left. + \left\{2(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)x(1-x) + (m_1-m_2)[(m_1+m_2)x - m_1]\eta^{\mu\nu}\right\}\int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2+H^2)^2}\right\}. \tag{279}$$

As duas primeiras integrais, que são quadraticamente divergentes, se cancelam usando a equação (257) e fixando $\upsilon_2 = 0$, como prescrito pela Regularização Implícita Restrita. Para a integral restante, $I_{\log}(-H^2)$, usamos a relação de escala (270), e então a amplitude é escrita como

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) &= 4\int_0^1 dx \left\{2(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)x(1-x) + (m_1-m_2)[(m_1+m_2)x - m_1]\eta^{\mu\nu}\right\} \\ &\times \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2}\ln\left(-\frac{H^2}{\lambda^2}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{280}$$

Finalmente, obtemos

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) &= 8(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\left\{\frac{1}{6}I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}(\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2)\right\} \\ &+ 4(m_1-m_2)\eta^{\mu\nu}\left\{-\frac{1}{2}(m_1-m_2)I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}[(m_1+m_2)\tilde{Z}_1 - m_1\tilde{Z}_0]\right\},\end{aligned} \tag{281}$$

em que $\tilde{Z}_k$ é uma abreviação para $\tilde{Z}_k(p^2,m_1^2,m_2^2,\lambda^2)$. É interessante notar que, uma vez que o campo vetorial é massivo, o tensor de polarização não é transverso. Em vez disso, a amplitude obedece à relação

$$\begin{aligned}p_\nu\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) &= 4(m_1-m_2)p^\mu\left\{-\frac{1}{2}(m_1-m_2)I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}[(m_1+m_2)\tilde{Z}_1 - m_1\tilde{Z}_0]\right\} \\ &= (m_1-m_2)T^\mu,\end{aligned} \tag{282}$$

em que

$$T^\mu = \int_k^\Lambda \frac{\mathrm{tr}\left\{\gamma^\mu(\not{k} - \not{p} + m_2)(\not{k} + m_1)\right\}}{(k^2-m_1^2)[(k-p)^2 - m_2^2]}. \tag{283}$$

No Apêndice J, desenvolvemos o cálculo detalhado da amplitude $\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2)$.

É importante comentar o fato de que alguns aspectos dessa abordagem são semelhantes a alguns procedimentos adotados na Regularização de *Loop* (LORE). No caso do LORE, após a parametrização de Feynman na amplitude, são aplicadas condições de consistência que, na prática, descartam os termos de superfície. Tais condições, que são as mesmas da Regularização Implícita, foram determinadas, nesse caso, pela exigência de que simetrias fossem respeitadas em amplitudes específicas (WU, 2003) e então generalizadas. As integrais de *loop* divergentes escalares restantes, entretanto, são calculadas usando um procedimento semelhante à regularização de Pauli-Villars (PAULI; VILLARS, 1949). Por outro lado, a Regularização Implícita é baseada na eliminação dos termos de superfície e na expansão do integrando de forma que a renormalização necessite apenas de contratermos locais. As integrais divergentes restantes não precisam ser calculadas explicitamente.

6.2 Uma sistematização para o cálculo de integrais de 1-*loop*

Apresentamos agora uma sistematização do cálculo de integrais de Feynman de 1-*loop*, até as divergências quadráticas, no âmbito desta nova abordagem para Regularização Implícita. A metodologia que realizamos nesta seção se aplica a integrais que fazem parte da amplitude. Devemos tomar esse cuidado, uma vez que um dos princípios adotados nesta abordagem é a aplicação da parametrização de Feynman à amplitude como um todo para garantir que o *shift* ocorra como uma redefinição no roteamento do momento no *loop*. É possível realizar a álgebra de simetria e escrever a amplitude como uma combinação de integrais, e então parametrizar cada uma das integrais.

Vamos começar com uma integral de 1-*loop* geral com grau logarítmico de divergência, que é escrita como

$$I^{(0)}_{\mu_1\cdots\mu_n} = \int_k^\Lambda \frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_n}}{(k^2-m^2)[(p_1-k)^2-m_1^2]\cdots[(p_r-k)^2-m_r^2]}, \tag{284}$$

com $r = 1 + \frac{n}{2}$. O primeiro passo é aplicar a parametrização de Feynman. Usamos

$$\frac{1}{a_1\cdots a_r b} = r! \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-\sum_{i=1}^{r-1} x_i} dx_r \frac{1}{\left[\sum_{k=1}^r (a_k - b)x_k + b\right]^{r+1}}, \tag{285}$$

com $a_k = [(p_k-k)^2 - m_k^2]$ e $b = (k^2 - m^2)$. Considerando que o denominador é dado por D^{r+1}, é possível rearranjar D de modo a escrever

$$D = \left[k - \sum_{k=1}^r p_k x_k\right]^2 + Q^2, \tag{286}$$

com

$$Q^2 = \sum_{k=1}^r \left[p_k^2 x_k(1-x_k) + (m^2 - m_k^2)x_k\right] - \sum_{k\neq l}(p_k\cdot p_l)x_k x_l - m^2 \tag{287}$$

Agora temos que realizar o *shift* na integral no momento: $k \longrightarrow k + q$, sendo $q_\mu = \left[\sum_{k=1}^r p_k x_k\right]_\mu$, e temos, no numerador,

$$N_{\mu_1\cdots\mu_n} = \prod_{i=1}^n (k+q)_{\mu_i}, \tag{288}$$

no qual somente potências pares de k sobrevivem. Vamos renomear o numerador remanescente como $\tilde{N}_{\mu_1\cdots\mu_n}$. E então a amplitude logaritmicamente divergente é dada por

$$I^{(0)}_{\mu_1\cdots\mu_n} = r!\int dX \int_k \frac{\tilde{N}_{\mu_1\cdots\mu_n}}{[k^2+Q^2]^{r+1}}, \tag{289}$$

onde $\int dX$ se refere a todas as integrais nos parâmetros de Feynman. A potência mais alta em k em $\tilde{N}_{\mu_1\cdots\mu_n}$ é responsável pela divergência logarítmica. Todos os outros termos são finitos. Para a parte divergente, temos

$$\begin{aligned} I^{(0)\Lambda}_{\mu_1\cdots\mu_n} &= r!\int dX \int_k^\Lambda \frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_n}}{(k^2+Q^2)^{r+1}} \\ &= \frac{\eta_{\mu_1\cdots\mu_n}}{2^{\frac{n}{2}}}\int dX \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2+Q^2)^2}, \end{aligned} \tag{290}$$

na qual usamos a relação de consistência de (264) e o fato de que $r=\frac{n}{2}+1$. Depois usamos a relação de escala (270) para obter

$$I^{(0)\Lambda}_{\mu_1\cdots\mu_n} = \frac{\eta_{\mu_1\cdots\mu_n}}{2^{\frac{n}{2}}}\int dX \left\{I_{\log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2}\ln\left(-\frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\right\}. \tag{291}$$

A única parte dependente dos parâmetros de Feynman é a que contem Q^2. A outra parte pode ser fatorada para fora da integral. O resultado final é dado por

$$I^{\Lambda}_{\mu_1\cdots\mu_n} = \frac{\eta_{\mu_1\cdots\mu_n}}{2^{\frac{n}{2}}}\left\{\frac{1}{r!}\left[I_{\log}(m^2)\right] - \frac{i}{16\pi^2}Z^{(r,0)}\right\}, \tag{292}$$

no qual definimos a função

$$\begin{aligned} Z^{(r,k_1,\cdots,k_r)}_{\mu_1\cdots\mu_i} &= Z^{(r,k_1,\cdots,k_r)}_{\mu_1\cdots\mu_i}(p_1,\cdots,p_r,m_1^2,\cdots,m_r^2,m^2) \\ &\equiv \int dX\, q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_i}x_1^{k_1}\cdots x_r^{k_r}\ln\left(-\frac{Q^2}{m^2}\right). \end{aligned} \tag{293}$$

Vamos agora tratar os outros termos finitos, que aparecem se $n\geq 2$. Um típico termo finito de (289) é

$$F^{(l)}_{\mu_1\cdots\mu_n} = r!\int dX\, S\left[A_{\mu_1\cdots\mu_l}q_{\mu_{l+1}}\cdots q_{\mu_n}\right], \tag{294}$$

com $l<n$ par e

$$A_{\mu_1\cdots\mu_l} = \int_k \frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_l}}{(k^2+Q^2)^{r+1}} = \frac{i}{16\pi^2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-l}{2}\right)}{2^{\frac{l}{2}}\Gamma(r+1)}\frac{1}{(Q^2)^{\frac{n-l}{2}}}\eta_{\mu_1\cdots\mu_l}. \tag{295}$$

Ficamos então com

$$\begin{aligned} F^{(l)}_{\mu_1\cdots\mu_n} &= \frac{i}{16\pi^2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-l}{2}\right)}{2^{\frac{l}{2}}} S\left[\eta_{\mu_1\cdots\mu_l}\int dX \frac{q_{\mu_{l+1}}\cdots q_{\mu_n}}{(Q^2)^{\frac{n-l}{2}}}\right] \\ &= \frac{i}{16\pi^2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-l}{2}\right)}{2^{\frac{l}{2}}} S\left[\eta_{\mu_1\cdots\mu_l}Y^{(r,\frac{n-l}{2})}_{\mu_{l+1}\cdots\mu_n}\right], \end{aligned} \tag{296}$$

onde

$$Y^{(r,l)}_{\mu_1\cdots\mu_n} = Y^{(r,l)}_{\mu_1\cdots\mu_n}(p_1,\cdots,p_r,m_1^2,\cdots,m_r^2,m^2) \equiv \int dx_1\cdots dx_r \, \frac{q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_n}}{(Q^2)^l}. \tag{297}$$

Finalmente, podemos escrever o resultado geral como

$$\begin{aligned} I^{(0)}_{\mu_1\cdots\mu_n} &= \frac{\eta_{\mu_1\cdots\mu_n}}{2^{\frac{n}{2}}}\left\{\frac{1}{r!}I_{\log}\left(m^2\right) - \frac{i}{16\pi^2}Z^{(r,0)}\right\} + \\ &+ \frac{i}{16\pi^2}\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2i}{2}\right)}{2^i}S\left[\eta_{\mu_1\cdots\mu_{2i}}Y^{\left(r,\frac{n-2i}{2}\right)}_{\mu_{2i+1}\cdots\mu_n}\right]; \qquad r = \frac{n}{2}+1, \end{aligned} \tag{298}$$

na qual substituímos l por $2i$, uma vez que l é par.

Para uma integral linearmente divergente,

$$I^{(1)}_{\mu_1\cdots\mu_n} = \int_k^\Lambda \frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_n}}{(k^2-m^2)[(p_1-k)^2-m_1^2]\cdots[(p_r-k)^2-m_r^2]}, \tag{299}$$

com n ímpar e $r = \frac{n+1}{2}$, o procedimento é similar, com resultado

$$\begin{aligned} I^{(1)}_{\mu_1\cdots\mu_n} &= \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}S\left[\sum_{k=1}^{r}p_{k\mu_1}\eta_{\mu_2\cdots\mu_n}\right]\frac{1}{(r+1)!}I_{\log}\left(m^2\right) + \\ &- \frac{i}{16\pi^2}\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}S\left[Z^{(r,0)}_{\mu_1}\eta_{\mu_2\cdots\mu_n}\right] + \\ &+ \frac{i}{16\pi^2}\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2i-1}{2}\right)}{2^{(2i+1)/2}}S\left[\eta_{\mu_1\cdots\mu_{2i}}Y^{\left(r,\frac{n-2i-1}{2}\right)}_{\mu_{2i+1}\cdots\mu_n}\right]; \qquad r = \frac{n+1}{2}, \end{aligned} \tag{300}$$

na qual o último termo aparece apenas para $n \geq 3$.

De forma a completar a sistematização do cálculo de amplitudes de 1-*loop*, voltamos nossa atenção agora às integrais quadraticamente divergentes, $I^{(2)}_{\mu_1\cdots\mu_n}$. Uma vez que o cálculo é mais elaborado, vamos mostrar os passos principais. A integral a ser calculada tem a mesma forma de (284), mas com $r = \frac{n}{2}$, n par. Após a parametrização de Feynman, obtemos a expressão de (289), que será dividida em três partes: a potência mais alta em k no numerador é quadraticamente divergente; a $(n-2)$-ésima potência em k no numerador é logaritmicamente divergente; e a $(n-4)$-ésima potência em k e potências menores, se existirem, são finitas. É importante notar que mesmo as duas partes divergentes contribuem para o resultado finito, como fica evidente pelos cálculos apresentados anteriormente.

Vamos começar com a divergência quadrática:

$$\begin{aligned} I^{(2),1}_{\mu_1\cdots\mu_n} &= \left(\frac{n}{2}\right)! \int dX \int_k^\Lambda \frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_n}}{(k^2+Q^2)^{\frac{n}{2}+1}} \\ &= \frac{\eta_{\mu_1\cdots\mu_n}}{2^{\frac{n}{2}}}\int dX \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2+Q^2)}, \end{aligned} \tag{301}$$

com o uso de (265). Em seguida, recorremos à relação de escala da equação (271) para obter

$$\begin{aligned}
I^{(2),1}_{\mu_1\cdots\mu_n} &= \frac{\eta_{\mu_1\cdots\mu_n}}{2^{\frac{n}{2}}}\int dX\,\left\{I_{\text{quad}}(m^2)-(m^2+Q^2)\left[I_{\log}(m^2)+\frac{i}{16\pi^2}\right]+\frac{i}{16\pi^2}Q^2\ln\left(-\frac{Q^2}{m^2}\right)\right\}\\
&= \frac{\eta_{\mu_1\cdots\mu_n}}{2^{\frac{n}{2}}}\left\{\frac{1}{(\frac{n}{2})!}I_{\text{quad}}(m^2)-\frac{1}{(\frac{n}{2}+2)!}\left\{\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{n}{2}p_k^2+\left(\frac{n}{2}+2\right)(m^2-m_k^2)\right]+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\sum_{k\neq l}(p_k\cdot p_l)\right\}\left[I_{\log}(m^2)+\frac{i}{16\pi^2}\right]+\frac{1}{16\pi^2}\int dX\,Q^2\ln\left(-\frac{Q^2}{m^2}\right)\right\},
\end{aligned}\tag{302}$$

em que a última integral pode ser escrita em termos das funções $Z^{(r,k_1,\cdots,k_r)}$.

Para a divergência logarítmica, temos

$$\begin{aligned}
I^{(2),2}_{\mu_1\cdots\mu_n} &= \left(\frac{n}{2}\right)!\int dX\,S\left[q_{\mu_1}q_{\mu_2}\int_k\frac{k_{\mu_3}\cdots k_{\mu_n}}{(k^2+Q^2)^{\frac{n}{2}+1}}\right]\\
&= \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\int dX\,S[q_{\mu_1}q_{\mu_2}\eta_{\mu_3\cdots\mu_n}]\left\{I_{\log}(m^2)-\frac{i}{16\pi^2}\ln\left(-\frac{Q^2}{m^2}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}S\left\{\eta_{\mu_3\cdots\mu_n}\left[\frac{1}{(\frac{n}{2}+2)!}\left(2\sum_{k=1}^{n/2}p_{k\mu_1}p_{k\mu_2}+\sum_{k\neq l}p_{k\mu_1}p_{l\mu_2}\right)I_{\log}(m^2)+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\frac{i}{16\pi^2}Z^{(n/2,0)}_{\mu_1\mu_2}\right]\right\}.
\end{aligned}\tag{303}$$

A parte finita restante é dada por

$$\begin{aligned}
I^{(2),3}_{\mu_1\cdots\mu_n} &= \left(\frac{n}{2}\right)!\sum_{l=4}^{n}\int dX\,S\left[q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_l}\int_k\frac{k_{\mu_{l+1}}\cdots k_{\mu_n}}{(k^2+Q^2)^{\frac{n}{2}+1}}\right]\\
&= \frac{i}{16\pi^2}\sum_{l=4}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{l}{2}-1\right)}{2^{(n-l)/2}}\int dX\,S\left[q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_l}\eta_{\mu_{l+1}\cdots\mu_n}\right]\frac{1}{(Q^2)^{\frac{l}{2}-1}}\\
&= \frac{i}{16\pi^2}\sum_{i=2}^{n/2}\frac{\Gamma(i-1)}{2^{(n-2i)/2}}S\left[\eta_{\mu_{2i+1}\cdots\mu_n}Y^{(m,i-1)}_{\mu_1\cdots\mu_{2i}}\right].
\end{aligned}\tag{304}$$

O resultado total para a integral quadraticamente divergente é dado por

$$I^{(2)}_{\mu_1\cdots\mu_n}=I^{(2),1}_{\mu_1\cdots\mu_n}+I^{(2),2}_{\mu_1\cdots\mu_n}+I^{(2),3}_{\mu_1\cdots\mu_n}.$$

6.3 Cálculos em ordem superior

Atualmente, há uma grande demanda por previsões teóricas para processos em *next-to-next-to-leading order* (NNLO) e além, principalmente devido à grande quantidade de dados que já foram coletados no LHC (*Large Hadron Collider*). Com esse intuito, novas técnicas de cálculo têm sido desenvolvidas nos últimos anos, que buscam, na medida do possível, preservar a dimensão física do espaço-tempo (HEINRICH, 2021). Cálculos em ordens superiores são geralmente muito longos e intrincados, e procedimentos amigáveis são bem-vindos. No contexto deste novo procedimento para a aplicação da Regularização Implícita, damos algumas orientações para a sistematização de cálculos multi-*loop*.

Na última seção, obtivemos partes finitas gerais que são integrais, nos parâmetros de Feynman, que contêm fatores de $\ln[Q^2/(-m^2)]$ ou potências de $1/Q^2$. A parte desafiadora é aquela que inclui o logaritmo. Com o objetivo de aplicar a parametrização de Feynman, faremos uso da seguinte identidade matemática:

$$\ln a = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(a^{\varepsilon}-1). \tag{305}$$

Em uma visão simplificada, dizemos que $\ln a$ é igual ao coeficiente de primeira ordem da expansão de a^{ε} no limite de pequenos valores de ε.

Então, vamos dar um exemplo em que a parte finita de 1-*loop* é uma integral de uma função com um fator de logaritmo. Consideramos a autoenergia aninhada de dois *loops* do elétron em QED, que é representada na Figura 15.

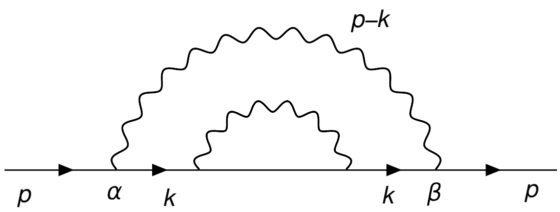

Figura 15 – Diagrama de Feynman da contribuição aninhada para a autoenergia do elétron na ordem de dois *loops*. As linhas onduladas e sólidas representam os propagadores de fótons e férmions, respectivamente.

A parte finita do subgráfico é dada por

$$i\tilde{\Sigma}^{(1)} = 2q^2\frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 dx\,[2m-\not{p}(1-x)]\ln\left(-\frac{H^2}{m^2}\right), \tag{306}$$

com $H^2 = H^2(p^2,m^2) = p^2x(1-x)-m^2x$. A integral para o gráfico 2-*loops* é escrita como

$$i\Sigma^{(2)}(p) = -2iq^4\frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 dx\int_k^{\Lambda}\frac{\gamma^{\alpha}(\not{k}+m)[2m+(x-1)\not{k}](\not{k}+m)\gamma_{\alpha}}{(k^2-m^2)^2(p-k)^2}\ln\left(-\frac{H^2(k^2,m^2)}{m^2}\right). \tag{307}$$

Vamos definir

$$F = -2iq^4\frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 dx\int_k^{\Lambda}\frac{\gamma^{\alpha}(\not{k}+m)[2m+(x-1)\not{k}](\not{k}+m)\gamma_{\alpha}}{(k^2-m^2)^2(p-k)^2}\left(-\frac{H^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}, \tag{308}$$

de forma que $i\Sigma^{(2)}(p) = F_\varepsilon$, sendo F_ε o coeficiente de primeira ordem da expansão de F em potências de ε. Então escrevemos

$$\left(-\frac{H^2}{m^2}\right)^\varepsilon = \left[\frac{x(1-x)}{-m^2}\right]^\varepsilon (k^2 - \tilde{m}^2)^\varepsilon; \quad \tilde{m}^2 = \frac{m^2}{(1-x)}, \tag{309}$$

para obter

$$F = -2iq^4 \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{x(1-x)}{-m^2}\right]^\varepsilon \int_k^\Lambda \frac{\gamma^\alpha(\not{k}+m)[2m+(x-1)\not{k}](\not{k}+m)\gamma_\alpha(k^2-\tilde{m}^2)}{(k^2-m^2)^2(k^2-\tilde{m}^2)^{1-\varepsilon}(p-k)^2}. \tag{310}$$

Na equação acima, multiplicamos o numerador e o denominador por um fator de $(k^2 - \tilde{m}^2)$ por conveniência para obter uma parametrização de Feynman bem definida, da qual obtemos

$$F = -2iq^4 \frac{i}{16\pi^2} \frac{\Gamma(4-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dx \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv\, v \left[\frac{x(1-x)}{(-m^2)(1-u-v)}\right]^\varepsilon \int_k^\Lambda \frac{\tilde{N}}{(k^2+Q^2)^{4-\varepsilon}}, \tag{311}$$

em que $Q^2 = p^2u(1-u) - \tilde{m}^2(1-u-v) - m^2v$ e $\tilde{N}$ é a parte com potências de ordem par em k de

$$N = \gamma^\alpha(\not{k} + \not{p}u + m)[2m + (x-1)(\not{k} + \not{p}u)](\not{k} + \not{p}u + m)\gamma_\alpha\left[(k+pu)^2 - \tilde{m}^2\right]. \tag{312}$$

A parte divergente de F é aquela com termos quárticos em k no numerador. Façamos explicitamente o cálculo desta parte. Depois de realizar a álgebra de Dirac, a parte quártica do numerador é escrita como

$$\begin{aligned} N^{(4)} &= 2k^4[4mx - u(x-1)\not{p}] - 8k^2u(x-1)(p\cdot k)\not{k} \\ &= 2\left(k^2+Q^2\right)^2[4mx - u(x-1)\not{p}] - 4\left(k^2+Q^2\right)Q^2[4mx - u(x-1)\not{p}] \\ &+ 2Q^4[4mx - u(x-1)\not{p}] - 8\left(k^2+Q^2\right)u(x-1)(p\cdot k)\not{k} + \\ &+ 8Q^2u(x-1)(p\cdot k)\not{k}, \end{aligned} \tag{313}$$

na qual adicionamos e subtraímos Q^2 nos fatores de k^2. O primeiro e o quarto termos resultam em integrais logaritmicamente divergentes. Para a primeira, temos

$$\begin{aligned} F_1^{(4)} &= -4iq^4 \frac{i}{16\pi^2} \frac{\Gamma(4-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_{x,u,v} v \left[\frac{x(1-x)}{(-m^2)(1-u-v)}\right]^\varepsilon [4mx - u(x-1)\not{p}] \\ &\times \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2+Q^2)^{2-\varepsilon}}, \end{aligned} \tag{314}$$

com $\int_{x,u,v}$ representando as integrais nos parâmetros de Feynman. Então expandimos a expressão acima para pequenos valores de ε para obter o coeficiente do termo de primeira ordem.

$$\begin{aligned} F_{1\varepsilon}^{(4)} &= -4iq^4 \frac{i}{16\pi^2} \int_{x,u,v} v[4mx - u(x-1)\not{p}] \left\{6I_{\log}^{(2)}(-Q^2, m^2) + \right. \\ &+ \left. \left[6\ln\left[\frac{x(1-x)}{(1-u-v)}\right] - 11\right] I_{\log}(-Q^2)\right\}, \end{aligned} \tag{315}$$

na qual, usamos a definição da divergência básica logarítmica típica da ordem de 2-*loops*,

$$I_{\log}^{(2)}(m^2,\lambda^2) = \int_k^{\Lambda} \frac{1}{(k^2-m^2)^2} \ln\left[\frac{(k^2-m^2)}{(-\lambda^2)}\right]. \tag{316}$$

Além das relações de escala (270) e (271) que já usamos para os cálculos de 1-*loop*, podemos facilmente obter, através das mesmas manipulações algébricas, o correspondente de 2-*loops*,

$$I_{log}^{(2)}\left(m^2,\lambda^2\right) = I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2}\left[\ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right)\right], \tag{317}$$

em que $I_{log}^{(2)}(\lambda^2) \equiv I_{log}^{(2)}(\lambda^2,\lambda^2)$. Essa relação será usada para obter a parte divergente livre do momento externo. Mas, primeiro, vamos obter o resultado para o outro termo divergente,

$$F_4^{(4)} = 16iq^4\frac{i}{16\pi^2}\frac{\Gamma(4-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\int_{x,u,v} vu(x-1)\left[\frac{x(1-x)}{(-m^2)(1-u-v)}\right]^{\varepsilon} p^{\alpha}\gamma^{\beta}\int_k^{\Lambda}\frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2+Q^2)^{3-\varepsilon}}. \tag{318}$$

Para a integral em k, podemos escrever

$$\int_k^{\Lambda}\frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2+Q^2)^{3-\varepsilon}} = \frac{1}{2(2-\varepsilon)}\left\{\int_k^{\Lambda}\frac{\eta_{\alpha\beta}}{(k^2+Q^2)^{2-\varepsilon}} - \int_k^{\Lambda}\frac{\partial}{\partial k^\beta}\frac{k_\alpha}{(k^2+Q^2)^{2-\varepsilon}}\right\}, \tag{319}$$

da qual descartamos os termos de superfície conforme prescrito pela Regularização Implícita Restrita. Depois de substituir a relação acima em $F_4^{(4)}$ e escolher o coeficiente de primeira ordem da expansão em potências de ε, obtemos

$$F_{4\varepsilon}^{(4)} = 8iq^4\frac{i}{16\pi^2}\not{p}\int_{x,u,v} vu(x-1)\left\{3I_{\log}^{(2)}(-Q^2,m^2) + \left[3\ln\left(\frac{x(1-x)}{(1-u-v)}\right) - 4\right]I_{\log}(-Q^2)\right\}. \tag{320}$$

Juntamos as duas integrais divergentes, usamos as relações de escala (270) e (317) e integramos os coeficientes das divergências básicas para obter

$$\begin{aligned}
F_{1\varepsilon}^{(4)} + F_{4\varepsilon}^{(4)} &= -\frac{i}{2}q^4\frac{i}{16\pi^2}\left[2(\not{p}+8m)I_{\log}^{(2)}(m^2) - (3\not{p}+32m)I_{\log}(m^2)\right] + \\
&+ 4iq^4\left(\frac{i}{16\pi^2}\right)^2\int_{x,u,v} v\left\{\left\{4mx\left[6\ln\left(\frac{x(1-x)}{(1-u-v)}\right) - 5\right] + \right.\right. \\
&- \left. u(x-1)\not{p}\left[12\ln\left(\frac{x(1-x)}{(1-u-v)}\right) - 7\right]\right\}\ln\left(-\frac{Q^2}{m^2}\right) + \\
&+ \left. 6[2mx - u(x-1)\not{p}]\ln^2\left(-\frac{Q^2}{m^2}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{321}$$

Existem ainda três integrais finitas considerando a parte quártica do numerador. Além disso, temos integrais finitas vindas da ordem quadrática e ordem zero em termos de k no numerador. Esses cálculos são diretos: a integração em k é realizada, resultando em potências

ε-dependentes de Q^2 no denominador; a expansão em potências de ε é executada para obter o coeficiente de primeira ordem. O resultado final para a amplitude de 2-*loops* é dado por

$$\begin{aligned} i\Sigma^{(2)}(p) &= -\frac{i}{2}q^4\frac{i}{16\pi^2}\left[2(\not{p}+8m)I_{\log}^{(2)}(m^2)-(3\not{p}+32m)I_{\log}(m^2)+\frac{1}{72}\frac{i}{16\pi^2}(5\not{p}+352m)\right]+ \\ &+ 4iq^4\left(\frac{i}{16\pi^2}\right)^2\int_{x,u,v} v\left\{A\ln\left(-\frac{Q^2}{m^2}\right)\ln\left[-\frac{Q^2}{m^2}\left(\frac{x(1-x)}{(1-u-v)}\right)^2\right]+\right. \\ &+ \left.\frac{1}{Q^2}\left[B\ln\left(-\frac{Q^2}{m^2}\frac{x(1-x)}{(1-u-v)}\right)+C\right]+\frac{D}{Q^4}\left[\ln\left(-\frac{Q^2}{m^2}\frac{x(1-x)}{(1-u-v)}\right)-1\right]\right\}, \end{aligned} \tag{322}$$

com

$$A = 6\left[2mx-u(x-1)\not{p}\right], \tag{323}$$

$$B = 2\left\{u\not{p}\left[5u^2p^2(x-1)+2m^2(x+4)\right]-2m\left[2u(u+3)xp^2+3\left(m^2-x\tilde{m}^2\right)\right]\right\}, \tag{324}$$

$$C = 4m\left(2uxp^2+m^2-\tilde{m}^2x\right)-u\not{p}\left[2u^2p^2(x-1)+m^2(x+4)\right], \tag{325}$$

$$D = -\left(u^2p^2-\tilde{m}^2\right)\left\{4m\left(xu^2p^2+m^2\right)-u\not{p}\left[u^2(x-1)p^2+m^2(x+3)\right]\right\}. \tag{326}$$

Existem alguns comentários interessantes sobre o cálculo de 2-*loops* acima. Primeiro, a divergência básica $I_{\log}^{(2)}(m^2)$ aparece naturalmente, mesmo para modelos massivos, quando a expansão em ε é realizada. Em segundo lugar, a integração no momento da parte finita é facilmente realizada com a ajuda da parametrização de Feynman. Além disso, a eliminação dos termos de superfície é mais simples do que o procedimento tradicional adotado na Regularização Implícita (DIAS et al., 2008), que precisa de novas relações para cada ordem de *loop*. O procedimento acima pode ser sistematizado e ser de grande ajuda em cálculos fenomenológicos multi-*loop*.

7 Conclusão

Neste trabalho, estabelecemos um novo procedimento para a aplicação da Regularização Implícita em sua versão restrita. A versão restrita da Regularização Implícita, que fixa todos os termos de superfície igualando-os a zero, fornece automaticamente amplitudes simétricas, como já demonstrado em uma ampla variedade de artigos. Isto se deve ao fato de que simetrias como a invariância de calibre estão relacionadas, no contexto das integrais de Feynman, com invariância de roteamento de momento nos *loops* (VIEIRA; CHERCHIGLIA; SAMPAIO, 2016). Esta nova abordagem utiliza este fato com o objetivo de aplicar a parametrização de Feynman à amplitude completa após uma regularização agindo implicitamente na integral divergente ser assumida. Como já conhecido, a utilidade da parametrização de Feynman reside na possibilidade de fazer um *shift* no momento de integração. Um *shift* em uma integral divergente teria que ser compensado com um termo de superfície quando o grau de divergência é pelo menos linear. É por isso que a amplitude deve ser regularizada antes da parametrização de Feynman ser realizada. Além disso, a prescrição de regularização deve ser tal que estes termos de superfície são nulos. É o caso da Regularização Dimensional, que torna a amplitude finita na dimensão estendida e, portanto, força os termos de superfície a desaparecerem. No caso da versão restrita da Regularização Implícita, isso é conseguido com a ajuda das relações de consistência.

O procedimento apresentado neste trabalho impõe invariância de roteamento de momento fazendo o *shift* de momento na integração após a parametrização de Feynman ser aplicada à amplitude completa. Também fixa outros termos de superfície restantes tornando-os nulos. A grande simplificação na abordagem ocorre em consequência da forma como a parte divergente é separada da parte finita. Enquanto na aplicação tradicional da Regularização Implícita o integrando é expandido antes da parametrização de Feynman, que é realizada apenas na parte finita, aqui a separação entre a parte divergente e a parte finita ocorre após a parametrização de Feynman, utilizando relações de escala que são sempre iguais. Dessa forma, evitamos calcular integrais finitas com altas potências dos momentos no numerador e no denominador. Outra vantagem é a unificação do procedimento a ser adotado em operações com modelos massivos e não-massivos, já que as relações de escala se encarregam de introduzir o parâmetro de massa para as divergências básicas e para as equações do grupo de renormalização. A grande simplificação no cálculo de 1-*loop* para esta nova abordagem se estende para ordens superiores, conforme demonstrado na Seção 6.3.

Como trabalho futuro, reconhecemos a importância da sistematização do cálculo para ordens superiores. Isso pode ser de grande ajuda nos cálculos fenomenológicos multi-*loop*.

Utilizamos neste trabalho o pacote *FeynCalc* do programa *Wolfram Mathematica* para desenvolver a álgebra do grupo de simetrias das amplitudes, a fim de obter as integrais de Feynman a serem calculadas. O procedimento de cálculo das integrais de Feynman não foi realizado computacionalmente, mas a sistematizatização computacional completa do cálculo de amplitudes dos diagramas de Feynman através do pacote *FeynCalc* do programa *Wolfram Mathematica* é também uma proposta de trabalho futuro.

Ainda, o desenvolvimento de um artigo associado ao tema deste trabalho, em que a nova abordagem da Regularização Implícita Restrita é aplicada a um problema físico, o cálculo do momento magnético anômalo do elétron na QED com violação da simetria de Lorentz, também é uma perspectiva futura. Uma tentativa de resolução desse problema foi feita anteriormente, com a aplicação do método tradicional da Regularização Implícita, mas os cálculos muito longos e trabalhosos, e em grande quantidade, nos impediram de finalizar. Entendemos que esse novo procedimento de aplicação da Regularização Implícita Restrita é bastante promissor e simplificará os cálculos.

Referências

ÁGUILA, F. et al. Constraining differential renormalization in abelian gauge theories. **Physics Letters B**, v. 419, p. 263–271, 02 1998. Citado na página 64.

AGUILAR, A. C. Diagramas de feynman: O poder de uma imagem. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Sociedade Brasileira de Física, v. 40, n. 4, p. e4205, 2018. ISSN 1806-1117. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 43.

BATTISTEL, O.; MOTA, A.; NEMES, M. Consistency conditions for 4-d regularizations. **Modern Physics Letters A**, v. 13, p. 1597–1610, 06 1998. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 65.

BATTISTEL, O. A. **Uma Nova Estratégia para Manipulações e Cálculos Envolvendo Divergências em TQC**. Tese (phdthesis) — Universidade Federal de Minas Gerais, 1999. Citado 6 vezes nas páginas 15, 44, 59, 63, 64 e 65.

BATTISTEL, O. A.; DALLABONA, G. A systematization for one-loop 4d feynman integrals. **The European Physical Journal C - Particles and Fields**, v. 45, n. 3, p. 721–743, 2006. ISSN 1434-6052. Citado na página 16.

BOBADILLA, W. J. T. et al. May the four be with you: novel ir-subtraction methods to tackle nnlo calculations. **The European Physical Journal C**, v. 81, n. 3, p. 250, 2021. ISSN 1434-6052. Citado na página 64.

BOGOLIUBOV, N. N.; SHIRKOV, D. V. **Quantum Fields**. [S.l.]: Benjamin-Cummings Pub. Co., 1982. ISBN 0-8053-0983-7. Citado na página 13.

BREITENLOHNER, P.; MAISON, D. Dimensional renormalization and the action principle. **Communications in Mathematical Physics**, v. 52, n. 1, p. 11–38, 1977. Citado na página 65.

CAMARGO, G. F. **Espalhamento Fóton-Fóton: Ambiguidades e Seção de Choque**. Dissertação (mathesis) — Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física, Instituto de Ciências Exatas, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 65.

DIAS, E. et al. Implicit regularization beyond one-loop order: gauge field theories. **Eur. Phys. J. C**, v. 55, n. 4, p. 667–681, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 16, 69 e 82.

DIAS, E. W. **Generalização do procedimento de regularização implícita para ordens superiores em teorias de calibre abelianas.** Tese (Doutorado) — Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, nov. 2008. Citado na página 67.

DIRAC, P. The quantum theory of the electron. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 117, n. 778, p. 610–624, fev. 1928. Citado na página 12.

DIRAC, P. Quantised singularities in the electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, The Royal Society London, v. 133, n. 821, p. 60–72, 1931. Citado na página 13.

DYSON, F. J. The radiation theories of tomonaga, schwinger, and feynman. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 75, p. 486–502, Feb 1949. Citado na página 41.

DYSON, F. J. The s matrix in quantum electrodynamics. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 75, p. 1736–1755, Jun 1949. Citado na página 41.

EINSTEIN, A.; DAVIS, F. **The Principle of Relativity**. [S.l.]: Dover Publications, 2013. (Dover Books on Physics). ISBN 9780486318400. Citado na página 18.

FELIPPE, B. Z. et al. Advances towards the systematization of calculations with implicit regularization. **The European Physical Journal C**, v. 82, n. 7, p. 583, 2022. ISSN 1434-6052. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 70.

FEYNMAN, R. P. Space-time approach to quantum electrodynamics. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 76, p. 769–789, Sep 1949. Citado 3 vezes nas páginas 9, 41 e 42.

FREEDMAN, D. Z.; JOHNSON, K.; LATORRE, J. Differential regularization and renormalization: A new method of calculation in quantum field theory. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 371, n. 1-2, p. 353–414, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 65.

FREEDMAN, D. Z. et al. A cutoff procedure and counterterms for differential renormalization. **Nuclear Physics B**, v. 395, n. 1, p. 454–496, 1993. ISSN 0550-3213. Citado na página 64.

GNENDIGER, C. et al. To d, or not to d: recent developments and comparisons of regularization schemes. **The European Physical Journal C**, v. 77, n. 7, p. 471, 2017. ISSN 1434-6052. Citado na página 64.

GRANDE, R. M. Raciocínio diagramático em física: a estética dos diagramas de feynman. in: Da silva, r. s. r ; de cássia, r.. (org.). experiências estéticas em educação matemática. Editora Fi, v. 1, p. 106–128, 2021. Citado na página 44.

GROSS, D. The triumph and limitations of quantum field theory. 1997. Citado na página 14.

HAAGENSEN, P. E.; LATORRE, J. I. Differential renormalization of massive quantum field theories. **Physics Letters B**, v. 283, p. 293–297, 1992. Citado na página 64.

HEINRICH, G. Collider physics at the precision frontier. **Physics Reports**, v. 922, p. 1–69, 2021. ISSN 0370-1573. Collider physics at the precision frontier. Citado na página 79.

JACKIW, R. The unreasonable effectiveness of quantum field theory. 1996. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

KANNILE, K. Notes on feynman parametrisation and the dirac delta function. 2013. Citado 6 vezes nas páginas 58, 103, 107, 113, 123 e 125.

MARQUES, B. A. et al. Gauge embedding procedure: classical and quantum equivalence between dual models. **The European Physical Journal C**, v. 82, n. 3, p. 199, 2022. ISSN 1434-6052. Citado na página 70.

McMAHON, D. **Quantum Field Theory Demystified**. [S.l.]: McGraw-Hill Professional, 2008. Citado 8 vezes nas páginas 12, 13, 20, 22, 33, 35, 36 e 94.

MUÑOZ-TAPIA, R. Differential renormalization of lower dimensional gauge theories. **Physics Letters B**, v. 295, n. 1, p. 95–98, 1992. ISSN 0370-2693. Citado na página 64.

OTTONI, J. et al. Supergravity corrections to the $(g-2)l$ factor by implicit regularization. **Physics Letters B**, v. 642, n. 3, p. 253–262, 2006. ISSN 0370-2693. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 69.

PAULI, W.; VILLARS, F. On the invariant regularization in relativistic quantum theory. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 21, p. 434–444, Jul 1949. Citado 3 vezes nas páginas 15, 63 e 75.

PÉREZ-VICTORIA, M. Constrained differential renormalization of yang-mills theories. **Physics Letters B**, v. 442, p. 315–325, 12 1998. Citado na página 64.

PONTES, C. et al. Implicit regularization beyond one-loop order: Scalar field theories. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 34, 05 2006. Citado na página 16.

SAMPAIO, M. et al. Implicit regularization and renormalization of qcd. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 45, n. 2, p. 436–457, 2006. ISSN 1572-9575. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 69.

SCARPELLI, A. P. B.; BATTISTEL, O. A.; NEMES, M. C. Testing a new strategy to treat divergent amplitudes in qed. **Brazilian Journal of Physics**, FapUNIFESP (SciELO), v. 28, n. 3, p. 161–168, 2 1998. Citado na página 15.

SCARPELLI, A. P. B.; SAMPAIO, M.; NEMES, M. C. Consistency relations for an implicit n-dimensional regularization scheme. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 63, p. 046004, Jan 2001. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 69.

SCARPELLI, A. P. B. et al. Chiral anomaly and CPT invariance in an implicit momentum space regularization framework. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 64, p. 046013, Jul 2001. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 69.

SERWAY, R.; MOSES, C.; MOYER, C. **Modern Physics**. [S.l.]: Cengage Learning, 2004. ISBN 9780534493394. Citado 3 vezes nas páginas 20, 22 e 24.

SIEGEL, W. Supersymmetric dimensional regularization via dimensional reduction. **Physics Letters B**, v. 84, n. 2, p. 193–196, 1979. ISSN 0370-2693. Citado na página 64.

’t HOOFT, G. Renormalization of massless Yang-Mills fields. **Nuclear Physics B**, v. 33, n. 1, p. 173–199, out. 1971. Citado 3 vezes nas páginas 15, 63 e 65.

’t HOOFT, G. The evolution of quantum field theory: From qed to grand unification. **The Standard Theory of Particle Physics**, WORLD SCIENTIFIC, p. 1–27, Aug 2016. ISSN 1793-1339. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

’t HOOFT, G.; VELTMAN, M. Regularization and renormalization of gauge fields. **Nuclear Physics B**, v. 44, n. 1, p. 189–213, 1972. ISSN 0550-3213. Citado 3 vezes nas páginas 15, 63 e 65.

VIEIRA, A. R.; CHERCHIGLIA, A. L.; SAMPAIO, M. Momentum routing invariance in extended qed: Assuring gauge invariance beyond tree level. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 93, p. 025029, Jan 2016. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 83.

VIGLIONI, A. C. D. et al. γ_5 algebra ambiguities in feynman amplitudes: Momentum routing invariance and anomalies in $d = 4$ and $d = 2$. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, p. 065023, Sep 2016. Citado na página 69.

WU, Y.-L. Symmetry Principle Preserving and Infinity Free Regularization and Renormalization of Quantum Field Theories and the Mass Gap. **International Journal of Modern Physics A**, v. 18, n. 29, p. 5363–5419, jan. 2003. Citado na página 75.

ZEE, A. **Quantum field theory in a nutshell**. second edition. [S.l.]: Princeton University Press, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 38, 45, 52, 53 e 56.

Apêndices

APÊNDICE A – Invariância do Produto Escalar sob Transformações de Lorentz

Este apêndice será destinado à comprovação, através dos cálculos, da invariância do produto escalar $x^\mu x_\mu$ sob as transformações de Lorentz. Considere os quadrivetores $x^\mu = (x^0,x^1,x^2,x^3)$, $x_\mu = (x_0,x_1,x_2,x_3)$, $x'^\mu = (x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)$ e $x'_\mu = (x'_0,x'_1,x'_2,x'_3)$, sendo x'^μ e x'_μ os quadrivetores resultantes da Transformação de Lorentz dos quadrivetores x^μ e x_μ respectivamente. Vamos inicialmente calcular x'_μ a partir da Transformação de Lorentz $x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu$:

$$x'_\mu = (\gamma(x_0 - \beta x_1),\gamma(x_1 - \beta x_0),x_2,x_3) \tag{327}$$

Calculamos agora x'^μ a partir da equação $x'^\mu = \eta^{\mu\nu} x'_\nu$:

$$x'^\mu = (\gamma(x_0 - \beta x_1), -\gamma(x_1 - \beta x_0), -x_2, -x_3). \tag{328}$$

Posteriormente, vamos calcular o produto escalar $x'^\mu x'_\mu$ a fim de comparar com $x^\mu x_\mu$:

$$\begin{aligned}
x'_\mu x'^\mu &= \gamma^2(x_0 - \beta x_1)^2 - \gamma^2(x_1 - \beta x_0)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 \\
&= \gamma^2[(x_0)^2 - 2x_0\beta x_1 + \beta^2(x_1)^2] - \gamma^2[(x_1)^2 - 2x_1\beta x_0 + \beta^2(x_0)^2] - (x_2)^2 - (x_3)^2 \\
&= \gamma^2[(x_0)^2 + \beta^2(x_1)^2] - \gamma^2[(x_1)^2 + \beta^2(x_0)^2] - (x_2)^2 - (x_3)^2 \\
&= \gamma^2(x_0)^2 + \gamma^2\beta^2(x_1)^2 - \gamma^2(x_1)^2 - \gamma^2\beta^2(x_0)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 \\
&= (x_0)^2[\gamma^2(1-\beta^2)] + (x_1)^2[\gamma^2(\beta^2-1)] - (x_2)^2 - (x_3)^2 \\
&= (x_0)^2[\gamma^2(1-\beta^2)] - (x_1)^2[\gamma^2(1-\beta^2)] - (x_2)^2 - (x_3)^2 \\
&= (x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 \\
&= x_0x^0 + x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3 \\
&= x_\mu x^\mu.
\end{aligned} \tag{329}$$

uma vez que, de acordo com a equação (10):

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \tag{330}$$

APÊNDICE B – Quantização de Campos Escalares

Apresentaremos, neste apêndice, o cálculo detalhado do processo de quantização do campo escalar real dado por

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2p^0}} \left[a\left(\vec{p}\right) e^{ipx} + a^\dagger\left(\vec{p}\right) e^{-ipx}\right] . \tag{331}$$

Vamos fazer os cálculos para o comutador $[\varphi(x),\pi(y)]$ em um mesmo instante de tempo, ou seja, $x^0 = y^0$. O momento $\pi(x)$ é definido por:

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x^0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^0}\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2p^0}} \left[a\left(\vec{p}\right) e^{ipx} + a^\dagger\left(\vec{p}\right) e^{-ipx}\right] \\ &= i\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sqrt{\frac{p^0}{2}} \left[a\left(\vec{p}\right) e^{ipx} - a^\dagger\left(\vec{p}\right) e^{-ipx}\right] . \end{aligned} \tag{332}$$

O comutador a ser calculado é dado por:

$$[\varphi(x),\pi(y)] = \varphi(x)\pi(y) - \pi(y)\varphi(x)\,, \tag{333}$$

em que $x^0 = y^0$. O primeiro termo, correspondente a $\varphi(x)\pi(y)$, é igual a:

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2p^0}} \left[a\left(\vec{p}\right) e^{ipx} + a^\dagger\left(\vec{p}\right) e^{-ipx}\right] i\int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sqrt{\frac{p'^0}{2}} \left[a\left(\vec{p'}\right) e^{ip'y} - a^\dagger\left(\vec{p'}\right) e^{-ip'y}\right] \\ &= i\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p'^0}{p^0}} \left[a\left(\vec{p}\right) e^{ipx} + a^\dagger\left(\vec{p}\right) e^{-ipx}\right]\left[a\left(\vec{p'}\right) e^{ip'y} - a^\dagger\left(\vec{p'}\right) e^{-ip'y}\right] . \end{aligned} \tag{334}$$

Multiplicando termo a termo, temos

$$\begin{aligned} = i\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p'^0}{p^0}} \Big[& a\left(\vec{p}\right) a\left(\vec{p'}\right) e^{ipx}e^{ip'y} - a\left(\vec{p}\right) a^\dagger\left(\vec{p'}\right) e^{ipx}e^{-ip'y} \\ &+ a^\dagger\left(\vec{p}\right) a\left(\vec{p'}\right) e^{-ipx}e^{ip'y} - a^\dagger\left(\vec{p}\right) a^\dagger\left(\vec{p'}\right) e^{-ipx}e^{-ip'y}\Big] . \end{aligned} \tag{335}$$

Calculamos agora o outro termo do comutador, $\pi(y)\varphi(x)$:

$$= i\int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p'^0}{p^0}}\left[a\left(\vec{p}'\right)a\left(\vec{p}\right)e^{ip'y}e^{ipx}+a\left(\vec{p}'\right)a^{\dagger}\left(\vec{p}\right)e^{ip'y}e^{-ipx}\right.$$
$$\left.-\,a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)a\left(\vec{p}\right)e^{-ip'y}e^{ipx}-a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)a^{\dagger}\left(\vec{p}\right)e^{-ip'y}e^{-ipx}\right]. \quad (336)$$

O próximo passo é calcular a diferença $\varphi(x)\pi(y)-\pi(y)\varphi(x)$ baseado nas relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação:

$$\left[a\left(\vec{p}\right),a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)\right] = \delta\left(\vec{p}-\vec{p}'\right) \quad (337)$$
$$\left[a\left(\vec{p}\right),a\left(\vec{p}'\right)\right] = 0 \quad (338)$$
$$\left[a^{\dagger}\left(\vec{p}\right),a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)\right] = 0\,. \quad (339)$$

Dessa forma, avaliando a diferença entre o primeiro termo de (335) e o primeiro termo de (336), temos:

$$a\left(\vec{p}\right)a\left(\vec{p}'\right)e^{ipx}e^{ip'y}-a\left(\vec{p}'\right)a\left(\vec{p}\right)e^{ip'y}e^{ipx} = \left[a\left(\vec{p}\right),a\left(\vec{p}'\right)\right]e^{ipx}e^{ip'y}$$
$$= 0\,. \quad (340)$$

De forma similar, avaliando a diferença entre o último termo de (335) e o último termo de (336), temos:

$$-a^{\dagger}\left(\vec{p}\right)a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)e^{-ipx}e^{-ip'y}+a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)a^{\dagger}\left(\vec{p}\right)e^{-ip'y}e^{-ipx} = -\left[a^{\dagger}\left(\vec{p}\right),a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)\right]e^{-ipx}e^{-ip'y}$$
$$= 0\,. \quad (341)$$
$$(342)$$

Avaliando a diferença entre o segundo termo de (335) e o terceiro termo de (336), temos:

$$-a\left(\vec{p}\right)a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)e^{ipx}e^{-ip'y}+a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)a\left(\vec{p}\right)e^{-ip'y}e^{ipx} = -\left[a\left(\vec{p}\right),a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)\right]e^{ipx}e^{-ip'y}$$
$$= -\delta\left(\vec{p}-\vec{p}'\right)e^{i(px-p'y)}$$
$$= -\delta\left(\vec{p}-\vec{p}'\right)e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\,. \quad (343)$$

Essa última expressão baseada no fato de que $x^0 = y^0$ e também

$$\delta\left(\vec{p}-\vec{p}'\right)f\left(p\right) = \delta\left(\vec{p}-\vec{p}'\right)f\left(p'\right)\,. \quad (344)$$

De forma análoga, avaliando a diferença entre o terceiro termo de (335) e o segundo termo de (336), temos:

$$
\begin{aligned}
a^{\dagger}(\vec{p})\, a\left(\vec{p}'\right) e^{-ipx} e^{ip'y} - a\left(\vec{p}'\right) a^{\dagger}(\vec{p})\, e^{ip'y} e^{-ipx} &= \left[a^{\dagger}(\vec{p})\,, a\left(\vec{p}'\right)\right] e^{-ipx} e^{ip'y} \\
&= -\left[a\left(\vec{p}'\right), a^{\dagger}(\vec{p})\right] e^{-i(px-p'y)} \\
&= -\delta\left(\vec{p}' - \vec{p}\right) e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \\
&= -\delta\left(\vec{p} - \vec{p}'\right) e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} . \qquad (345)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, obtemos o resultado do comutador

$$
\begin{aligned}
[\varphi(x),\pi(y)] &= \varphi(x)\pi(y) - \pi(y)\varphi(x) \\
&= i\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p'^0}{p^0}} \left[-\delta\left(\vec{p} - \vec{p}'\right) e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} - \delta\left(\vec{p} - \vec{p}'\right) e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\right] \\
&= -i\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{2} \left[e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} + e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\right] . \qquad (346)
\end{aligned}
$$

Considerando que uma definição da função delta de Dirac é

$$
\delta\left(\vec{x} - \vec{y}\right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{x}-\vec{y})p} \qquad (347)
$$

E considerando ainda a simetria da função delta de Dirac, ou seja, $\delta\left(\vec{x} - \vec{y}\right) = \delta\left(\vec{y} - \vec{x}\right)$, temos:

$$
\begin{aligned}
[\varphi(x),\pi(y)] &= -i\frac{1}{2}\left[\delta\left(\vec{x} - \vec{y}\right) + \delta\left(\vec{y} - \vec{x}\right)\right] \\
&= -i\delta\left(\vec{x} - \vec{y}\right) , \qquad (348)
\end{aligned}
$$

nesse caso, considerando $\hbar = 1$. Dessa forma, fica demonstrada a quantização do campo escalar real, uma vez que são atendidas as relações de comutação impostas pela segunda quantização.

APÊNDICE C – Integrais Gaussianas

A maioria dos cálculos envolvendo integrais de caminho envolve uma integral gaussiana. Dessa forma, neste Apêndice, desenvolvemos alguns cálculos úteis ao desenvolvimento proposto na seção de integrais de caminho na Mecânica Quântica, apresentando o que é uma integral gaussiana e como ela é calculada ((McMAHON, 2008)).

A integral gaussiana mais simples é uma integral sobre todo o espaço em uma dimensão da função Gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$.

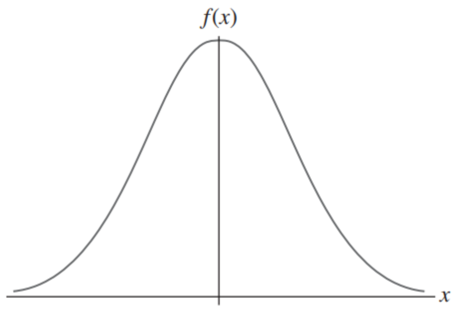

Figura 16 – Gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$

Graficamente, a função $f(x)$ parece definir uma área limitada, o que implicaria em um resultado finito para integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \,. \tag{349}$$

Contudo, não existem técnicas elementares de integração que nos permitem chegar ao resultado de forma direta e como não podemos calcular esta integral em uma única dimensão, estendemos a integral para duas dimensões utilizando um truque:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \,, \tag{350}$$

observando que a segunda integral do produto acima tem o mesmo resultado da primeira integral. Apenas foi feita uma substituição de variáveis para que o problema seja analisado em duas dimensões, possibilitando uma mudança para coordenadas polares e consequentemente sua resolução. Assim:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r dr \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \\ &= \pi \, . \end{aligned} \tag{351}$$

Com esse resultado para I^2, temos que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \, . \tag{352}$$

Por meio de uma substituição simples, pode-se estender o resultado obtido para outras integrais, tais como:

$$\begin{aligned} I' &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, . \end{aligned} \tag{353}$$

A próxima integral a ser avaliada corresponde ao produto da função Gaussiana por potências inteiras positivas de x:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx \, . \tag{354}$$

Avaliando a função $f(x) = x^n e^{-ax^2} dx$, identificamos que para valores ímpares de n a integral é igual a zero, uma vez que a função é ímpar.

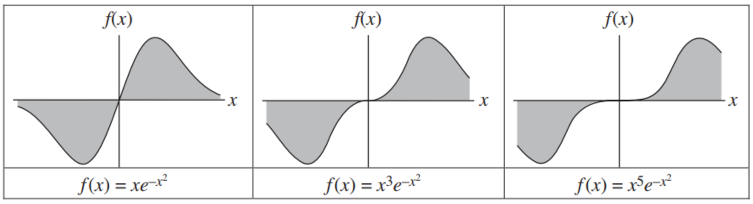

Figura 17 – Gráficos de $f(x) = x^n e^{-x^2}$, n ímpar.

Dessa forma, precisamos calcular apenas as integrais correspondentes às potências pares de x.

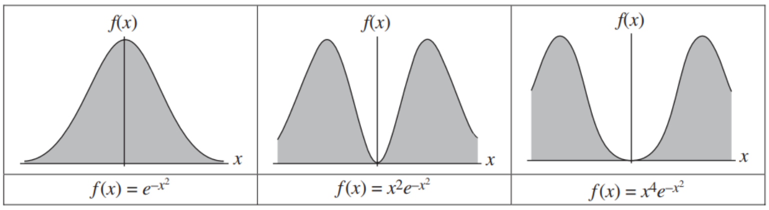

Figura 18 – Gráficos de $f(x) = x^n e^{-x^2}$, n par.

A ideia consiste em calcular a derivada em relação à variável a, em ambos os lados da equação (353), ou seja

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx &= \frac{d}{da}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} -x^2 e^{-ax^2}dx &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\,. \qquad (355)
\end{aligned}$$

Derivando a equação (355) com relação a a, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx &= \frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\right) \\
\int_{-\infty}^{\infty} -x^4 e^{-ax^2}dx &= \frac{-1\cdot 3}{2\cdot 2}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2}dx &= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}\,. \qquad (356)
\end{aligned}$$

Após $\frac{n}{2}$ derivações com relação a a, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n+1)}{2^{n/2}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{(n+1)}}}\,. \qquad (357)$$

Adicionando termos ao expoente da integral, obtemos uma nova integral gaussiana muito importante:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx \,. \tag{358}$$

Para utilizar os resultados já obtidos, é necessário reescrever o expoente completando o quadrado:

$$\begin{aligned} -ax^2 + bx + c &= -a\left(x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{b^2}{4a} + c \\ &= -a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} + c \,. \end{aligned} \tag{359}$$

Voltando à integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}+c} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2} e^{\frac{b^2}{4a}+c} dx \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}+c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2} dx \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}+c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}+c} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \,. \end{aligned} \tag{360}$$

Vamos considerar agora o caso de integrais gaussianas em n dimensões, em que A é matriz quadrada $n \times n$ inversível:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^T A x} d^n x \,. \tag{361}$$

em que $\int_{-\infty}^{\infty} d^n x = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n$.

Seja A matriz quadrada 2×2 e x vetor no plano:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,. \tag{362}$$

Efetuando os cálculos no expoente, temos:

$$\begin{aligned} -x^T A x &= -\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= -x(ax + by) - y(bx + cy) \\ &= -\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right) \\ &= -a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - \left(\frac{ac - b^2}{a}\right) y^2 \,. \end{aligned} \tag{363}$$

Voltando à integral

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^T A x} d^2x &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[-a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2-\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)y^2\right]} dxdy \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sqrt{\frac{a\pi}{ac-b^2}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\det A}} \,. \qquad (364)
\end{aligned}$$

De forma geral, podemos escrever:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^T A x} d^n x = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \,. \qquad (365)$$

Os resultados podem ser estendidos a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^T A x + Jx} d^n x = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}JA^{-1}J} \qquad (366)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}x^T A x + iJx} d^n x = \frac{(2\pi i)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{i}{2}JA^{-1}J} \qquad (367)$$

em que J é matriz linha e, para estender os casos de integrais gaussianas para expoentes complexos, faz-se a chamada rotação de Wick

$$dp_j \rightarrow -idp_j \,. \qquad (368)$$

APÊNDICE D – Integrais Finitas sobre o momento (d^4k)

Vamos aqui apresentar as integrais sobre o momento d^4k, com os respectivos cálculos de derivadas que levam à construção de cada integral seguinte.

Vamos primeiro calcular a integral (234) com base nas mudanças de coordenadas do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano. Inicialmente, lembramos que $d^4k = id^4k_E$, de forma que

$$\int_{Mink.} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = i \int_{Eucl.} \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}. \tag{369}$$

Vamos também utilizar outra relação integral

$$\int d^n k = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty k^{n-1} dk\,, \tag{370}$$

em que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Inicialmente, completando quadrado no denominador, reescrevemos a integral como

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[k^2 + 2p \cdot k + H^2\right]^\alpha} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k+p)^2 + (H^2 - p^2)\right]^\alpha} \\ &= \int \frac{d^4K'}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[K' + M^2\right]^\alpha}\,, \end{aligned} \tag{371}$$

em que $K' = k + p$ e $M^2 = H^2 - p^2$, e portanto $d^4K' = d^4k$. Fazendo a mudança para coordenadas esféricas quadridimensionais no espaço Euclidiano, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4K'}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[K' + M^2\right]^\alpha} &= i \int \frac{d^4K'_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[-K'_E + M^2\right]^\alpha} \\ &= (-1)^\alpha\, i \int \frac{d^4K'_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[K'_E - M^2\right]^\alpha}\,, \end{aligned} \tag{372}$$

e combinando o resultado apresentado acima na equação (370),

$$\begin{aligned} &= (-1)^\alpha\, i \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{{K'_E}^3 dK'_E}{\left[{K'_E}^2 - M^2\right]^\alpha} \\ &= (-1)^\alpha \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{{K'_E}^2\ 2K'_E dK'_E}{\left[{K'_E}^2 - M^2\right]^\alpha} \\ &= (-1)^\alpha \frac{i}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{{K'_E}^2\ 2K'_E dK'_E}{\left[{K'_E}^2 - M^2\right]^\alpha}\,. \end{aligned} \tag{373}$$

Fazendo a substituição $u = {K'_E}^2 - M^2$, e portanto $du = 2K'_E dK'_E$, temos

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\alpha}\frac{i}{16\pi^2}\int_{-M^2}^{\infty}\frac{u+M^2}{u^{\alpha}}du\\
&= (-1)^{\alpha}\frac{i}{16\pi^2}\int_{-M^2}^{\infty}u^{1-\alpha}du+\int_{-M^2}^{\infty}M^2u^{-\alpha}du\\
&= (-1)^{\alpha}\frac{i}{16\pi^2}\lim_{t\to\infty}\left\{\int_{-M^2}^{t}u^{1-\alpha}du+\int_{-M^2}^{t}M^2u^{-\alpha}\right\}du\\
&= (-1)^{\alpha}\frac{i}{16\pi^2}\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{2-\alpha}u^{2-\alpha}\Big|_{-M^2}^{t}+M^2\frac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha}\Big|_{-M^2}^{t}\right\}\\
&= (-1)^{\alpha}\frac{i}{16\pi^2}\left\{-\frac{1}{2-\alpha}(-M^2)^{2-\alpha}+M^2(-1)\frac{1}{1-\alpha}(-M^2)^{1-\alpha}\right\}\\
&= (-1)^{\alpha}\frac{i}{16\pi^2}\left\{-\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\right\}(-M^2)^{2-\alpha}\\
&= (-1)^{\alpha}\frac{i}{16\pi^2}\left\{\frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\right\}(-1)^{2-\alpha}(M^2)^{2-\alpha}\\
&= \frac{i}{16\pi^2}\left\{\frac{1}{(\alpha-2)(\alpha-1)}\right\}\frac{1}{(H^2-p^2)^{\alpha-2}}\,. \qquad (374)
\end{aligned}$$

Observamos que, para $w = 2$, temos $\frac{\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$. Sendo assim, chegamos ao resultado da equação (234). Partindo do resultado da integral (234), vamos obter o resultado de (235) e os resultados seguintes.

$$\int\frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}}\frac{1}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^{\alpha}}=\frac{i}{(4\pi)^w}\frac{1}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}}\frac{\Gamma(\alpha-w)}{\Gamma(\alpha)}\,. \qquad (375)$$

Para obter o resultado correspondente à integral seguinte (235), derivamos a equação (234) em relação a p_μ:

$$\int\frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}}\frac{-2\alpha k_\mu}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^{\alpha+1}}=\frac{i}{(4\pi)^w}\frac{-(\alpha-w)(-2p_\mu)}{(H^2-p^2)^{\alpha-w+1}}\frac{\Gamma(\alpha-w)}{\Gamma(\alpha)}\,, \qquad (376)$$

e obtemos

$$\int\frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}}\frac{k_\mu}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^{\alpha+1}}=-\frac{i}{(4\pi)^w}\frac{(\alpha-w)}{\alpha}\frac{p_\mu}{(H^2-p^2)^{\alpha-w+1}}\frac{\Gamma(\alpha-w)}{\Gamma(\alpha)}\,. \qquad (377)$$

Reescrevendo $\alpha' = \alpha + 1$ (e posteriormente voltando à notação α, para que a tabela de integrais fique padronizada), chegamos à equação

$$\int\frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}}\frac{k_\mu}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^{\alpha}}=-\frac{i}{(4\pi)^w}\frac{(\alpha-1-w)}{\alpha-1}\frac{p_\mu}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}}\frac{\Gamma(\alpha-1-w)}{\Gamma(\alpha-1)}\,, \qquad (378)$$

e considerando a função Γ, sabendo que $\dfrac{(\alpha-1-w)\Gamma(\alpha-1-w)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} = \dfrac{\Gamma(\alpha-w)}{\Gamma(\alpha)}$, uma vez que $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ temos a equação (235)

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^\alpha} = -\frac{i}{(4\pi)^w} \frac{p_\mu}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}} \frac{\Gamma(\alpha-w)}{\Gamma(\alpha)} . \tag{379}$$

Para obter a relação seguinte (236), derivamos a equação (235) em relação a p_ν:

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{-2\alpha k_\mu k_\nu}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^{\alpha+1}} = -\frac{i}{(4\pi)^w} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}} + \frac{2p_\mu p_\nu(\alpha-w)}{(H^2-p^2)^{\alpha-w+1}}\right] \frac{\Gamma(\alpha-w)}{\Gamma(\alpha)} , \tag{380}$$

e obtemos

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu k_\nu}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^{\alpha+1}} = \frac{1}{2}\frac{i}{(4\pi)^w} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}} + \frac{2p_\mu p_\nu(\alpha-w)}{(H^2-p^2)^{\alpha-w+1}}\right] \frac{\Gamma(\alpha-w)}{\alpha\Gamma(\alpha)} . \tag{381}$$

Reescrevendo novamente $\alpha' = \alpha+1$ (e posteriormente voltando à notação α, para que a tabela de integrais fique padronizada), chegamos à equação (236)

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu k_\nu}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^w} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{2(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}} + \right. \\ &+ \left. \frac{(\alpha-w-1)p_\mu p_\nu}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}}\right] \frac{\Gamma(\alpha-w-1)}{\Gamma(\alpha)} ,\end{aligned} \tag{382}$$

para $\alpha > w$. Para obter a relação seguinte (237), derivamos a equação (236) em relação a p_β.

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{-2\alpha k_\mu k_\nu k_\beta}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^{\alpha+1}} = \frac{i}{(4\pi)^w} \frac{\Gamma(\alpha-w-1)}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{2(\alpha-w-1)p_\beta \eta_{\mu\nu}}{2(H^2-p^2)^{\alpha-w}} + \right. \\ \left. + \frac{2(\alpha-w)(\alpha-w-1)p_\mu p_\nu p_\beta}{(H^2-p^2)^{\alpha-w+1}} + \frac{(\alpha-w-1)p_\nu \eta_{\mu\beta}}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}} + \frac{(\alpha-w-1)p_\mu \eta_{\nu\beta}}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}}\right] .\end{aligned} \tag{383}$$

Reescrevendo novamente $\alpha' = \alpha+1$ (e posteriormente voltando à notação α, para que a tabela de integrais fique padronizada), chegamos à equação

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu k_\nu k_\beta}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{i}{(4\pi)^w} \frac{\Gamma(\alpha-w-2)}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(\alpha-w-2)p_\beta \eta_{\mu\nu}}{(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}} + \right. \\ \left. + \frac{2(\alpha-w-1)(\alpha-w-2)p_\mu p_\nu p_\beta}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}} + \frac{(\alpha-w-2)p_\nu \eta_{\mu\beta}}{(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}} + \frac{(\alpha-w-2)p_\mu \eta_{\nu\beta}}{(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}}\right] .\end{aligned} \tag{384}$$

Organizando e reduzindo a expressão, chegamos à equação (237)

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu k_\nu k_\beta}{\left[k^2+2p\cdot k+H^2\right]^\alpha} &= -\frac{i}{(4\pi)^w} \frac{\Gamma(\alpha-w-1)}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(\alpha-w-1)p_\mu p_\nu p_\beta}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}} + \right. \\ &+ \left. \frac{p_\beta \eta_{\mu\nu} + p_\nu \eta_{\mu\beta} + p_\mu \eta_{\nu\beta}}{2(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}}\right] .\end{aligned} \tag{385}$$

Para obter a relação seguinte (238), derivamos a equação (237) em relação a p_γ:

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{-2\alpha k_\mu k_\nu k_\beta k_\gamma}{\left[k^2 + 2p\cdot k + H^2\right]^{\alpha+1}} =$$
$$= -\frac{i}{(4\pi)^w}\frac{\Gamma(\alpha - w - 1)}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{2(\alpha-w)(\alpha-w-1)p_\mu p_\nu p_\beta p_\gamma}{(H^2-p^2)^{\alpha-w+1}} +\right.$$
$$+\frac{(\alpha-w-1)}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}}\left[\eta_{\mu\gamma}p_\nu p_\beta + \eta_{\nu\gamma}p_\mu p_\beta + \eta_{\beta\gamma}p_\mu p_\nu\right] +$$
$$+\frac{2(\alpha-w-1)}{2(H^2-p^2)^{\alpha-w}}\left[\eta_{\mu\nu}p_\beta p_\gamma + \eta_{\mu\beta}p_\nu p_\gamma + \eta_{\nu\beta}p_\mu p_\gamma\right] +$$
$$\left.+\frac{1}{2(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}}\left[\eta_{\beta\mu}\eta_{\nu\gamma} + \eta_{\beta\nu}\eta_{\mu\gamma} + \eta_{\beta\gamma}\eta_{\mu\nu}\right]\right\}. \tag{386}$$

Organizando e reduzindo a expressão, chegamos a

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu k_\nu k_\beta k_\gamma}{\left[k^2 + 2p\cdot k + H^2\right]^{\alpha+1}} =$$
$$= -\frac{i}{(4\pi)^w}\frac{\Gamma(\alpha - w - 1)}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\frac{(\alpha-w)(\alpha-w-1)p_\mu p_\nu p_\beta p_\gamma}{(H^2-p^2)^{\alpha-w+1}} +\right.$$
$$+\frac{(\alpha-w-1)}{2(H^2-p^2)^{\alpha-w}}\left[\eta_{\mu\gamma}p_\nu p_\beta + \eta_{\nu\gamma}p_\mu p_\beta + \eta_{\beta\gamma}p_\mu p_\nu + \eta_{\mu\nu}p_\beta p_\gamma + \eta_{\mu\beta}p_\nu p_\gamma + \eta_{\nu\beta}p_\mu p_\gamma\right] +$$
$$\left.+\frac{1}{4(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}}\left[\eta_{\beta\mu}\eta_{\nu\gamma} + \eta_{\beta\nu}\eta_{\mu\gamma} + \eta_{\beta\gamma}\eta_{\mu\nu}\right]\right\}. \tag{387}$$

Reescrevendo novamente $\alpha' = \alpha + 1$ (e posteriormente voltando à notação α, para que a tabela de integrais fique padronizada), chegamos à equação (238)

$$\int \frac{d^{2w}k}{(2\pi)^{2w}} \frac{k_\mu k_\nu k_\beta k_\gamma}{\left[k^2 + 2p\cdot k + H^2\right]^{\alpha}} =$$
$$= \frac{i}{(4\pi)^w}\frac{\Gamma(\alpha - w - 2)}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{(\alpha-w-1)(\alpha-w-2)p_\mu p_\nu p_\beta p_\gamma}{(H^2-p^2)^{\alpha-w}} +\right.$$
$$+\frac{(\alpha-w-2)}{2(H^2-p^2)^{\alpha-w-1}}\left[\eta_{\mu\gamma}p_\nu p_\beta + \eta_{\nu\gamma}p_\mu p_\beta + \eta_{\beta\gamma}p_\mu p_\nu + \eta_{\mu\nu}p_\beta p_\gamma + \eta_{\mu\beta}p_\nu p_\gamma + \eta_{\nu\beta}p_\mu p_\gamma\right] +$$
$$\left.+\frac{1}{4(H^2-p^2)^{\alpha-w-2}}\left[\eta_{\beta\mu}\eta_{\nu\gamma} + \eta_{\beta\nu}\eta_{\mu\gamma} + \eta_{\beta\gamma}\eta_{\mu\nu}\right]\right\}. \tag{388}$$

APÊNDICE E – Integral de Feynman I

Apresentaremos, neste apêndice, o cálculo detalhado da Integral de Feynman utilizando o método tradicional da Regularização Implícita e a nova abordagem desenvolvida nesse trabalho.

E.1 Método Tradicional da Regularização Implícita

$$I = \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]}, \tag{389}$$

em que o índice Λ na integral é para indicar que a mesma está regularizada.

Por uma questão de simplicidade na notação, vamos considerar $\int_k^\Lambda \equiv \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$. Observe que I é logaritmicamente divergente. Nesse caso, utilizaremos a Regularização Implícita para separar a parte divergente, com o uso da identidade algébrica (249) em I:

$$\begin{aligned} I &= \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)} \left\{ \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]} \right\} \\ &= \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^2[(p-k)^2 - m^2]}. \end{aligned} \tag{390}$$

Observe que a integral $\int_k^\Lambda \dfrac{1}{(k^2 - m^2)^2}$ é uma divergência básica, de acordo com a definição (252). Assim, $I = I_{\log}(m^2) - \tilde{I}$, sendo

$$\tilde{I} = \int_k \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^2[(p-k)^2 - m^2]}.$$

Neste ponto, precisamos utilizar a parametrização de Feynman (KANNILE, 2013) para reescrever o integrando de $\tilde{I}$ em termos de integrais espaciais, conforme descrito na seção 4.3, de acordo com a equação (217). Para comparar $\frac{1}{ab^2}$ ao integrando de $\tilde{I}$, fazemos:

$$a = (p-k)^2 - m^2 \ \text{ e } \ b = k^2 - m^2,$$

e temos

$$\begin{aligned} (a-b)x + b &= [(p-k)^2 - m^2] - (k^2 - m^2)x + k^2 - m^2 \\ &= (p^2 - 2p \cdot k + k^2 - m^2 - k^2 + m^2)x + k^2 - m^2 \\ &= (p^2 - 2p \cdot k)x + k^2 - m^2. \end{aligned} \tag{391}$$

Somando e subtraindo p^2x^2

$$\begin{aligned} (a-b)x + b &= p^2x - 2(p \cdot k)x + k^2 - m^2 + p^2x^2 - p^2x^2 \\ &= (k - px)^2 + p^2x(1-x) - m^2. \end{aligned} \tag{392}$$

Fazendo $K' = k - px$ e $H^2 = p^2 x(1-x) - m^2$, a expressão para o denominador de $\tilde{I}$ fica $[K'^2 + H^2]^3$. No numerador da integral $\tilde{I}$

$$\begin{aligned} p^2 - 2p \cdot k &= p^2 - 2p(K' + px) \\ &= p^2 - 2p \cdot K' - 2p^2 x \\ &= p^2(1-2x) - 2p \cdot K', \end{aligned} \tag{393}$$

e reescrevemos a integral $\tilde{I}$ como

$$\tilde{I} = 2 \int_{K'} \int_o^1 dx \frac{(1-x)[p^2(1-2x) - 2p \cdot K']}{(K'^2 + H^2)^3}. \tag{394}$$

Podemos observar que a integral $\int_{K'} \equiv \int \frac{d^4K'}{(2\pi)^4}$ é obtida a partir da integral $\int_k \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$, uma vez que $d^4k = d^4K'$, ficando com a integral (lembrando que somente ordens pares em K' sobrevivem)

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= 2 \int_o^1 dx \int_{K'} \frac{(1-x)p^2(1-2x)}{(K'^2 + H^2)^3} \\ &= 2 \int_o^1 dx (1-x) p^2 (1-2x) \int_{K'} \frac{1}{(K'^2 + H^2)^3} \end{aligned} \tag{395}$$

Utilizando a equação (234), temos que

$$\int_{K'} \frac{1}{(K'^2 + H^2)^3} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{H^2} \frac{1}{2}, \tag{396}$$

e, portanto

$$\tilde{I} = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_o^1 dx (1-x) \frac{p^2(1-2x)}{H^2} \tag{397}$$

Voltando à substituição feita com a parametrização de Feynman,

$$H^2 = p^2 x(1-x) - m^2 = p^2 x - p^2 x^2 - m^2$$

$$\frac{d(H^2)}{dx} = p^2 - 2p^2 x = p^2(1-2x)$$

observamos que

$$\frac{1}{H^2} \frac{d(H^2)}{dx} = -\frac{m^2}{H^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right) = \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{H^2}{-m^2} \right) \tag{398}$$

e a integral $\tilde{I}$ pode ser escrita como

$$\tilde{I} = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_o^1 dx (1-x) \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{H^2}{-m^2} \right).$$

Utilizando integração por partes, considerando $u = (1-x)$ e $dv = \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{H^2}{-m^2} \right) \right] dx$,

$$\tilde{I} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ (1-x) \ln \left(\frac{H^2}{-m^2} \right) \Bigg|_0^1 + \int_0^1 dx \ln \left(\frac{H^2}{-m^2} \right) \right\}.$$

Como o primeiro termo é nulo, ficamos com

$$\tilde{I} = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \;\ln\left(\frac{H^2}{-m^2}\right).$$

Considerando a função $Z_k(p^2,m^2) = \int_0^1 dx\; x^k \ln\left(\frac{p^2x(1-x)-m^2}{-m^2}\right)$, definida na equação (261) escrevemos

$$\tilde{I} = \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(p^2,m^2).$$

Assim,

$$I = I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(p^2,m^2)$$

E.2 Novo Procedimento para a Regularização Implícita Restrita

Vamos agora realizar o mesmo cálculo para a Integral de Feynman (389) do ponto de vista da nova abordagem para a Regularização Implícita. Depois de aplicar a parametrização de Feynman em (389) e realizar a mudança (*shift*) $k \longrightarrow k + px$, obtemos

$$I = \int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 + H^2)^2} \tag{399}$$

com $H^2 = p^2x(1-x) - m^2$.

Como a integral (399) é uma divergência básica, definida em (252), utilizamos a relação de escala (270) e escrevemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx\, I_{\log}(-H^2) \\ &= \int_0^1 dx\, I_{\log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2} \ln\left(-\frac{H^2}{m^2}\right) \\ &= I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(p^2,m^2). \end{aligned} \tag{400}$$

APÊNDICE F – Integral de Feynman I_μ

Nesse apêndice vamos calcular a integral de Feynman I_μ utlizando a Regularização Implícita e utilizando o novo procedimento para aplicação da Regularização Implícita, proposto nesse trabalho.

F.1 Método Tradicional da Regularização Implícita

$$I_\mu = \int_k^\Lambda \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]} \tag{401}$$

Observe que I_μ é linearmente divergente. Nesse caso, utilizaremos a Regularização Implícita para separar a parte divergente, com o uso recursivo da identidade algébrica (249) em I_μ.

$$\begin{aligned} I_\mu &= \int_k^\Lambda \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)} \left\{ \frac{1}{k^2-m^2} - \frac{p^2-2p\cdot k}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]} \right\} \\ &= \int_k^\Lambda \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2} - \frac{k_\mu(p^2-2p\cdot k)}{(k^2-m^2)^2[(p-k)^2-m^2]} \end{aligned} \tag{402}$$

Observe que a integral $\int_k \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^2}$ é ímpar em k e, portanto, nula. Assim,

$$I_\mu = -\int_k^\Lambda \frac{k_\mu(p^2-2p\cdot k)}{(k^2-m^2)^2[(p-k)^2-m^2]}. \tag{403}$$

Neste ponto, aplicamos novamente a identidade algébrica (249), uma vez que a integral resultante é logaritmicamente divergente.

$$\begin{aligned} I_\mu &= -\int_k^\Lambda \frac{k_\mu(p^2-2p\cdot k)}{(k^2-m^2)^2} \left\{ \frac{1}{k^2-m^2} - \frac{p^2-2p\cdot k}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]} \right\} \\ &= -\int_k^\Lambda \frac{k_\mu(p^2-2p\cdot k)}{(k^2-m^2)^3} + \int_k \frac{k_\mu(p^2-2p\cdot k)^2}{(k^2-m^2)^3[(p-k)^2-m^2]} \\ &= -p^2 \int_k \frac{k_\mu}{(k^2-m^2)^3} + 2p^\nu \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3} + \int_k \frac{k_\mu(p^2-2p\cdot k)^2}{(k^2-m^2)^3[(p-k)^2-m^2]} \end{aligned} \tag{404}$$

Novamente, a primeira integral é impar em k e, portanto, nula. A segunda integral é uma divergência logarítmica do tipo

$$\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3} = \frac{\eta_{\mu\nu}}{4}\left[I_{\log}(m^2) - \upsilon_0\right] \tag{405}$$

e a terceira integral é finita e precisa ser calculada utilizando a parametrização de Feynman (KANNILE, 2013) para reescrever o integrando de em termos de integrais espaciais, conforme descrito na seção 4.3, de acordo com a equação (218). Assim,

$$I_\mu = \frac{p_\mu}{2}\left[I_{\log}(m^2) - \upsilon_0\right] + \tilde{I}_\mu \tag{406}$$

em que

$$\tilde{I}_\mu = \int_k \frac{k_\mu (p^2 - 2p\cdot k)^2}{(k^2-m^2)^3[(p-k)^2-m^2]}.$$

Para comparar $\frac{1}{ab^3}$ ao integrando de $\tilde{I}_\mu$, fazemos:

$$a = (p-k)^2 - m^2 \;\text{ e }\; b = k^2 - m^2$$

e temos,

$$\begin{aligned}(a-b)x + b &= [(p-k)^2 - m^2] - (k^2-m^2)x + k^2 - m^2\\ &= (p^2 - 2p\cdot k + k^2 - m^2 - k^2 + m^2)x + k^2 - m^2\\ &= (p^2 - 2p\cdot k)x + k^2 - m^2\end{aligned} \tag{407}$$

Somando e subtraindo p^2x^2

$$\begin{aligned}(a-b)x + b &= p^2x - 2(p\cdot k)x + k^2 - m^2 + p^2x^2 - p^2x^2\\ &= (k-px)^2 + p^2x(1-x) - m^2\end{aligned} \tag{408}$$

Fazendo $K' = k - px$ e $H^2 = p^2x(1-x) - m^2$, a expressão para o denominador de $\tilde{I}_\mu$ fica $[K'^2 + H^2]^4$. No numerador da integral $\tilde{I}_\mu$, temos

$$(K'+px)_\mu\left[p^2 - 2p\cdot(K'+px)\right]^2 = (K'+px)_\mu\left[p^2(1-2x) - 2p\cdot K'\right]^2 \tag{409}$$

e a integral $\tilde{I}_\mu$ fica:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_\mu &= \int_0^1 dx \int_{K'} \frac{3(1-x)^2(K'+px)_\mu\left[p^2(1-2x) - 2p\cdot K'\right]^2}{[K'^2+H^2]^4}\\ &= \int_0^1 dx \int_{K'} \frac{3(1-x)^2(K'+px)_\mu\left[p^4(1-2x)^2 - 4(p\cdot K')p^2(1-2x) + 4(p\cdot K')^2\right]}{[K'^2+H^2]^4}\end{aligned} \tag{410}$$

Fazendo os produtos no numerador e eliminando as integrais nulas (ímpares em K'), ficamos com 3 integrais para resolver:

$$\tilde{I}_{\mu_1} = 3\int_0^1 dx \int_{K'} \frac{(1-x)^2 K'_\mu(-4)(p\cdot K')p^2(1-2x)}{[K'^2+H^2]^4}$$

$$\tilde{I}_{\mu_2} = 3\int_0^1 dx \int_{K'} \frac{(1-x)^2 p_\mu x p^4(1-2x)^2}{[K'^2+H^2]^4}$$

$$\tilde{I}_{\mu_3} = 3\int_0^1 dx \int_{K'} \frac{(1-x)^2 p_\mu x 4(p\cdot K')^2}{[K'^2+H^2]^4}$$

Vamos resolvê-las na ordem em que aparecem.

$$\tilde{I}_{\mu_1} = -12\int_0^1 dx(1-x)^2 p^\nu p^2(1-2x)\int_{K'} \frac{K'_\mu K'_\nu}{[K'^2+H^2]^4}$$

Sabemos, utilizando a equação (236), que

$$\int_{K'} \frac{K'_\mu K'_\nu}{(K'^2+H^2)^4} = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{\eta_{\mu\nu}}{12H^2}, \tag{411}$$

temos

$$\tilde{I}_{\mu_1} = -\frac{i}{(4\pi)^2} p_\mu \int_0^1 dx(1-x)^2 \; \frac{p^2(1-2x)}{H^2}$$

e utilizando a equação (398),

$$\tilde{I}_{\mu_1} = -\frac{i}{(4\pi)^2} p_\mu \int_0^1 dx(1-x)^2 \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{H^2}{-m^2}\right)\right]$$

Utilizando integração por partes, considerando $u = (1-x)^2$ e $dv = \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{H^2}{-m^2}\right)\right] dx$,

$$\tilde{I}_{\mu_1} = -\frac{i}{(4\pi)^2} p_\mu \left\{(1-x)^2 \ln\left(\frac{H^2}{-m^2}\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 dx(2-2x)\;\left(\frac{H^2}{-m^2}\right)\right\}$$

Como o primeiro termo é nulo, ficamos com

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{\mu_1} &= -\frac{i}{(4\pi)^2} p_\mu \int_0^1 dx(2-2x)\ln\left(\frac{H^2}{-m^2}\right) \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2} p_\mu [2Z_0 - 2Z_1] \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2} p_\mu [2Z_0 - Z_0] \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2} p_\mu Z_0
\end{aligned} \tag{412}$$

Considerando a função $Z_k(p^2,m^2) = \int_0^1 dx\, x^k \ln\left(\frac{p^2x(1-x)-m^2}{-m^2}\right)$, definida na equação (261) e a relação $Z_1 = \frac{Z_0}{2}$ de acordo com a relação (276) escrevemos

$$\tilde{I}_{\mu_1} = -\frac{i}{(4\pi)^2} p_\mu Z_0(p^2,m^2)$$

Para a integral $\tilde{I}_{\mu_2}$,

$$\tilde{I}_{\mu_2} = 3\int_0^1 dx(1-x)^2 p_\mu x p^4(1-2x)^2 \int_{K'} \frac{1}{[K'^2+H^2]^4}$$

Sabemos, utilizando a equação (234), que

$$\int_{K'} \frac{1}{(K'^2+H^2)^4} = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{6H^4}, \tag{413}$$

temos

$$\tilde{I}_{\mu_2} = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p_\mu}{2}\int_0^1 dx\;\; x(1-x)^2\;\; \frac{p^4(1-2x)^2}{H^4}$$

Das substituições feitas anteriomente com a parametrização de Feynman,

$$H^2 = p^2x(1-x) - m^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{d(H^2)}{dx} = p^2(1-2x)$$

temos

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{H^2}\right] = -\frac{p^2(1-2x)}{H^4}$$

e escrevemos

$$\tilde{I}_{\mu_2} = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p_\mu}{2}\int_0^1 dx\;\; x(1-x)^2p^2(1-2x)\left[\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{H^2}\right)\right]$$

Para a integração por partes, definimos

$$u = x(1-x)^2p^2(1-2x) \qquad \text{e} \qquad dv = \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{H^2}\right]dx$$

e temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{\mu_2} \;\; &= \;\; \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p_\mu}{2}\left\{x(1-x)^2p^2(1-2x)\left(-\frac{1}{H^2}\right)\Bigg|_0^1 + \right. \\
&+ \left.\int_0^1 dx\;\; (1-x)(1-3x)\;\; \frac{p^2(1-2x)}{H^2} - p^2\int_0^1 dx\;\; \frac{2x(1-x)^2}{H^2}\right\}
\end{aligned} \tag{414}$$

O primeiro termo de $\tilde{I}_{\mu_2}$ é nulo. Vamos nomear as duas integrais restantes $\tilde{I}_{\mu_{2.1}}$ e $\tilde{I}_{\mu_{2.2}}$, e vamos à solução:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{\mu_{2.1}} \;\; &= \;\; \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p_\mu}{2}\int_0^1 dx\;\; (1-x)(1-3x)\;\; \frac{p^2(1-2x)}{H^2} \\
&= \;\; \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p_\mu}{2}\int_0^1 dx\;\; (1-x)(1-3x)\;\; \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{H^2}{-m^2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{415}$$

Novamente, utilizando integração por partes, e considerando

$$u = (1-x)(1-3x) \qquad \text{e} \qquad dv = \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{H^2}{-m^2}\right)\right]dx,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{\mu_{2.1}} \;\; &= \;\; \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p_\mu}{2}\left\{(1-x)(1-3x)\ln\left(\frac{H^2}{-m^2}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1(-4+6x)\ln\left(\frac{H^2}{-m^2}\right)\right\} \\
&= \;\; \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p_\mu}{2}\{4Z_0 - 6Z_1\} \\
&= \;\; \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p_\mu}{2}\{4Z_0 - 3Z_0\} \\
&= \;\; \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p_\mu}{2}Z_0(p^2{,}m^2)
\end{aligned} \tag{416}$$

Para a outra integral,

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{\mu_{2.2}} &= \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p_\mu}{2}(-p^2)\int_0^1 dx\ \frac{2x(1-x)^2}{H^2} \\ &= -\frac{i}{(4\pi)^2}p_\mu p^2\int_0^1 dx\ \frac{x(1-x)^2}{H^2}\end{aligned} \tag{417}$$

vamos deixar esse resultado indicado, por hora. Vamos agora resolver a integral $\tilde{I}_{\mu_3}$.

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{\mu_3} &= 12\int_0^1 dx\int_{K'}\frac{x(1-x)^2 p_\mu(p\cdot K')^2}{[K'^2+H^2]^4} \\ &= 12\int_0^1 dx\ x(1-x)^2 p_\mu p^\nu p^\alpha\int_K{}' \frac{K'_\nu K'_\alpha}{[K'^2+H^2]^4} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2}p_\mu p^2\int_0^1 dx\ \frac{x(1-x)^2}{H^2}\end{aligned} \tag{418}$$

em que foi utilizada a equação (411), com base na equação (236). Observamos que as integrais $\tilde{I}_{\mu_{2.2}}$ e $\tilde{I}_{\mu_3}$ se anulam. Ficamos assim com o resultado final de $\tilde{I}_\mu$:

$$I_\mu = \frac{p_\mu}{2}\left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}Z_0(p^2,m^2) - \upsilon_0\right] \tag{419}$$

F.2 Novo Procedimento para a Regularização Implícita Restrita

Vamos agora realizar o mesmo cálculo para a Integral de Feynman (401) do ponto de vista da nova abordagem para a Regularização Implícita. Depois de aplicar a parametrização de Feynman em (401) e realizar a mudança (*shift*) $k \to k + px$, obtemos

$$I_\mu = \int_0^1 dx\int_k^\Lambda \frac{(k+px)_\mu}{(k^2+H^2)^2} \tag{420}$$

com $H^2 = p^2x(1-x) - m^2$. A integral (420) é composta por duas integrais, das quais uma é nula, por ser ímpar em k. Resta, assim, para ser resolvida, a integral

$$\begin{aligned}I_\mu &= \int_0^1 dx\int_k^\Lambda \frac{p_\mu x}{(k^2+H^2)^2} \\ &= p_\mu\int_0^1 dx\ x\int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2+H^2)^2} \\ &= p_\mu\int_0^1 dx\, x\, I_{\log}(-H^2)\end{aligned} \tag{421}$$

utilizando a divergência básica, definida (252). Utilizamos a relação de escala (270) e escrevemos

$$
\begin{aligned}
I_\mu &= p_\mu \int_0^1 dx \;\; x I_{\log}(-H^2) \\
&= p_\mu \int_0^1 dx\, x \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2} \ln\left(-\frac{H^2}{m^2}\right)\right] \\
&= p_\mu \left[\frac{1}{2} I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_1\right] \\
&= p_\mu \left[\frac{1}{2} I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{Z_0}{2}\right]
\end{aligned}
\tag{422}
$$

Assim, aplicando a nova abordagem da Regularização Implícita Restrita, chegamos ao resultado

$$
I_\mu = \frac{p_\mu}{2}\left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(p^2, m^2)\right]
$$

Percebemos que os resultados obtidos diferem apenas pelo termo de superfície $-\upsilon_0$, que no caso da nova abordagem da Regularização Implícita Restrita é definido nulo a priori.

APÊNDICE G – Integral de Feynman $I_{\mu\nu}$

Nesse apêndice vamos iniciar o desenvolvimento da integral de Feynman $I_{\mu\nu}$ utlizando a Regularização Implícita, apresentando as integrais que precisam ser resolvidas, mas não apresentaremos a solução completa por esse método em vista da grande quantidade de cálculos envolvidos.Em seguida, a resolução completa pela nova abordagem da Regularização Implícita.

G.1 Método Tradicional da Regularização Implícita

$$I_{\mu\nu} = \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]}. \tag{423}$$

Observe que $I_{\mu\nu}$ é quadraticamente divergente. Nesse caso, utilizaremos a Regularização Implícita para separar a parte divergente, com o uso recursivo da identidade algébrica (249) em $I_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)} \left\{ \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{p^2 - 2p\cdot k}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]} \right\} \\ &= \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{k_\mu k_\nu \left(p^2 - 2p\cdot k\right)}{(k^2 - m^2)^2[(p-k)^2 - m^2]}. \end{aligned} \tag{424}$$

A primeira integral é quadraticamente divergente e pode ser definida pela equação (257). Assim,

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left[I_{\text{quad}}(m^2) - \upsilon_2\right] - \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu (p^2 - 2p\cdot k)}{(k^2 - m^2)^2[(p-k)^2 - m^2]} \\ &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left[I_{\text{quad}}(m^2) - \upsilon_2\right] + \tilde{I}_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{425}$$

Neste ponto, aplicamos novamente a identidade algébrica (249) em $\tilde{I}_{\mu\nu}$, uma vez que a integral é logaritmicamente divergente.

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\mu\nu} &= -\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu (p^2 - 2p\cdot k)}{(k^2 - m^2)^2} \left\{ \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{p^2 - 2p\cdot k}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]} \right\} \\ &= -\int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu (p^2 - 2p\cdot k)}{(k^2 - m^2)^3} + \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu (p^2 - 2p\cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3[(p-k)^2 - m^2]} \\ &= -p^2 \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} + \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu (p^2 - 2p\cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3[(p-k)^2 - m^2]} \\ &= -p^2 \frac{\eta_{\mu\nu}}{4}\left[I_{\log}(m^2) - \upsilon_0\right] + \tilde{I}^{(1)}_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{426}$$

uma vez que a primeira integral é logaritmicamente divergente e definida pela equação (258) e a segunda integral é ímpar em k e, portanto, nula. Precisamos aplicar novamente a identidade

(249) na terceira integral $\tilde{I}^{(1)}_{\mu\nu}$ para separar a parte divergente da parte finita. Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{I}^{(1)}_{\mu\nu} &= \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu (p^2 - 2p\cdot k)^2}{(k^2-m^2)^3}\left\{\frac{1}{k^2-m^2} - \frac{p^2-2p\cdot k}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}\right\} \\
&= \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu \left[p^2-2(p\cdot k)\right]^2}{(k^2-m^2)^4} - \int_k \frac{k_\mu k_\nu \left[p^2-2(p\cdot k)\right]^3}{(k^2-m^2)^4[(p-k)^2-m^2]} \\
&= \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu \left[p^4-4p^2(p\cdot k)+4(p\cdot k)^2\right]}{(k^2-m^2)^4} - \int_k \frac{k_\mu k_\nu \left[p^2-2(p\cdot k)\right]^3}{(k^2-m^2)^4[(p-k)^2-m^2]} \\
&= p^4\int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^4} + 4p^\alpha p^\beta \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2-m^2)^4} - \int_k \frac{k_\mu k_\nu \left[p^2-2(p\cdot k)\right]^3}{(k^2-m^2)^4[(p-k)^2-m^2]} \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p^2 p_\mu p_\nu}{12m^2} + \frac{(p^2\eta_{\mu\nu}+2p_\mu p_\nu)}{6}\left[I_{\log}(m^2)-\xi_0\right] - \int_k \frac{k_\mu k_\nu \left[p^2-2(p\cdot k)\right]^3}{(k^2-m^2)^4[(p-k)^2-m^2]}
\end{aligned} \tag{427}$$

Até o momento temos, para a integral $I_{\mu\nu}$ os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left[I_{\text{quad}}(m^2)-\upsilon_2\right] - \frac{p_\mu p_\nu}{4}\left[I_{\log}(m^2)-\upsilon_0\right] - \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{p^2 p_\mu p_\nu}{12m^2} + \\
&+ \frac{(p^2\eta_{\mu\nu}+2p_\mu p_\nu)}{6}\left[I_{\log}(m^2)-\xi_0\right] - \int_k \frac{k_\mu k_\nu \left[p^2-2(p\cdot k)\right]^3}{(k^2-m^2)^4[(p-k)^2-m^2]}.
\end{aligned} \tag{428}$$

Para resolver a última integral finita, vamos nomeá-la $\tilde{I}^{(2)}_{\mu\nu}$, aplicamos a parametrização de Feynman (KANNILE, 2013) para reescrever o integrando de em termos de integrais espaciais, conforme descrito na seção 4.3, de acordo com a equação (218) e realizamos o *shift* $k \to k + px$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}^{(2)}_{\mu\nu} &= -4\int_0^1 \frac{(1-x)^3(k+px)_\mu(k+px)_\nu\left[p^2-2p\cdot(k+px)\right]^3}{[k^2+H^2]^5} \\
&= -4\int_0^1 \frac{(1-x)^3(k+px)_\mu(k+px)_\nu\left[p^2(1-2x)-2p\cdot k\right]^3}{[k^2+H^2]^5}
\end{aligned} \tag{429}$$

O desenvolvimento dos produtos e potências no numerador dão origem a 16 integrais, das quais 8 são nulas por serem ímpares em k. A solução dessa última etapa será omitida aqui em função do grande volume de cálculos envolvidos. Vale ressaltar que todos os cálculos foram efetuados antes do desenvolvimento do novo procedimento para aplicação da Regularização Implícita Restrita, e coincidem logicamente com o encontrado em (260).

G.2 Novo Procedimento para a Regularização Implícita Restrita

Vamos agora realizar o mesmo cálculo para a Integral de Feynman (423) do ponto de vista da nova abordagem para a Regularização Implícita. Depois de aplicar a parametrização de Feynman em (423) e realizar o *shift* $k \to k + px$, obtemos

$$I_{\mu\nu} = \int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{(k+px)_\mu(k+px)_\nu}{(k^2+H^2)^2} \tag{430}$$

com $H^2 = p^2x(1-x) - m^2$. Desenvolvendo o produto no numerador, ficamos com

$$I_{\mu\nu} = \int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\mu + K_\mu p_\nu x + K_\nu p_\mu x + p_\mu p_\nu x^2}{(k^2+H^2)^2} \tag{431}$$

A integral (431) é composta por quatro integrais, das quais duas são nulas, por serem ímpares em k. Restam, assim, para serem resolvidas, as integrais

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= \int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\mu}{(k^2+H^2)^2} + \int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{p_\mu p_\nu x^2}{(k^2+H^2)^2} \\ &= I^{(1)}_{\mu\nu} + I^{(2)}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{432}$$

A primeira integral é quadraticamente divergente e pode ser definida pela equação (257). Assim,

$$\begin{aligned} I^{(1)}_{\mu\nu} &= \int_0^1 dx \left\{\frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left[I_{\text{quad}}(-H^2) - \upsilon_2\right]\right\} \\ &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\int_0^1 dx\, I_{\text{quad}}(-H^2) \end{aligned} \tag{433}$$

já considerando $\upsilon_2 = 0$, por definição da Regularização Implícita Restrita. Utilizando a relação de escala (271), considerando $\lambda^2 = m^2$, temos

$$\begin{aligned} &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\int_0^1 dx \left\{I_{\text{quad}}(m^2) - \left(m^2+H^2\right)I_{\log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2}\left[m^2 + H^2 - H^2\ln\left(-\frac{H^2}{m^2}\right)\right]\right\} \\ &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left\{I_{\text{quad}}(m^2) - \int_0^1 dx\, p^2x(1-x)I_{\log}(m^2) + \right. \\ &- \left.\frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 dx\left[p^2x(1-x) - \left(p^2x(1-x)-m^2\right)\ln\left(-\frac{p^2x(1-x)-m^2}{m^2}\right)\right]\right\} \\ &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left\{I_{\text{quad}}(m^2) - I_{\log}(m^2)\left[\frac{p^2}{2}-\frac{p^2}{3}\right] + \right. \\ &- \left.\frac{i}{16\pi^2}\left[\frac{p^2}{2}-\frac{p^2}{3}\right] + \frac{i}{16\pi^2}\left[p^2Z_1 - p^2Z_2 - m^2Z_0\right]\right\}. \end{aligned} \tag{434}$$

Utilizando a relação definida em (276) para escrever Z_1 e Z_2 em função de Z_0, temos:

$$\begin{aligned} &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left\{I_{\text{quad}}(m^2) - \frac{p^2}{6}I_{\log}(m^2) + \right. \\ &+ \left.\frac{i}{16\pi^2}\left[-\frac{p^2}{6} + p^2\frac{Z_0}{2} - p^2\left[\frac{1}{3}Z_0\frac{(p^2-m^2)}{p^2} - \frac{1}{18}\right] - m^2Z_0\right]\right\} \\ &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left\{I_{\text{quad}}(m^2) - \frac{p^2}{6}I_{\log}(m^2) + \frac{i}{16\pi^2}\left[\left(\frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{3} + \frac{m^2}{3} - \frac{3m^2}{3}\right)Z_0 - \frac{2p^2}{18}\right]\right\} \\ &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left\{I_{\text{quad}}(m^2) - \frac{p^2}{6}I_{\log}(m^2) + \frac{i}{16\pi^2}\left[\left(\frac{p^2}{6} - \frac{4m^2}{6}\right)Z_0 - \frac{2p^2}{18}\right]\right\} \end{aligned} \tag{435}$$

A segunda integral $I_{\mu\nu}^{(2)}$ é logaritmicamente divergente e pode ser definida utilizando a divergência básica, definida por (252).

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^{(2)} &= \int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{p_\mu p_\nu x^2}{(k^2+H^2)^2} \\
&= p_\mu p_\nu \int_0^1 dx\ \ x^2 \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2+H^2)^2} \\
&= p_\mu p_\nu \int_0^1 dx\ \ x^2\ I_{\log}(-H^2).
\end{aligned} \tag{436}$$

Utilizamos a relação de escala (270) e escrevemos

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^{(2)} &= p_\mu p_\nu \int_0^1 dx\, x^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2} \ln\left(-\frac{H^2}{m^2}\right)\right] \\
&= p_\mu p_\nu \left(\frac{1}{3} I_{\log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2} Z_2 \right) \\
&= p_\mu p_\nu \left\{ \frac{1}{3} I_{\log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{3} Z_0 \frac{(p^2-m^2)}{p^2} - \frac{1}{18} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{437}$$

onde foi utilizada a relação (276) para definir Z_2 em função de Z_0. Somando os resultados de $I_{\mu\nu}^{(1)}$ e $I_{\mu\nu}^{(2)}$, escrevemos

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left\{ I_{\text{quad}}(m^2) - \frac{p^2}{6} I_{\log}(m^2) + \frac{i}{16\pi^2} \left[\left(\frac{p^2}{6} - \frac{4m^2}{6} \right) Z_0 - \frac{2p^2}{18} \right] \right\} + \\
&+ \ p_\mu p_\nu \left\{ \frac{1}{3} I_{\log}(m^2) - \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{3} Z_0 \frac{(p^2-m^2)}{p^2} - \frac{1}{18} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{438}$$

Assim, aplicando a nova abordagem da Regularização Implícita Restrita, chegamos ao resultado

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} I_{\text{quad}}(m^2) + \frac{1}{12}\left(-p^2\eta_{\mu\nu} + 4p_\mu p_\nu\right) I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{18}(p_\mu p_\nu - p^2\eta_{\mu\nu}) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{12p^2} \left[(p^2-4m^2)p^2\eta_{\mu\nu} - 4(p^2-m^2)p_\mu p_\nu \right] Z_0(p^2,m^2,m^2,m^2) \right\}.
\end{aligned} \tag{439}$$

Percebemos que o resultado obtido difere do apresentado em (260) apenas pelos termos de superfície υ_0, υ_2 e ξ_0, que no caso da nova abordagem da Regularização Implícita Restrita são definidos nulos a priori.

APÊNDICE H – Relações de Escala

Neste apêndice vamos calcular as relações de escala utilizadas no novo procedimento para aplicação da Regularização Implícita Restrita. As relações de escala são obtidas a partir da identidade algébrica

$$\frac{1}{k^2+H^2} = \frac{1}{k^2-\lambda^2} - \frac{\lambda^2+H^2}{(k^2-\lambda^2)(k^2+H^2)}. \tag{440}$$

H.1 Relação de Escala $I_{\log}(-H^2)$

Por definição, de acordo com a equação (252),

$$I_{\log}(-H^2) = \int_k^{\Lambda} \frac{1}{(k^2+H^2)^2}. \tag{441}$$

Aplicando a identidade algébrica (440),

$$\begin{aligned}
I_{\log}(-H^2) &= \int_k \left[\frac{1}{k^2-\lambda^2} - \frac{\lambda^2+H^2}{(k^2-\lambda^2)(k^2+H^2)}\right]^2 \\
&= \int_k \frac{1}{(k^2-\lambda^2)^2} - 2\int_k \frac{(\lambda^2+H^2)}{(k^2-\lambda^2)^2(k^2+H^2)} + \int_k \frac{(\lambda^2+H^2)^2}{(k^2-\lambda^2)^2(k^2+H^2)^2} \\
&= I_{\log}(\lambda^2) - 2\int_k \frac{(\lambda^2+H^2)}{(k^2-\lambda^2)^2(k^2+H^2)} + \int_k \frac{(\lambda^2+H^2)^2}{(k^2-\lambda^2)^2(k^2+H^2)^2} \\
&= I_{\log}(\lambda^2) + I_{\log}^{(1)}(-H^2) + I_{\log}^{(2)}(-H^2).
\end{aligned} \tag{442}$$

Vamos resolver separadamente as integrais. Para $I_{\log}^{(1)}(-H^2)$, aplicamos a parametrização de Feynman (217) e para comparar $\frac{1}{ab^2}$ ao integrando de $I_{\log}^{(1)}(-H^2)$, consideramos

$$a = k^2 + H^2 \;\text{ e }\; b = k^2 - \lambda^2$$

e temos

$$\begin{aligned}
(a-b)x + b &= (k^2 + H^2 - K^2 + \lambda^2)x + k^2 - \lambda^2 \\
&= (\lambda^2 + H^2)x + k^2 - \lambda^2 \\
&= k^2 + (\lambda^2 + H^2)x - \lambda^2.
\end{aligned} \tag{443}$$

Definimos $Q^2 = (\lambda^2 + H^2)x - \lambda^2$. Assim,

$$\begin{aligned}
I_{\log}^{(1)}(-H^2) &= -4\int_0^1 dx\,(1-x)(\lambda^2+H^2)\int_k \frac{1}{[K^2+Q^2]^3} \\
&= -4\int_0^1 dx\,(1-x)(\lambda^2+H^2)\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{2Q^2} \\
&= -2\frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\,(1-x)\frac{(\lambda^2+H^2)}{Q^2}.
\end{aligned} \tag{444}$$

Sabemos que $\frac{d}{dx}[Q^2] = \lambda^2 + H^2$, e portanto $\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right] = \frac{\lambda^2 + H^2}{Q^2}$. Assim,

$$I_{\log}^{(1)}(-H^2) = -2\frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\,(1-x)\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right]. \tag{445}$$

Utilizando integração por partes, considerando $u = (1-x)$ e $dv = \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right]dx$,

$$\begin{aligned} I_{\log}^{(1)}(-H^2) &= -2\frac{i}{(4\pi)^2}\left\{(1-x)\ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 dx\ \ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right\} \\ &= -2\frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\ \ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right). \end{aligned} \tag{446}$$

Por hora deixaremos esse resultado indicado como acima.

Para $I_{\log}^{(2)}(-H^2)$, aplicamos a parametrização de Feynman (219) para comparar $\frac{1}{a^2b^2}$ ao integrando de $I_{\log}^{(2)}(-H^2)$. Assim,

$$\begin{aligned} I_{\log}^{(2)}(-H^2) &= 6\int_0^1 dx\,x(1-x)(\lambda^2+H^2)^2\int_k \frac{1}{(k^2+H^2)^4} \\ &= 6\int_0^1 dx\,x(1-x)(\lambda^2+H^2)^2\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{6Q^4} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\,x(1-x)(\lambda^2+H^2)\frac{(\lambda^2+H^2)}{Q^4} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\,x(1-x)(\lambda^2+H^2)\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{Q^2}\right). \end{aligned} \tag{447}$$

Utilizando integração por partes, considerando $u = x(1-x)(\lambda^2+H^2)$ e $dv = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{Q^2}\right)dx$,

$$\begin{aligned} I_{\log}^{(2)}(-H^2) &= \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{x(1-x)(\lambda^2+H^2)\left(-\frac{1}{Q^2}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 dx\ \frac{(1-2x)(\lambda^2+H^2)}{Q^2}\right\} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\,(1-2x)\frac{(\lambda^2+H^2)}{Q^2} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\,(1-2x)\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{448}$$

Novamente, utilizando integração por partes, considerando $u = (1-2x)$ e $dv = \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right]dx$,

$$\begin{aligned} I_{\log}^{(2)}(-H^2) &= \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{(1-2x)\ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 dx\ \ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right\} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{-\ln\left(\frac{H^2}{-\lambda^2}\right) + 2\int_0^1 dx\ \ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{449}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I_{\log}(-H^2) &= I_{\log}(\lambda^2) + I_{\log}^{(1)}(-H^2) + I_{\log}^{(2)}(-H^2) \\
&= I_{\log}(\lambda^2) - 2\frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\, \ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right) + \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{-\ln\left(\frac{H^2}{-\lambda^2}\right) + 2\int_0^1 dx\, \ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{450}
$$

e obtemos a relação de escala

$$
I_{\log}(-H^2) = I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2}\ln\left(-\frac{H^2}{\lambda^2}\right) \tag{451}
$$

H.2 Relação de Escala $I_{quad}(-H^2)$

Por definição, de acordo com a equação (252),

$$
I_{quad}(-H^2) = \int_k^{\Lambda} \frac{1}{k^2 + H^2}. \tag{452}
$$

Aplicando a identidade algébrica (440),

$$
\begin{aligned}
I_{quad}(-H^2) &= \int_k \left[\frac{1}{k^2 - \lambda^2} - \frac{\lambda^2 + H^2}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 + H^2)}\right] \\
&= \int_k \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - \int_k \frac{\lambda^2 + H^2}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 + H^2)} \\
&= I_{quad}(\lambda^2) + I_{quad}^{(1)}(-H^2).
\end{aligned} \tag{453}
$$

Como a integral $I_{quad}^{(1)}(-H^2)$ é divergente, aplicamos novamente a identidade (440) a fim de separar a parte finita da parte divergente.

$$
\begin{aligned}
I_{quad}^{(1)}(-H^2) &= -\int_k \frac{\lambda^2 + H^2}{(k^2 - \lambda^2)}\left\{\frac{1}{k^2 - \lambda^2} - \frac{\lambda^2 + H^2}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 + H^2)}\right\} \\
&= -\int_k \frac{\lambda^2 + H^2}{(k^2 - \lambda^2)^2} + \int_k \frac{(\lambda^2 + H^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2(k^2 + H^2)} \\
&= -(\lambda^2 + H^2) I_{\log}(\lambda^2) + \int_k \frac{(\lambda^2 + H^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^2(k^2 + H^2)}.
\end{aligned} \tag{454}
$$

Para resolver a segunda integral, aplicamos a parametrização de Feynman (217), definindo $Q^2 = (\lambda^2 + H^2)x - \lambda^2$, e obtemos

$$
\begin{aligned}
I^{(1)}_{\text{quad}}(-H^2) &= -(\lambda^2 + H^2)I_{\log}(\lambda^2) + 2\int_0^1 dx\,(1-x)(\lambda^2+H^2)^2 \int_k \frac{1}{[K^2+Q^2]^3} \\
&= -(\lambda^2 + H^2)I_{\log}(\lambda^2) + 2\int_0^1 dx\,(1-x)(\lambda^2+H^2)^2 \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{2Q^2} \\
&= -(\lambda^2 + H^2)I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\,(1-x)(\lambda^2+H^2)\frac{(\lambda^2+H^2)}{Q^2} \\
&= -(\lambda^2 + H^2)I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{\int_0^1 dx\,(\lambda^2+H^2)\frac{(\lambda^2+H^2)}{Q^2} - \int_0^1 dx\,x(\lambda^2+H^2)\frac{(\lambda^2+H^2)}{Q^2}\right\} \\
&= -(\lambda^2 + H^2)I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{\int_0^1 dx\,(\lambda^2+H^2)\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right] + \right. \\
&\left. - \int_0^1 dx\,x(\lambda^2+H^2)\frac{(\lambda^2+H^2)}{Q^2}\right\}
\end{aligned} \tag{455}
$$

A primeira integral pode ser calculada diretamente. Para a segunda integral, somamos e subtraímos λ^2 de forma que $(\lambda^2 + H^2)x = (\lambda^2 + H^2)x - \lambda^2 + \lambda^2 = Q^2 + \lambda^2$.

$$
\begin{aligned}
&= -(\lambda^2 + H^2)I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{(\lambda^2+H^2)\ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 dx\,(\lambda^2+Q^2)\frac{(\lambda^2+H^2)}{Q^2}\right\} \\
&= -(\lambda^2 + H^2)I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{(\lambda^2+H^2)\ln\left(\frac{H^2}{-\lambda^2}\right) - \int_0^1 dx\,\lambda^2\frac{(\lambda^2+H^2)}{Q^2} + \right. \\
&\left. - \int_0^1 dx\,Q^2\frac{(\lambda^2+H^2)}{Q^2}\right\} \\
&= -(\lambda^2 + H^2)I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{(\lambda^2+H^2)\ln\left(\frac{H^2}{-\lambda^2}\right) - \int_0^1 dx\,\lambda^2\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{Q^2}{-\lambda^2}\right)\right] + \right. \\
&\left. - \int_0^1 dx\,(\lambda^2+H^2)\right\} \\
&= -(\lambda^2 + H^2)I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{(\lambda^2+H^2)\ln\left(\frac{H^2}{-\lambda^2}\right) - \lambda^2\ln\left(\frac{H^2}{-\lambda^2}\right) - (\lambda^2+H^2)\right\}
\end{aligned} \tag{456}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I_{\text{quad}}(-H^2) &= I_{\text{quad}}(\lambda^2) + I^{(1)}_{\text{quad}}(-H^2) \\
&= I_{\text{quad}}(\lambda^2) - (\lambda^2+H^2)I_{\log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2}\left\{H^2\ln\left(\frac{H^2}{-\lambda^2}\right) - (\lambda^2+H^2)\right\}
\end{aligned}
$$

e escrevemos

$$
I_{\text{quad}}(-H^2) = I_{\text{quad}}(\lambda^2) - (\lambda^2+H^2)I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2}\left[\lambda^2 + H^2 - H^2\ln\left(-\frac{H^2}{\lambda^2}\right)\right]. \tag{457}
$$

APÊNDICE I – Funções Z_k

Definimos

$$Z_k(p^2,\, m_1^2,\, m_2^2,\, m_3^2) = \int_0^1 dz\ z^k \ln\left[\frac{p^2 z(1-z) + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2}{-m_3^2}\right]. \tag{458}$$

Podemos, por simplicidade, escrever

$$Z_k(p^2,\, m_1^2,\, m_2^2,\, m_3^2) = \int_0^1 dz\ z^k \ln Q\,, \tag{459}$$

em que

$$Q = -\frac{1}{m_3^2}\left[p^2 z(1-z) + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2\right]. \tag{460}$$

Dessa forma, avaliando a função Q em 0 e 1, temos

$$Q(0) = \frac{m_1^2}{m_3^2} \qquad \text{e} \qquad Q(1) = \frac{m_2^2}{m_3^2}.$$

Considere a integral I, definida por

$$I = \int_0^1 dz\, z^{k-1}\,\frac{dQ}{dz}\ \ln Q\,. \tag{461}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dz} &= -\frac{1}{m_3^2}\left[p^2(1-2z) + (m_1^2 - m_2^2)\right] \\ &= -\frac{1}{m_3^2}\left[p^2 + m_1^2 - m_2^2 - 2p^2 z\right]. \end{aligned} \tag{462}$$

Aplicando integração por partes em I, considerando

$$u = z^{k-1}\ \ln Q \qquad \text{e} \qquad dv = \frac{dQ}{dz}\,dz\,,$$

$$\begin{aligned} I &= \left[z^{k-1}\,Q\ \ln Q\right]_0^1 - \int_0^1 dz\,\left\{\left[(k-1)\,z^{k-2}\ \ln Q\right] + \left[z^{k-1}\,\frac{1}{Q}\,\frac{dQ}{dz}\right]\right\} Q \\ &= 1^{k-1}\,Q(1)\ \ln Q(1)\ - \int_0^1 dz\,(k-1)\,z^{k-2}\,Q\ \ln Q\ - \int_0^1 dz\,z^{k-1}\,\frac{1}{Q}\,Q\,\frac{dQ}{dz} \\ &= \frac{m_2^2}{m_3^2}\ln\left(\frac{m_2^2}{m_3^2}\right) + I_1 + I_2\,. \end{aligned} \tag{463}$$

Por uma questão de organização, vamos avaliar separadamente as integrais I_1 e I_2.

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_0^1 dz\,(k-1)\,z^{k-2}\,Q\,\ln Q \\
&= -\int_0^1 dz\,(k-1)\,z^{k-2}\left\{-\frac{1}{m_3^2}\left[p^2 z(1-z)+(m_1^2-m_2^2)z-m_1^2\right]\right\}\ln Q \\
&= \frac{(k-1)}{m_3^2}\int_0^1 dz\,\left[p^2 z^{k-1}-p^2 z^k+(m_1^2-m_2^2)z^{k-1}-m_1^2 z^{k-2}\right]\ln Q \\
&= \frac{(k-1)}{m_3^2}\left[-p^2 Z_k+(p^2+m_1^2-m_2^2)Z_{k-1}-m_1^2 Z_{k-2}\right]. \qquad (464)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\int_0^1 dz\,z^{k-1}\,\frac{1}{Q}\,Q\,\frac{dQ}{dz} \\
&= -\int_0^1 dz\,z^{k-1}\,\frac{dQ}{dz} \\
&= -\int_0^1 dz\,z^{k-1}\;-\frac{1}{m_3^2}\left[p^2+m_1^2-m_2^2-2p^2 z\right] \\
&= \frac{1}{m_3^2}\int_0^1 dz\,\left[(p^2+m_1^2-m_2^2)z^{k-1}-2p^2 z^k\right] \\
&= \frac{1}{m_3^2}\left[\frac{1}{k}(p^2+m_1^2-m_2^2)z^k-\frac{2p^2}{k+1}z^{k+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{m_3^2}\left[\frac{1}{k}(p^2+m_1^2-m_2^2)-\frac{2p^2}{k+1}\right]. \qquad (465)
\end{aligned}$$

Somando os resultados obtidos,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{m_2^2}{m_3^2}\ln\left(\frac{m_2^2}{m_3^2}\right)+\frac{(k-1)}{m_3^2}\left[-p^2 Z_k+(p^2+m_1^2-m_2^2)Z_{k-1}-m_1^2 Z_{k-2}\right]+ \\
&+ \frac{1}{m_3^2}\left[\frac{1}{k}(p^2+m_1^2-m_2^2)-\frac{2p^2}{k+1}\right] \qquad (466)
\end{aligned}$$

Por hora, deixaremos esse resultado e vamos calcular a integral I por um outro caminho, a fim de comparar os resultados obtidos.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dz\,z^{k-1}\,\frac{dQ}{dz}\,\ln Q \\
&= \int_0^1 dz\,z^{k-1}\left\{-\frac{1}{m_3^2}\left[p^2+m_1^2-m_2^2-2p^2 z\right]\right\}\ln Q \\
&= -\frac{1}{m_3^2}\int_0^1 dz\,\left[(p^2+m_1^2-m_2^2)z^{k-1}-2p^2 z^k\right]\ln Q \\
&= -\frac{1}{m_3^2}\left[(p^2+m_1^2-m_2^2)Z_{k-1}-2p^2 Z_k\right]. \qquad (467)
\end{aligned}$$

Igualando as respostas obtidas, temos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{m_3^2}\left[(p^2+m_1^2-m_2^2)Z_{k-1}-2p^2Z_k\right] &= \frac{m_2^2}{m_3^2}\ln\left(\frac{m_2^2}{m_3^2}\right)+ \\
&+ \frac{(k-1)}{m_3^2}\left[-p^2Z_k+(p^2+m_1^2-m_2^2)Z_{k-1}-m_1^2Z_{k-2}\right]+ \\
&+ \frac{1}{m_3^2}\left[\frac{1}{k}(p^2+m_1^2-m_2^2)-\frac{2p^2}{k+1}\right] \qquad (468)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[2p^2+p^2(k-1)\right]Z_k &= \left[(k-1)(p^2+m_1^2-m_2^2)+(p^2+m_1^2-m_2^2)\right]Z_{k-1}-(k-1)m_1^2Z_{k-2}+ \\
&+ m_2^2\ln\left(\frac{m_2^2}{m_3^2}\right)+\frac{1}{k}(m_1^2-m_2^2)+\frac{p^2(1-k)}{k(k+1)} \qquad (469)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^2(k+1)Z_k &= k(p^2+m_1^2-m_2^2)Z_{k-1}+(1-k)m_1^2Z_{k-2}+m_2^2\ln\left(\frac{m_2^2}{m_3^2}\right)+\frac{(1-k)}{k(k+1)}p^2+ \\
&+ \frac{1}{k}(m_1^2-m_2^2). \qquad (470)
\end{aligned}$$

Isolando Z_k, temos uma relação definida entre Z_k, Z_{k-1} e Z_{k-2}

$$\begin{aligned}
Z_k &= \frac{1}{p^2(k+1)}\left\{k(p^2+m_1^2-m_2^2)Z_{k-1}+(1-k)m_1^2Z_{k-2}+m_2^2\ln\left(\frac{m_2^2}{m_3^2}\right)+\frac{(1-k)}{k(k+1)}p^2+\right. \\
&+ \left.\frac{1}{k}(m_1^2-m_2^2)\right\}. \qquad (471)
\end{aligned}$$

Por exemplo, se $m_1^2=m_2^2=m_3^2=m^2$, temos

$$Z_k=\frac{1}{p^2(k+1)}\left\{kp^2Z_{k-1}+(1-k)m^2Z_{k-2}+\frac{(1-k)}{k(k+1)}p^2\right\}. \qquad (472)$$

Se $k=1$,

$$Z_1=\frac{1}{2p^2}\left\{1\cdot p^2Z_0\right\}=\frac{Z_0}{2}. \qquad (473)$$

Se $k=2$,

$$\begin{aligned}
Z_2 &= \frac{1}{3p^2}\left\{2p^2Z_1+(-1)m^2Z_0+\frac{-1}{6}p^2\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{2\frac{Z_0}{2}+-\frac{m^2}{p^2}Z_0+-\frac{1}{6}\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{Z_0\frac{(p^2-m^2)}{p^2}-\frac{1}{6}\right\} \\
&= Z_0\frac{(p^2-m^2)}{3p^2}-\frac{1}{18}. \qquad (474)
\end{aligned}$$

APÊNDICE J – Autoenergia do campo vetorial com 2 férmions com massas diferentes

Autoenergia do campo vetorial em que os dois férmions no *loop* têm massas diferentes, com distribuição arbitrária de momentos nas linhas internas.

$$\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) = \int_k^\Lambda \frac{\mathrm{tr}\,\{\gamma^\mu[\not{k} + (\alpha-1)\not{p} + m_2]\gamma^\nu[\not{k} + \alpha\not{p} + m_1]\}}{[(k+\alpha p)^2 - m_1^2]\{[k + (\alpha-1)p]^2 - m_2^2\}}. \tag{475}$$

Neste ponto, precisamos utilizar a parametrização de Feynman (KANNILE, 2013) para reescrever o integrando de $\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2)$ em termos de integrais espaciais, conforme descrito na seção 4.3, de acordo com a equação (213). Para comparar $\frac{1}{ab}$ ao integrando de $\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2)$, fazemos:

$$a = [k + (\alpha-1)p]^2 - m_2^2 \qquad \text{e} \qquad b = (k+\alpha p) - m_1^2$$

e temos,

$$\begin{aligned}(a-b)x + b &= \left[k^2 + 2(\alpha-1)p\cdot k + p^2(\alpha-1)^2 - m_2^2 - k^2 - 2\alpha p\cdot k - \alpha^2 p^2 + m_1^2\right]x + \\ &+ k^2 + 2\cdot k\alpha + \alpha^2 p^2 - m_1^2 \\ &= -2p\cdot kx - 2\alpha p^2 x + p^2 x + (m_1^2 - m_2^2)x + k^2 + 2\alpha p\cdot k + \alpha^2 p^2 - m_1^2\end{aligned} \tag{476}$$

Somando e subtraindo p^2x^2

$$\begin{aligned}(a-b)x + b &= \left[k^2 - 2xp\cdot k + 2\alpha p\cdot k + p^2x^2 - 2\alpha x p^2 + \alpha^2 p^2\right] + \\ &+ \left[p^2 x - p^2x^2 + (m_1^2 - m_2^2)x - m_1^2\right] \\ &= [k - (x-\alpha)p]^2 + \left[p^2 x(1-x) + (m_1^2 - m_2^2)x - m_1^2\right].\end{aligned} \tag{477}$$

Definimos $H^2 = \left[p^2x(1-x) + (m_1^2 - m_2^2)x - m_1^2\right]$ e fazemos o *shift* $k \to k + (x-\alpha)p$. A expressão para o denominador de $\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2)$ fica igual a $[k^2 + H^2]^2$. No numerador da integral $\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2)$, temos

$$tr\,\{\gamma^\mu\,[\not{k} + (x-\alpha)\not{p} + (\alpha-1)\not{p} + m_2]\,\gamma^\nu\,[\not{k} + (x-\alpha)\not{p} + \alpha\not{p} + m_1]\} \tag{478}$$

e temos a integral

$$\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) = \int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{\mathrm{tr}\,\{\gamma^\mu[\not{k} + (x-1)\not{p} + m_2]\gamma^\nu[\not{k} + x\not{p} + m_1]\}}{\left[k^2 + H^2\right]^2}. \tag{479}$$

Desenvolvendo o traço no numerador, temos

$$
\begin{aligned}
N^{\mu\nu} &= -4k^2\eta^{\mu\nu} + 4\eta^{\mu\nu}(p\cdot k) - 8x\eta^{\mu\nu}(p\cdot k) + 4m_1m_2\eta^{\mu\nu} - 4x^2p^2\eta^{\mu\nu} + 4xp^2\eta^{\mu\nu} + 8k^\mu k^\nu + \\
&- 4k^\nu p^\mu - 4k^\mu p^\nu + 8xk^\nu p^\mu + 8xk^\mu p^\nu + 8x^2p^\mu p^\nu - 8xp^\mu p^\nu. \qquad (480)
\end{aligned}
$$

Eliminando os termos de ordem ímpar em k, e organizando, temos

$$
N^{\mu\nu} = 8k^\mu k^\nu - 4k^2\eta^{\mu\nu} + 4m_1m_2\eta^{\mu\nu} + 4x(1-x)p^2\eta^{\mu\nu} - 8x(1-x)p^\mu p^\nu. \qquad (481)
$$

Separando as integrais

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) &= 8\int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{k^\mu k^\nu}{\left[k^2+H^2\right]^2} - 4\eta^{\mu\nu}\int_0^1 dx\int_k^\Lambda \frac{k^2}{\left[k^2+H^2\right]^2} + \\
&+ 4\eta^{\mu\nu}m_1m_2\int_0^1 dx\int_k^\Lambda \frac{1}{\left[k^2+H^2\right]^2} + \\
&+ 4\int_0^1 dx\left[x(1-x)\left(p^2\eta^{\mu\nu} - 2p^\mu p^\nu\right)\right]\int_k^\Lambda \frac{1}{\left[k^2+H^2\right]^2}. \qquad (482)
\end{aligned}
$$

Para a integral com numerador k^2, somamos e subtraímos H^2, ficando com

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) &= 8\int_0^1 dx \int_k^\Lambda \frac{k^\mu k^\nu}{\left[k^2+H^2\right]^2} - 4\eta^{\mu\nu}\int_0^1 dx\int_k^\Lambda \frac{1}{\left[k^2+H^2\right]} + \\
&+ 4\eta^{\mu\nu}\int_0^1 dx\int_k^\Lambda \frac{H^2}{\left[k^2+H^2\right]^2} + 4\eta^{\mu\nu}m_1m_2\int_0^1 dx\int_k^\Lambda \frac{1}{\left[k^2+H^2\right]^2} + \\
&+ 4\int_0^1 dx\left[x(1-x)\left(p^2\eta^{\mu\nu} - 2p^\mu p^\nu\right)\right]\int_k^\Lambda \frac{1}{\left[k^2+H^2\right]^2}. \qquad (483)
\end{aligned}
$$

As duas primeiras integrais, que são quadraticamente divergentes, se cancelam usando a equação (257) e fixando $\upsilon_2 = 0$, como prescrito pela Regularização Implícita Restrita.

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) &= 8\int_0^1 dx\left\{\frac{\eta^{\mu\nu}}{2}\left[I_{\text{quad}}(-H^2) + \upsilon_2\right]\right\} - 4\int_0^1 \eta^{\mu\nu} I_{\text{quad}}(-H^2) + \\
&+ 4\eta^{\mu\nu}\int_0^1 dx\int_k^\Lambda \frac{H^2}{\left[k^2+H^2\right]^2} + 4\eta^{\mu\nu}m_1m_2\int_0^1 dx\int_k^\Lambda \frac{1}{\left[k^2+H^2\right]^2} + \\
&+ 4\int_0^1 dx\left[x(1-x)\left(p^2\eta^{\mu\nu} - 2p^\mu p^\nu\right)\right]\int_k^\Lambda \frac{1}{\left[k^2+H^2\right]^2}. \qquad (484)
\end{aligned}
$$

Organizando as integrais restantes, temos

$$
\begin{aligned}
&\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) = 4\eta^{\mu\nu}\int_0^1 dx\left[p^2x(1-x) + (m_1^2 - m_2^2)x - m_1^2\right]\int_k^\Lambda \frac{1}{\left[k^2+H^2\right]^2} + \\
&+4\eta^{\mu\nu}m_1m_2\int_0^1 dx\int_k^\Lambda \frac{1}{\left[k^2+H^2\right]^2} + 4\int_0^1 dx\left[x(1-x)\left(p^2\eta^{\mu\nu} - 2p^\mu p^\nu\right)\right]\int_k^\Lambda \frac{1}{\left[k^2+H^2\right]^2} \\
&= 4\int_0^1 dx\left\{2(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)x(1-x) + (m_1 - m_2)\left[(m_1+m_2)x - m_1\right]\eta^{\mu\nu}\right\}\int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2+H^2)^2}. \qquad (485)
\end{aligned}
$$

Avaliando a integral divergente em k, temos

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) &= 4\int_0^1 dx\ \left\{2(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)x(1-x) + (m_1 - m_2)[(m_1+m_2)x - m_1]\eta^{\mu\nu}\right\} \\ &\times \left\{I_{\log}(-H^2)\right\}. \end{aligned} \tag{486}$$

Para a integral restante, $I_{\log}(-H^2)$, usamos a relação de escala (270), e então a amplitude é escrita como

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) &= 4\int_0^1 dx\ \left\{2(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)x(1-x) + (m_1 - m_2)[(m_1+m_2)x - m_1]\eta^{\mu\nu}\right\} \\ &\times \left\{I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{16\pi^2}\ln\left(-\frac{H^2}{\lambda^2}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{487}$$

Finalmente, resolvendo as integrais em x, obtemos

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) &= 8(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\left\{\frac{1}{6}I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}(\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2)\right\} \\ &+4(m_1-m_2)\eta^{\mu\nu}\left\{-\frac{1}{2}(m_1-m_2)I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}[(m_1+m_2)\tilde{Z}_1 - m_1\tilde{Z}_0]\right\}, \end{aligned} \tag{488}$$

em que $\tilde{Z}_k$ é uma abreviação para $\tilde{Z}_k(p^2,m_1^2,m_2^2,\lambda^2)$, definida como

$$\tilde{Z}_k(p^2,\ m_1^2,\ m_2^2,\ \lambda^2) = \int_0^1 dx\ x^k \ln\left[\frac{p^2x(1-x) + (m_1^2 - m_2^2)x - m_1^2}{-\lambda^2}\right]. \tag{489}$$

Notamos que o tensor de polarização não é transverso. Em vez disso, a amplitude obedece à relação

$$\begin{aligned}p_\nu\Pi^{\mu\nu}(m_1,m_2) &= 8p_\nu(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\left\{\frac{1}{6}I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}(\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2)\right\} \\ &\quad +4p_\nu(m_1-m_2)\eta^{\mu\nu}\left\{-\frac{1}{2}(m_1-m_2)I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}[(m_1+m_2)\tilde{Z}_1 - m_1\tilde{Z}_0]\right\} \\ &= 8(p^2p^\mu - p^\mu p^2)\left\{\frac{1}{6}I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}(\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2)\right\} \\ &\quad +4(m_1-m_2)p^\mu\left\{-\frac{1}{2}(m_1-m_2)I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}[(m_1+m_2)\tilde{Z}_1 - m_1\tilde{Z}_0]\right\} \\ &= 4(m_1-m_2)p^\mu\left\{-\frac{1}{2}(m_1-m_2)I_{\log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2}[(m_1+m_2)\tilde{Z}_1 - m_1\tilde{Z}_0]\right\} \\ &= (m_1-m_2)T^\mu, \end{aligned} \tag{490}$$

em que

$$T^\mu = \int_k^\Lambda \frac{\mathrm{tr}\,\{\gamma^\mu(\not{k} - \not{p} + m_2)(\not{k} + m_1)\}}{(k^2 - m_1^2)[(k-p)^2 - m_2^2]}. \tag{491}$$

Precisamos utilizar a parametrização de Feynman (KANNILE, 2013) para reescrever o integrando de T^μ em termos de integrais espaciais, conforme descrito na seção 4.3, de acordo com a equação (213). Para comparar $\frac{1}{ab}$ ao integrando de T^μ, fazemos:

$$a = [k-p]^2 - m_2^2 \qquad \text{e} \qquad b = k^2 - m_1^2$$

e temos,

$$\begin{aligned}(a-b)x+b &= \left[k^2-2p\cdot k+p^2-m_2^2-k^2+m_1^2\right]x+k^2-m_1^2 \\ &= -2p\cdot kx+p^2x+(m_1^2-m_2^2)x+k^2-m_1^2 \end{aligned} \tag{492}$$

Somando e subtraindo p^2x^2

$$\begin{aligned}(a-b)x+b &= \left[k^2-2xp\cdot k+p^2x^2\right]+\left[p^2x-p^2x^2+(m_1^2-m_2^2)x-m_1^2\right] \\ &= [k-px]^2+\left[p^2x(1-x)+(m_1^2-m_2^2)x-m_1^2\right] \end{aligned} \tag{493}$$

Definimos $H^2=\left[p^2x(1-x)+(m_1^2-m_2^2)x-m_1^2\right]$ e fazemos o *shift* $k\to k+px$. A expressão para o denominador de T^μ fica igual a $[k^2+H^2]^2$. No numerador da integral T^μ, temos

$$\begin{aligned}& tr\left\{\gamma^\mu\left[\not k+\not px-\not p+m_2\right]\left[\not k+\not px+m_1\right]\right\} \\ &= tr\left\{\gamma^\mu\left[\not k+\not p(x-1)+m_2\right]\left[\not k+\not px+m_1\right]\right\}. \end{aligned} \tag{494}$$

Desenvolvendo o traço no numerador, temos

$$N^\mu=4m_1k^\mu+4m_2k^\mu-4m_1p^\mu+4m_1xp^\mu+4m_2xp^\mu, \tag{495}$$

e a integral fica

$$\begin{aligned}T^\mu &= \int_0^1 dx\,4p^\mu\left[(m_1+m_2)x-m_1\right]\int_k\frac{1}{\left[k^2+H^2\right]^2} \\ &= \int_0^1 dx\,4p^\mu\left[(m_1+m_2)x-m_1\right]I_{\log}(-H^2) \\ &= \int_0^1 dx\,4p^\mu\left[(m_1+m_2)x-m_1\right]\left\{I_{\log}(\lambda^2)-\frac{i}{16\pi^2}\ln\left(-\frac{H^2}{\lambda^2}\right)\right\} \\ &= 4p^\mu\left\{-\frac{1}{2}(m_1-m_2)I_{\log}(\lambda^2)-\frac{i}{(4\pi)^2}\left[(m_1+m_2)\tilde{Z}_1-m_1\tilde{Z}_0\right]\right\} \end{aligned} \tag{496}$$