



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**ESTUDO DE MODELOS NÃO LINEARES PARA  
INFESTAÇÃO POR *Aedes aegypti*  
SEGUNDO VARIÁVEIS METEOROLÓGICAS.**

**PRISCILA MARTINS BARBOSA**

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Acebal Fernandes  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

BELO HORIZONTE  
SETEMBRO DE 2016

**PRISCILA MARTINS BARBOSA**

**ESTUDO DE MODELOS NÃO LINEARES PARA  
INFESTAÇÃO POR *Aedes aegypti* SEGUNDO  
VARIÁVEIS METEOROLÓGICAS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Acebal Fernandes  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL  
BELO HORIZONTE  
SETEMBRO DE 2016

Aos meus pais, pelo incentivo e apoio durante toda a minha formação.

# Agradecimentos

Ao meu Deus por sua graça e misericórdia. Sem essas bênçãos, nada seria.

Agradeço aos meus pais, Victor e Marli, pelo amor, apoio e incentivo em todo o processo da pós-graduação. Ao meu irmão Silas, por me incentivar e por estar presente em todos os momentos da dissertação.

Aos meus avós, pelas orações constantes em meu favor.

Aos professores do Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, em especial ao meu orientador José Luiz Acebal, por seu empenho e dedicação em todas as orientações. Aos meus amigos do mestrado, Samara, Rafaela, Luiz, Alexandre, Dângelo, Amália e João, por estarem presentes nos momentos bons e ruins de todo esse percurso.

Às amigas do grupo de pesquisa, Lillia e Flávia, por terem contribuído de forma direta em todo este trabalho.

Ao CEFET-MG, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que acreditaram em mim.

*"E em ti confiarão os que conhecem o teu nome; porque tu, Senhor, nunca desamparaste os que te buscam." (Salmos 9.10)*

# Resumo

O *Aedes aegypti* é o principal vetor de arboviroses como dengue, febre chikungunya e zika vírus. A Organização Mundial da Saúde (OMS), em 2012, estimou que entre 50 a 100 milhões de pessoas são infectadas anualmente com a dengue em mais de 100 países de todos os continentes. Em 2016, foi estimado que 4 milhões de pessoas seriam infectadas pelo zika vírus somente nas Américas. Apesar de todos os esforços das organizações de saúde, as pesquisas com vacinas ainda estão em andamento, o que intensifica os métodos de monitoramento e controle do vetor. Diante disso, o avanço de modelos matemáticos que descrevem o ciclo de vida do *Aedes aegypti* tem sido cada vez mais motivado. Esta dissertação apresenta estudos de possíveis modelos não lineares constituídos por sistemas de equações diferenciais para a dinâmica populacional de mosquitos *Aedes aegypti* sob efeito de variáveis meteorológicas: temperatura e pluviosidade. Os modelos são apresentados de forma analítica e numérica, assim como o estudo de equilíbrio e estabilidade. O modelo de melhor comportamento é confrontado com o modelo anterior e validado por comparação com dados de capturas obtidos pelo monitoramento entomológico das cidades de Lavras (Minas Gerais, Brasil), Caratinga (Minas Gerais, Brasil) e Sete Lagoas (Minas Gerais, Brasil). Verificou-se que o modelo descreve bem o ciclo de vida do vetor, auxiliando no controle mais apropriado para a redução da densidade de mosquitos.

Palavras-chave: Modelo Matemático. Temperatura. Pluviosidade.

# Abstract

The *Aedes aegypti* is the main vector of arboviruses as dengue, chikungunya fever and zika virus. The World Health Organization (WHO), in 2012, estimated that between 50 to 100 million people are infected annually with dengue in more than 100 countries in all the continents. In 2016, it was estimated that 4 million people would be infected by zika virus only in the Americas. Despite of all the efforts from the health organizations, the researches with vaccines are still in progress, what intensifies the monitoring methods and the vector control. Because of that, the advance in the sense to provide accurate mathematical models that describe the life cycle of the *Aedes aegypti* is even more motivated. This work proposes the study of possible nonlinear models made of system of differential equations for the population dynamics of mosquitoes *Aedes aegypti* under the influence of meteorological variables: temperature and rainfall. The models are presented analytically and numerically, as well as the study of equilibrium and stability. The best behaved model is validated by comparison with the experimental data obtained by the entomological monitoring of the cities of Lavras (Minas Gerais, Brazil), Caratinga (Minas Gerais, Brazil) and Sete Lagoas (Minas Gerais, Brazil). The results are compared with the previous model and it was verified that the model describes well the life cycle of the vector. It, potentially, could support in the most appropriate control for the reduction of mosquito density.

**Key-words:** Mathematical Model. Temperature. Rainfall.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Números de casos de dengue no mundo entre 1955 a 2010 . . . . .	2
Figura 2 – Distribuição do risco global de dengue com base nos relatórios anuais da OMS . . . . .	2
Figura 3 – Casos de dengue e hospitalizações no Brasil de 1986 a 2010 . . . . .	7
Figura 4 – Casos prováveis de dengue, por semana epidemiológica de início de sintomas, Brasil, 2013, 2014 e 2015 . . . . .	8
Figura 5 – Casos prováveis de dengue, por semana epidemiológica de início de sintomas, Brasil, 2014, 2015 e 2016 . . . . .	8
Figura 6 – Ciclo de vida do <i>Aedes aegypti</i> . . . . .	10
Figura 7 – Armadilha MosquiTRAP versão 1.0 . . . . .	13
Figura 8 – Armadilha MosquiTRAP versão 2.0 . . . . .	13
Figura 9 – Sistema MI-Dengue . . . . .	14
Figura 10 – Diagrama da dinâmica populacional do <i>Aedes aegypti</i> para o Modelo 1 . . . . .	37
Figura 11 – Diagrama da dinâmica populacional do <i>Aedes aegypti</i> para o Modelo 2 . . . . .	42
Figura 12 – Intervalo dos determinantes das matrizes de Hurwitz associado ao ponto de equilíbrio $P_1$ . . . . .	53
Figura 13 – Intervalo dos coeficientes do polinômio característico associado ao ponto de equilíbrio $P_1$ . . . . .	54
Figura 14 – Intervalo dos coeficientes do polinômio característico associado ao ponto de equilíbrio $P_1$ . . . . .	55
Figura 15 – Intervalo dos determinantes das matrizes de Hurwitz associado ao ponto de equilíbrio $P_1$ . . . . .	55
Figura 16 – Intervalo dos coeficientes do polinômio característico associado ao ponto de equilíbrio $P_1$ . . . . .	56
Figura 17 – Intervalo dos determinantes das matrizes de Hurwitz associado ao ponto de equilíbrio $P_2$ . . . . .	57
Figura 18 – Séries temporais de dados meteorológicos para cidade de Lavras (Minas Gerais, Brasil) em semanas epidemiológicas iniciadas na semana 1 do ano de 2009 até a semana 52 do ano de 2010 . . . . .	59
Figura 19 – Valores da função de correlação cruzada $S^2$ versus o valor de $s$ obtidos na simulação do Modelo . . . . .	60
Figura 20 – Valores da função de correlação cruzada $S^2$ e valores de $s$ obtidos na simulação do Modelo . . . . .	61
Figura 21 – Comportamento do Modelo 1 diante da variação de pluviosidade e temperatura para a cidade de Lavras (Minas Gerais, Brasil) . . . . .	62

Figura 22 – Comportamento da População de Ovos $E(t)$ do <i>Aedes aegypti</i> com os dados de temperatura e pluviosidade em Lavras (Minas Gerais, Brasil). . . . .	63
Figura 23 – Comportamento da População Aquática $A(t)$ do <i>Aedes aegypti</i> com os dados de temperatura e pluviosidade em Lavras (Minas Gerais, Brasil) no período estudado. . . . .	63
Figura 24 – Comportamento da População de Machos $M(t)$ do <i>Aedes aegypti</i> com os dados de temperatura e pluviosidade em Lavras (Minas Gerais, Brasil) no período estudado. . . . .	64
Figura 25 – Comportamento da População de Fêmeas pré-repasto sanguíneo $F_1(t)$ do <i>Aedes aegypti</i> com os dados de temperatura e pluviosidade em Lavras (Minas Gerais, Brasil) no período estudado. . . . .	64
Figura 26 – Comportamento da População de Fêmeas pós-repasto sanguíneo $F_2(t)$ do <i>Aedes aegypti</i> com os dados de temperatura e pluviosidade em Lavras (Minas Gerais, Brasil) no período estudado. . . . .	65
Figura 27 – Comparação entre os dados da população $F_2(t)$ obtidos na simulação do modelo, 31, com dados reais do Índice Médio de Fêmeas <i>Aedes</i> -IMFA da cidade de Lavras - MG, no ano de 2009 . . . . .	65
Figura 28 – Comparação entre os dados da população $F_2(t)$ após a correlação cruzada dada por $\lambda F_{2_{k-l}}$ obtidos na simulação do modelo através de um ajuste com dados reais do Índice Médio de Fêmeas <i>Aedes</i> -IMFA da cidade de Lavras - MG, no ano de 2009 . . . . .	66
Figura 29 – Correlação Cruzada entre a população $F_2(t)$ gerada pelo Modelo 2 e a amostra de captura IMFA para a cidade de Lavras. A intensidade da correlação é muito forte, pois $M = 0,7398$ com $\lambda = 4,0734 \times 10^{-4}$ e com atraso de 3 semanas. . . . .	67
Figura 30 – Comparação entre os dados de $F_2(t)$ determinados por Cordeiro (2015) e os dados teóricos de $F_2$ obtidos por este trabalho, ambos com a correlação cruzada . . . . .	68
Figura 31 – Correlação Cruzada entre a população $F_2(t)$ gerada pelo modelo Cordeiro (2015) e IMFA para a cidade de Lavras. A intensidade de correlação entre as séries é $M = 0,71605$ para $\lambda = 0,22121$ com 4 semanas de defasagem. . . . .	68
Figura 32 – Comparação entre os dados da população $F_2(t)$ obtidos na simulação do modelo através de um ajuste com dados reais do Índice Médio de Fêmeas <i>Aedes</i> - IMFA da cidade de Caratinga - MG, no ano de 2009. . . . .	69
Figura 33 – Correlação Cruzada entre a população $F_2(t)$ gerada pelo modelo e IMFA para a cidade de Caratinga. Para estes dados a intensidade das correlações é $M = 0,7404$ para $\lambda = 1,2062 \times 10^{-4}$ com 5 semanas de atraso. . . . .	69

- Figura 34 – Comparação entre os dados da população  $F_2(t)$  obtidos na simulação do modelo através de um ajuste com dados reais do Índice Médio de Fêmeas *Aedes* - IMFA da cidade de Sete Lagoas - MG, no ano de 2009. 70
- Figura 35 – Correlação Cruzada entre a população  $F_2(t)$  gerada pelo modelo e IMFA para a cidade de Sete Lagoas. O nível de intensidade também é muito forte, com  $M = 0,8395$  para  $\lambda = 3,2906 \times 10^{-4}$  com 3 semanas de atraso. 70

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Valores de Referência dos Parâmetros do Modelo para Pluviosidade. . .	49
Tabela 2 – Valores de Referência dos Parâmetros do Modelo para a Temperatura .	49

# Lista de Algoritmos

Algoritmo 1 – Etapas para a implementação do algoritmo dos Modelos 1 (24) e 2 (31).	51
Algoritmo 2 – Algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem . . . . .	52

# Sumário

<b>1 – Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Justificativa	3
1.2 Objetivos	3
1.2.1 Objetivo Geral	3
1.2.2 Objetivo Específicos	4
1.2.3 Metodologia	4
1.3 Organização da Dissertação	5
<b>2 – Fundamentação Teórica</b>	<b>6</b>
2.1 Dengue	6
2.1.1 Dengue no Brasil	6
2.1.2 Biologia do Vetor <i>Aedes aegypti</i>	9
2.1.3 Formas de Transmissão da Dengue	10
2.1.4 Controle do Vetor	11
2.1.5 Influência das Variáveis Climáticas	15
2.2 Conceitos Matemáticos e Computacionais	16
2.2.1 Equações Diferenciais	17
2.2.2 Estabilidade dos Pontos Críticos	22
2.2.3 Critério de Routh-Hurwitz	23
2.2.4 Método Runge-Kutta	24
2.2.5 Correlação Cruzada	25
<b>3 – Trabalhos Relacionados</b>	<b>28</b>
<b>4 – Modelos e Análise</b>	<b>36</b>
4.1 Modelo 1: Machos	36
4.1.1 Equilíbrio do Modelo 1	38
4.1.2 Estabilidade do Modelo 1	39
4.2 Modelo 2: Machos e Capacidade Ambiental	41
4.2.1 Equilíbrio do Modelo 2	42
4.2.2 Estabilidade do Modelo 2	44
4.3 Parametrização dos Coeficientes	48
<b>5 – Implementação e Análise Numérica</b>	<b>51</b>
5.1 Implementação dos Modelos	51
5.2 Implementação do Método Runge-Kutta	52

5.3	Estabilidade dos pontos de equilíbrio . . . . .	53
5.3.1	Critério de Routh-Hurwitz . . . . .	53
<b>6</b>	<b>– Resultados . . . . .</b>	<b>58</b>
6.1	Validação dos Modelos . . . . .	58
6.1.1	Lavras (Minas Gerais, Brasil) . . . . .	58
6.2	Análise de sensibilidade do parâmetro $s$ . . . . .	59
6.2.1	Simulação do Modelo 1 . . . . .	62
6.2.2	Simulação do Modelo 2 . . . . .	63
6.2.3	Discussão de Resultados . . . . .	65
6.3	Comparação entre Modelos . . . . .	67
6.3.1	Testes em outras cidades . . . . .	68
<b>7</b>	<b>– Conclusão . . . . .</b>	<b>71</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>73</b>

# Capítulo 1

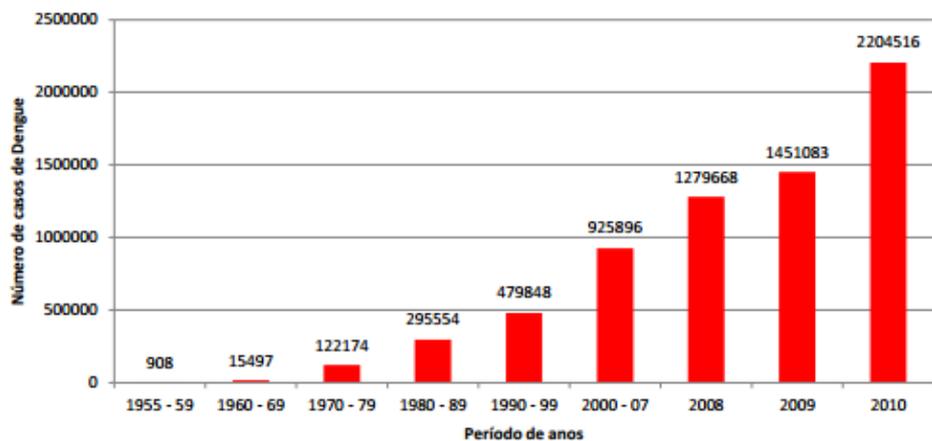
## Introdução

O mosquito *Aedes aegypti* é de origem africana, especificamente do Egito e desde o século XVI vem se dispersando pelas regiões tropicais e subtropicais do planeta. É o principal vetor das arboviroses: febre amarela, dengue, chikungunya e zika vírus. Neste trabalho trataremos sobre a dinâmica populacional do vetor *Aedes aegypti* e, como motivação, evidenciamos a dengue, que é um dos maiores problemas de saúde pública no mundo.

Historicamente, a primeira epidemia de dengue no continente americano ocorreu no Peru no início do século XIX, com surtos no Caribe, Estados Unidos, Colômbia e México. No Brasil, sua primeira incidência ocorreu no fim do século XIX e início do século XX. Nesta época, a maior preocupação não era a dengue em si, mas sim a febre amarela que devastava o país com numerosos casos (Souza (2008)).

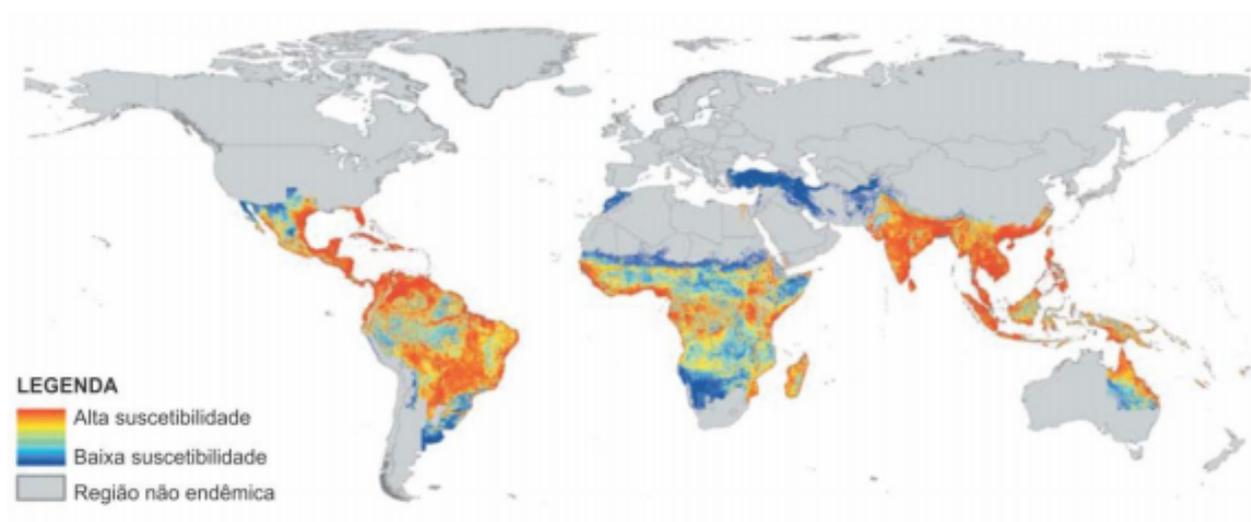
Se compararmos o número de casos em 1955 e 2010, a incidência de dengue sofreu um aumento vertiginoso (Figura 1). Os recentes surtos da doença no Brasil e no Paquistão vêm alertando as organizações de saúde do mundo. Esse crescimento nos casos de dengue normalmente se deve à negligência da população e despreparo dos governantes. Neste sentido, foi lançado em 2012 pela OMS (Organização Mundial de Saúde) um plano de estratégia para prevenção e controle da dengue. Este plano preconiza medidas com rotinas para serem seguidas pelos sistemas de saúde dos países para minimizar o impacto destas doenças com potencial epidêmico. Tais ações exigem investimento em vigilância, preparação e capacidade de detecção precoce (WHO (2012)).

A distribuição global das regiões com maior risco de contaminação pode ser vista na Figura 2. Verifica-se que devido ao clima favorável, os países situados na zona tropical são os mais atingidos pela dengue. Porém, com o Aquecimento Global, a incidência de casos em regiões temperadas está se tornando cada vez mais frequente. As projeções de elevação de  $2^{\circ}C$  na temperatura até o final do século XXI, provavelmente aumentarão a extensão da área de distribuição de dengue no planeta (Donalísio e Glasser (2002)).



Fonte: Ajuz e Vestena (2014)

Figura 1 – Números de casos de dengue no mundo entre 1955 a 2010



Fonte: Ajuz e Vestena (2014)

Figura 2 – Distribuição do risco global de dengue com base nos relatórios anuais da OMS

A evolução dos casos de dengue está frequentemente associada às condições climáticas e sociais. Fatores climáticos, tais como precipitação e temperaturas elevadas, em geral, mostram relação positiva com a transmissão da dengue (Forattini (2002)). Além de condições físicas ambientais, o risco de epidemias está relacionado diretamente à vulnerabilidade social e física da população (Confalonieri et al. (2007)).

A ocorrência de epidemias gera aumento dos gastos públicos com saúde e outros impactos sociais como redução do tempo de trabalho e produtividade dos trabalhadores, o que

pode provocar perdas nos mercados privados e públicos (Pereda, Alves e Rangel (2010)). Portanto, é importante a busca de conhecimento científico associado a novas tecnologias para melhor monitoramento e controle de vetores da dengue.

Neste trabalho são consideradas as influências climáticas da temperatura e pluviosidade no desenvolvimento do ciclo de vida do vetor *Aedes aegypti* através de modelos compartimentados. São apresentados e estudados analiticamente e numericamente dois modelos matemáticos, baseados nos trabalhos de Thomé, Yang e Esteva (2010), Barsante et al. (2015), Cordeiro, Barsante e Acebal (2013) e Cordeiro (2015), destacando a interferência da inserção de machos naturais na interação populacional e desenvolvimento do vetor.

## 1.1 Justificativa

As crescentes variações climáticas ocorridas ao longo tempo propiciam a disseminação de doenças sensíveis ao clima. O aumento da temperatura, especificamente, contribui de forma expressiva no aumento dos casos de dengue no mundo. Embora a biologia do *Aedes Aegypti* seja razoavelmente bem conhecida, peculiaridades regionais e locais relacionadas ao clima e às modificações do ambiente feitas pelo ser humano interferem na dinâmica populacional do mosquito ao longo do ano (Pereda, Alves e Rangel (2010)).

Assim, a compreensão de todos os efeitos do clima na dinâmica populacional do vetor transmissor é fundamental para o uso mais adequado de controle da densidade do mosquito nas regiões mais atingidas. Este trabalho se justifica em representar a dinâmica populacional do principal vetor da arbovirose dengue por meio de um modelo matemático, constituído por um sistema de equações diferenciais, com influência das variáveis climáticas: temperatura e pluviosidade. Na Literatura existem diversos modelos que já abordam esta dinâmica, os estudos indicam que a inserção de termos não lineares em modelos possibilitam a geração de pontos de equilíbrio não triviais. Esses pontos de equilíbrios com suas respectivas estabilidades podem melhorar a capacidade de previsão ou descrição do modelo.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver um modelo matemático capaz de reproduzir o ciclo de vida do vetor *Aedes Aegypti* baseado em um sistema dinâmico não linear composto por cinco equações diferenciais. Os parâmetros do modelo serão dependentes da temperatura e pluviosidade. Pretende-se que o modelo reproduza melhor os dados experimentais de Índice Médio de Fêmeas *Aedes*, IMFA, da cidade de Lavras, nos anos de 2009 e 2010.

O modelo será então resolvido de forma analítica e numérica e seu desempenho confrontado com dados experimentais da cidade de Lavras (Minas Gerais, Brasil), Caratinga (Minas Gerais, Brasil) e Sete Lagoas (Minas Gerais, Brasil).

### 1.2.2 Objetivo Específicos

- Realizar uma revisão bibliográfica sobre o assunto, com foco em modelos matemáticos que descrevem a dinâmica populacional do vetor *Aedes aegypti* e nas influências que as condições climáticas e sociais causam na evolução dos casos de dengue.
- Aprimorar o modelo de [Cordeiro \(2015\)](#), de forma que os resultados apresentados sejam mais eficientes na descrição da dinâmica populacional do *Aedes Aegypti*.
- Desenvolver analiticamente o sistema dinâmico a fim de determinarmos os pontos de equilíbrio do sistema.
- Analisar o comportamento do modelo baseando-se na literatura.
- Validar o modelo através de testes computacionais e confrontar os resultados com os dados de Índice Médio de Fêmeas *Aedes* reais da cidade de Lavras (Minas Gerais, Brasil), Caratinga (Minas Gerais, Brasil) e Sete Lagoas (Minas Gerais, Brasil).

### 1.2.3 Metodologia

Esta pesquisa se classifica como Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. É uma pesquisa Quantitativa, pois é possível quantificar através da simulação dos resultados, confrontados com dados reais, se o modelo exprime ou não a realidade e Qualitativa na medida que investigamos o tipo de interação não linear do modelo. Para compararmos o modelos com as séries temporais, são feitas implementações numéricas pelo método *Runge Kutta* de quarta ordem. A comparação é feita por método de mínimos quadrados entre as séries temporais da população de fêmeas *Aedes aegypti* capturadas e as soluções dos modelos.

A principal motivação no início da pesquisa é avaliar se há melhorias na acurácia do modelo de [Cordeiro \(2015\)](#) quando se introduz a população de machos, assim como a inserção de termos não lineares de natureza logística nas equações diferenciais. Para atingirmos os objetivos propostos descreveremos as etapas deste trabalho:

**Revisão da Literatura:** Apresentar os trabalhos significativos encontrados na literatura que estão relacionados à presente proposta de trabalho para representar a dinâmica populacional do vetor *Aedes aegypti*.

**Fundamentação Teórica:** Exibir os principais conceitos matemáticos (definições, teoremas e métodos) utilizados no trabalho, assim como as características da endemia dengue.

**Modelagem do Problema:** Apresentar dois modelos que descrevem a dinâmica populacional do *Aedes aegypti*, sob os efeitos da temperatura e pluviosidade. Determinar analiti-

camente os pontos de equilíbrio do sistema, assim como os polinômios característicos da matriz jacobiana e a estabilidade dos pontos críticos.

**Simulação:** Realizar a simulação dos dados do modelo matemático usando como base os parâmetros definidos na literatura. Para desenvolvermos a simulação usaremos o algoritmo *Runge Kutta* implementado na linguagem Matlab e adaptado para este trabalho.

**Resultados e Validação do Modelo:** Serão apresentados os resultados da execução do algoritmo para o modelo. Além disso, os dados exibidos serão comparados com os dados de Índice Médio de Fêmeas *Aedes* fornecidos por LabEQ-UFMG (Laboratório de Ecologia Química da Universidade Federal de Minas Gerais) e pela Ecovec SA. Por fim, faremos uma análise entre os modelos apresentados no trabalho e o modelo de [Cordeiro \(2015\)](#).

### 1.3 Organização da Dissertação

No primeiro capítulo é apresentada a introdução da dissertação com um breve comentário histórico do *Aedes aegypti*, assim como os primeiros relatos de dengue no mundo. São apresentados a justificativa do trabalho, objetivos e como a dissertação está sistematizada.

No [Capítulo 2](#) será explorado o contexto histórico da endemia dengue no Brasil, a biologia do *Aedes aegypti*, as formas de transmissão, prevenção e controle, tais como as influências das condições climáticas no país. Os conceitos matemáticos utilizados no trabalho também serão expostos neste capítulo.

No [Capítulo 3](#) abordaremos os trabalhos relacionados com o tema, apresentando as características dos modelos estudados.

O [Capítulo 4](#) será dedicado a apresentação dos modelos, a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio e a parametrização.

O [Capítulo 5](#) consiste na análise numérica dos resultados encontrados no capítulo 4. É também exibido os pseudo-códigos para a implementação.

Os resultados do trabalho estão no [Capítulo 6](#), que consiste na validação do modelo comparando com dados reais e a discussão dos resultados.

Finalmente, no [Capítulo 7](#), é apresentado a conclusão do trabalho e descrição de futuros trabalhos.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

Na primeira parte do capítulo será discutido a dengue no Brasil, a biologia do mosquito *Aedes aegypti*, a transmissão da dengue em humanos, as atuais formas de controle ambiental e a influência dos fatores climáticos na biologia do vetor e na incidência da doença. Na segunda parte destacaremos os conceitos matemáticos, tais como, análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico e o critério de estabilidade de *Routh-Hurwitz*.

### 2.1 Dengue

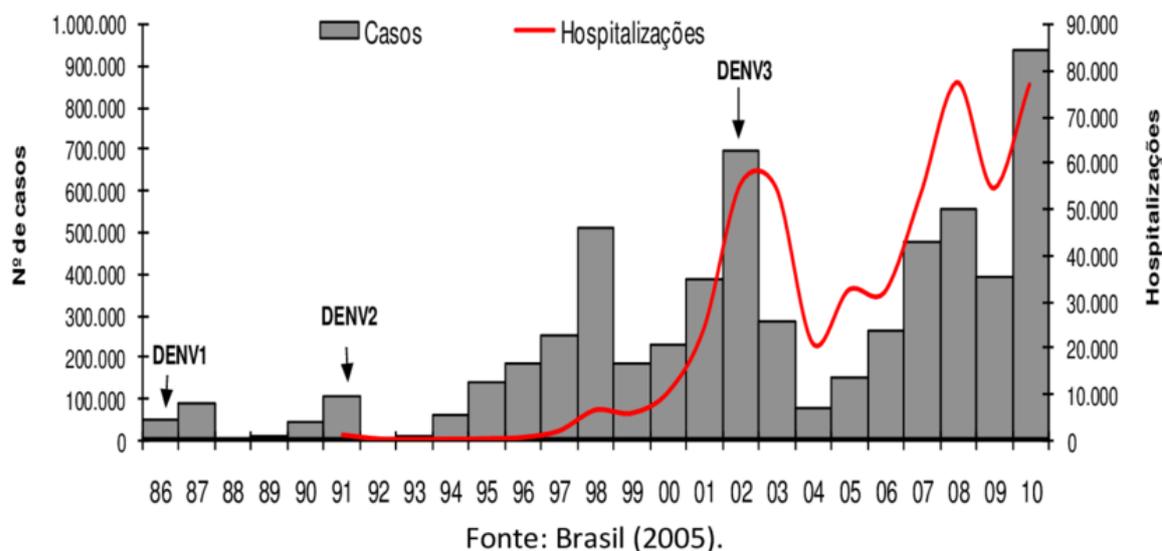
A dengue é uma doença febril aguda causada por um arbovírus (Arthropod borne viruses), da família Flaviviridae, que tem como vetor a fêmea do culicídeo *Aedes aegypti* (Gomes (2011)). Se apresenta em quatro sorotipos, biologicamente distintos: DENV-1, DENV-2, DENV-3 e DENV-4, sendo todos capazes de transmitir a dengue clássica e a dengue hemorrágica. Devido à sua adaptação ao meio urbano e por fatores climáticos, sua incidência teve um aumento bastante considerável nos últimos 50 anos, estimado em 30 vezes, o que vem gerando um caráter endêmico em várias regiões do planeta (WHO (2012)).

#### 2.1.1 Dengue no Brasil

Os primeiros relatos da epidemia dengue no Brasil ocorreram por volta do século XVIII (Braga e Valle (2007b)), possivelmente durante o transporte de escravos, já que os ovos do mosquito resistem por até um ano, sem estar em contato com a água (Minas (2010)). No ano 1903, em resposta a epidemias de febre amarela, um programa de controle ao mosquito foi implantado e, na década de 50, o *Aedes* chegou a ser erradicado, porém o descuido com as medidas de controle fez reintroduzir o vetor ao território nacional em meados dos anos 80, quando houve uma epidemia em Roraima (Câmara et al. (2007)).

A Figura 3 mostra o crescimento dos casos entre os anos de 1986 e 2010. Os sorotipos

DENV-1 e DENV-2 foram disseminados no país em meados dos anos 90, o sorotipo DENV-3 entre 2001 e 2003, período em que ocorreu uma grande epidemia, sendo confirmados 1.564.112 casos e 217 óbitos. De 2003 a 2006 houve uma queda considerável na incidência de notificações, em 2007, foram registrados mais de 700 mil casos e mais de 45 mil hospitalizações por dengue em 2008. Já em 2010, as notificações tiveram um aumento significativo em relação aos anos anteriores, cerca de 999.668 relataram a doença e foram confirmadas 572 mortes em decorrência da doença (Barreto e Teixeira (2008)).

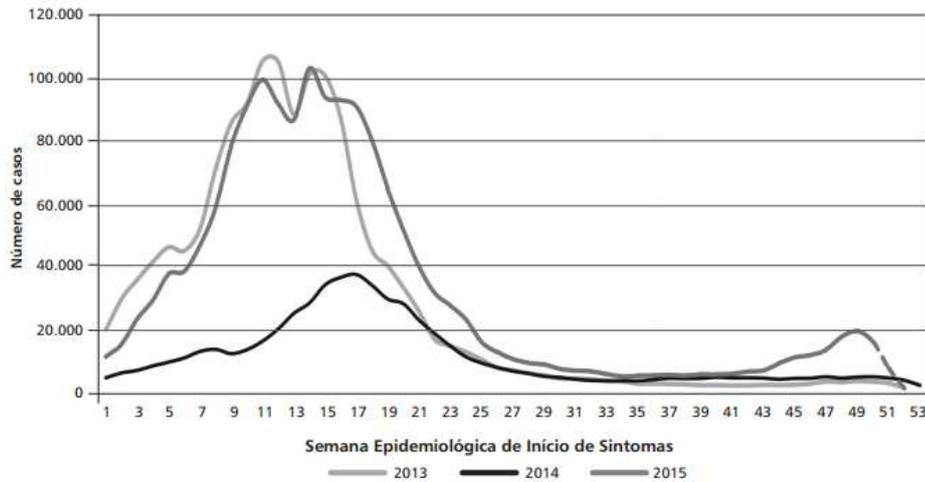


Fonte: MS (2010)

Figura 3 – Casos de dengue e hospitalizações no Brasil de 1986 a 2010

A Figura 4 mostra a situação epidemiológica da dengue no Brasil entre 2013 e os sete primeiros meses de 2015. Observa-se que o pico de incidência ocorreu no mês de abril nos anos de 2013 e 2015 e a análise da incidência em 2014 demonstra uma redução de 56% nos casos em todas as regiões do país. Os óbitos por dengue no Brasil também apresentaram queda em comparação a 2013, de janeiro a outubro foram 379 mortes, contra 646 confirmadas no ano anterior, uma redução de 41% (MS (2016a)).

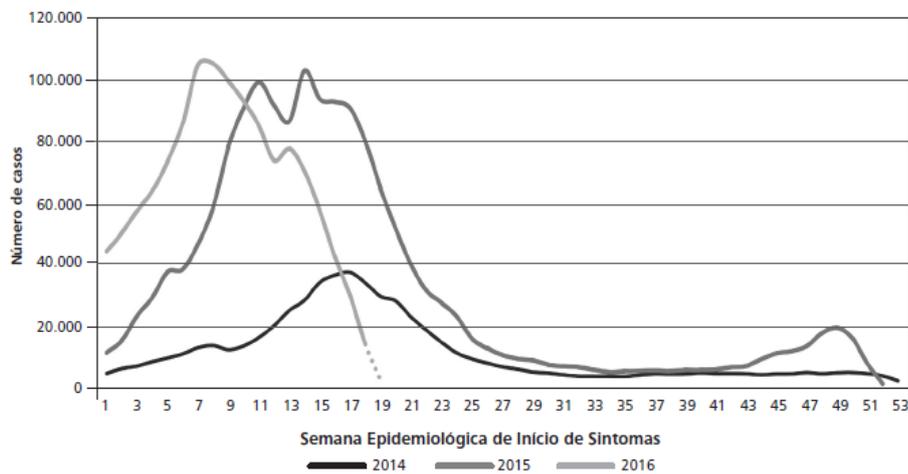
De acordo com a Secretaria de Vigilância em Saúde (2015), em 2015, até a semana epidemiológica 52 (04/01/15 a 02/01/16) foram registrados 1.649.008 casos prováveis de dengue no país, configurando um aumento de quase 200% em relação ao mesmo período de 2014. Além disso, foram confirmados 863 óbitos por dengue, o que representa um aumento de 82,5% em comparação com o mesmo período de 2014, quando foram confirmados 473 óbitos.



Fonte: MS (2016a)

Figura 4 – Casos prováveis de dengue, por semana epidemiológica de início de sintomas, Brasil, 2013, 2014 e 2015

A Figura 5 retrata o crescimento dos casos prováveis de dengue em 2016, somente até a semana epidemiológica 19 (3/1/2016 a 14/5/2016) foram registrados 1.227.920 casos, o que comparado aos anos de 2014 e 2015 no mesmo período alerta sobre uma possível epidemia da doença.



Fonte: MS (2016b)

Figura 5 – Casos prováveis de dengue, por semana epidemiológica de início de sintomas, Brasil, 2014, 2015 e 2016

O cenário de dengue para os próximos anos é preocupante. Nota-se uma adaptação do vetor às regiões antes não atingidas e um aumento da negligência da população em relação a hábitos que propiciam a proliferação do *Aedes*.

## 2.1.2 Biologia do Vetor *Aedes aegypti*

O *Aedes aegypti* é uma espécie tropical e subtropical, encontrada entre as latitudes  $35^{\circ}N$  e  $35^{\circ}S$ . Pertence ao RAMO Arthropoda (pés articulados), CLASSE Hexapoda (três pares de patas), ORDEM Diptera (um par de asas anterior funcional e um par posterior transformado em halteres), FAMÍLIA Culicidae, GÊNERO *Aedes*. Devido ao seu hábito antropofílico, o *Aedes aegypti* apresenta grande capacidade de adaptação a criadouros artificiais, como pneus, latas, vidros, pratos de vasos, caixas de água e tonéis mal tampados, piscinas e aquários abandonados, bebedouros de animais ou qualquer tipo de objeto artificial capaz de armazenar água. Esta característica da espécie favorece o aumento de sua população em locais habitados por seres humanos e, por conseguinte, o aparecimento de epidemias de dengue (Lozovei e Marcondes (2001)). Esta estreita associação com o homem, torna a espécie essencialmente urbana, encontrada em maior abundância em cidades, vilas e povoados. Entretanto, no Brasil, México e Colômbia, o mosquito já foi localizado em zonas rurais, provavelmente transportado de áreas urbanas em vasos domésticos, onde se encontravam ovos e larvas (Fundação Nacional de Saúde (2001)).

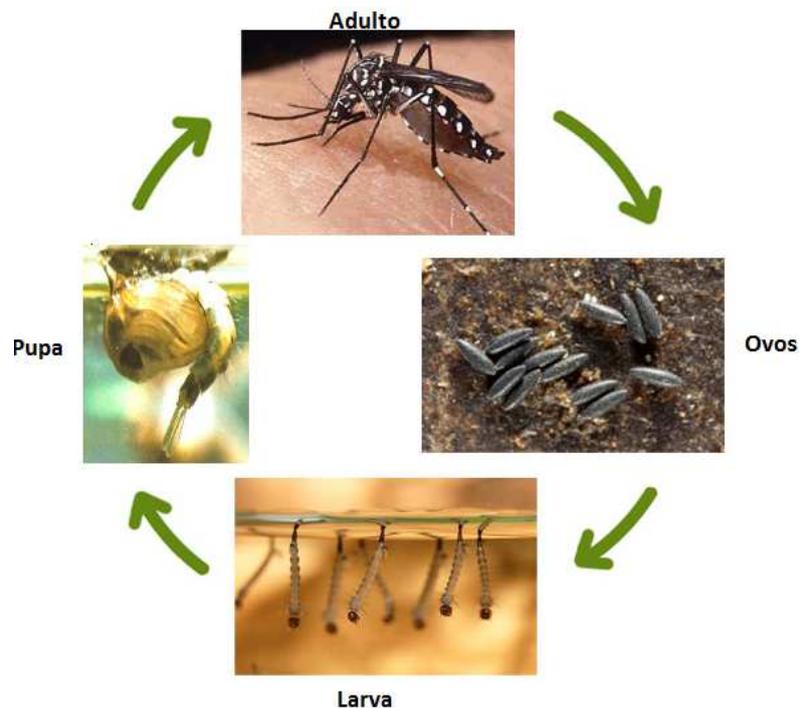
Outro culicídeo do tipo *Aedes*, o *Aedes albopictus*, é também transmissor da dengue. Possui ampla dispersão em todas as regiões do Brasil, sendo o vetor responsável pela manutenção da dengue na Ásia (Ministério da Saúde (2009)). No Brasil, foram registradas fêmeas de *Aedes albopictus* em Fortaleza - CE, no ano de 2012 infectadas com vírus de sorotipos II e III (Martins et al. (2013)).

O vetor da dengue se desenvolve por meio da metamorfose completa e seu ciclo de vida se apresenta em quatro fases compreendidos em dois ambientes: aquático (fase ovo, fase larva e fase pupa) e alada (fase adulta). Na Figura 6 é apresentado essas fases da dinâmica populacional.

- Fase Ovo: As fêmeas depositam os ovos, preferencialmente, nas paredes de criadouros, próximo ao nível da água, mas, também diretamente na água. Durante a postura os ovos são brancos e ao decorrer de seu desenvolvimento adquirem a cor negra. Uma vez completado o desenvolvimento embrionário, os ovos são capazes de resistir a longos períodos de dessecação, que podem prolongar-se por até mais de um ano. Foi já observada a eclosão de ovos com até 450 dias, quando colocados em contato com a água (Fundação Nacional de Saúde (2001)). Isso indica que essa é a fase de maior resistência, mesmo em condições desfavoráveis.
- Fase Larva: Após a eclosão dos ovos, as larvas passam por quatro estágios evolutivos até atingirem a fase pupa. A duração da fase larvária depende da temperatura, disponibilidade de alimento e densidade das larvas no criadouro. Em condições ótimas, o período entre a eclosão e a pupação pode não exceder a cinco dias (Fundação

Nacional de Saúde (2001)).

- Fase Pupa: Nesta fase, as pupas não se alimentam, apenas respiram e passam por modificações que resultam na formação dos adultos. Quando inativas se mantêm na superfície da água, flutuando, o que facilita a emergência do inseto adulto. O estado pupal dura, geralmente, de dois a três dias (Fundação Nacional de Saúde (2001)).
- Fase adulta: O adulto de *Aedes aegypti* representa a fase reprodutora do inseto. Como ocorre com grande parte dos insetos alados, o adulto representa importante fase de dispersão (Fundação Nacional de Saúde (2001)). Após emergir do estágio pupal é necessário um repouso temporário, normalmente nas paredes do recipiente, o que permite um endurecimento do exoesqueleto, das asas e, nos machos, a rotação da genitália em 180°. A partir daí, já pode haver o acasalamento. Os machos e as fêmeas do *Aedes aegypti* alimentam-se da seiva das plantas, no entanto, a fêmea realiza repasto de sangue de animais vertebrados, principalmente do homem (antropofilia) a fim de fornecer proteínas para crescimento dos ovos (Fundação Nacional de Saúde (2001)).



Fonte: Blanca (2013)

Figura 6 – Ciclo de vida do *Aedes aegypti*

### 2.1.3 Formas de Transmissão da Dengue

O ciclo de transmissão da dengue se inicia quando o mosquito *Aedes aegypti*, vetor da doença no Brasil, suga o sangue de uma pessoa infectada. Quando o vírus da dengue

circulante no sangue de uma pessoa em viremia (geralmente um dia antes do aparecimento da febre até o sexto dia da doença) é ingerido pela fêmea do mosquito durante o repasto, o vírus infecta o mosquito e após um período de oito a doze dias de incubação pode ser transmitido para outras pessoas durante futuros repastos ([Ministério da Saúde \(2009\)](#)). O vírus multiplica-se no intestino médio do vetor e infecta outros tecidos chegando finalmente às glândulas salivares. Após a picada do mosquito, inicia-se o ciclo de replicação viral nas células estriadas, lisas, fibroblastos e linfonodos locais, a seguir ocorre a viremia, com a disseminação do vírus no organismo do indivíduo. Este período começa um dia antes do aparecimento da febre e vai até o 6º dia da doença ([Cruz \(2010\)](#)).

A transmissão não ocorre por contato direto de um doente ou de suas secreções com uma pessoa sadia, nem de fontes de água ou alimento. Uma vez infectado por um dos sorotipos do vírus, o indivíduo adquire imunidade para aquele sorotipo específico. Já o mosquito infectado é capaz de transmitir a doença enquanto viver (6 a 8 semanas).

#### 2.1.4 Controle do Vetor

As formas de controle frequentemente aplicadas são o controle mecânico (que consiste na remoção de criadores), o controle biológico (por meio de animais invertebrados que comem as larvas ou inserção de mosquitos modificados geneticamente) e o controle químico (que controla o vetor através de larvicidas e inseticidas). O controle é mais eficaz no ambiente aquático, quando as larvas e pupas do mosquito estão restritas a recipientes fornecidos ([Cruz \(2013\)](#)).

O controle mecânico é feito a partir de ações como saneamento básico e educação ambiental para remoção ou destruição dos insetos, o que possibilita a redução do número de criadouros artificiais no ambiente (pneus, vasos de planta, coleta adequada de lixo). Segundo a OMS, o saneamento pode ser feito com três objetivos: modificação do meio, adequação dos serviços de água potável; manipulação do meio com tratamento de dejetos sólidos e medidas para reduzir o contato humano com o vetor, com a instalação de telas em janelas, mosquiteiros e uso de repelentes ([Paixão \(2007\)](#)).

O controle químico é baseado no uso de produtos químicos que eliminam ou controlam os vetores, normalmente é aplicada nas fases larvárias e adultas. Atualmente, o emprego desse método é limitado, sendo a última alternativa de controle a ser utilizada, uma vez que ações menos agressivas e eficazes devem ser priorizadas. Seu uso é recomendado em caso de emergência ou quando não houver outra ferramenta disponível ([Fundação Nacional de Saúde \(2001\)](#)).

O controle biológico de mosquitos inclui o uso de vários predadores, invertebrados aquáticos (como Toxorhynchites ou copépodos) ou peixes (Gambusiasp. e outros) que comem larvas

e pupas. Entre as medidas de controle biológico também se encontram o uso de patógenos, como o fungo *Lagenidium giganteum*, e de parasitas, como os nemátodos (*Romanermis culicivora* e *R. iyengari*) (Rose (2001)). Esse tipo de controle é vantajoso no que diz respeito à não-contaminação do ambiente com produtos químicos, à especificidade da atividade contra o organismo controlado e a auto dispersão em locais de difícil acesso (Paixão (2007)). No entanto, pode ser utilizado contra as formas imaturas dos vetores, o que nem sempre está relacionado com a capacidade de transmissão de doenças (Fundação Nacional de Saúde (2001)). Uma das recentes estratégias de controle na fase adulta, trata-se da inserção de machos estéreis do vetor no ambiente com o intuito de alterar o seu processo de reprodução. Esta técnica é conhecida como Sterile Insect Technique (SIT) (Knipling (1985)).

No Brasil, além dos métodos de controle citados acima, é feito o monitoramento da infestação com a coleta de larvas, ou pesquisa larvária, armadilhas de oviposição e aspirador de mochila. A coleta de larvas (ou pesquisa larvária, como é comumente chamada no Brasil) é importante para verificar o impacto das estratégias básicas de controle da doença dirigidas à eliminação das larvas do vetor (Braga e Valle (2007a)). No entanto, essa coleta não é capaz de medir a abundância do adulto, ou seja, não se pode aferir o risco de transmissão do vírus. As armadilhas iscadas com infusões de ervas são mais sensíveis que a pesquisa larvária, contudo, são mais indicadas para períodos de baixa densidade populacional do vetor, pois só permitem quantificar o número de ovos depositados e não a densidade populacional de uma determinada área. O aspirador de mochila é utilizado para capturar a forma adulta do *Aedes aegypti* em repouso, principalmente dentro dos domicílios. É um método com limitações, especialmente por ser invasivo e trabalhoso (Eiras e Resende (2009a)).

Tendo em vista as limitações dos métodos de detecção e controle do *Aedes* foi desenvolvido um novo modelo de armadilha que permite capturar mosquitos adultos de *Aedes aegypti* e *Aedes albopictus*, principalmente fêmeas grávidas, devido a presença de atraentes de oviposição. Esse modelo denomina-se MosquiTRAP. Essa armadilha foi desenvolvida pelo laboratório de Culicídeos do Departamento de Parasitologia da Universidade Federal de Minas Gerais. A primeira versão da armadilha, Figura 7, era constituída de um frasco contendo 300 ml de infusão de gramíneas, utilizada como atraente de oviposição, e um cartão adesivo removível, na parte interna, acima do nível da água, onde os mosquitos adultos ficavam presos (Resende, Silva e Eiras (2010)).

A segunda versão da armadilha MosquiTRAP, Figura 8, consistiu de um recipiente de cor preto-fosco que é dividido em duas partes: 1) a inferior (base) na qual foram adicionados aproximadamente 300 ml de água de torneira e 2) a superior que acopla na base. Entre a base e a parte superior foi inserido um cartão adesivo inodoro que retém os mosquitos adultos capturados. O liberador do atraente sintético de oviposição (AtrAedes) foi fixado



Fonte: [Resende, Silva e Eiras \(2010\)](#)

Figura 7 – Armadilha MosquiTRAP versão 1.0

na tela de proteção que evita o contato do mosquito com a água (Operacionalidade MosquiTRAP). Esse tipo de armadilha pode auxiliar programas privados de monitoramento da dengue, dentre eles, destacaremos o MI- Dengue (Monitoramento Inteligente da Dengue) [Resende, Silva e Eiras \(2010\)](#).



Fonte: [Resende, Silva e Eiras \(2010\)](#)

Figura 8 – Armadilha MosquiTRAP versão 2.0

O MI-Dengue é um serviço de monitoramento de vetores adultos, de fácil implementação e de rotina bastante simples, que permite ao município obter uma fotografia semanal da infestação do *Aedes* fazendo uso de um pequeno número de agentes de saúde ([ECOVEC \(2014\)](#)). As armadilhas utilizadas no monitoramento são posicionadas em áreas urbanas e são vistoriadas semanalmente por agentes de endemias. A partir daí torna-se possível obter informações sobre a densidade do vetor.

A [Figura 9](#) apresenta o sistema composto por quatro ferramentas: A armadilha, o AtrAedes, o dispositivo móvel e o site. A armadilha tem como função imitar um criadouro natural

para as fêmeas do *Aedes aegypti*, o Atraedes é um atraente sintético que simula o odor de um criadouro natural e o dispositivo móvel é um celular que envia os dados para uma central e esses dados são organizados em forma de gráficos, mapas e tabelas que são disponibilizados no site do MI-Dengue.



Fonte: [ECOVEC \(2014\)](#)

Figura 9 – Sistema MI-Dengue

Esse sistema tem como indicadores entomológicos o Índice Médio de Fêmeas Aedes (IMFA) e o Índice Médio Temporal de Fêmeas Aedes (IMFAt).

O IMFA é utilizado para aferir a infestação semanal do vetor em bairros e municípios, esse índice é calculado por:

$$IMFA = \frac{k}{n}$$

Em que  $k$  é o número médio de fêmeas *Aedes aegypti* capturadas em  $n$  armadilhas instaladas por semana epidemiológica ([Eiras e Resende \(2009b\)](#)).

O IMFAt é a média dos valores IMFA sobre um número de semanas, normalmente, 3 semanas. A fórmula usado para determinar este índice é dada por:

$$IMFAt = \frac{IMFA_{semana\ n-2} + IMFA_{semana\ n-1} + IMFA_{semana\ n}}{3}$$

Em que  $IMFA_{semana\ n-2}$  equivale ao índice IMFA de duas semanas anteriores,  $IMFA_{semana\ n-1}$  equivale ao IMFA da semana anterior e  $IMFA_{semana\ n}$  ao índice IMFA da semana atual (Eiras e Resende (2009b)).

Estudos recentemente concluídos mostraram que nos municípios que implantaram o sistema houve uma melhora significativa nos resultados das ações de prevenção da doença ECOVEC (2014). Além disso, os dados do MI-Dengue vem contribuindo para a simulação e validação de modelos matemáticos que podem ser capazes de aferir o risco de dengue em uma delimitada região.

### 2.1.5 Influência das Variáveis Climáticas

A temperatura, pluviosidade, umidade relativa, precipitação e velocidade do vento são algumas das variáveis climáticas que influenciam o desenvolvimento do vetor, de sua população e a proliferação do vírus. Essas influências mostram relação com a incidência de casos da dengue (CONDINO, 2006), (SOUZA; SILVA; SILVA, 2010), (BESERRA et al., 2009), (PEREDA; ALVES; RANGEL, 2010), (LAMBRECHTS et al., 2011) e (YANG et al., 2014).

Segundo Pereda, Alves e Rangel (2010), os resultados mostraram que "as variáveis climáticas desempenham um papel importante, com impacto estatisticamente significativo, para explicar os casos de dengue". Em seu trabalho verificou-se por meio de modelagem matemática que o aumento da temperatura tem relação positiva no risco de dengue no Brasil. A pluviosidade, possui efeito positivo, mas decrescente, indicando que no caso de grandes quantidades de chuvas o vetor não sobrevive. Logo, temperaturas mais amenas, níveis adequados de chuvas e umidade fornecem as condições ideais para reprodução e transmissão da doença.

No trabalho de Condino (2006) foi analisado a ocorrência de casos dengue, considerando sexo, faixa etária e a relação com condições climáticas. Neste estudo, constatou-se que a temperatura e a pluviosidade em um determinado mês pode explicar o aumento de casos de dengue de dois a quatro meses depois. Isso indica que a pluviosidade além de elevar a quantidade de criadouros disponíveis na forma imatura, também gera condições favoráveis para o desenvolvimento do vetor adulto.

O efeito da temperatura sobre o ciclo do *Aedes aegypti* foi avaliado na pesquisa de Beserra et al. (2009). Os resultados mostraram que existe uma interação entre a densidade de mosquitos e a temperatura, influenciando em relação a longevidade e fecundidade dos vetores adultos. No trabalho de Costa et al. (2010) foi analisado o efeito de pequenas variações de temperatura e umidade sobre a atividade reprodutiva do vetor. Verificou-se que com o aumento da temperatura e baixa umidade houve uma redução na taxa de oviposição,

intervenções significativas na sobrevivência de mosquitos adultos e redução na taxa de eclosão dos ovos.

[Glassera e Gomes \(2002\)](#) abordaram a influência de fatores climáticos na distribuição das populações de *Aedes aegypti* e *Aedes albopictus* no Estado de São Paulo. Este estudo comprovou que quanto menor a temperatura, mais lento é o processo de expansão geográfica do vetor. A relação com pluviosidade é fraca em algumas regiões, porém influenciou bastante na criação de criadouros, o que possibilita o desenvolvimento do mosquito.

O estudo estatístico apresentado por [Magalhães e Zanella \(2013\)](#) evidenciou que existe uma correlação maior entre a precipitação e incidência de dengue. Em anos de epidemia observa-se uma relação significativa com o adiantamento de um mês nos casos de dengue, ou seja, em grandes quantidades de chuva, a incidência maior nos casos ocorre entre um e dois meses depois dos grandes totais pluviométricos.

[Lambrechts et al. \(2011\)](#) concluiu que, além da temperatura média, outros fatores climáticos como pressão atmosférica e umidade que variam entre as estações seca e chuvosa podem contribuir para a variação da capacidade vetorial do *Aedes aegypti*. Em seu trabalho foram realizados experimentos com dois sorotipos do vírus, constatando que, para temperaturas menores que  $18^{\circ}C$ , a transmissão se estende quando a variação da taxa de temperatura diurna (DTR) aumenta, e para temperaturas médias maiores que  $18^{\circ}C$ , a redução de transmissão do DENV ocorre com altas DTR. Isso indica que grandes variações de temperatura podem reduzir a probabilidade de sobrevivência do vetor.

Diante do exposto acima, é necessário considerar as influências do clima na incidência dos casos de dengue. Baseado no trabalho de [Cordeiro \(2015\)](#) será apresentado um modelo capaz de descrever o ciclo de vida do principal vetor da doença, considerando como variáveis meteorológicas temperatura e pluviosidade e, inserindo a população de machos naturais no modelo.

## 2.2 Conceitos Matemáticos e Computacionais

A modelagem matemática utilizando as equações diferenciais está presente em várias áreas do conhecimento, tais como a Física, Química, Biologia entre outros. Apresentaremos nesta seção alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, como Equações Diferenciais, Sistemas Dinâmicos, Estabilidade de Pontos Críticos e o método computacional Runge-Kutta. Todas as definições estão detalhadas em ([BOYCE; DIPRIMA, 2012](#)), ([MONTEIRO, 2006](#)), ([SOTOMAYOR, 1979](#)), ([WIGGINS, 2003](#)) e ([HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2012](#)).

## 2.2.1 Equações Diferenciais

**Definição 1.** Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação da forma:

$$f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

em que  $x^{(k)} = \frac{d^{(k)}x}{dt^{(k)}}$ . A equação envolve uma função  $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$  e suas derivadas;  $t$  é a variável independente, onde  $t \in I = ]\alpha, \beta[ \subset \mathbb{R}$  e  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua.

A ordem de uma EDO corresponde à ordem da mais alta derivada de  $x(t)$ . A equação é dita linear se a função  $f$  na equação depender linearmente da variável dependente  $x$  e de suas derivadas; caso contrário, é dita não linear. Se a função  $f$  não depender explicitamente da variável independente  $t$ , dizemos que uma EDO é autônoma. Definimos como a solução geral de uma EDO a família de todas as curvas que satisfazem a equação (1).

**Definição 2.** Um **sistema** é um conjunto de componentes interconectados, que interagem apresentando relações de causa e efeito e que evoluem como um todo. Eles podem ser **autônomos** com propriedades descritivas que não variam com o tempo e **não autônomos**, quando algumas de suas propriedades descritivas variam com o tempo (MONTEIRO, 2006), (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

Uma representação possível para um sistema dinâmico pode ser realizada por meio de um sistema de equações diferenciais em geral não lineares.

**Definição 3.** Um sistema de ordem  $n$  é formado por  $n$  equações diferenciais de primeira ordem não linear. Este sistema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (2)$$

em que o parâmetro  $t$ , as funções  $x_i$  e  $f_i$  são tais que  $t \in I$ ,  $I = ]\alpha, \beta[$ ,  $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_i : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $i = 1, \dots, n$ .

Este sistema, também pode ser escrito na forma vetorial:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t)) \quad (3)$$

, tal que  $t \in ]\alpha, \beta[ \in \mathbb{R}^n$  e

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\vec{F}(t, \vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Um sistema determinável de ordem  $n$  envolve  $n$  derivadas e, portanto, sua integração inclui  $n$  constantes arbitrárias. Para a fixação dessas constantes arbitrárias são necessárias  $n$  condições. Um conjunto de condições, chamadas condições iniciais, para determinar as  $n$  constantes arbitrárias associadas ao sistema (2) corresponde a estabelecer os valores das variáveis dependentes  $x_1, \dots, x_n$  em um único tempo,  $t = t_0$ .

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2(t_0) = x_2^0 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases} \quad (6)$$

**Definição 4.** Um conjunto de condições definidas do modo (6) é chamado condições iniciais do sistema (2).

**Definição 5.** O problema de valor inicial (PVI) é constituído do sistema (2) sujeito as condições (6).

Dado o PVI constituído por (4), (5) e (6), é possível garantir a existência e unicidade das soluções, sob certas condições sobre  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ .

**Teorema 2.2.1** (Existência e Unicidade). *Suponha que cada uma das funções  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  e todas as suas derivadas parciais  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ , sejam contínuas em uma região  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  definida por  $\alpha < t < \beta$ ,  $\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n < \beta_n$ , e suponha que o ponto  $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$ . Então existe  $h > 0$  tal que, para todo  $t \in ]t_0 - h, t_0 + h[$  existe uma única solução  $x_1 = x_1(t), \dots, x_n(t)$  do sistema que também satisfaz as condições iniciais (BOYCE; DIPRIMA, 2012), (SOTOMAYOR, 1979).*

Se cada uma das funções  $f_1, \dots, f_n$  depender linearmente das variáveis dependentes  $x_1, \dots, x_n$  o sistema é dito linear; caso contrário, é não linear.

**Definição 6** (Ponto de equilíbrio). *Considere um sistema de equações diferenciais autônomo dado por*

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t)), \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (7)$$

*uma solução de equilíbrio do sistema é um ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $F(t, \bar{x}) = 0$ , isto é, uma solução que não se altera no tempo.*

Os pontos de equilíbrio podem ser classificados como *estáveis ou instáveis*. Os pontos de equilíbrio estáveis podem ser adicionalmente classificados como assintoticamente estáveis ou não assintoticamente estáveis. Definiremos esta classificação para sistemas autônomos e nas definições a seguir consideramos  $\|x_1, x_2, \dots, x_n\|$  como a norma de vetor em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 7 (Ponto de Equilíbrio Estável).** *Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é **estável** se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existir  $\delta > 0$  tal que, para todo  $t \geq 0$ , uma solução de (2),  $\psi(t)$ , satisfaz  $|\psi(t) - \bar{x}| < \varepsilon \forall t \geq 0$  sempre que a condição inicial  $\psi(0)$  satisfizer  $|\psi(0) - \bar{x}| < \delta$  (BOYCE; DIPRIMA, 2012), (WIGGINS, 2003).*

Assim, dizemos que um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é estável, se para toda vizinhança  $O$  de  $\bar{x}$  em  $\mathbb{R}^n$  existe uma vizinhança  $O_1$  de  $\bar{x}$  em  $O$  tal que toda solução em  $O_1$  é definida e permanece em  $O$  para todo  $t > 0$ .

**Definição 8 (Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável).** *Um ponto de equilíbrio é dito **assintoticamente estável** se for estável e se existir  $\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta$ , tal que se a solução  $\psi(t)$  do sistema 2 satisfaz  $|\psi(0) - \bar{x}| < \delta_1$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \bar{x}$  (BOYCE; DIPRIMA, 2012), (WIGGINS, 2003).*

Isso quer dizer soluções próximas ao ponto de equilíbrio, não só ficam próximas, mas também convergem para o ponto de equilíbrio com  $t \rightarrow \infty$ .

**Definição 9 (Ponto de Equilíbrio Instável).** *Um ponto de equilíbrio que não é estável é chamado **instável** (BOYCE; DIPRIMA, 2012).*

A definição indica que para toda vizinhança  $O$  de  $\bar{x}$  onde se fixe arbitrariamente uma condição inicial haverá uma solução do sistema que se afasta arbitrariamente desta vizinhança.

No caso de sistemas não-lineares, uma classe é chamada de quase-lineares. Para concluir sobre a sua estabilidade ou não, uma análise por meio de linearização pode ser feita em uma vizinhança do ponto de equilíbrio. Com a linearização fica associado ao sistema

não-linear um novo sistema linear cuja origem corresponde ao ponto de equilíbrio a ser estudado.

Considere o sistema dinâmico autônomo não linear da forma:

$$\dot{\vec{x}}(t) = B\vec{x}(t) + \vec{g}(\vec{x}(t)) \quad (8)$$

em que  $B$  é uma matriz  $M_{n \times n}$  e  $\vec{g}$  uma função não linear. Suponha que  $\bar{x}$  seja um ponto de equilíbrio isolado do sistema dinâmico  $\vec{x}(t) = B(\vec{x}(t))$  e que  $\det(B) \neq 0$ .

**Definição 10.** O sistema 8 é dito quase linear na vizinhança de  $\bar{x}$  se a condição abaixo é satisfeita.

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \bar{x}} \frac{\|\vec{g}(\vec{x} - \bar{x})\|}{\|(\vec{x} - \bar{x})\|} = 0 \quad (9)$$

Esta condição garante que, na vizinhança de  $\bar{x}$ ,  $\vec{g}$  é pequeno. Isto é, se  $\vec{g}$  admitir expansão em série de potências, somente aparecerão os termos de ordem igual ou superior a dois. Além disso, um sistema, com estas condições, é chamado de sistema quase linear na vizinhança do ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$ .

**Teorema 2.2.2.** Um sistema dinâmico autônomo  $n$ -dimensional não linear será quase linear em uma vizinhança  $U$  do ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  sempre que as funções  $f_1, \dots, f_n$  forem duas vezes diferenciáveis e de classe  $C^1$ .

*Demonstração.* As funções  $f_1, \dots, f_n$  podem ser reescritas usando a série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ . Assim, obtemos:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(\bar{x}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\bar{x})(x_k - \bar{x}_k) + R_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

⋮

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_n(\bar{x}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(\bar{x})(x_k - \bar{x}_k) + R_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

em que

$$\frac{R_1(x_1, \dots, x_n)}{[(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_n)^2]^{1/2}} \rightarrow 0, \dots, \frac{R_n(x_1, \dots, x_n)}{[(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_n)^2]^{1/2}} \rightarrow 0 \quad (10)$$

quando  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bar{x}$ .

Note que os primeiros termos de cada série acima são sempre nulos para o ponto de equilíbrio  $\vec{x}$  e, que

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d(x_1 - \bar{x}_1)}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{d(x_n - \bar{x}_n)}{dt}$$

Logo o sistema (8) se reduz a :

$$\dot{\vec{v}} = B\vec{v} + R(\vec{x})$$

em que  $\vec{v} = (\vec{x} - \bar{x})^T$  e

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

Com as condições 10 satisfeitas, o sistema se reduz ao sistema linear numa vizinhança suficientemente pequena em torno do ponto de equilíbrio. Assim,

$$\dot{\vec{v}} = B\vec{v} \quad (12)$$

□

Observe que essa aproximação só é válida para pontos próximos ao ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ . A matriz  $B$  é denominada matriz jacobiana, que é obtida a partir das derivadas parciais das funções  $(f_1, \dots, f_n)$  calculadas nos pontos de equilíbrio ((WIGGINS, 2003), (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2012)).

Se as condições do Teorema (2.2.2) são atendidas, então não é necessário usarmos a definição para mostrar que um sistema é quase linear. O sistema linear que aproxima o sistema não-linear em uma vizinhança do ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é dada pela parte linear do sistema.

Para a equação 12 pode-se propor soluções fundamentais na forma  $\vec{x}(t) = \vec{u}e^{\lambda t}$  onde  $\vec{u}$  são autovetores e  $\lambda$  são seus autovalores associados. Assim, obtemos a equação característica  $B\vec{u} = \lambda\vec{u}$  ou  $(B - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$ .

**Definição 11.** Um autovalor de uma matriz  $B$  de ordem  $n$  é um escalar  $\lambda$ , tal que  $B\vec{u} = \lambda\vec{u}$ , para algum vetor  $\vec{u}$  não nulo em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $\vec{u}$  é um autovetor de  $B$  associado ao autovalor  $\lambda$  de  $B$ . Além disso, de  $B\vec{u} = \lambda\vec{u}$ , temos que:  $(B - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$  em que  $I$  corresponde à matriz identidade de  $n$ -ésima ordem.

Esta equação terá soluções não triviais se, e somente se,  $\det(B - \lambda I) = 0$ , o que nos leva à condição  $P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ .

O polinômio acima, como consequência do Teorema Fundamental da Álgebra, possui  $n$  raízes distintas e pode ser fatorado como produto de fatores lineares. Isto é,

$$P(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_n)(\lambda - \lambda_{n-1}) \cdots (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_1).$$

Assim,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são raízes da equação  $P(\lambda) = 0$ .

**Definição 12 (Polinômio Característico).** *O polinômio característico da matriz  $B$  é definido por:*

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n; \quad a_i \in \mathbb{R}; \quad a_0 \neq 0 \quad (13)$$

onde as raízes de  $p(\lambda)$  são os autovalores de  $B$ .

**Teorema 2.2.3.** *Suponha que todos os autovalores próprios de  $P(\lambda)$  (13) possuam partes reais negativas. Então, a solução de equilíbrio  $\bar{x}$  do sistema dinâmico linear é assintoticamente estável (WIGGINS, 2003).*

**Teorema 2.2.4.** *Um ponto equilíbrio é instável se um ou mais autovalores de  $B$  tiver parte real positiva (MONTEIRO, 2006).*

Os teoremas (2.2.3) e (2.2.4) mostram como a estabilidade de um sistema linear fica determinada pelos sinais de seus autovalores.

## 2.2.2 Estabilidade dos Pontos Críticos

A estabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser dada pelo sinal dos autovalores determinados pelo polinômio característico associado à matriz jacobiana do sistema dinâmico. No caso de sistemas não lineares e com tempo contínuo, dizemos que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável quando todas as raízes da equação característica possuem parte real negativa, ou seja, estão no semiplano esquerdo do plano complexo. Caso algum autovalor tenha sinal positivo, o ponto de equilíbrio é instável. Assim, temos o primeiro teorema, que garante o número de raízes estritamente positivas.

**Teorema 2.2.5 (Regra de Sinal de Descartes).** *Se os coeficientes de uma equação polinomial são reais e todas as suas raízes também são reais, então o número de raízes estritamente positivas (levando-se em conta as suas multiplicidades) é igual ao número de trocas de sinais na sequência dos seus coeficientes. Se a equação também tem raiz complexa, então o número de trocas de sinais de seus coeficientes menos o número de raízes positivas é um número par (WIGGINS, 2003).*

No entanto, determinar de forma analítica o sinal das raízes do polinômio característico pode ser bastante custoso, assim vamos recorrer ao critério de estabilidade de Routh-Hurwitz para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

### 2.2.3 Critério de Routh-Hurwitz

O **Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz** é um método algébrico que fornece informações sobre a estabilidade absoluta de um sistema linear invariante no tempo com polinômio característico de coeficientes constantes. O nome Routh-Hurwitz refere-se aos matemáticos E. J. Routh e A. Hurwitz que, entre 1875 e 1895, contribuíram para a formulação do critério (ROUTH, 1877), (HURWITZ, 1964). Este método determina a estabilidade de um ponto de equilíbrio sem o cálculo explícito das raízes, ou seja, conhecendo apenas o sinal de suas partes reais.

Dado um polinômio na forma  $P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ , vimos que para haver equilíbrio assintótico é suficiente que todos os autovalores tenham partes reais negativas. Se o polinômio tiver coeficientes reais e apenas raízes reais, não poderá haver trocas de sinais entre os coeficientes, o que requer que todos os coeficientes tenham o mesmo sinal, conforme o Teorema 2.2.5. Por meio do Teorema 2.2.6 enunciamos o critério (ALLEN, 2007).

**Teorema 2.2.6** (Critério Routh-Hurwitz). *Dado o polinômio*

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

em que os coeficientes  $a_i$  são constantes reais,  $i = 1, 2, \dots, n$ , definimos as matrizes de Hurwitz usando os coeficientes  $a_i$  do polinômio característico:

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

e

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix},$$

em que  $a_j = 0$  se  $j > n$ . Todas as raízes do polinômio  $P(\lambda)$  são negativas ou possuem parte real negativa se, e somente se, os determinantes de todas as matrizes de Hurwitz são positivos, isto é:

$$\det H_j > 0, j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Se  $n = 2$ , os critérios de Routh-Hurwitz se reduzem a  $\det H_1 = a_1 > 0$  e

$$\det H_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ ou } a_1 > 0 \text{ e } a_2 > 0.$$

Para polinômios de grau  $n = 2, 3, 4$  e  $5$ , o critério de Routh-Hurwitz se resume a:

$$n = 2 : a_1 > 0 \text{ e } a_2 > 0.$$

$$n = 3 : a_1 > 0, a_3 > 0 \text{ e } a_1 a_2 > a_3.$$

$$n = 4 : a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0 \text{ e } a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4.$$

$$n = 5 : a_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4 \text{ e } (a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5(a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2.$$

Como consequência direta do critério, nota-se que todos os coeficientes  $a_i$  de  $P(\lambda)$  devem ser estritamente positivos.

## 2.2.4 Método Runge-Kutta

Para uso posterior será apresentado o Método Runge-Kutta a fim de reproduzir o sistema dinâmico e a correlação cruzada.

Os métodos analíticos de resolução de equações diferenciais são restritos apenas a algumas formas especiais de funções. Neste caso, há vários métodos que determinam de forma numérica uma solução aproximada de um sistema de equações diferenciais. Dentre eles, estão o Método de Euler, Método Runge-kutta e os Métodos de Adams.

Neste trabalho optamos por utilizar o Método Runge-Kutta para reproduzir o sistema de equações diferenciais.

Os métodos numéricos Runge-Kutta consistem em comparar polinômios de Taylor, sem que sejam calculadas derivadas de ordem superior, com objetivo de fazer aproximações das soluções de equações diferenciais. Para mais detalhes sobre os métodos, consulte [Valle \(2012\)](#), [Campos \(2007\)](#).

Neste trabalho daremos atenção ao Método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4).

**Método RK4:** Considere um problema de valor inicial, dado por:  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  dentro do intervalo  $h = \Delta t = t_n - t_{n-1}$ . O método RK4 é dado pelas equações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

em que  $y_{n+1}$  é a aproximação de  $y_{t_{n+1}}$ ,  $h$  é o incremento ou passo e

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Observe que o próximo valor ( $y_{n+1}$ ) é sempre determinado pelo valor atual ( $y_n$ ) somando com o produto do tamanho do intervalo ( $h$ ) e uma inclinação estimada.

Generalizando o método para  $n$  equações, teremos:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f_l(t, \vec{x})$$

em que

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T \text{ e } l = (1, 2, \dots, n) \text{ e } n = (1, 2, \dots, T(\text{tempo}))$$

Assim, o método RK4 é dado por:

$$x_{l:t_{n+1}} = x_{l:t_n} + \frac{h}{6}(k_l^{(1)} + 2k_l^{(2)} + 2k_l^{(3)} + k_l^{(4)}) \text{ e}$$

$$k_l^{(1)} = f_l(t_n, x_{i:t_n})$$

$$k_l^{(2)} = f_l\left(t_n + \frac{h}{2}, x_{i:t_n} + h\frac{k_i^{(1)}}{2}\right)$$

$$k_l^{(3)} = f_l\left(t_n + \frac{h}{2}, x_{i:t_n} + h\frac{k_i^{(2)}}{2}\right)$$

$$k_l^{(4)} = f_l\left(t_n + h, x_{i:t_n} + hk_i^{(3)}\right)$$

em que  $i = (1, 2, \dots, n)$ .

## 2.2.5 Correlação Cruzada

Em muitas situações é necessário avaliar o grau de similaridade entre dois fenômenos, por meio da correlação é possível avaliar o quanto o resultado de um fenômeno está associado ao resultado do outro. Definiremos nesta seção os conceitos de covariância, correlação e correlação cruzada.

Um modo de avaliar existência de dependência entre variáveis aleatórias é o uso da chamada covariância.

**Definição 13.** *Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias, com médias  $\langle X \rangle$  e  $\langle Y \rangle$ , a covariância entre  $X$  e  $Y$  é definida por:*

$$Cov(X, Y) = E[(X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle)] = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle \quad (14)$$

em que  $E[\ ]$  é o valor esperado.

Como o valor esperado  $E[(X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle)] = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle$  é um somatório sobre as sequências de valores assumidos pelas variáveis  $X$  e  $Y$  descontadas de suas médias,  $\langle X \rangle$  e  $\langle Y \rangle$ , a expressão pode ser interpretada como um produto escalar entre as variáveis e, portanto, pode ser vista como uma avaliação de ângulo entre os dados em um espaço de dimensão correspondente ao número de dados  $N$  em  $X$  ou  $Y$ .

Entretanto, esta quantidade sofre influência das variâncias  $Var(X)$  e  $Var(Y)$ . Um modo de descontar esta influência é dividir a Covariância pelas variâncias.

**Definição 14.** *Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias, com médias  $\langle X \rangle$  e  $\langle Y \rangle$ , e variância  $Var(X)$  e  $Var(Y)$ , define-se a correlação como:*

$$Corr(X, Y) = E \left[ \frac{(X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle)}{Var(X)Var(Y)} \right] = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)Var(Y)} \quad (15)$$

Entretanto, no contexto de séries temporais, as variáveis aleatórias  $X_t$  e  $Y_t$  podem ter relações de interdependências que não se manifestam de forma instantânea, mas com atrasos relativos entre as séries temporais. Ainda assim é possível calcular a correlação entre as séries trasladando-se uma em relação à outra de um índice  $l$ . Supondo que haja interdependência, quando o valor de  $l$  corresponder ao atraso de tempo entre as variações das séries, a correlação encontra um valor máximo.

**Definição 15.** *Sejam  $X_t$  e  $Y_t$  variáveis aleatórias, com médias  $\langle X_t \rangle$  e  $\langle Y_t \rangle$ , e variâncias  $Var(X_t)$  e  $Var(Y_t)$ , define-se a correlação cruzada como:*

$$CCorr(X, Y)(l) = E \left[ \frac{(X_t - \langle X_t \rangle)(Y_{t-l} - \langle Y_{t-l} \rangle)}{Var(X)Var(Y)} \right] = Corr(X_t, Y_{t+l}) \quad (16)$$

De acordo com a definição a função obtida revelará as correlações em função de  $l$ . Usaremos esta quantidade para comparar os resultados dos modelos com os dados experimentais.

Para este trabalho, testaremos a hipótese de que existe correlação entre os dados da população  $F_2$  determinada pelo modelo e o IMFA da cidade estudada. A intensidade das correlações entre duas séries serão indicados por  $M$  com os seguintes critérios: Se  $0 \leq$

$|M| < 0.19$  não há significância na correlação; há fraca correlação se  $0.20 \leq |M| < 0.29$ ; correlação moderada se  $0.30 \leq |M| < 0.39$ ; forte correlação se  $0.40 \leq |M| < 0.69$  e muito forte correlação se  $|M| \geq 0.70$  (NAGHETTINI; PINTO, 2007), (DUTILLEUL et al., 1993) e (DANCEY; REIDY, 2004).

## Capítulo 3

### Trabalhos Relacionados

Muitos modelos matemáticos retratam o fenômeno dengue com foco em seus diferentes aspectos, seja na transmissão, no controle, na dispersão ou na dinâmica do ciclo de vida do vetor. Para entender o fenômeno da dengue é extramente importante conhecer hábitos e tempo de vida do vetor, locais de maior incidência, processos de cura, influência dos fatores climáticos, dentre outros aspectos relacionados à doença (CORDEIRO, 2015).

Neste capítulo apresentaremos os trabalhos da literatura cuja revisão fornece informações importantes para este estudo. Nosso principal interesse serão os modelos que descrevem a dinâmica do ciclo de vida do *Aedes aegypti*.

A análise dos efeitos da capacidade de oviposição e de mecanismos de controle (mecânico, larvicida e adulticida) na dinâmica do vetor foi abordada em um modelo matemático determinístico para a dinâmica populacional do mosquito transmissor da dengue (FERREIRA; YANG, 2003b). O modelo proposto é composto por um sistema dinâmico com quatro equações diferenciais, considerando as quatro fases do ciclo de vida do *Aedes aegypti*; fase ovo (E(t)), fase larva (L(t)), fase pupa (P(t)) e fase adulta (W(t)). A fase ovo aumenta devido a taxa de oviposição  $\phi_e$ , diminui com a eclosão dos ovos para a fase larva,  $\sigma_e$ , e se tornam inviáveis a uma taxa  $\mu_e$ . A população de larvas cresce com a eclosão dos ovos e diminui na transformação de larva para pupa,  $\sigma_l$ , e com a morte de parte da população,  $\mu_l$ . O número de pupas aumenta com a transformação de larva para pupa, diminui com a transformação de larvas para adultos,  $\sigma_p$ , e é reduzida por meio da mortalidade natural,  $\mu_p$ . Por fim, a população adulta é suprida devido a eclosão de pupas e diminui a uma taxa  $\mu_w$  por conta de morte. O controle mecânico nas retiradas de criadouros é representado por  $f$ ,  $m_e$  é a mortalidade adicional na fase ovo,  $m_l$  larva e  $m_p$  para pupas; o controle químico por larvicida age sobre larvas  $\mu'_l$  e pupas  $\mu'_p$ ; e o controle químico adulticida atua na população adulta  $\mu'_w$ . A dinâmica populacional com a influência dos três mecanismos de controle é exposto no sistema dinâmico representado em (17).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} E(t) = \phi(t)F(W) \left[ 1 - \frac{E(t)}{(1-f)C} \right] - [\sigma_e(t) + \mu_e(t) + m_e(t)]E(t) \\ \frac{d}{dt} L(t) = \sigma_e(t)E(t) - [\sigma_l(t) + \mu_l(t) + \mu'_l(t) + m_l(t)]L(t) \\ \frac{d}{dt} P(t) = \sigma_l(t)L(t) - [\sigma_p(t) + \mu_p(t) + \mu'_p(t) + m_p(t)]P(t) \\ \frac{d}{dt} W(t) = \sigma_p(t)P(t) - [\mu_w(t) + \mu'_w(t)]W(t) \end{array} \right. \quad (17)$$

Por fim, após a aplicação isolada de cada um dos mecanismos de controle e de análise numérica verificou-se que a atuação de larvicidas tem efeitos semelhantes à atuação de adulticidas. No início do verão, é recomendado o uso da primeira estratégia, pois obtêm maior rendimento, e a segunda estratégia é adequada para a segunda época de maior infestação. Observou-se também que o controle mecânico é a melhor forma de controle.

A análise da eficácia do controle pela inserção de machos estéreis no ambiente foi realizada via modelo matemático para descrição do ciclo de vida do *Aedes aegypti*, seguido de estudo numérico e analítico (ESTEVA; YANG, 2005). O modelo é compartimentado em dois estágios, imatura (ovos, larvas e pupas) e adulta, com cinco populações no sistema e com a população de fêmeas inférteis desacoplada. A população imatura é denotada por  $A(t)$  e para a forma adulta foi considerado as seguintes populações: fêmeas pré-acasalamento  $I(t)$ , fêmeas férteis em acasalamento  $F(t)$ , fêmeas não fertilizadas  $L(t)$ , fêmeas inférteis  $U(t)$ , insetos machos  $M(t)$  e insetos machos estéreis (irradiados ou transgênicos)  $M_T(t)$ . A mortalidade natural das populações são dadas por:  $\mu_A, \mu_I, \mu_F, \mu_U, \mu_M$  e  $\mu_T$ .

A taxa de oviposição das fêmeas é regulada por um efeito de capacidade limite do meio  $\phi(1 - \frac{A}{C})$ ; a população imatura torna-se adulta a uma taxa per capita  $\gamma$  e uma parcela  $r$  se tornam fêmeas, enquanto  $1 - r$  machos; a transformação de imatura  $I(t)$  para fêmeas férteis  $F(t)$  e fêmeas inférteis  $U(t)$  depende do número de encontros entre fêmeas e machos naturais ou estéreis, a probabilidade do encontro com machos naturais é dada por  $\frac{M}{M+M_T}$ . A taxa per capita em que fêmeas são fertilizadas é  $\frac{\beta M}{M+M_T}$ , onde  $\beta$  é a taxa de acasalamento de insetos naturais; já a probabilidade de encontro entre fêmeas e machos estéreis é expressa por  $\frac{\beta_T M_T}{M+M_T}$ , com  $\beta_T = pq\beta$ ,  $p$  a proporção de insetos estéreis pulverizados em locais adequados,  $q\beta$  a taxa de fertilização eficaz, devido a esterilização. Além disso, é considerado que os insetos estéreis são pulverizados no ambiente a uma taxa constante  $\alpha$ .

O modelo descrito em Esteva e Yang (2005) é exposto no modelo (18), com a população de fêmeas não fertilizadas desacoplada do sistema. Através do estudo analítico e numérico do sistema dinâmico foi feita a análise da eficácia da liberação de insetos inférteis.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{d}{dt}A(t) = \phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) F - (\gamma + \mu_A)A \\
\frac{d}{dt}I(t) = r\gamma A - \frac{\beta MI}{M+M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M+M_T} I - \mu_I I \\
\frac{d}{dt}F(t) = \frac{\beta MI}{M+M_T} - \mu_F F \\
\frac{d}{dt}M(t) = (1-r)\gamma A - \mu_M M \\
\frac{d}{dt}M_T(t) = \alpha - \mu_T M_T
\end{array} \right. \quad (18)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\beta_T M_T I}{M+M_T} - \mu_U U$$

A influência da temperatura na incidência e transmissão da dengue foi estudado por um modelo epidemiológico envolvendo duas populações, mosquito (19) e humana (20) (YANG et al., 2007). Descreveremos a seguir a abordagem usada para descrever as populações de *Aedes aegypti* e humana.

O número de larvas é representado por  $L(t)$ , o número de pupas por  $P(t)$  e o número de fêmeas por  $W(t)$ . As taxas de oviposição, transformação e de morte natural da população de larvas são, respectivamente,  $\phi$ ,  $\delta$ ,  $\mu_l$ ; e a taxa efetiva de produção total de larvas é representado por  $\phi(W) \left(1 - \frac{L}{C}\right)$ , onde  $\phi(W)$  é a capacidade de produção de larvas e  $\left(1 - \frac{L}{C}\right)$  a disponibilidade de criadouros. Para a população de pupas toma-se como taxa de eclosão para a fase adulta e mortalidade natural,  $\sigma$  e  $\mu_p$ . A população de fêmeas adultas é fragmentada em mosquitos suscetíveis  $W_1(t)$ , infectados, mas não infectantes  $W_2(t)$  e infectantes  $W_3(t)$ . A taxa de contato com indivíduos infectantes é dada por  $\beta_w$ , e  $\gamma$  é considerado a taxa de mosquitos infectados e não infectantes que se transformam em infectantes. Assim, a dinâmica de transmissão da dengue na população de mosquitos é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}L(t) = \phi W(t) \left[1 - \frac{L(t)}{C}\right] L(t) - (\delta + \mu_l)L(t) \\ \frac{d}{dt}P(t) = \delta L(t) - (\sigma + \mu_p)P(t) \\ \frac{d}{dt}W_1(t) = \sigma P(t) - [\beta_w i(t) + \mu_w]W_1(t) \\ \frac{d}{dt}W_2(t) = \beta_w i(t)W_1(t) - (\gamma + \mu_w)W_2(t) \\ \frac{d}{dt}W_3(t) = \gamma W_2(t) - \mu_w W_3(t) \end{array} \right. \quad (19)$$

A população humana é também subdividida em suscetíveis  $s(t)$ , expostos  $e(t)$ , infectantes  $i(t)$  e recuperados  $r(t)$ . A taxa de contato entre humanos e mosquito é dada por  $\beta'_h$ , a partir daí os indivíduos expostos se tornam infectantes a uma taxa  $\alpha$  e tornam-se recuperados a uma taxa  $\eta$  e todos os indivíduos sofrem influência de uma mesma taxa de mortalidade  $\mu$ ; além disso, considera-se  $\epsilon$  uma redução de contato entre mosquitos e humanos devido ao envelhecimento dos vetores. Deste modo, a dinâmica de transmissão na população humana é representada no sistema (20). No decorrer do estudo analítico constatou-se que há um risco muito elevado de colonização e infestação por mosquitos para temperaturas entre 16 e 23 °C, e a variação de temperatura com maior risco de contaminação de dengue situa-se de 25 a 30 °C.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}s(t) = \mu - [\epsilon\beta'_h W_3(t) + \mu]s(t) \\ \frac{d}{dt}e(t) = \epsilon\beta'_h W_3(t)s(t) - (\alpha + \mu)e(t) \\ \frac{d}{dt}i(t) = \alpha e(t) - (\eta + \mu)i(t) \\ \frac{d}{dt}r(t) = \eta i(t) - \mu r(t) \end{array} \right. \quad (20)$$

A minimização do custo de controle da dengue pelo uso de inseticidas e liberação de machos estéreis no ambiente foi o foco do modelo (21), baseado em [Esteva e Yang \(2005\)](#), por meio de um estudo analítico e numérico ([THOMÉ; YANG, 2007](#)). No modelo, o ciclo de vida do vetor é dividido em dois estágios: fase aquática (ovos, larva e pupas) e fase alada (mosquitos adultos). São consideradas as seguintes populações: População Aquática ( $A(t)$ ), População de Mosquitos Fêmeas Imaturas ( $I(t)$ ), População de Mosquitos Fêmeas

Fertilizadas(F(t)), População de Mosquitos Fêmeas Não-Fertilizadas (U(t)), População de Mosquitos Machos (M(t)) e População de Mosquitos Machos Estéreis (S(t)) devido à técnica de irradiação. Os parâmetros do modelo  $(\phi, \gamma, \beta, r, \beta_S, \alpha, \mu_A, \mu_I, \mu_F, \mu_I e \mu_S)$  obedecem a mesma estrutura apresentada no modelo (18). No entanto, para definir o controle ótimo não foi considerado a População de Fêmeas Não-Fertilizadas (U(t)), visto que as outras equações não dependem de U.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = \phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) - (\gamma + \mu_A)A \\ \frac{dI}{dt} = r\gamma A - \frac{\beta MI}{M+S} - \frac{\beta_S SI}{M+S} - \mu_I I \\ \frac{dF}{dt} = \frac{\beta MI}{M+S} - \mu_F F \\ \frac{dM}{dt} = (1-r)\gamma A - \mu_M M \\ \frac{dS}{dt} = \alpha - \mu_S S \end{array} \right. \quad (21)$$

Por meio de simulações numéricas notou-se que o uso combinado de mosquitos machos estéreis e inseticidas provoca redução da população de mosquitos nas fases aquática e adulta. O Método da Continuação Analítica foi usado para obter a melhor otimização do problema.

A transmissão de dengue incluindo as fases do ciclo de vida do *Aedes aegypti*, a população humana e os mecanismos de controle aplicados à população de mosquitos é descrito pelo modelo 22(FERREIRA et al., 2010). Esse estudo foi aplicado em epidemias que ocorreram em Salvador, Brasil, entre 1995 e 2002. No modelo, a população de mosquitos,  $M$ , é dividida em quatro fases: aquático ( $A$ ), suscetíveis ( $M_s$ ), expostos ( $M_e$ ) e infectados ( $M_i$ ), sendo as três últimas populações relacionadas as fêmeas. Os parâmetros entomológicos são: taxa intrínseca de oviposição,  $\delta$ ; taxa de mortalidade na fase aquática e também fase adulta,  $\mu_a, \mu_M$ ; e a taxa per capita em que os mosquitos emergem da fase aquática e se tornam fêmeas adultas,  $\gamma_m$ . Além disso, é considerado como  $C$  a capacidade do meio,  $k$  é parte dos mosquitos fêmeas eclodidos de ovos,  $0 < k < 1$ , e as formas de controle adicionais como  $c_a$  e  $c_m$  aplicados na fase aquática e terrestre, respectivamente. A população humana,  $H$ , foi dividida em indivíduos suscetíveis ( $H_s$ ), expostos ( $H_e$ ), infectados ( $H_i$ ) e recuperados ( $H_r$ ); sua taxa de mortalidade per capita é representada por  $\mu_h$ ;  $\left(\frac{b\beta_h}{H}\right) M_i$  é a taxa de infecção por humano suscetível e  $\left(\frac{b\beta_m}{H}\right) M_i$  a taxa de infecção por vetor suscetível. Os parâmetros  $b, \beta_h$  e  $\beta_m$  são nesta ordem, a taxa per capita de mosquitos infectados por dia, taxa de transmissão de mosquitos para humanos e taxa de transmissão de humanos para mosquitos. A taxa em

que a população de humanos expostos e mosquitos não infecciosos se tornam infecciosos é denominada por  $\theta_h$  e  $\theta_m$ , de forma respectiva, sendo as quantidades  $1/\theta_h$  e  $1/\theta_m$  a taxa intrínseco e extrínseco de replicação do vírus em humanos e mosquitos. Por fim, é ainda considerado que os humanos se recuperam da doença em uma taxa por capta constante  $\alpha_h$ , em que  $1/\alpha_h$  é o período infeccioso, enquanto que os mosquitos permanecem infecciosos durante toda a vida.

Assim, o sistema dinâmico é composto por todas as equações a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = k\gamma_m(t) \left(1 - \frac{A}{C}\right) M - (\gamma_m(t) + \mu_a(t) + c_a(t))A \\ \frac{dM_s}{dt} = \gamma_m(t)A - \frac{b\beta_m M_s H_i}{H} - (\mu_m(t) + c_m(t))M_s \\ \frac{dM_e}{dt} = \left(\frac{b\beta_m M_s H_i}{H}\right) - (\theta_m(t) + \mu_m(t) + c_m(t))M_e \\ \frac{dM_i}{dt} = \theta_m(t)M_e - (\mu_m(t) + c_m(t))M_i \\ \frac{dH_s}{dt} = \mu_h(H - H_s) - \frac{b\beta_h H_s M_i}{H} \\ \frac{dH_e}{dt} = \frac{b\beta_h H_s M_i}{H} - (\theta_h + \mu_h)H_e \\ \frac{dH_i}{dt} = \theta_h H_e - (\alpha_h + \mu_h)H_i \end{array} \right. \quad (22)$$

Os parâmetros entomológicos das populações de mosquitos variam com a temperatura diária e, portanto, dependem do tempo  $t$ . O artigo destaca que temperaturas mais altas aumentam a taxa de sobrevivência e oviposição do mosquito e, da mesma forma, a chuva tem influência positiva na sua reprodução. Em relação aos controles aplicados, foi verificado que o controle concentrado na forma adulta do vetor não é capaz de interromper a transmissão da dengue, enfatizando a importância do controle aplicado na fase aquático do ciclo do vetor.

A análise da dependência dos parâmetros com a pluviosidade é tratada no modelo não autônomo (23), descrevendo a dinâmica populacional do *Aedes aegypti* (BARSANTE, 2012). Neste trabalho foi considerado quatro populações: a população de ovos  $E(t)$ , população aquática(larvas e pupas)  $A(t)$ , população de fêmeas pré-repasto sanguíneo  $F_1(t)$  e a população de fêmeas pós-repasto sanguíneo  $F_2(t)$ . O modelo considera como  $\phi(p)$  a taxa de oviposição de fêmeas pós-repasto sanguíneo e o fator  $(1 - \frac{E}{C(t)})$ , com  $C$  capacidade do meio, modera o termo  $\phi$ ; a taxa por unidade de indivíduos em que os ovos passam para a

fase aquática é dada por  $\sigma_A(p)$ ;  $\gamma(p)$  é a taxa *per capita* em que a população aquática passa para a população de fêmeas pré-repasto sanguíneo e  $\beta(p)$  é a taxa em que as fêmeas pré-repasto se tornam fêmeas pós-repasto sanguíneo. As taxa de mortalidade natural das populações são dadas por  $\mu$  e é também aplicado uma taxa  $c$  em que as populações morrem devido ao controle adicional.

O sistema de equações diferenciais não-linear é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} E(t) = \phi(p) \left(1 - \frac{E}{C(t)}\right) F_2 - \sigma_A(p) E - \mu_E(p) E - c_E(t) E \\ \frac{d}{dt} A(t) = \sigma_A(p) E - \gamma(p) A - \mu_A(p) A - c_A(t) A \\ \frac{d}{dt} F_1(t) = \gamma(p) A - \beta(p) F_1 - \mu_{F_1}(p) F_1 - c_{F_1}(t) F_1 \\ \frac{d}{dt} F_2(t) = \beta(p) F_1 - \mu_{F_2}(p) F_2 - c_{F_2}(t) F_2 \end{array} \right. \quad (23)$$

Os resultados indicaram que a comparação entre o IMFA (Índice Médio de Fêmeas Aedes) das cidades analisadas com a população de fêmeas pós-repasto sanguíneo foi satisfatório. Inicialmente, por simplicidade, foi feita a dependência linear da dinâmica populacional, no entanto, verificou-se que a dependência por lei de potência melhora a validação do modelo.

A dispersão do mosquito *Aedes albopictus*, que é também um vetor de transmissão da dengue, considerando a dependência dos parâmetros ambientais (vento, temperatura e localização) foi desenvolvido por [Dufourd e Dumont \(2013\)](#). A forma de controle utilizada foi a Técnica do Inseto Estéril (SIT), que é uma alternativa ao controle biológico. As simulações foram testadas em diferentes cenários para o controle, o que trouxe mais realidade ao modelo. Na análise do modelo, verificou-se que a densidade de mosquitos é maior no fim das estações quentes e chuvosas e menor no fim da estação fria e seca. Esse fato, pode indicar a melhor estação para a liberação de machos estéreis no ambiente.

Em [Yang et al. \(2014\)](#) foi desenvolvido um modelo matemático epidemiológico que além de expor a dinâmica populacional de mosquitos *Aedes aegypti*, é acoplado ao sistema dinâmico a transmissão do vírus na população humana. Os valores dos parâmetros foram estimados e sua dependência com a temperatura e a pluviosidade foram o foco do trabalho. Os resultados mostraram que a incidência de dengue está intimamente ligada às condições climáticas da região.

O trabalho de [Cordeiro \(2015\)](#) foi baseado em [Barsante \(2012\)](#) inserindo no mesmo modelo, além da dependência com a pluviosidade, a temperatura. A análise foi feita através de

um estudo analítico e numérico do sistema, os dados apresentaram um comportamento similar para os estágios de desenvolvimento do vetor. Os resultados mostram que com base em dados meteorológicos pode se prever a população de fêmeas *Aedes* numa região bioclimática.

# Capítulo 4

## Modelos e Análise

Neste capítulo apresentaremos dois modelos matemáticos para descrever a dinâmica populacional do principal vetor de dengue no Brasil, o *Aedes aegypti*. Os modelos foram baseados nos trabalhos de Barsante (2012) e Cordeiro (2015) que abordaram o ciclo de vida do vetor em duas fases: imatura (população de ovos e população aquática) e alada (fêmeas pré e pós-repasto sanguíneo). A alteração que faremos neste trabalho será a inserção da população de machos tendo como principal intuito uma melhor reprodução dos dados experimentais na população de fêmeas pós-repasto sanguíneo.

### 4.1 Modelo 1: Machos

Na dinâmica populacional representada neste modelo consideramos os seguintes ambientes:

- Aquático, que compreende a fase imatura do ciclo. Neste ambiente, a população de ovos é representada por  $E(t)$  e a população aquática (larvas e pupas) representada por  $A(t)$ . Ambas as populações variam no tempo.
- Alado, consiste na fase adulta do vetor. As populações consideradas são: fêmeas pré-repasto sanguíneo,  $F_1(t)$ , machos,  $M(t)$ , e a população de fêmeas pós-repasto sanguíneo,  $F_2(t)$ .

O modelo proposto descreve a dependência dos parâmetros com a temperatura e pluviosidade na população de fêmeas *Aedes aegypti* através de um sistema dinâmico não-linear.

No diagrama da Figura 10 foram considerados os seguintes parâmetros:

- $\phi$  - Taxa de oviposição por unidade de indivíduos  $F_2$ ;
- $\alpha_1$  - Taxa por unidade de indivíduos da população  $E(t)$  que desenvolvem para a população  $A(t)$ ;
- $\alpha_2$  - Taxa por unidade de indivíduos que passam da fase aquática para a fase alada,

$F_1(t)$  ou  $M(t)$ ;

- $\alpha_3$  - Taxa de copulação entre as populações  $F_1(t)$  e  $M(t)$ .
- $\mu$  - Taxa de mortalidade natural na respectiva população;
- $c$  - Taxa de controle adicional na respectiva população;
- $r$  - Taxa da população  $A(t)$  que se torna  $F_1(t)$  e  $(1 - r)$  que se torna a população  $M(t)$ .

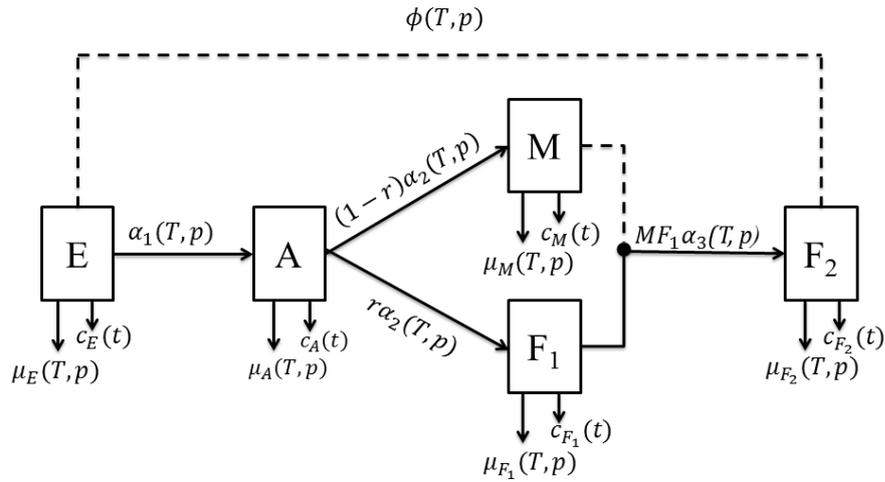


Figura 10 – Diagrama da dinâmica populacional do *Aedes aegypti* para o Modelo 1

Neste primeiro modelo não será inserido o fator  $(1 - \frac{E}{K})$  na conexão entre fêmeas pós-repasto e ovos.

Assim, a dinâmica da variação populacional é representada pelo sistema de equações diferenciais (24):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \phi(T,p)F_2(t) - \alpha_1(T,p)E(t) - \mu_E(T,p)E(t) - c_E(t)E(t) \\ \frac{dA}{dt} = \alpha_1(T,p)E(t) - \alpha_2(T,p)A(t) - \mu_A(T,p)A(t) - c_A(t)A(t) \\ \frac{dM}{dt} = (1-r)\alpha_2(T,p)A(t) - \mu_M(T,p)M(t) - c_M(t)M(t) \\ \frac{dF_1}{dt} = r\alpha_2(T,p)A(t) - \alpha_3(T,p)M(t)F_1(t) - \mu_{F_1}(T,p)F_1(t) - c_{F_1}(t)F_1(t) \\ \frac{dF_2}{dt} = \alpha_3(T,p)M(t)F_1(t) - \mu_{F_2}(T,p)F_2(t) - c_{F_2}(t)F_2(t), \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\phi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_E, \mu_A, \mu_{F_1}, \mu_{F_2}, \mu_M, r, c_E, c_A, c_M, c_{F_1}, c_{F_2} \geq 0, \quad \forall T, p, t \in \mathbb{R}_+.$$

A não linearidade presente nas equações para as taxas populacionais  $\frac{dF_1}{dt}$  e  $\frac{dF_2}{dt}$  tem o objetivo de representar a complexidade do comportamento reprodutivo. O termo  $\alpha_3(T, p)M(t)F_1(t)$  pode ser interpretado como a taxa de cópulas entre as populações de machos naturais e fêmeas pré-repasto sanguíneo.

#### 4.1.1 Equilíbrio do Modelo 1

Para determinarmos os pontos de estabilidade do sistema, vamos supor que os parâmetros  $\pi = (\phi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_E, \mu_A, \mu_{F_1}, \mu_M, \mu_{F_2}, c_E, c_A, c_{F_1}, c_M, c_{F_2})$  variam no tempo de forma lenta, em escala muito maior que a variação das populações. De acordo com a Definição (6), basta igualarmos o lado esquerdo das cinco equações a zero. Assim, determinamos de forma analítica e sistemática dois pontos de equilíbrio, o ponto de equilíbrio trivial  $P_0$ :

$$(E^*, A^*, M^*, F_1^*, F_2^*) = \begin{cases} E^* = 0, \\ A^* = 0, \\ M^* = 0, \\ F_1^* = 0, \\ F_2^* = 0, \end{cases} \quad (25)$$

e o ponto de equilíbrio não trivial  $P_1$ :

$$(E^{**}, A^{**}, M^{**}, F_1^{**}, F_2^{**}) = \begin{cases} E^{**} = \left[ \frac{r\phi(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})}{\alpha_3(1-r)[r\phi\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})]} \right] \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho_1}\right) \\ A^{**} = \left[ \frac{r\phi\alpha_1(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})}{\alpha_3(1-r)[r\phi\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})]} \right] \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho_1}\right) \\ M^{**} = \left[ \frac{r\phi\alpha_1\alpha_2(\mu_{F_1} + c_{F_1})}{\alpha_3[r\phi\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})]} \right] \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho_1}\right) \\ F_1^{**} = \left[ \frac{r(\mu_M + c_M)}{\alpha_3(1-r)} \right] \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho_1}\right) \\ F_2^{**} = \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})}{\alpha_3(1-r)[r\phi\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})]} \right] \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho_1}\right) \end{cases} \quad (26)$$

em que

$$\rho_1 = - \frac{r\phi\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) - r\phi\alpha_1\alpha_2}$$

A expressão acima é análoga à taxa de reprodutividade basal da Epidemiologia que corresponde ao número de casos secundários causados por um indivíduo inicialmente infectado (MASSAD et al., 2010), (LOPEZ et al., 2002). Se  $\rho_1 < 1$ , então em média, o indivíduo infectado durante seu período infeccioso produziria menos que um novo indivíduo infectado. Alternativamente, se  $\rho_1 > 1$ , cada indivíduo infectado produziria mais que um novo indivíduo infectado, o que poderia levar a uma epidemia (DIEKMANN; HEESTERBEEK; METZ, 1990).

A fim de garantir que  $\rho_1$  seja positivo é necessário que o produto das taxas de saída  $(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})$  das populações  $E(t)$ ,  $A(t)$  e  $F_2(t)$  seja menor que o produto das taxas de entrada,  $r\phi\alpha_1\alpha_2$ , de todas as populações, considerando a soma das entradas de  $M(t)$  e  $F_1(t)$ . Além disso, se  $\rho_1 > 1$ , o ponto de equilíbrio não trivial passa a ter coordenadas positivas. Se  $\rho_1 = 1$ , teremos que  $P_0 = P_1$ , ponto em que ocorre uma bifurcação.

#### 4.1.2 Estabilidade do Modelo 1

O tipo de estabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser determinado diretamente através dos autovalores do polinômio característico e dos respectivos sinais das suas partes reais. Também pode ser determinado por outros critérios como método de Lyapunov, critério de Routh-Hurwitz e etc (WIGGINS, 2003).

Usando o método de linearização descrito na Seção 2.2, Definição 10 e Equação 10 foram encontrados as matrizes jacobianas (11) relativas aos pontos de equilíbrio  $P_0$  e  $P_1$  dadas, nessa ordem, por:

$$\mathbf{B}_{P_0} = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + \mu_E + c_E) & 0 & 0 & 0 & \phi \\ \alpha_1 & -(\alpha_2 + \mu_A + c_A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-r)\alpha_2 & -(\mu_M + c_M) & 0 & 0 \\ 0 & r\alpha_2 & 0 & -(\mu_{F_1} + c_{F_1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_{F_2} + c_{F_2}) \end{bmatrix} \quad (27)$$

e

$$\mathbf{B}_{P_1} = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + \mu_E + c_E) & 0 & 0 & 0 & \phi \\ \alpha_1 & -(\alpha_2 + \mu_A + c_A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-r)\alpha_2 & -(\mu_M + c_M) & 0 & 0 \\ 0 & r\alpha_2 & -\alpha_3 F_1 & -(\alpha_3 M + \mu_{F_1} + c_{F_1}) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 F_1 & \alpha_3 M & -(\mu_{F_2} + c_{F_2}) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

A partir da matriz jacobiana e do problema linearizado (12) ao se propor soluções obtém-se da equação característica os seguintes polinômios característicos:  $P_0(\lambda)$  e  $P_1(\lambda)$ , representados em (29) e (30), respectivamente:

$$P_0(\lambda) = [-(\alpha_1 + \mu_E + c_E) - \lambda] \cdot [-(\alpha_2 + \mu_A + c_A) - \lambda] \cdot [-(\mu_M + c_M) - \lambda] \cdot [-(\mu_{F_1} + c_{F_1}) - \lambda] \cdot [-(\mu_{F_2} + c_{F_2}) - \lambda], \quad (29)$$

e

$$P_1(\lambda) = a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 \quad (30)$$

em que,

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = (\alpha_1 + \mu_E + c_E) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A) + (\mu_M + c_M) + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) + (\mu_{F_2} + c_{F_2}) + \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})}{r\phi\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})} \right],$$

$$a_2 = \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})}{r\phi\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right] \cdot [(\alpha_1 + \mu_E + c_E) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A) + (\mu_M + c_M) + (\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\alpha_1 + \mu_E + c_E) \cdot [(\alpha_2 + \mu_A + c_A) + (\mu_M + c_M) + (\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\alpha_2 + \mu_A + c_A) \cdot [(\mu_M + c_M) + (\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2}),$$

$$a_3 = \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})}{r\phi\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right] \cdot [(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A) + (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\mu_M + c_M) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M) + (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\alpha_1 + \mu_E + c_E) \cdot [(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2}),$$

$$a_4 = \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})}{r\phi\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right] \cdot [(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M) + (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2})] - r\phi\alpha_1\alpha_2 \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})}{r\phi\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})} \right]$$

e

$$a_5 = \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})}{r\phi\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})} \right] \cdot [(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) - r\phi\alpha_2].$$

O Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz ([Subseção 2.2.3](#)) nos diz que a estabilidade de um ponto de equilíbrio pode ser determinada a partir da parte real dos autovalores, ou seja, não é necessário o cálculo explícito dos valores de  $\lambda$ .

**Teorema 4.1.1.** *O ponto de equilíbrio trivial  $P_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$  é sempre estável.*

*Demonstração.* O polinômio característico determinado a partir da matriz jacobiana pode ser escrito de forma fatorada,  $P_0(\lambda) = -[\lambda + (\alpha_1 + \mu_E + c_E)] \cdot [\lambda + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)] \cdot [\lambda + (\mu_M + c_M)] \cdot [\lambda + (\mu_{F_1} + c_{F_1})] \cdot [\lambda + (\mu_{F_2} + c_{F_2})]$ . Como todos os parâmetros do modelo são positivos, a partir da forma fatorada deste polinômio, os valores possíveis para os autovalores,  $\lambda$ , são todos negativos. Portanto, o ponto de equilíbrio  $P_0$  é assintoticamente estável.  $\square$

A análise algébrica da estabilidade do ponto de equilíbrio não trivial  $P_1$  torna-se bastante laboriosa devido à forma dos coeficientes do polinômio característico (30). Assim, deixamos o estudo da estabilidade para ser tratado numericamente na [Subseção 5.3.1](#).

## 4.2 Modelo 2: Machos e Capacidade Ambiental

A alteração na primeira equação diferencial do sistema produz um modelo mais próximo da realidade, pois de fato existe um limitador logístico para o crescimento da população de ovos ([SILVA; SILVA, 2000](#)). Denominamos por  $K$ , a capacidade ambiental do meio. Esta constante indica uma saturação ambiental no sentido de que, se a população de ovos for comparada a este valor, a oviposição nos criadouros será inibida.

A variação populacional é apresentado pelo sistema de equações diferenciais (31):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \phi(T, p) \left(1 - \frac{E}{K}\right) F_2(t) - \alpha_1(T, p) E(t) - \mu_E(T, p) E(t) - c_E(t) E(t) \\ \frac{dA}{dt} = \alpha_1(T, p) E(t) - \alpha_2(T, p) A(t) - \mu_A(T, p) A(t) - c_A(t) A(t) \\ \frac{dM}{dt} = (1 - r) \alpha_2(T, p) A(t) - \mu_M(T, p) M(t) - c_M(t) M(t) \\ \frac{dF_1}{dt} = r \alpha_2(T, p) A(t) - \alpha_3(T, p) M(t) F_1(t) - \mu_{F_1}(T, p) F_1(t) - c_{F_1}(t) F_1(t) \\ \frac{dF_2}{dt} = \alpha_3(T, p) M(t) F_1(t) - \mu_{F_2}(T, p) F_2(t) - c_{F_2}(t) F_2(t), \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\phi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_E, \mu_A, \mu_{F_1}, \mu_{F_2}, \mu_M, r, c_E, c_A, c_M, c_{F_1}, c_{F_2} \geq 0, \quad \forall T, p, t \in \mathbb{R}_+.$$

Desta forma, teremos o seguinte diagrama representado pela [Figura 11](#):

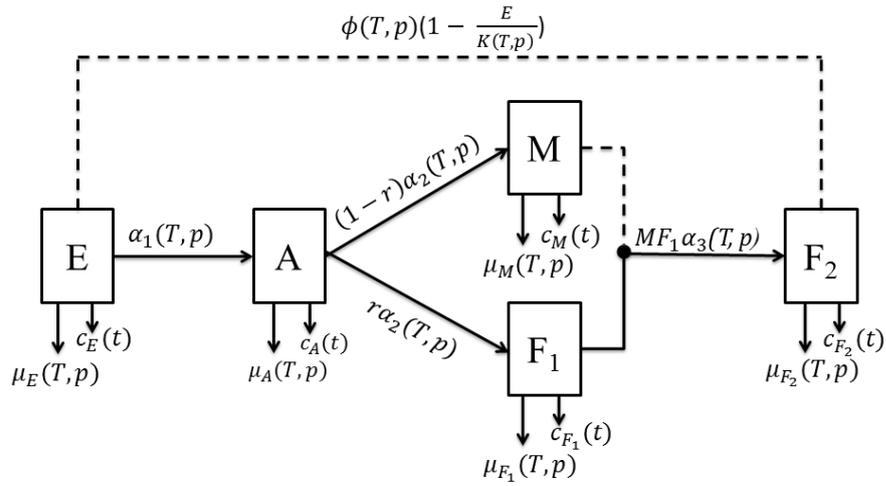


Figura 11 – Diagrama da dinâmica populacional do *Aedes aegypti* para o Modelo 2

O modelo é constituído por funções polinomiais, logo tem derivadas de todas as ordens e são contínuas em todo o espaço de dimensão cinco formado pelas populações  $(E, A, M, F_1, F_2) \times t$  e, portanto, atende às condições do Teorema 2.2.1. Além disso, as condições do Teorema 2.2.2 também são atendidas, caracterizando o modelo como quase linear. Estes resultados permitem a linearização e análise da estabilidade próxima do ponto de equilíbrio.

#### 4.2.1 Equilíbrio do Modelo 2

Impondo a condição de equilíbrio  $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$  em que  $\vec{x} = (E(t), A(t), M(t), F_1(t), F_2(t))$ , obtemos com o segundo membro de (31) um sistema não linear homogêneo. Resolvendo o sistema de forma analítica foram obtidos três pontos de equilíbrio. Além do ponto de equilíbrio trivial  $P_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ , temos  $P_1$  dado por :

$$(E^{**}, A^{**}, M^{**}, F_1^{**}, F_2^{**}) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{**} = \frac{1}{2}R \left(1 + \frac{1}{\rho_2}\right) \\ A^{**} = \frac{\alpha_1}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)} R \left(1 + \frac{1}{\rho_2}\right) \\ M^{**} = \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} R \left(1 + \frac{1}{\rho_2}\right) \\ F_1^{**} = \frac{r\alpha_1\alpha_2(\mu_M + c_M)}{\left[\alpha_1\alpha_2\alpha_3(1-r)R \left(1 + \frac{1}{\rho_2}\right) + 2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})\right]} R \left(1 + \frac{1}{\rho_2}\right) \\ F_2^{**} = \frac{K(\alpha_1 + \mu_E + c_E)}{\phi \left[2K - R \left(1 + \frac{1}{\rho_2}\right)\right]} R \left(1 + \frac{1}{\rho_2}\right), \end{array} \right. \quad (32)$$

em que,

$$R = \frac{K[\phi r\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2})]}{\phi r\alpha_1\alpha_2} \quad (33)$$

$$S = \frac{K(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)^2(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})}{\phi\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3(1-r)r} \quad (34)$$

$$\rho_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 - 4S}} \quad (35)$$

e  $P_2$  que é tal que:

$$(E^{***}, A^{***}, M^{***}, F_1^{***}, F_2^{***}) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{***} = \frac{1}{2}R \left(1 - \frac{1}{\rho_2}\right) \\ A^{***} = \frac{\alpha_1}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)} R \left(1 - \frac{1}{\rho_2}\right) \\ M^{***} = \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} R \left(1 - \frac{1}{\rho_2}\right) \\ F_1^{***} = \frac{r\alpha_1\alpha_2(\mu_M + c_M)}{\left[\alpha_1\alpha_2\alpha_3(1-r)R \left(1 - \frac{1}{\rho_2}\right) + 2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})\right]} R \left(1 - \frac{1}{\rho_2}\right) \\ F_2^{***} = \frac{K(\alpha_1 + \mu_E + c_E)}{\phi \left[2K - R \left(1 - \frac{1}{\rho_2}\right)\right]} R \left(1 - \frac{1}{\rho_2}\right). \end{array} \right. \quad (36)$$

A expressão  $\rho_2$  (35) é análoga à taxa de reprodutividade basal da Epidemiologia que corresponde ao número de casos secundários causados por um indivíduo inicialmente infectado.

Como não existe significado biológico para populações negativas, para bom comportamento do modelo é desejável que os pontos de equilíbrio ou, ao menos os estáveis tenham coordenadas positivas. Desde que  $R > 0$ ,  $\rho_2 > 0$  e  $K > E$ , o ponto  $P_1$  terá coordenadas sempre positivas. E  $P_2$  também terá coordenadas positivas, se  $R > 0$ ,  $\rho_2 > 1$  e  $K > E$ . Haverá bifurcação envolvendo  $P_0$  e  $P_2$ , se  $\rho_2 = 1$ .

A expressão  $\sqrt{R^2 - 4S}$  aparece em todas as equações dos pontos de equilíbrio  $P_1$  e  $P_2$  via a definição de  $\rho_2$  (35). Como os pontos de equilíbrio devem ser reais, é necessário que  $R^2 - 4S \geq 0$ . Entretanto, para bom comportamento do modelo também é desejável que os pontos de equilíbrio tenham seus tipos de estabilidade bem definidos, o que nos leva a uma condição mais restritiva,  $R^2 - 4S > 0$ .

O fator  $R^2 - 4S$  presente nas equações dos pontos de equilíbrio pode ser representado por um polinômio de grau 2, este polinômio é dado por:

$$R^2 - 4S = x^2 - (2 + \Gamma)x + 1$$

em que

$$\Gamma = \frac{4(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\alpha_2 + \mu_A + c_A)}{K(1-r)\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \text{ e}$$

$$x = \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\mu_{F_2} + c_{F_2})(\alpha_2 + \mu_A + c_A)}{r\phi\alpha_1\alpha_2}.$$

O coeficiente do termo de grau 2 é positivo, logo para determinarmos o intervalo em que o polinômio seja positivo basta que seu discriminante  $\Delta = \Gamma(4 + \Gamma) > 0$ .

#### 4.2.2 Estabilidade do Modelo 2

Neste modelo, obtivemos três pontos de equilíbrio (Subseção 4.2.1),  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$ . A partir do método de linearização descrito na Seção 2.2, Definição 10 e Equação 10 determinamos a matriz jacobiana (37).

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{\phi F_2}{K} - (\alpha_1 + \mu_E + c_E) & 0 & 0 & 0 & \phi(1 - \frac{E}{K}) \\ \alpha_1 & -(\alpha_2 + \mu_A + c_A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-r)\alpha_2 & -(\mu_M + c_M) & 0 & 0 \\ 0 & r\alpha_2 & -\alpha_3 F_1 & -(\alpha_3 M \mu_{F_1} + c_{F_1}) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 F_1 & \alpha_3 M & -(\mu_{F_2} + c_{F_2}) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

As matrizes jacobianas relativas ao ponto de equilíbrio  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são dadas por:

$$\mathbf{B}_{P_0} = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + \mu_E + c_E) & 0 & 0 & 0 & \phi \\ \alpha_1 & -(\alpha_2 + \mu_A + c_A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-r)\alpha_2 & -(\mu_M + c_M) & 0 & 0 \\ 0 & r\alpha_2 & 0 & -(\mu_{F_1} + c_{F_1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_{F_2} + c_{F_2}) \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{B}_{P_1} = \begin{bmatrix} \frac{-\phi F_2}{K} - (\alpha_1 + \mu_E + c_E) & 0 & 0 & 0 & \phi(1 - \frac{E}{K}) \\ \alpha_1 & -(\alpha_2 + \mu_A + c_A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-r)\alpha_2 & -(\mu_M + c_M) & 0 & 0 \\ 0 & r\alpha_2 & -\alpha_3 F_1 & -(\alpha_3 M + \mu_{F_1} + c_{F_1}) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 F_1 & \alpha_3 M & -(\mu_{F_2} + c_{F_2}) \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{B}_{P_2} = \mathbf{B}_{P_1}. \quad (39)$$

Ao se propor soluções a partir da matriz jacobiana e do problema linearizado (12) obtemos os polinômios característicos.

$P_0(\lambda)$ , associado a  $B_{P_0}$ :

$$P_0(\lambda) = a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5, \quad (40)$$

em que:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (\alpha_1 + \mu_E + c_E) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A) + (\mu_M + c_M) + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) + (\mu_{F_2} + c_{F_2})$$

$$a_2 = (\alpha_1 + \mu_E + c_E) \cdot [(\alpha_2 + \mu_A + c_A) + (\mu_M + c_M) + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) + (\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\alpha_2 + \mu_A + c_A) \cdot [(\mu_M + c_M) + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) + (\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\mu_M + c_M) \cdot [(\mu_{F_1} + c_{F_1}) + (\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})$$

$$a_3 = (\alpha_1 + \mu_E + c_E) \cdot [(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_1} + c_{F_1}) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1}) + (\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\alpha_2 + \mu_A + c_A) \cdot [(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1}) + (\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})] - (\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})$$

$$a_4 = (\alpha_1 + \mu_E + c_E) \cdot [(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1}) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})$$

$$a_5 = (\alpha_1 + \mu_E + c_E)(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(\mu_{F_2} + c_{F_2})$$

$P_1(\lambda)$ , associado à matriz  $B_{P_1}$ :

$$P_1(\lambda) = b_0\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5, \quad (41)$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = (\alpha_1 + \mu_E + c_E) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A) + (\mu_M + c_M) + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) + (\mu_{F_2} + c_{F_2}) + \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E)(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S})} \right] + \left[ \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} \cdot (R + \sqrt{R^2 - 4S}) \right],$$

$$b_2 = \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E) [(R + \sqrt{R^2 - 4S}) + (2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S}))]}{2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S})} \right] + \left[ (\alpha_2 + \mu_A + c_A) + (\mu_M + c_M) + \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2\alpha_3(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right] + \left[ (\mu_M + c_M) + \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2\alpha_3(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right] \cdot [(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\mu_M + c_M)],$$

$$b_3 = \left[ \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2\alpha_3(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right] \cdot \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E) [(R + \sqrt{R^2 - 4S}) + (2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S}))]}{2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S})} \right] + \left[ (\alpha_2 + \mu_A + c_A) + (\mu_M + c_M) + (\mu_{F_2} + c_{F_2}) \right] + \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E) [(R + \sqrt{R^2 - 4S}) + (2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S}))]}{2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S})} \right] \cdot \left[ (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) \right] + \left[ \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2\alpha_3(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right] \cdot \left[ (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M) + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) + (\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) \right] + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2}),$$

$$b_4 = \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E) [(R + \sqrt{R^2 - 4S}) + (2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S}))]}{2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S})} \right] + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_{F_2} + c_{F_2}) \cdot \left[ (\mu_M + c_M) + \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2\alpha_3(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right] + \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E) [(R + \sqrt{R^2 - 4S}) + (2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S}))]}{2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S})} \right] \cdot (\mu_M + c_M) \cdot \left[ \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2\alpha_3(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right].$$

$$\left[ \frac{[(\alpha_2 + \mu_A + c_A) + (\mu_{F_2} + c_{F_2})] + (\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_2} + c_{F_2})}{\left[ \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2\alpha_3(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right]} - \frac{\phi\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3r(1-r)(\mu_M + c_M)(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3(1-r)(R + \sqrt{R^2 - 4S}) + 2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})} \right] \cdot \left[ \frac{2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2K} \right] - \left[ \frac{\phi\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3r(1-r)(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} \right] \cdot \left[ \frac{2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2K} \right]$$

e

$$b_5 = \left[ \frac{(\alpha_1 + \mu_E + c_E) [(R + \sqrt{R^2 - 4S}) + (2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S}))]}{2K - (R + \sqrt{R^2 - 4S})} \right] \cdot \left[ \frac{[(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})] \cdot \left[ \frac{(1-r)\alpha_1\alpha_2\alpha_3(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)} + (\mu_{F_1} + c_{F_1}) \right] + \frac{\phi\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3r(1-r)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3(1-r)(R + \sqrt{R^2 - 4S}) + 2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})}}{\left[ \frac{\phi\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3r(1-r)(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)} \right] - \frac{\phi\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3r(1-r)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3(1-r)(R + \sqrt{R^2 - 4S}) + 2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)(\mu_M + c_M)(\mu_{F_1} + c_{F_1})}} \right] \cdot \left[ \frac{(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2K} \right] - \left[ \frac{\phi\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3r(1-r)(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2(\alpha_2 + \mu_A + c_A)} \right] \cdot \left[ \frac{(R + \sqrt{R^2 - 4S})}{2K} \right]$$

E  $P_2(\lambda)$ , associado à matriz  $B_{P_2}$

$$P_2(\lambda) = b'_0\lambda^5 + b'_1\lambda^4 + b'_2\lambda^3 + b'_3\lambda^2 + b'_4\lambda + b'_5, \quad (42)$$

com a seguinte observação:

Os coeficientes  $b'_n (n = 0, 1, \dots, 5)$  do polinômio característico  $P_2(\lambda)$  tem a mesma forma de  $b_n (n = 0, 1, \dots, 5)$  do polinômio característico  $P_1(\lambda)$  apenas com a troca da expressão  $R + \sqrt{R^2 - 4S}$  por  $R - \sqrt{R^2 - 4S}$  em todas as suas ocorrências.

O cálculo analítico das raízes dos polinômios característicos é bastante custoso e torna-se inviável mesmo usando o Critério de Estabilidade de Routh- Hurwitz. Assim sendo, faremos a análise de estabilidade de forma numérica.

**Teorema 4.2.1.** *O ponto de equilíbrio não trivial  $P_0$  é sempre estável.*

*Demonstração.* O ponto de equilíbrio determinado a partir da matriz jacobiana é dado por:  $P_0(\lambda) = [-(\alpha_1 + \mu_E + c_E) - \lambda] \cdot [-(\alpha_2 + \mu_A + c_A) - \lambda] \cdot [-(\mu_M + c_M) - \lambda] \cdot [-(\mu_{F_1} + c_{F_1}) - \lambda] \cdot [-(\mu_{F_2} + c_{F_2}) - \lambda]$  que possuem todas as raízes negativas. Assim, o ponto de equilíbrio trivial é estável.  $\square$

A estabilidade dos pontos equilíbrio  $P_1$  e  $P_2$  foram determinadas usando o Critério de Routh-Hurwitz (ver Teorema 2.2.6). Verificou-se que existe coeficiente negativo em  $P_1$  e que os determinantes das matrizes de Routh são positivos, ou seja, esse ponto é instável de acordo com o Teorema. Já em  $P_2$  todas as condições são satisfeitas, o que pelo Teorema 2.2.6 garante a estabilidade. Outro teste, baseado no cálculo dos autovalores relativos aos polinômios característicos de  $P_1$  e  $P_2$ , concluímos que o ponto de equilíbrio  $P_1$  é sempre instável e  $P_2$  é estável.

### 4.3 Parametrização dos Coeficientes

Os parâmetros e as equações dos modelos (24) e (31) são dependentes da temperatura,  $T$ , e pluviosidade,  $p$ . Indicaremos essa dependência por:

$$\Psi(p, T) = \Pi(p) + \Xi(T), \quad (43)$$

com  $\Pi(p)$  e  $\Xi(T)$  representando dependência da pluviosidade ( $mm$ ) e temperatura ( $^{\circ}C$ ), respectivamente. A parametrização por lei de potência é usada para determinarmos os coeficientes dependentes da pluviosidade (CORDEIRO, 2015). Para  $\Pi(p)$  consideramos os seguintes coeficientes:  $\phi(p)$ ,  $\alpha_1(p)$ ,  $\alpha_2(p)$ ,  $\alpha_3(p)$ ,  $\mu_E$ ,  $\mu_A$ ,  $\mu_M$ ,  $\mu_{F_1}$ ,  $\mu_{F_2}$ .

$$\Pi(p) = \Pi_1 + \frac{(\Pi_2 - \Pi_1)}{(p_2 - p_1)^s} (p - p_1)^s \quad (44)$$

em que  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  representam a pluviosidade mínima e a pluviosidade máxima observada durante o experimento. A unidade dos parâmetros é  $dias^{-1}$  e o intervalo em relação a pluviosidade máxima,  $(p_{max})$ , e pluviosidade mínima,  $(p_{min})$ , é exibido na Tabela 1.

Através dos estudos de Beserra et al. (2006) e Smith et al. (1988) sobre a sobrevivência do *Aedes aegypti* em todas as fases do seu ciclo sob a influência da temperatura, o trabalho de Cordeiro (2015) deduziu essa dependência por meio da seguinte forma quadrática:

$$\Xi(T) = a + b(T - c)^2, \quad (45)$$

em que  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$ ; (CORDEIRO, 2015).

Tabela 1 – Valores de referência dos coeficientes para a dependência dos parâmetros do modelo com o índice de pluviosidade.

Parâmetro	Intervalo	Referência
$\phi$	0,56 - 11,2	Estimado (PINHO et al., 2010)
$\alpha_1$	0,01 - 0,5	Estimado (FERREIRA; YANG, 2003a)
$\alpha_2$	0,06 - 0,16	(FERREIRA; YANG, 2003a)
$\alpha_3$	0,2 - 0,2	(BARSANTE, 2012)
$K$	1 - 3	(OTERO; SOLARI; SCHWEIGMANN, 2006; LANA et al., 2014)
$r$	0,5	(GUBLER, 1986)
$\mu_E$	0,01 - 0,01	(YANG; FERREIRA, 2008)
$\mu_A$	0,164 - 0,164	(FERREIRA; YANG, 2003a)
$\mu_M$	0,043 - 0,17	Observação 1
$\mu_{F_1}$	0,043 - 0,17	Estimado (FERREIRA; YANG, 2003a)
$\mu_{F_2}$	0,057 - 0,17	Estimado (FERREIRA; YANG, 2003a)
$c_{E,A,M,F_1,F_2}$	0 - 0	Observação 2

<sup>1</sup>Neste trabalho consideramos  $\mu_M = \mu_{F_1}$

<sup>2</sup>Neste trabalho não consideramos a interferência do controle na população

A lei de potência determinada na Equação (44) controla o crescimento ou decrescimento de parâmetros com concavidade invertida ao sinal do crescimento. Já na Equação (45), a parábola pressupõe uma temperatura ótima, máxima ou mínima, para os valores dos parâmetros.

Para a relação entre os coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\mu_M$ ,  $\mu_{F_1}$  e  $\mu_{F_2}$  com os dados da temperatura, foi feito um ajuste quadrático com o objetivo de representar a melhor parábola que se adapta aos dados dos trabalhos de Beserra et al. (2006) e Smith et al. (1988).

Esse ajuste pode representar o processo metabólico do vetor em temperaturas ideais para sua proliferação. Na Tabela 2 é dado a média dos coeficientes em função da temperatura.

Tabela 2 – Valores de referência dos coeficientes para a dependência dos parâmetros do modelo com a temperatura.

	18°C	22°C	26°C	30°C	34°C
$\alpha_1$	0,095511	0,166113	0,30303	0,240385	0,3246475
$\alpha_2$	0,038491	0,061275	0,09434	0,128866	0,116822
$\mu_{F_1} = \mu_{F_2}$	0,023148	0,025202	0,024486	0,040225	0,050865

Assim, as equações de ajuste determinados por Cordeiro (2015) serão usadas na simulação computacional. A temperatura,  $T$ , é considerada como temperatura média acumulada semanalmente.

$$\phi = \phi_{min} + \frac{\phi_{max} - \phi_{min}}{(p_{max} - p_{min})^s} (p - p_{min})^s - 0,0176T^2 + 0,8714T - 9,7903$$

$$K = K_{min} + \frac{K_{max} - K_{min}}{(p_{max} - p_{min})^s} (p - p_{min})^s$$

$$\alpha_1 = \alpha_{1_{min}} + \frac{\alpha_{1_{max}} - \alpha_{1_{min}}}{(p_{max} - p_{min})^s} (p - p_{min})^s + 0,3029 - 0,001339(T - 31,17)^2$$

$$\alpha_2 = \alpha_{2_{min}} + \frac{\alpha_{2_{max}} - \alpha_{2_{min}}}{(p_{max} - p_{min})^s} (p - p_{min})^s + 0,1178 - 0,0006558(T - 29,88)^2$$

$$\alpha_3 = \alpha_{3_{min}} + \frac{\alpha_{3_{max}} - \alpha_{3_{min}}}{(p_{max} - p_{min})^s} (p - p_{min})^s + 1 - \left(\frac{1}{64}\right) (T - 26)^2$$

$$\mu_E = \mu_{E_{min}} + \frac{\mu_{E_{max}} - \mu_{E_{min}}}{(p_{max} - p_{min})^s} (p - p_{min})^s + 0,01$$

$$\mu_A = \mu_{A_{min}} + \frac{\mu_{A_{max}} - \mu_{A_{min}}}{(p_{max} - p_{min})^s} (p - p_{min})^s + 0.01 + 0.9725e^{((4,85-T)/2,7035)}$$

$$\mu_M = \mu_{M_{min}} + \frac{\mu_{M_{max}} - \mu_{M_{min}}}{(p_{max} - p_{min})^s} (p - p_{min})^s + 0,02281 + 0,0001501(T - 20,13)^2$$

$$\mu_{F_1} = \mu_{F_{1_{min}}} + \frac{\mu_{F_{1_{max}}} - \mu_{F_{1_{min}}}}{(p_{max} - p_{min})^s} (p - p_{min})^s + 0,02281 + 0,0001501(T - 20,13)^2$$

$$\mu_{F_2} = \mu_{F_{2_{min}}} + \frac{\mu_{F_{2_{max}}} - \mu_{F_{2_{min}}}}{(p_{max} - p_{min})^s} (p - p_{min})^s + 0,02281 + 0,0001501(T - 20,13)^2$$

Para este trabalho, consideramos  $\mu_E = 0,01$  visto que este parâmetro não varia.

As informações quanto à temperatura média e variação de pluviosidade usados na simulação foram obtidos pela parceria com o INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

# Capítulo 5

## Implementação e Análise Numérica

A implementação dos modelos incluindo desenvolvimento adaptado do Método Runge-Kutta de quarta ordem será apresentada em pseudocódigo nesta seção. De posse do código, também foi feita a análise numérica do comportamento e estabilidade dos pontos de equilíbrio e estão apresentados neste capítulo.

### 5.1 Implementação dos Modelos

Nesta seção será apresentado o pseudocódigo da implementação dos modelos. Iniciamos por descrever o algoritmo desde as variáveis de entrada até as estruturas de saída.

---

**Algoritmo 1:** Etapas para a implementação do algoritmo dos Modelos 1 (24) e 2 (31).

---

**Entrada:** Passo dos subintervalos do Método Runge-Kutta,  $s$  - Expoente da equação de parametrização da dependência dos parâmetros com a pluviosidade.

**Saída:** Curvas das populações  $E(t)$ ,  $A(t)$ ,  $M(t)$ ,  $F_1(t)$  e  $F_2(t)$ ,  $F_2(t)$  versus IMFA e  $F_2(t)$  versus IMFA com correlação.

**início**

- Entrada de passo do Runge-Kutta e expoente;
- Leitura do Coeficientes;
- Leitura dos dados de Temperatura,  $T$ ;
- Leitura dos dados de Pluviosidade,  $p$ ;
- Leitura dos dados de IMFA;

**para** cada  $k \leq kmax$ ; **faça**

- Cálculo dos valores dos parâmetros com dependência das variáveis climáticas, temperatura e pluviosidade;
- Método Runge-Kutta, usando como condições iniciais os pontos de equilíbrio não triviais;
- Esboço das curvas de evolução das populações  $E(t)$ ,  $A(t)$ ,  $M(t)$ ,  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  e  $F_2(t)$  versus IMFA;
- Cálculo da correlação cruzada;
- Esboço da curva  $F_2(t)$  versus IMFA com correlação;
- Esboço da curva  $F_2(t)$  com fator escala versus IMFA, após correlação.

**fim**

**fim**

---

## 5.2 Implementação do Método Runge-Kutta

Apresentamos aqui, o pseudocódigo, 2, do Método Runge-Kutta, discutido na [Subseção 2.2.4](#) desenvolvido para um sistema de equações diferenciais de ordem 5. Evitamos implementações das bibliotecas nativas das linguagens para ganhar controle sobre os parâmetros do método.

---

### Algoritmo 2: Algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem

---

**Entrada:**  $h$  - Passo dos subintervalos,  $n$  - número máximo de subintervalos,  $E_y, A_y, M_y, F_{1y}, F_{2y}$  - Ponto Crítico Não trivial

**Saída:**  $\{E_y(k+1), A_y(k+1), M_y(k+1), F_{1y}(k+1), F_{2y}(k+1)\}$

**início**

$$E(k) = E_y(k);$$

$$A(k) = A_y(k);$$

$$M(k) = M_y(k);$$

$$F_1(k) = F_{1y}(k);$$

$$F_2(k) = F_{2y}(k);$$

$$k = 0;$$

**para**  $k \leq n$ ; **faça**

$$E(k+1) = \phi(1 - \frac{E(k)}{K})F_2(k) - \alpha_1 E(k) - \mu_E(k) - c_E E(k);$$

$$A(k+1) = \alpha_1 E(k) - \alpha_2 A(k) - \mu_A A(k) - c_A A(k);$$

$$M(k+1) = (1 - r)\alpha_2 A(k) - \mu_M M(k) - c_M M(k);$$

$$F_1(k+1) = r\alpha_2 A(k) - \alpha_3 M(k)F_1(k)\mu_{F_1} F_1(k) - c_{F_1} F_1(k);$$

$$F_2(k+1) = \alpha_3 M(k)F_1(k) - \mu_{F_2} F_2(k) - c_{F_2} F_2(k);$$

$$E_y(k+1) = E_y(k) + \frac{h}{6}(E(1) + 2(E(2) + E(3)) + E(4));$$

$$A_y(k+1) = A_y(k) + \frac{h}{6}(A(1) + 2(A(2) + A(3)) + A(4));$$

$$M_y(k+1) = M_y(k) + \frac{h}{6}(M(1) + 2(M(2) + M(3)) + M(4));$$

$$F_{1y}(k+1) = F_{1y}(k) + \frac{h}{6}(F_1(1) + 2(F_1(2) + F_1(3)) + F_1(4));$$

$$F_{2y}(k+1) = F_{2y}(k) + \frac{h}{6}(F_2(1) + 2(F_2(2) + F_2(3)) + F_2(4));$$

$$k = k + 1;$$

**fim**

**retorna**  $\{E_y(k+1), A_y(k+1), M_y(k+1), F_{1y}(k+1), F_{2y}(k+1)\}$ ;

**fim**

---

Como os parâmetros  $\Psi = \Pi(p) + \Xi(T)$ , dependem de  $p$  e  $T$ , e estes por sua vez, dependem do tempo  $t$ , os sistemas dinâmicos discutidos no [Capítulo 4](#) são não autônomos. Entretanto, os dados de  $p$  e  $T$  são atualizados apenas semanalmente de modo a constituir uma função constante por partes. Observando que o passo do método de integração Runge-Kutta é muito menor do que a semana, ao longo das quais  $p$  e  $T$  são contínuas, podemos entender que o modelo se comporta como uma sucessão de modelos autônomos, tal fato justifica nossa análise no capítulo anterior.

## 5.3 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

### 5.3.1 Critério de Routh-Hurwitz

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio não triviais dos modelos apresentados nas Seções 4.1 e 4.2 podem ser estudadas através do Critério de Routh-Hurwitz. Como todos os valores dos coeficientes do polinômio característico dependem de todos os parâmetros do sistema que, por sua vez, dependem da pluviosidade e temperatura, o cálculo analítico do critério tornou-se inviável. Sendo assim, optamos inicialmente por fazê-lo de forma numérica.

O Teorema 2.2.6 afirma que é suficiente e necessário que todos os coeficientes do polinômio característico e que todas as matrizes de Hurwitz sejam estritamente positivos para garantirmos a existência de raízes negativas ou raízes com parte real negativa. O teste numérico foi executado para todos os intervalos dos parâmetros de cada um dos modelos, assim como os determinantes das matrizes de Hurwitz (Teorema 2.2.6). Para verificação dos sinais representamos os determinantes de Hurwitz por:  $\Delta_1 = (a_1 a_2 - a_3)$ ,  $\Delta_2 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4$  e  $\Delta_3 = (a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) - a_5(a_1 a_2 - a_3)^2 - a_1 a_5^2$ .

Para o Modelo 1, no ponto de equilíbrio não trivial  $P_1$  (26), os testes numéricos por meio dos determinantes de Hurwitz indicaram que há coeficientes negativos no intervalo em estudo, 12 e 13.

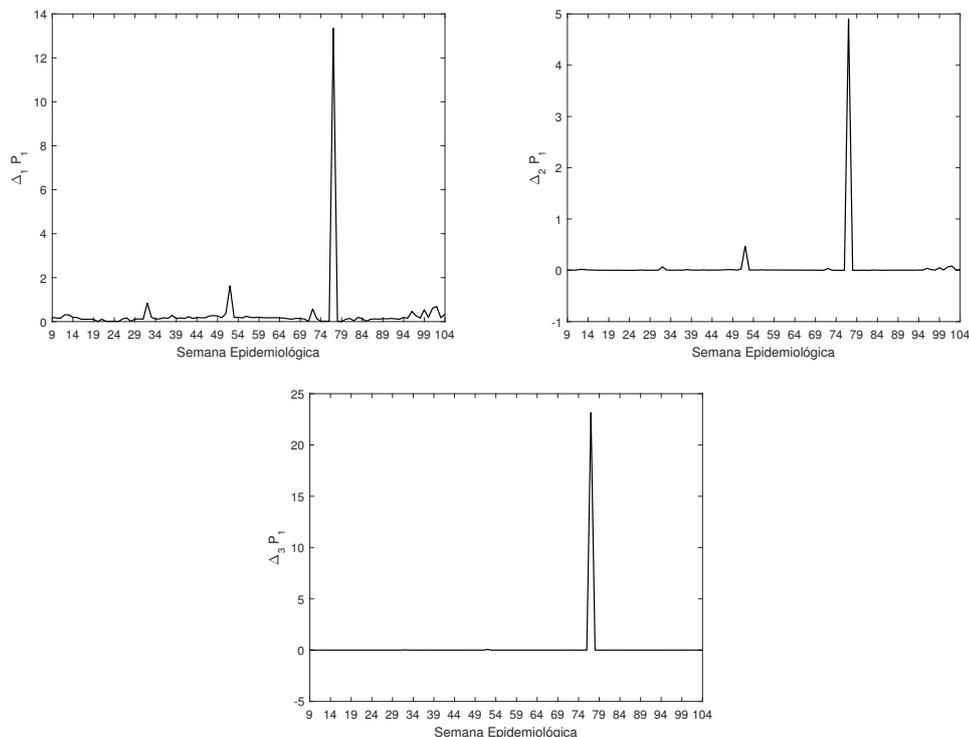


Figura 12 – Intervalo dos determinantes das matrizes de Hurwitz associado ao ponto de equilíbrio  $P_1$

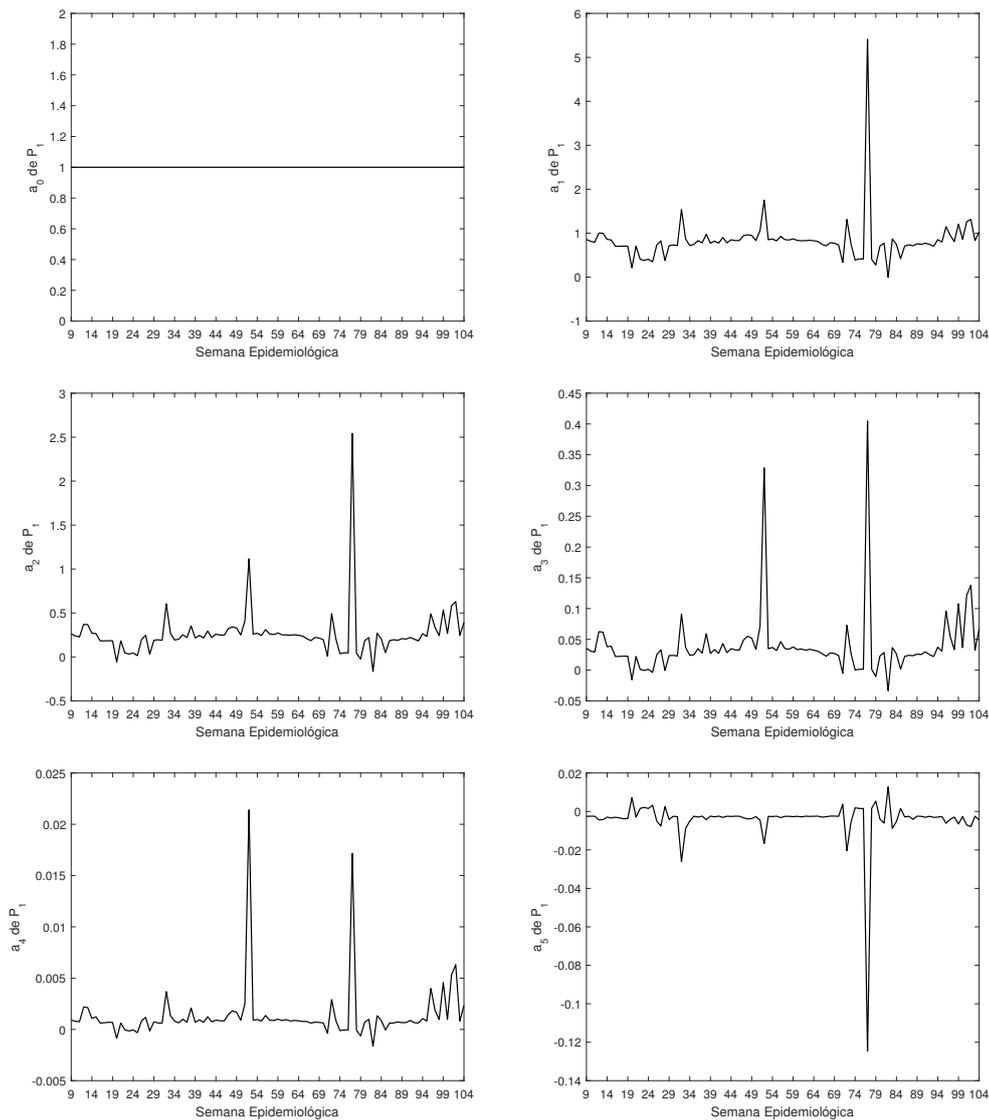


Figura 13 – Intervalo dos coeficientes do polinômio característico associado ao ponto de equilíbrio  $P_1$

De acordo com o Teorema 2.2.6, este ponto de equilíbrio não possui todas as raízes com partes reais negativas, ou seja, como o termo independente  $a_5$  é diferente de zero, não há tampouco raízes nulas. Assim, o polinômio possui raízes com parte real positiva que garante que  $P_1$  é instável.

Para o Modelo 2, ponto de equilíbrio não trivial  $P_1$  (32), observamos nas figuras 14 e 15 o comportamento dos coeficientes do polinômio característico e dos determinantes, respectivamente. Observamos que o coeficiente  $b_5$  é negativo, o que contradiz uma das condições do Teorema 2.2.6. Assim podemos afirmar que esse ponto de equilíbrio não possui raízes negativas, ou seja, é não estável.

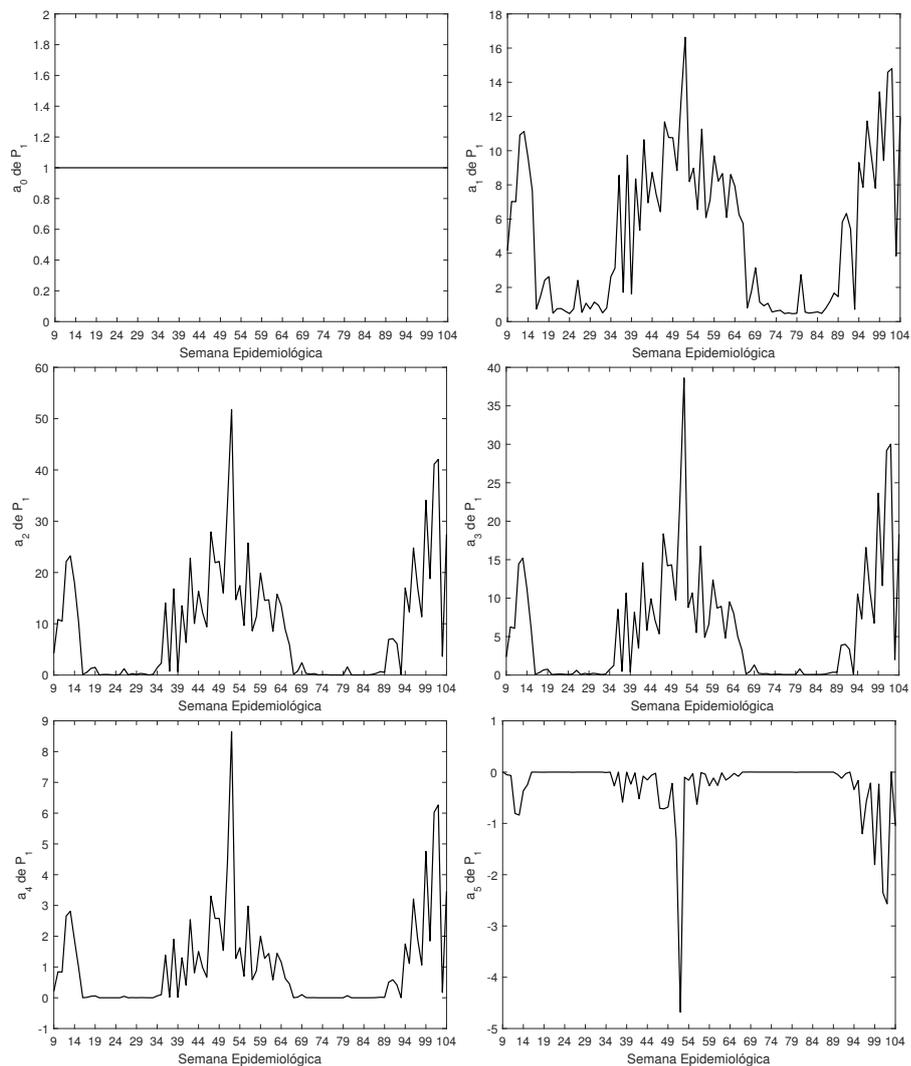


Figura 14 – Intervalo dos coeficientes do polinômio característico associado ao ponto de equilíbrio  $P_1$

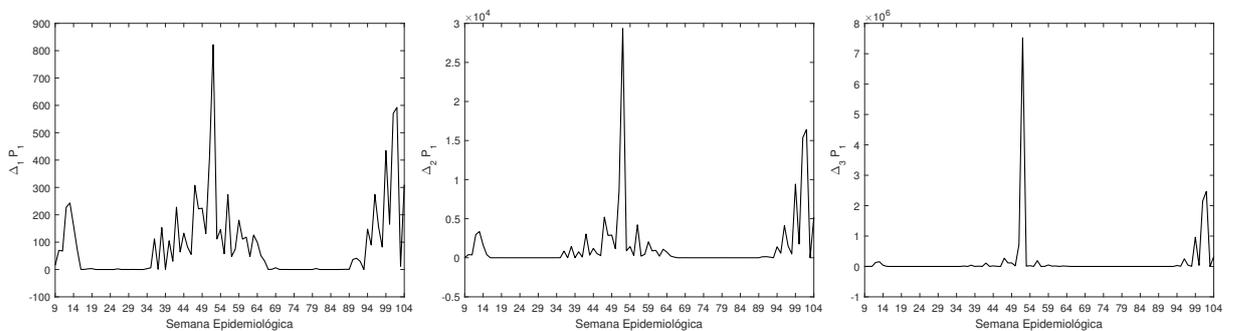


Figura 15 – Intervalo dos determinantes das matrizes de Hurwitz associado ao ponto de equilíbrio  $P_1$

Para o ponto de equilíbrio não trivial  $P_2$  (36), os sinais dos coeficientes do polinômio característico são positivos, Figura 16, e os determinantes das matrizes de Hurwitz também (Figura 17), ou seja, pelo critério de Routh-Hurwitz garantimos que os sinais das raízes do polinômio ou suas partes reais são negativas, assim podemos inferir que esse ponto de equilíbrio é estável.

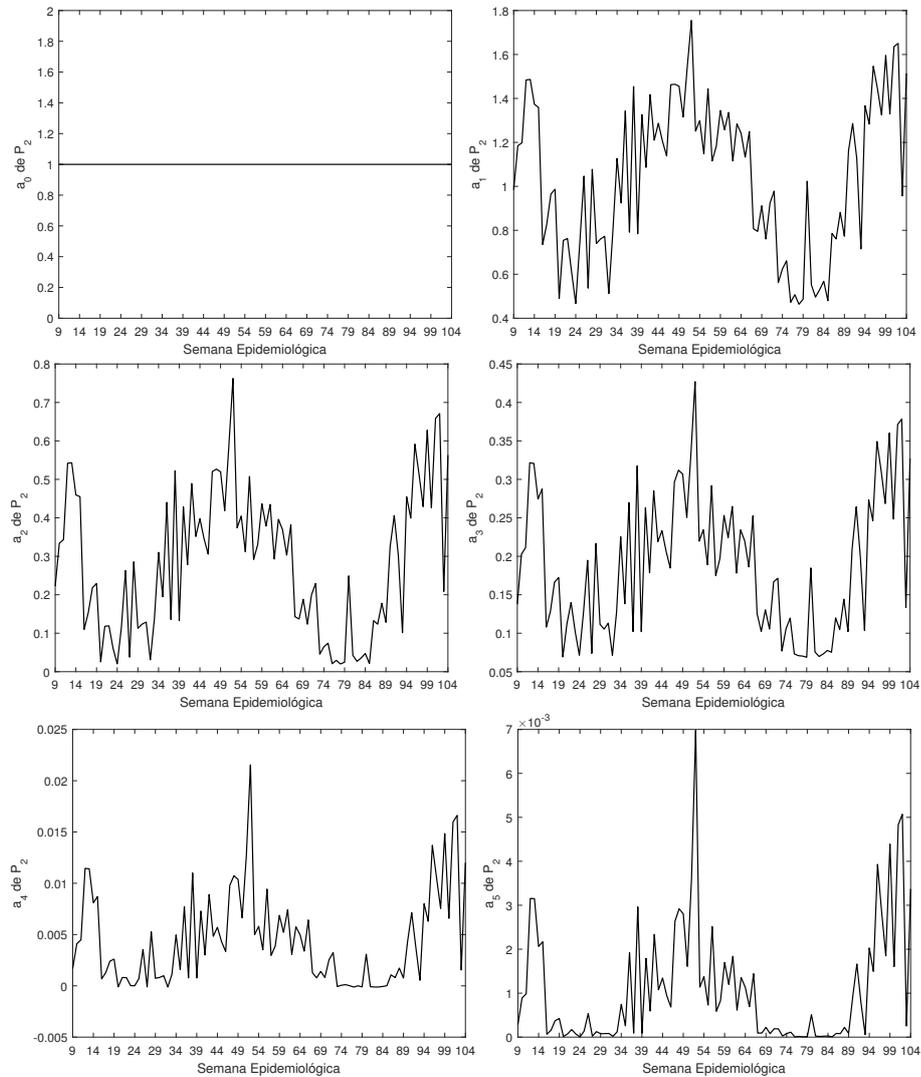


Figura 16 – Intervalo dos coeficientes do polinômio característico associado ao ponto de equilíbrio  $P_1$

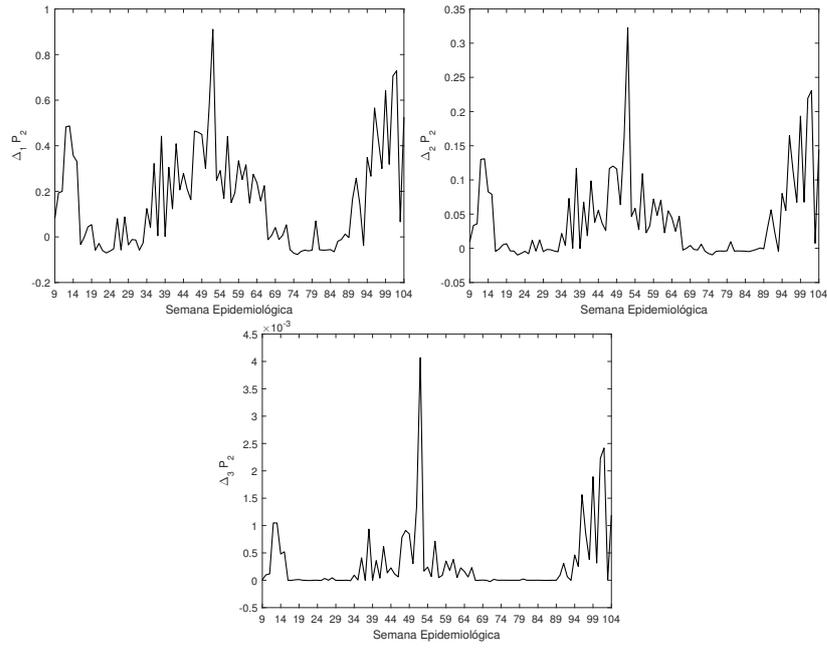


Figura 17 – Intervalo dos determinantes das matrizes de Hurwitz associado ao ponto de equilíbrio  $P_2$

# Capítulo 6

## Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados dos testes computacionais. A fim de verificar com que acurácia o modelo descreve o ciclo de vida do vetor, os valores da população de fêmeas do modelo serão confrontados com os dados experimentais do IMFA da cidade de Lavras (Minas Gerais, Brasil). Por fim, com intuito de aferirmos se houve melhoria nos resultados, será feita uma comparação entre o modelo proposto por este trabalho e o modelo descrito em [Cordeiro \(2015\)](#).

### 6.1 Validação dos Modelos

Os dados amostrais do IMFA, pluviosidade acumulada semanalmente e temperatura média semanal foram fornecidos entre as semanas 1 a 52 do ano dos anos de 2009 e 2010.

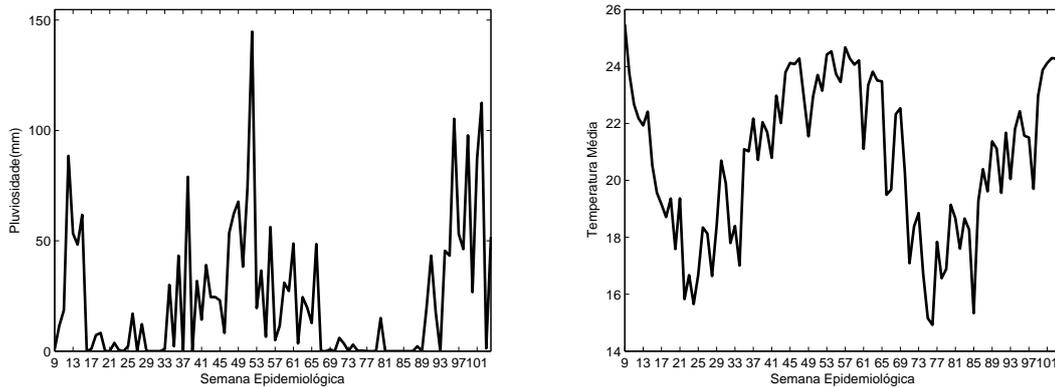
A simulação computacional e validação da população  $F_2$  foi realizada através de comparação com dados experimentais de IMFA e de acordo com número de fêmeas capturadas para a cidade de Lavras - MG, Brasil. A hipótese em que isso está baseado é a de que o IMFA é uma amostragem de  $F_2$ .

O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) nos forneceu os dados de temperatura e pluviosidade, as informações quanto ao IMFA foi concedido pela Ecovec SA.

#### 6.1.1 Lavras (Minas Gerais, Brasil)

Lavras está localizada na região sul de Minas Gerais, possui clima ameno com temperatura média anual de  $19,6^{\circ}C$ . A pluviosidade é presente ao longo do ano, mesmo nos meses mais secos.

A [Figura 18](#) apresenta os dados da temperatura média, pluviosidade acumulada semanalmente durante as semanas epidemiológicas 1 a 52 dos anos de 2009 e 2010.



(a) Dados de Pluviosidade acumulados semanalmente (b) Dados de Temperatura Média

Figura 18 – Séries temporais de dados meteorológicos para cidade de Lavras (Minas Gerais, Brasil) em semanas epidemiológicas iniciadas na semana 1 do ano de 2009 até a semana 52 do ano de 2010

Para a parametrização (4.3) da variável meteorológica pluviosidade foi usado  $s = 0.39$  para os parâmetros  $\phi$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\mu_A$ ,  $\mu_M$ ,  $\mu_{F_1}$  e  $\mu_{F_2}$ . Como este é o único parâmetro que não existem fatos biológicos para indica-lo optamos por fazer uma análise de sensibilidade que minimiza a função  $S^2$  representada a seguir:

$$S^2 = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (I_k - \lambda F_{2_{k-l}})^2$$

em que  $I_k$  é o IMFA na semana  $k$ ,  $l$  é o atraso determinado pela correlação cruzada,  $N$  é o número de semanas e  $\lambda$  é um fator de escala determinado de modo a minimizar  $S^2$ . Este fator de escala concilia a escala relativa do modelo com a amostra gerada pelas capturas. Após esta análise, obtemos o valor de  $s$  de forma empírica com o objetivo de obtermos o melhor resultado, ou seja, o menor valor de  $S^2$ .

Para os parâmetros que não variam com a pluviosidade,  $K$  e  $\mu_E$ , consideramos  $s = 0$ .

## 6.2 Análise de sensibilidade do parâmetro $s$

Para obtermos o melhor valor de  $s$  para descrever a dependência dos parâmetros do modelo com a pluviosidade, efetuamos um teste computacional variando os valores de  $s$  na execução do modelo a fim de buscar o mínimo da função  $S^2$ . Na Figura 19 é exibido o comportamento de  $S^2$  em função dos valores de  $s$ .

Observe que estamos interessados em valores de  $s$  para os quais a defasagem entre as os dados de IMFA e da população de fêmeas esteja entre 1 e 2, já que é este o valor esperado para o tempo entre a captura e o monitoramento das armadilhas. No entanto, o menor

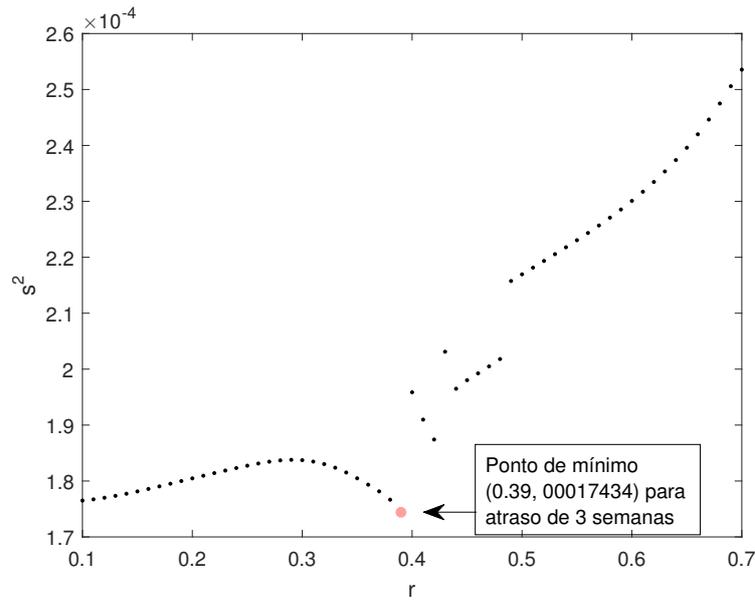


Figura 19 – Valores da função de correlação cruzada  $S^2$  versus o valor de  $s$  obtidos na simulação do Modelo

valor de  $S^2$  ocorreu para um atraso de 3 semanas, o que indica a necessidade de melhor acurácia do modelo.

A Figura 19 mostra o resultado deste estudo. Para valores de  $s > 0.48$  estão associados a uma defasagem de  $l = 0$  semanas; para valores de  $s = 0.43$  encontramos atraso de  $l = 1$  semana; os pontos do gráfico que estão associados a defasagem de  $l = 2$  semanas ocorre nos intervalos  $0.39 < s < 0.43$  e, se  $0.44 < s < 0.48$  e  $s < 0.39$  obtemos atraso de 3 semanas (Figura 20). Portanto, o valor de  $s$  foi escolhido como aquele que detém do menor valor de  $S^2$  na faixa de  $s$ , ou seja,  $s = 0.39$ .

Sendo assim, com a finalidade de aproximarmos os resultados do modelo com os dados de IMFA é feito um ajuste de curvas para melhor análise; esse ajuste é através de uma função de correlação cruzada,  $S^2$ , que minimiza a distância entre as curvas. Para o cálculo da correlação cruzada usamos a função *crosscorr* do software MATLAB® para correlacionar os dados amostrais de IMFA com a população de fêmeas pós-repasto sanguíneo obtida do modelo. E, buscando coincidir o maior número de picos entre as curvas foi aplicado um fator de escala  $\lambda$  em  $F_2(t)$  (após a correlação). Este fator de escala  $\lambda$  é dado por

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^N I_k F_{2_{k-l}}}{\sum_{k=1}^N (F_{2_{k-l}})^2} \quad (46)$$

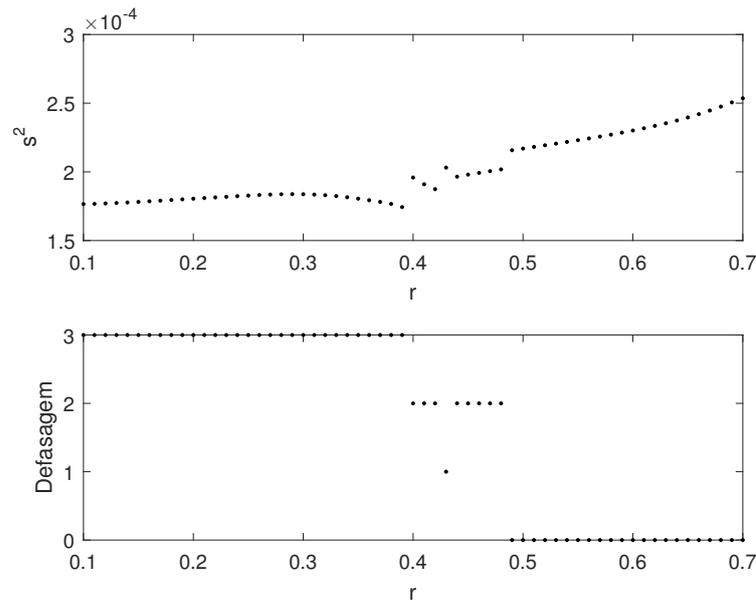


Figura 20 – Valores da função de correlação cruzada  $S^2$  e valores de  $s$  obtidos na simulação do Modelo

A função  $S^2$  obtido pelo Método dos Mínimos Quadrados é dada por:

$$S^2 = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (I_k - \lambda F_{2k-l})^2 \quad (47)$$

em que  $I_k$  é o IMFA na semana  $k$ ,  $N$  é o número de semanas e  $l$  é o atraso obtido pela correlação cruzada. Isso quer dizer, que quanto menor for o valor da função  $S^2$ , mais próximo estão as curvas.

## 6.2.1 Simulação do Modelo 1

Na comparação com dados experimentais de captura de fêmeas *Aedes*, o Modelo 1 (24), não apresentou bom comportamento durante a simulação (Figura 21). Como o ponto de equilíbrio não trivial é instável, o modelo não reproduziu bem os dados. Por este motivo concentraremos nossa análise no Modelo 2 (31).

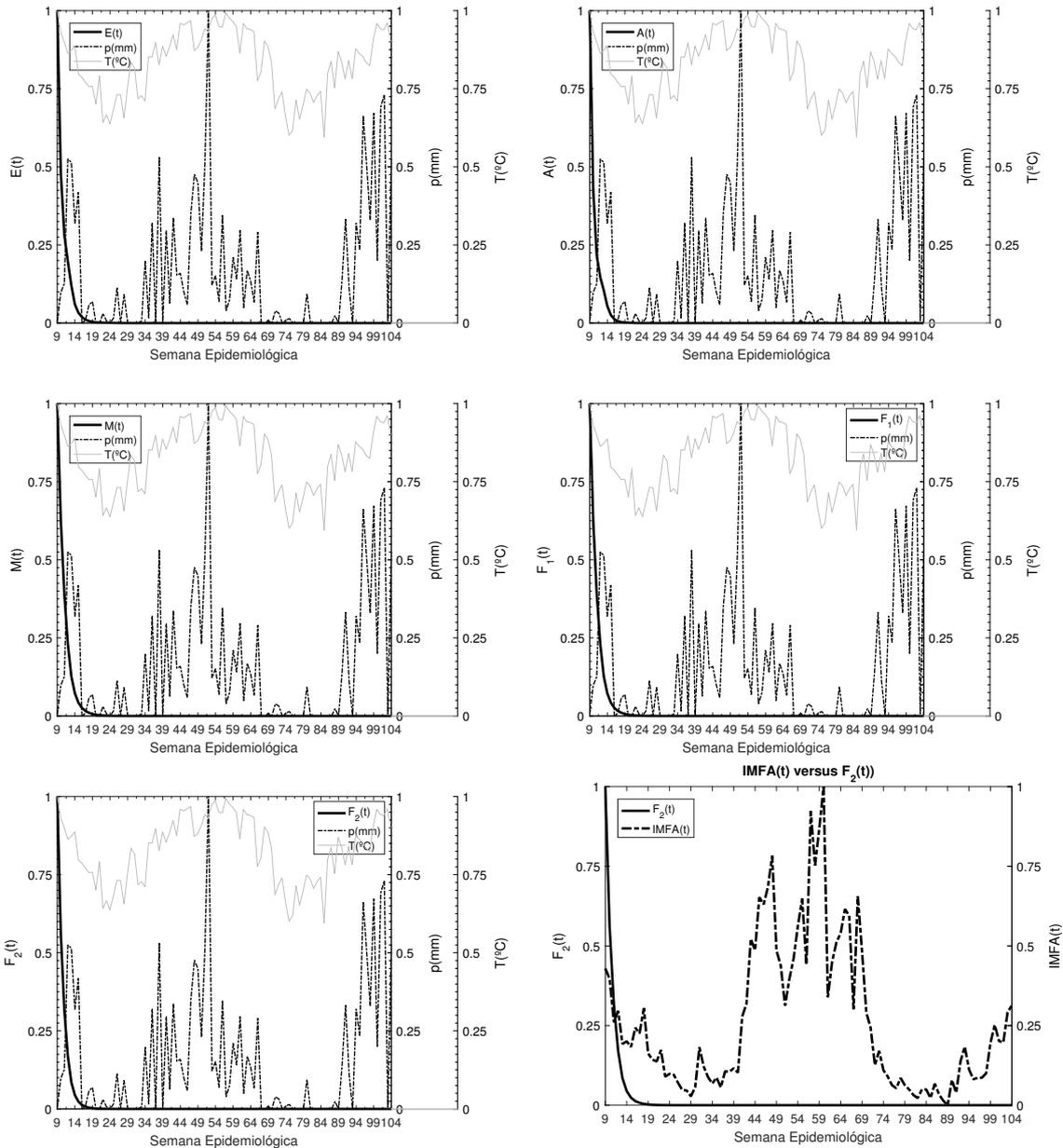


Figura 21 – Comportamento do Modelo 1 diante da variação de pluviosidade e temperatura para a cidade de Lavras (Minas Gerais, Brasil)

## 6.2.2 Simulação do Modelo 2

As dinâmicas das populações de Ovos  $E(t)$ , Aquática  $A(t)$ , Machos  $M(t)$ , Fêmeas pré-repasto sanguíneo  $F_1(t)$  e Fêmeas pós-repasto sanguíneo  $F_2(t)$  são descritas nas Figuras (22), (23), (24), (25) e (26), respectivamente; e para uma melhor análise, optamos por normalizar os dados.

Observa-se que a população de ovos  $E(t)$ , Figura 22, se manteve em alta durante as semanas 41 a 69, semanas que caracterizam a época de maior taxa de oviposição de fêmeas *Aedes aegypti* e houve queda na população durante os meses de baixa pluviosidade.

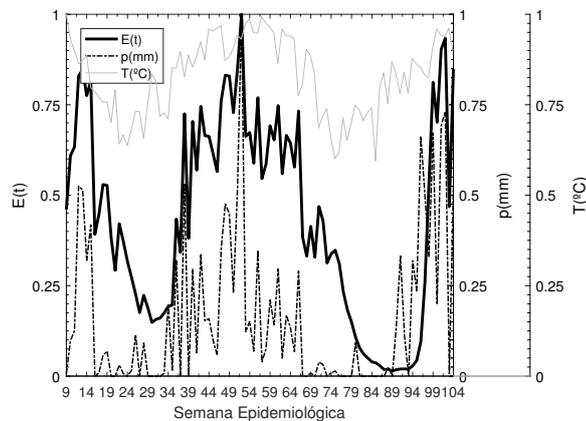


Figura 22 – Comportamento da População de Ovos  $E(t)$  do *Aedes aegypti* com os dados de temperatura e pluviosidade em Lavras (Minas Gerais, Brasil).

Já a população aquática,  $A(t)$  (Figura 23), há semelhança entre os picos de pluviosidade e os picos da população, apontando uma possível influência dos índices pluviométricos nesta fase do ciclo.

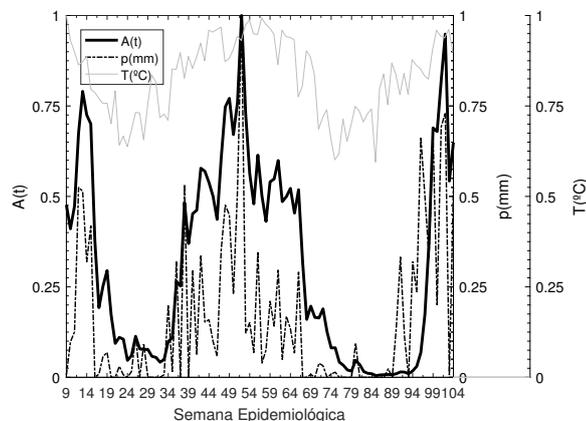


Figura 23 – Comportamento da População Aquática  $A(t)$  do *Aedes aegypti* com os dados de temperatura e pluviosidade em Lavras (Minas Gerais, Brasil) no período estudado.

A evolução da população  $M(t)$ , Figura 24, segue pouco os picos da variação de pluviosidade. Porém, durante as semanas 25 a 29 e 77 a 89 há uma queda na população, no mesmo período de escassez de chuvas; já a partir da semana 93, a população cresce na medida em que ocorrem mais chuvas.

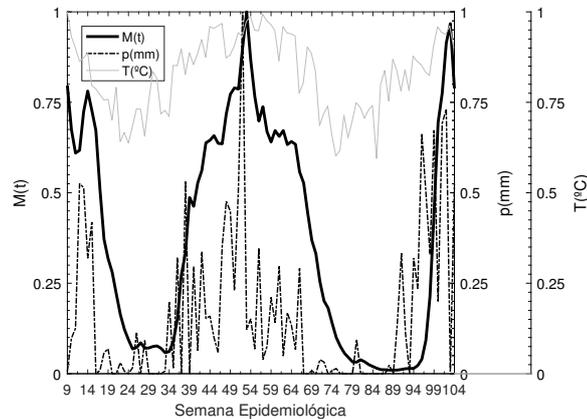


Figura 24 – Comportamento da População de Machos  $M(t)$  do *Aedes aegypti* com os dados de temperatura e pluviosidade em Lavras (Minas Gerais, Brasil) no período estudado.

O desempenho da população  $F_1(t)$  (Figura 25) nos picos de pluviosidade é semelhante em algumas semanas. Mesmo em épocas de escassez de chuva, a população continua em alta principalmente em elevadas temperaturas.

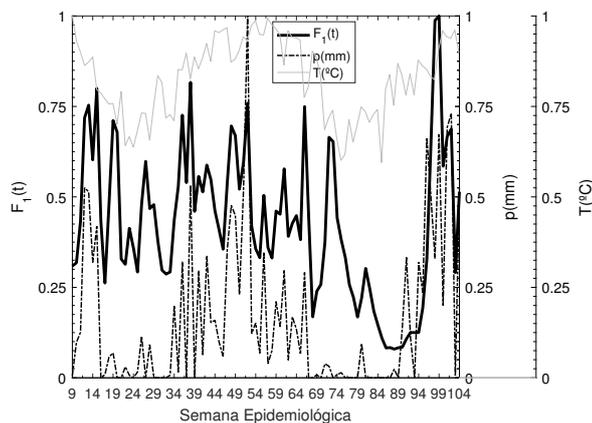


Figura 25 – Comportamento da População de Fêmeas pré-repasto sanguíneo  $F_1(t)$  do *Aedes aegypti* com os dados de temperatura e pluviosidade em Lavras (Minas Gerais, Brasil) no período estudado.

Na população  $F_2(t)$  (Figura 26) houve alto crescimento da população em períodos chuvosos e com altas temperaturas, acompanhando bem os picos. Quando há escassez de chuva, há um decréscimo da população.

A análise do Modelo 2 (31) deve ser concentrada na população  $F_2$ , fase de oviposição e consequentemente transmissão do vírus da dengue. Essa análise tem como propósito

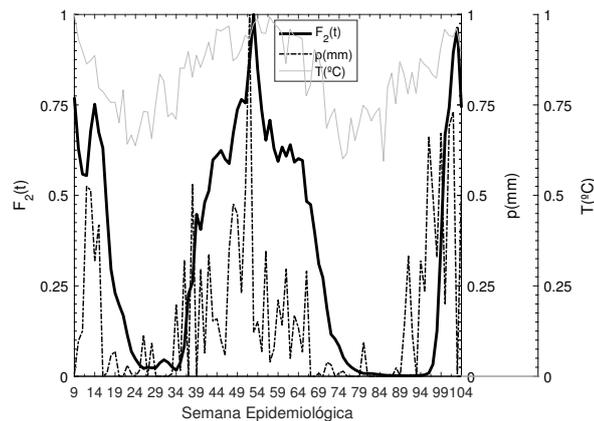


Figura 26 – Comportamento da População de Fêmeas pós-repasto sanguíneo  $F_2(t)$  do *Aedes aegypti* com os dados de temperatura e pluviosidade em Lavras (Minas Gerais, Brasil) no período estudado.

avaliar a interferência das variáveis meteorológicas (temperatura e pluviosidade) no comportamento do modelo, ou seja, devemos avaliar  $F_2$  com os dados do IMFA da cidade estudada (Figura 27). Observe que existe semelhança em alguns dos picos dos dados de IMFA e a população  $F_2(t)$  descrita no modelo, principalmente durante as semanas de alto índice de capturas de fêmeas *Aedes aegypti*.

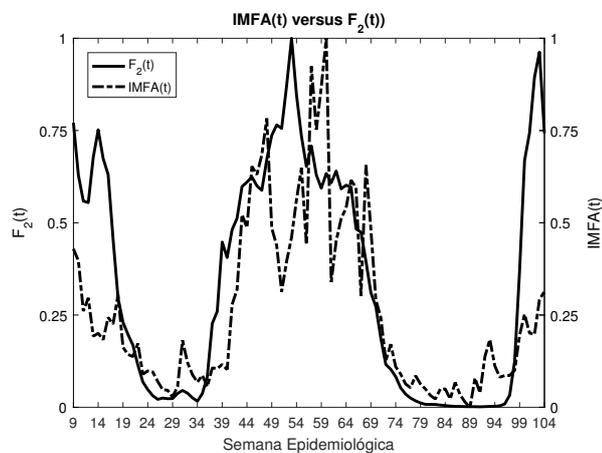


Figura 27 – Comparação entre os dados da população  $F_2(t)$  obtidos na simulação do modelo, 31, com dados reais do Índice Médio de Fêmeas *Aedes* -IMFA da cidade de Lavras - MG, no ano de 2009

### 6.2.3 Discussão de Resultados

O comportamento descrito pelo modelo em todas as populações indica que existe grande influência das condições climáticas, pluviosidade e temperatura, nas fases do ciclo de vida do *Aedes aegypti*. A população de Ovos, Figura 22, em temperaturas entre  $15$  e  $25^{\circ}C$ , com índices de chuva em alta constitui como condição favorável para proliferação do vetor (FERREIRA; YANG, 2003b). Neste modelo, notamos que existe uma dependência entre

o aumento de pluviosidade e o aumento de temperatura com a evolução da população. O desempenho da população Aquática (larva e pupa) (Figura 23) pode indicar que a densidade dos vetores nessa fase do ciclo de vida eleva-se nas estações de maior pluviosidade, o que predispõe ao aumento de incidência de dengue como verificado por Souza, Silva e Silva (2010) no estado de Góias, Brasil. O comportamento das populações  $M(t)$  e  $F_1(t)$  sofreram influências com a variação de temperatura e pluviosidade, evidenciando que o encontro dessas populações imposto pelo sistema dinâmico também pode variar de acordo com as condições do meio.

A comparação entre a população  $F_2(t)$  e o IMFA da cidade (Figura 27) pode ser compreendida como a validação do modelo, já que indica o quão próximo da realidade é o modelo. Essa comparação é feita apenas de forma qualitativa, uma vez que os dados do IMFA podem sofrer alterações climáticas e humanas durante o fenômeno de captura.

Após aplicarmos a correlação cruzada a fim de obter o grau e similaridade entre as curvas, obtemos a Figura 28. A análise da imagem indica que os picos do modelo se assemelham aos picos do IMFA no período estudado, sugerindo que o modelo descreve bem a dinâmica populacional, principalmente nas estações de maior incidência de fêmeas *Aedes*. Além disso, o valor de  $S^2$  encontrado foi  $1.7434 \times 10^{-4}$ , com atraso de três semanas em relação ao cálculo do IMFA.

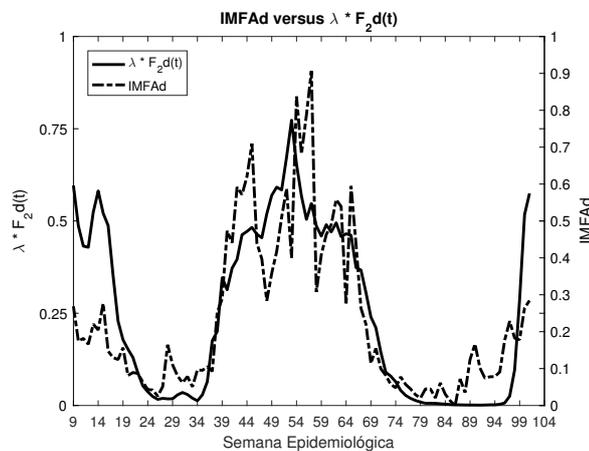


Figura 28 – Comparação entre os dados da população  $F_2(t)$  após a correlação cruzada dada por  $\lambda F_{2k-l}$  obtidos na simulação do modelo através de um ajuste com dados reais do Índice Médio de Fêmeas *Aedes* -IMFA da cidade de Lavras - MG, no ano de 2009

Na Figura 29 é exibido o gráfico de correlação cruzada (16) entre a população de fêmeas  $F_2$  do modelo e a amostragem de capturas de fêmeas, IMFA, usando a função *crosscorr* do software MATLAB® versão R2012a.

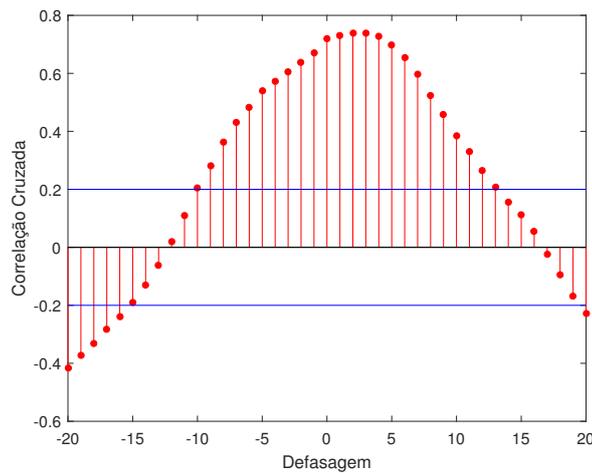


Figura 29 – Correlação Cruzada entre a população  $F_2(t)$  gerada pelo Modelo 2 e a amostra de captura IMFA para a cidade de Lavras. A intensidade da correlação é muito forte, pois  $M = 0,7398$  com  $\lambda = 4,0734 \times 10^{-4}$  e com atraso de 3 semanas.

### 6.3 Comparação entre Modelos

Nesta seção faremos uma comparação entre o modelo apresentado neste trabalho e o modelo descrito por [Cordeiro \(2015\)](#). Através da comparação podemos afirmar se houve ou não melhora nos resultados.

Na [Figura 30](#) é exibido o comportamento do modelo descrito por [Cordeiro \(2015\)](#) confrontado com o desempenho do modelo apresentado neste trabalho com a correlação cruzada. A análise é feita de forma qualitativa, verificando onde houve coincidências entre os picos determinados pelo modelo. Observando o desempenho da população  $F_2(t)$  do trabalho de [Cordeiro \(2015\)](#) notamos que há semelhança entre os picos durante o verão, entre as semanas 37 a 59, período em que houve maior captura de fêmeas *Aedes aegypti*. Nos extremos do intervalo do tempo observado, a população  $F_2(t)$  do modelo de [Cordeiro \(2015\)](#) obteve maior crescimento do que os dados reais de IMFA. Já o Modelo apresentado neste trabalho, não acompanhou os picos durante o inverno, semanas em que o índice de Fêmeas capturadas é menor. Porém, o modelo acompanhou melhor os altos picos de IMFA.

A função determinada pelo Método dos Mínimos Quadrados para o modelo, obteve como resultado do  $S^2 = 1.7434 \cdot 10^{-4}$  com 3 semanas de atraso e  $s = 0.39$ . O modelo de [Cordeiro \(2015\)](#) obteve 4 semanas de atraso médio e  $S^2 = 1,03332 \times 10^{-2}$  e  $s = 0.7$ . Na [Figura 31](#) é exibido o gráfico de correlação cruzada entre a população de fêmeas do modelo de [Cordeiro \(2015\)](#) e a amostragem de capturas de fêmeas, IMFA.

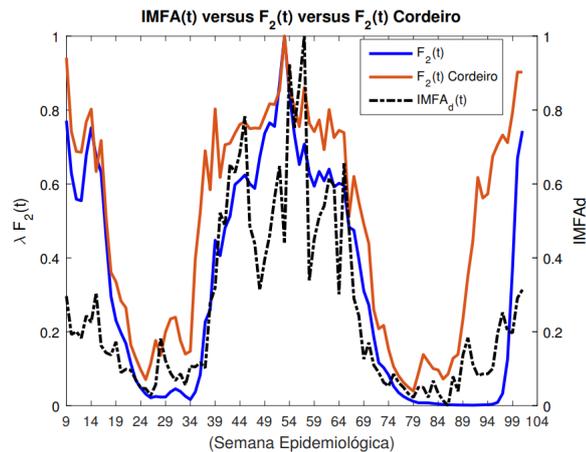


Figura 30 – Comparação entre os dados de  $F_2(t)$  determinados por Cordeiro (2015) e os dados teóricos de  $F_2$  obtidos por este trabalho, ambos com a correlação cruzada

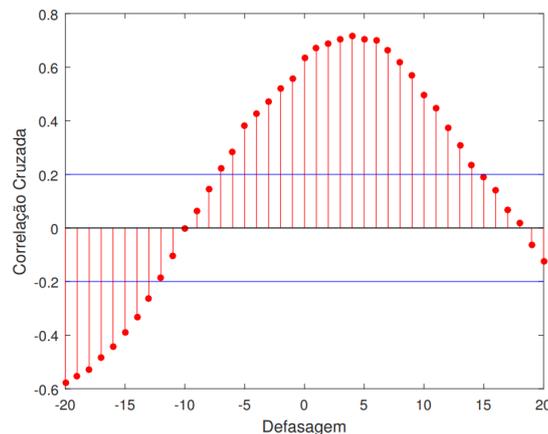


Figura 31 – Correlação Cruzada entre a população  $F_2(t)$  gerada pelo modelo Cordeiro (2015) e IMFA para a cidade de Lavras. A intensidade de correlação entre as séries é  $M = 0,71605$  para  $\lambda = 0,22121$  com 4 semanas de defasagem.

### 6.3.1 Testes em outras cidades

Nesta seção é apresentado os testes do modelo para as cidades de Caratinga e Sete Lagoas. Apresentaremos somente a comparação da população  $F_2$  com os dados de IMFA, usando os mesmos valores para os parâmetros do modelo. Para a cidade de Caratinga (Figura 32) observa-se que o modelo acompanha bem os picos de IMFA, principalmente nas semanas de maior captura.

Na Figura 33 é exibido o gráfico de correlação cruzada entre a população de fêmeas do modelo e a amostragem de capturas de fêmeas, IMFA.

O modelo indicou  $S^2 = 1,23874311 \times 10^{-3}$  como menor valor de  $S^2$  para  $s = 0, 1$  e 5 semanas de atraso.

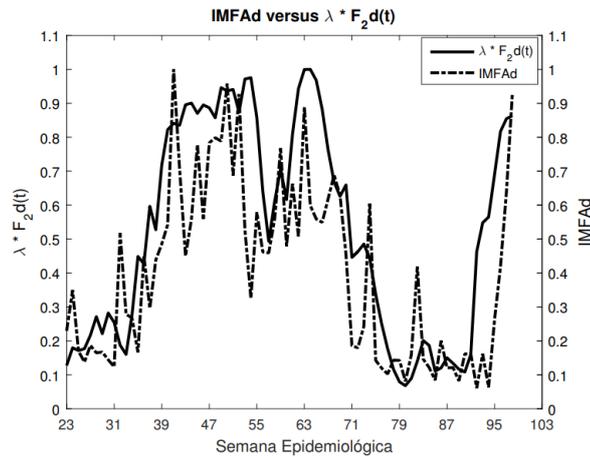


Figura 32 – Comparação entre os dados da população  $F_2(t)$  obtidos na simulação do modelo através de um ajuste com dados reais do Índice Médio de Fêmeas *Aedes* - IMFA da cidade de Caratinga - MG, no ano de 2009.

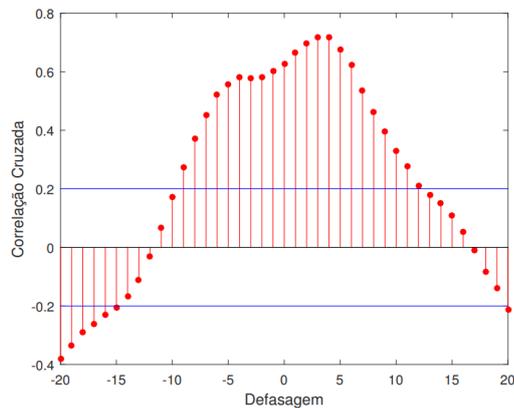


Figura 33 – Correlação Cruzada entre a população  $F_2(t)$  gerada pelo modelo e IMFA para a cidade de Caratinga. Para estes dados a intensidade das correlações é  $M = 0,7404$  para  $\lambda = 1,2062 \times 10^{-4}$  com 5 semanas de atraso.

Já na cidade de Sete Lagoas (Figura 34) o modelo também obteve o comportamento esperado, com elevações e diminuições da população de forma consistente. Na Figura 35 é exibido o gráfico de correlação cruzada ente a população de fêmeas do modelo e a amostragem de fêmeas *Aedes* dada pelo IMFA. O menor valor de  $S^2$  ocorre quando  $s = 0,4$  e é dado por  $S^2 = 3,10916877 \times 10^{-3}$ .

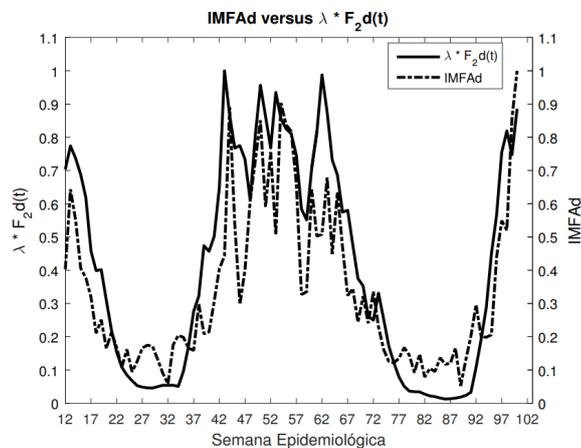


Figura 34 – Comparação entre os dados da população  $F_2(t)$  obtidos na simulação do modelo através de um ajuste com dados reais do Índice Médio de Fêmeas *Aedes* - IMFAd da cidade de Sete Lagoas - MG, no ano de 2009.

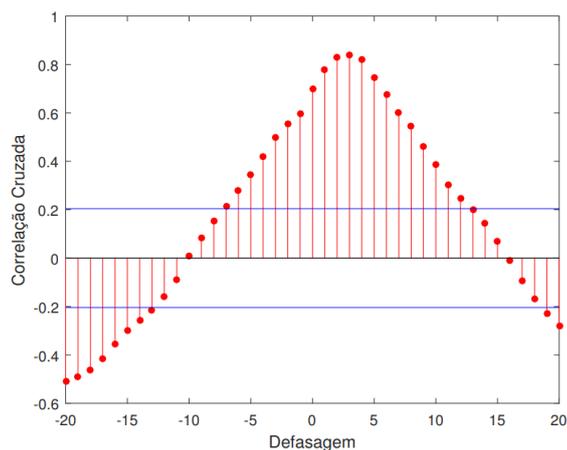


Figura 35 – Correlação Cruzada entre a população  $F_2(t)$  gerada pelo modelo e IMFAd para a cidade de Sete Lagoas. O nível de intensidade também é muito forte, com  $M = 0,8395$  para  $\lambda = 3,2906 \times 10^{-4}$  com 3 semanas de atraso.

# Capítulo 7

## Conclusão

Neste trabalho apresentamos um modelo matemático com objetivo de descrever a dinâmica populacional do vetor *Aedes aegypti*. Através de simulação numérica, os resultados foram comparados com dados amostrais da cidade de Lavras, MG, evidenciando que o modelo tem comportamento semelhante ao esperado para as fases do ciclo de vida do vetor. No entanto, a análise feita até o momento, nos sugere uma otimização nos dados dos parâmetros, afim de obtermos um comportamento melhor do modelo.

Por se tratar de sistema dinâmico não linear com cinco equações diferenciais, ressaltamos a complexidade em sua resolução algébrica. A determinação dos pontos de equilíbrio e os respectivos polinômios característicos nos mostraram o quão se tornou inviável a análise de estabilidade do sistema por meio de manipulações algébricas. A definição da estabilidade dos pontos de equilíbrio pelo sinal dos autovalores, calculados numericamente, se mostrou mais vantajosa do que a análise computacional da tabela de Routh-Hurwitz.

A presença do fator de natureza logística  $(1 - \frac{E}{K})$  é fundamental para bom comportamento do modelo e a comparação feita na [Seção 6.3](#) destaca que a inserção da população de machos,  $M(t)$ , no modelo de [Cordeiro \(2015\)](#), obteve uma melhora quantitativa de 98,4% na soma dos quadrados da diferença do valor de  $S^2$  confrontados com os dados de IMFA para a cidade de Lavras. Seu desempenho para as cidades de Caratinga e Sete Lagoas se mostrou qualitativamente aceitável se considerada a complexidade do problema. Este fato é quantitativamente confirmado pela significância dos testes de correlação cruzada. Entretanto, pode não ser indicado o uso do modelo em função da complexidade algébrica introduzida pelo aumento de quatro para cinco populações. De fato, o modelo inclui muitos parâmetros e, com exceção do expoente  $s$  que é obtido via estudo de sensibilidade, eles possuem forte plausibilidade biológica. Contudo é sempre indicado abordar o fenômeno com o menor número possível.

Através da análise dos resultados também foi constatado que o crescimento das populações relativas às fases de vida do *Aedes aegypti* sofre dependência maior com os dados de pluviosidade do que com os dados de temperatura. Desta maneira, a principal contribuição deste trabalho para a área, consiste em nortear os programas de controle do vetor, minimizando os casos dengue e os gastos com saúde pública.

Como trabalhos futuros pode ser feito um estudo dos parâmetros do modelo, por meio de otimização, a fim de definir por exemplo, a melhor estação para controle da população do vetor. A inserção da umidade relativa do ar também pode contribuir para melhores resultados.

# Referências

AJUZ, L. C.; VESTENA, L. R. Influência da Pluviosidade e Temperatura ambiente na longevidade e fecundidade dos *Aedes aegypti* e *albopictus* na cidade de Guarapuava - PR e possibilidade de superinfestação. **Hygeia: Revista Brasileira de Geografia Médica e da Saúde**, Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Geografia, Grupo de Trabalho de Geografia da Saúde, v. 10, n. 18, p. 1, 2014. Citado na página 2.

ALLEN, L. J. **An Introduction to Mathematical Biology**. [S.l.]: Pearson Education, 2007. Citado na página 23.

BARRETO, M. L.; TEIXEIRA, M. G. Dengue no Brasil: situação epidemiológica e contribuições para uma agenda de pesquisa. **Estudos avançados**, v. 22, n. 64, p. 53–72, 2008. Citado na página 7.

BARSANTE, L. S. **Dependência entre pluviosidade e população de fêmeas *Aedes aegypti* grávidas descritas através de um sistema dinâmico não linear**. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET-MG, Belo Horizonte, Brasil, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 33, 34, 36 e 49.

BARSANTE, L. S.; CORDEIRO, F. S.; CARDOSO, R. T. N.; ACEBAL, J. L.; PAIXÃO, K. S.; EIRAS, A. E. Controle da dengue na estação seca da cidade de Curvelo-mg através de um modelo preditivo. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 3, n. 1, 2015. Citado na página 3.

BESERRA, E.; JR, F. P. C.; SANTOS, J. W.; SANTOS, T. S.; FERNANDES, C. Biologia e exigências térmicas de *Aedes aegypti* (L.) (diptera: Culicidae) provenientes de quatro regiões bioclimáticas da Paraíba. **Neotropical Entomology**, SciELO Brasil, v. 35, p. 853–860, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

BESERRA, E. B.; FERNANDES, C. R. M.; SILVA, S. A. d. O.; SILVA, L. A. d.; SANTOS, J. W. d. Efeitos da temperatura no ciclo de vida, exigências térmicas e estimativas do número de gerações anuais de *Aedes aegypti* (diptera, culicidae). **Iheringia Série Zool**, SciELO Brasil, v. 99, p. 142–148, 2009. Citado na página 15.

BLANCA, M. de B. *Aedes aegypti*. In: . [s.n.], 2013. Disponível em: <<http://www.bahiablanca.gov.ar/equipos-de-trabajo/medio-ambiente/saneamiento-ambiental/aedes-aegypti/>>. Acesso em: 13 de abr. 2015. Citado na página 10.

BOYCE, E. W.; DIPRIMA, C. R. **Equações Diferenciais Elementares**. 9. ed. [S.l.]: LTC Editora. Rio de Janeiro, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 18 e 19.

BRAGA, I. A.; VALLE, D. *Aedes aegypti*: vigilância, monitoramento da resistência e alternativas de controle no Brasil. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, Coordenação-Geral de Desenvolvimento da Epidemiologia em Serviços/Secretaria de Vigilância em Saúde/Ministério da Saúde, v. 16, n. 4, p. 295–302, 2007. Citado na página 12.

BRAGA, I. A.; VALLE, D. *Aedes aegypti*: histórico do controle no Brasil. **Epidemiologia e serviços de saúde**, Coordenação-Geral de Desenvolvimento da Epidemiologia em

Serviços/Secretaria de Vigilância em Saúde/Ministério da Saúde, v. 16, n. 2, p. 113–118, 2007. Citado na página 6.

CÂMARA, F. P.; THEOPHILO, R. L. G.; SANTOS, G. T. d.; PEREIRA, S. R. F. G.; CÂMARA, D. C. P.; MATOS, R. R. C. d. Estudo retrospectivo (histórico) da dengue no Brasil: características regionais e dinâmicas. **Revista da Sociedade Brasileira de Medicina Tropical**, SciELO Brasil, v. 40, p. 192–196, 2007. Citado na página 6.

CAMPOS, F. F. **Algoritmos numéricos**. [S.l.]: LTC, 2007. Citado na página 24.

CONDINO, M. L. F. Associação entre Incidência de Dengue e Variáveis Climáticas. **Rev Saúde Pública**, SciELO Public Health, v. 40, n. 4, p. 671–6, 2006. Citado na página 15.

CONFALONIERI, U.; MENNE, B.; AKHTAR, R.; EBI, K. L.; HAUENGUE, M.; KOVATS, R. S.; REVICH, B.; WOODWARD, A. J. Human health. **Climate Change 2007: Impacts, Adaptation and Vulnerability. Contribution of Working Group II to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change**, Cambridge University Press, p. 391–431, 2007. Citado na página 2.

CORDEIRO, F. d. S. **Modelo Preditivo para a População de Mosquitos *Aedes aegypti* sob influência de variáveis climáticas: Temperatura e Pluviosidade**. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET-MG. Belo Horizonte, Brasil, 2015. Citado 14 vezes nas páginas ix, 3, 4, 5, 16, 28, 34, 36, 48, 49, 58, 67, 68 e 71.

CORDEIRO, F. S.; BARSANTE, L. S.; ACEBAL, J. L. Modelo preditivo com efeito de fatores e eficiência do controle na dinâmica populacional do *Aedes aegypti*. **IV Encontro Ciência e Tecnologia de Materiais; III Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional**, 2013. Citado na página 3.

COSTA, E. A. P. d. A.; SANTOS, E. M. d. M.; CORREIA, J. C.; ALBUQUERQUE, C. M. R. d. Impact of small variations in temperature and humidity on the reproductive activity and survival of *Aedes aegypti* (diptera, culicidae). **Revista Brasileira de Entomologia**, SciELO Brasil, v. 54, n. 3, p. 488–493, 2010. Citado na página 15.

CRUZ, I. O. Dengue: Vírus e vetor. In: . [s.n.], 2010. Disponível em: <<http://www.ioc.fiocruz.br/dengue/textos/sobreovirus.html>>. Acesso em: 21 de mar. 2015. Citado na página 11.

CRUZ, I. O. Instituto Oswaldo Cruz lança videoaulas sobre o *Aedes aegypti*. In: . [s.n.], 2013. Disponível em: <<http://www.fiocruz.br/ioc/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?inford=1785&sid=32>>. Acesso em: 22 de mai. 2015. Citado na página 11.

DANCEY, C. P.; REIDY, J. **Statistics without Maths for Psychology: using SPSS for Windows**. [S.l.]: Prentice Hall, 2004. Citado na página 27.

DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, J. A. P.; METZ, J. A. J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $r_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous populations. **Journal of mathematical biology**, Springer, v. 28, n. 4, p. 365–382, 1990. Citado na página 39.

DONALÍSIO, M. R.; GLASSER, C. M. Vigilância entomológica e controle de vetores do dengue. **Rev. Bras. Epidemiol**, v. 5, n. 3, p. 259–272, 2002. Citado na página 1.

- DUFOURD, C.; DUMONT, Y. Impact of environmental factors on mosquito dispersal in the prospect of sterile insect technique control. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 66, n. 9, p. 1695–1715, 2013. Citado na página 34.
- DUTILLEUL, P.; CLIFFORD, P.; RICHARDSON, S.; HEMON, D. Modifying the t test for assessing the correlation between two spatial processes. **Biometrics**, JSTOR, p. 305–314, 1993. Citado na página 27.
- ECOVEC. Mi dengue. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <[Http://www.ecovec.com/midengue.php](http://www.ecovec.com/midengue.php)>. Acesso em: 11 de mar. 2015. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 15.
- EIRAS, A. E.; RESENDE, M. C. Preliminary evaluation of the "dengue-mi" technology for aedes aegypti monitoring and control. **Cadernos de Saúde Pública**, SciELO Brasil, v. 25, p. S45–S58, 2009. Citado na página 12.
- EIRAS, A. E.; RESENDE, M. C. Preliminary evaluation of the "dengue-mi" technology for aedes aegypti monitoring and control. **Cadernos de Saúde Pública**, SciELO Brasil, v. 25, p. S45–S58, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- ESTEVA, L.; YANG, H. M. Mathematical model to assess the control of aedes aegypti mosquitoes by the sterile insect technique. **Mathematical biosciences**, Elsevier, v. 198, n. 2, p. 132–147, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 31.
- FERREIRA, C. P.; PINHO, S. T. R.; ESTEVA, L.; BARRETO, F. R.; SILVA, V. C. M. e; TEIXEIRA, M. G. L. Modelling the dynamics of dengue real epidemics. *Sociedade Brasileira de Matematica Aplicada e Computacional*, v. 3, p. 89–98, 2010. Citado na página 32.
- FERREIRA, C. P.; YANG, H. M. Estudo da transmissão da dengue entre os indivíduos em interação com a população de mosquitos *Aedes aegypti*. **Trends in Applied and Computational Mathematics**, v. 4, n. 3, p. 323–332, 2003. Citado na página 49.
- FERREIRA, C. P.; YANG, H. M. Estudo dinâmico da população de mosquitos *Aedes Aegypti*. **Trends in Applied and Computational Mathematics**, v. 4, n. 2, p. 187–196, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 65.
- FORATTINI, O. P. **Culicidologia médica: Identificação, biologia, epidemiologia**. [S.l.: s.n.], 2002. Citado na página 2.
- FUNDAÇÃO NACIONAL DE SAÚDE. **Dengue, Instruções para Pessoal de Combate ao Vetor: Manual de Normas Técnicas**. [S.l.], 2001. Citado 4 vezes nas páginas 9, 10, 11 e 12.
- GLASSERA, C. M.; GOMES, A. d. C. Clima e sobreposição da distribuição de *Aedes aegypti* e *Aedes albopictus* na infestação do Estado de São Paulo. **Rev Saúde Pública**, SciELO Brasil, v. 36, n. 2, p. 166–72, 2002. Citado na página 16.
- GOMES, A. F. **Análise espacial e temporal da relação entre dengue e variáveis meteorológicas na cidade do Rio de Janeiro no período de 2001 a 2009**. Dissertação (Mestrado) — Escola Nacional de Saúde Pública Sergio Arouca, 2011. Citado na página 6.
- GUBLER, D. J. Dengue. In: MONATH, T. P. (Ed.). **The arboviruses: Epidemiology and Ecology**. [S.l.]: CRC, 1986. II, p. 213. Citado na página 49.

HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos**. [S.l.]: Academic press, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 21.

HURWITZ, A. On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts. **Selected papers on mathematical trends in control theory**, Dover New York, v. 65, p. 273–284, 1964. Citado na página 23.

KNIPLING, E. F. Sterile insect technique as a screwworm control measure: the concept and its development. **Symposium on eradication of the screwworm from the United States and Mexico. Misc. Pub. Entomol. Soc. Am**, v. 62, p. 4–7, 1985. Citado na página 12.

LAMBRECHTS, L.; PAAIJMANS, K. P.; FANSIRI, T.; CARRINGTON, L. B.; KRAMER, L. D.; THOMAS, M. B.; SCOTT, T. W. Impact of daily temperature fluctuations on dengue virus transmission by *Aedes aegypti*. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 108, n. 18, p. 7460–7465, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

LANA, R. M.; CARNEIRO, T. G. S.; HONÓRIO, N. A.; CODECO, C. T. Seasonal and nonseasonal dynamics of *Aedes aegypti* in rio de janeiro, brazil: Fitting mathematical models to trap data. **Acta tropica**, Elsevier, v. 129, p. 25–32, 2014. Citado na página 49.

LOPEZ, L. F.; COUTINHO, F. A. B.; BURATTINI, M. N.; MASSAD, E. Threshold conditions for infection persistence in complex host-vectors interactions. **Comptes rendus biologies**, Elsevier, v. 325, n. 11, p. 1073–1084, 2002. Citado na página 39.

LOZOVEI, A.; MARCONDES, C. B. **Entomologia Médica e Veterinária**. Rio de Janeiro: Editora Atheneu, 2001. 1142 p. Citado na página 9.

MAGALHÃES, G. B.; ZANELLA, M. E. Comportamento espacial da dengue e sua relação com o clima na região metropolitana de Fortaleza. **Revista Brasileira de Climatologia**, v. 12, n. 1, p. 114–135, 2013. Citado na página 16.

MARTINS, V. P.; SILVEIRA, D. A.; RAMALHO, I. L.; GUEDES, M. I. F. *Aedes albopictus* no Brasil: aspectos ecológicos e riscos de transmissão da dengue. **Entomotropical**, v. 28, n. 2, p. 75–86, 2013. Citado na página 9.

MASSAD, E.; COUTINHO, F. A. B.; BURATTINI, M. N.; AMAKU, M. Estimation of R from the initial phase of an outbreak of a vector-borne infection. **Tropical Medicine & International Health**, Wiley Online Library, v. 15, n. 1, p. 120–126, 2010. Citado na página 39.

MINAS, I. R. R. F. Dengue. In: . [s.n.], 2010. Disponível em: <<http://www.cpqrr.fiocruz.br/pg/dengue/>>. Acesso em: 21 de mar. 2015. Citado na página 6.

MINISTÉRIO DA SAÚDE. **Resultados preliminares da avaliação dos determinantes para ocorrência de óbitos por dengue em 2010**. Brasil, 2010. Disponível em: <[www1.saude.ba.gov.br/entomologiabahia/dengue/apres8.ppt](http://www1.saude.ba.gov.br/entomologiabahia/dengue/apres8.ppt)>. Acesso em: 10 de jul. 2015. Citado na página 7.

MINISTÉRIO DA SAÚDE. **Boletim Epidemiológico**. Brasil, 2016. v. 47. Disponível em: <<http://portalsaude.saude.gov.br/images/pdf/2016/janeiro/15/svs2016-be003-dengue-se52.pdf>>. Acesso em: 12 de fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 8.

MINISTÉRIO DA SAÚDE. **Boletim Epidemiológico**. Brasil, 2016. v. 47. Disponível em: <[portalsaude.saude.gov.br/images/pdf/2016/junho/17/2016-019.pdf](http://portalsaude.saude.gov.br/images/pdf/2016/junho/17/2016-019.pdf)>. Acesso em: 18 de jun. 2016. Citado na página 8.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 22.

NAGHETTINI, M.; PINTO, É. J. A. **Hidrologia estatística**. [S.l.]: CPRM, 2007. Citado na página 27.

OTERO, M.; SOLARI, H. G.; SCHWEIGMANN, N. A stochastic population dynamics model for *aedes aegypti*: formulation and application to a city with temperate climate. **Bulletin of mathematical biology**, Springer, v. 68, n. 8, p. 1945–1974, 2006. Citado na página 49.

PAIXÃO, K. S. **Avaliação do controle químico de adultos de *Aedes (Stegomyia) aegypti* (Linnaeus, 1762)(Diptera: Culicidae) de Fortaleza por meio de métodos convencionais e das armadilhas BG-Sentinel® e MosquiTRAP®**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.

PEREDA, P. C.; ALVES, D. C. O.; RANGEL, M. A. Elementos climáticos e incidência de dengue: Teoria e evidência para municípios brasileiros. In: **33<sup>o</sup> Meeting of the Brazilian Econometric Society**. [S.l.: s.n.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 15.

PINHO, S. T. R. d.; FERREIRA, C. P.; ESTEVA, L.; BARRETO, F.; SILVA, V. M. e; TEIXEIRA, M. Modelling the dynamics of dengue real epidemics. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 368, n. 1933, p. 5679–5693, 2010. Citado na página 49.

RESENDE, M. C. d.; SILVA, I. M. d.; EIRAS, A. E. Avaliação da operacionalidade da armadilha Mosquitrap no monitoramento de *Aedes aegypti*. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, Coordenação-Geral de Desenvolvimento da Epidemiologia em Serviços/Secretaria de Vigilância em Saúde/Ministério da Saúde, v. 19, n. 4, p. 329–338, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

ROSE, R. I. Pesticides and Public Health: Integrated Methods of Mosquito Management. **Emerging infectious diseases**, Centers for Disease Control, v. 7, n. 1, p. 17, 2001. Citado na página 12.

ROUTH, E. J. **A treatise on the stability of a given state of motion: particularly steady motion**. [S.l.]: Macmillan and Company, 1877. Citado na página 23.

SECRETARIA DE VIGILÂNCIA EM SAÚDE. **Guia de Vigilância Epidemiológica:Dengue**. [S.l.], 2009. Disponível em: <[http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia\\_vigilancia\\_epidemiologica\\_7ed.pdf](http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_vigilancia_epidemiologica_7ed.pdf)>. Acesso em: 10 de jul. 2015. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 11.

SILVA, H. H. G.; SILVA, I. G. Estudos do ciclo e evolutivo do *aedes aegypti* (linnaeus, 1762)(diptera, culicidae) a partir de ovos com quatro meses de stocagem em laboratório. **Rev. patol. trop**, v. 29, n. 1, p. 95–100, 2000. Citado na página 41.

SMITH, G. C.; ELIASON, D. A.; MOORE, C. G.; IHENACHO, E. N. Use of elevated temperatures to kill *Aedes albopictus* and *Ae. aegypti*. **Journal of the American Mosquito Control Association**, American Mosquito Control Association, v. 4, n. 4, p. 557–558, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. v. 11. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.

SOUZA, L. J. de. **Dengue—diagnóstico, tratamento e prevenção**. [S.l.]: Editora Rubio, 2008. Citado na página 1.

SOUZA, S. S. d.; SILVA, I. G. d.; SILVA, H. H. G. d. Associação entre incidência de dengue, pluviosidade e densidade larvária de aedes aegypti, no estado de goiás. **Rev Soc Bras Med Trop**, SciELO Brasil, v. 43, n. 2, p. 152–5, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 66.

THOMÉ, R. C. A.; YANG, H. M. **Controle Ótimo Aplicado na Estratégia de Combate ao Aedes aegypti Utilizando Inseticida e Mosquitos Estéreis**. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica IMECC/UNICAMP, Campinas, Brasil, 2007. Citado na página 31.

THOMÉ, R. C. A.; YANG, H. M.; ESTEVA, L. Optimal control of aedes aegypti mosquitoes by the sterile insect technique and insecticide. **Mathematical Biosciences**, Elsevier, v. 223, n. 1, p. 12–23, 2010. Citado na página 3.

VALLE, K. N. F. **Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kuta**. 40 p. — Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, Belo Horizonte, Brasil, 2012. Citado na página 24.

WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003. v. 2. 808 p. Citado 5 vezes nas páginas 16, 19, 21, 22 e 39.

WORLD HEALTH ORGANIZATION. **Global Strategy for Dengue prevention and Control, 2012-2010**. Switzerland, 2012. 43 p. Disponível em: <[http://apps.who.int/iris/bitstream/10665/75303/1/9789241504034\\_eng.pdf](http://apps.who.int/iris/bitstream/10665/75303/1/9789241504034_eng.pdf)>. Acesso em: 12 de jul. 2015. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.

WORLD HEALTH ORGANIZATION. **Boletim Epidemiológico**. Brasil, 2015. v. 46, n. 28. Disponível em: <<http://portalsaude.saude.gov.br/images/pdf/2015/outubro/01/2015-030-bol--2-.pdf>>. Acesso em: 11 de Ago. 2015. Citado na página 7.

YANG, H. M.; BOLDRINI, J. L.; FASSONI, A. C.; FREITAS, L. F. S.; GOMEZ, M. C.; ANDRADES, V. R.; FREITAS, A. R. R. et al. Temperature and Rain in Dengue Transmission. **Fifth Workshop Dynamical Systems Applied to Biology and Natural Sciences DSABNS 2014**, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 34.

YANG, H. M.; FERREIRA, C. P. Assessing the effects of vector control on dengue transmission. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier, v. 198, n. 1, p. 401–413, 2008. Citado na página 49.

YANG, H. M.; MACORIS, M. L. G.; GALVANI, K. C.; ANDRIGHETTI, M. T. M.; WANDERLEY, D. M. Dinâmica da Transmissão da Dengue com dados Entomológicos Temperatura-dependentes. **Tema—Tend. Mat. Apl. Comput**, v. 8, n. 1, p. 159–168, 2007. Citado na página 30.