

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

DEGENERESCÊNCIA E CAPTURA DE FÓTONS EM UM MODELO OPTOMECÂNICO DE DOIS MODOS

THIAGO ALONSO MERICI

Orientador: José Geraldo Peixoto de Faria
CEFET-MG

Coorientador: Thiago Gomes de Mattos
CEFET-MG

BELO HORIZONTE
FEVEREIRO DE 2024

THIAGO ALONSO MERICI

DEGENERESCÊNCIA E CAPTURA DE FÓTONS EM UM MODELO OPTOMECÂNICO DE DOIS MODOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: José Geraldo Peixoto de Faria
CEFET-MG

Coorientador: Thiago Gomes de Mattos
CEFET-MG

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
FEVEREIRO DE 2024

Esta folha deverá ser substituída pela cópia digitalizada da folha de aprovação fornecida pelo Programa de Pós-graduação.

À Franciele, Lucca e Cecília.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me permitir concluir mais esta etapa do meu crescimento intelectual e profissional. Agradeço pelo cuidado, por prover sempre o mais importante, por me carregar no colo nos momentos mais difíceis e por todo amor e felicidade sempre presentes em minha vida.

À minha família, pela educação que me concedeu, pela construção do meu caráter e minha formação como pessoa, por toda confiança e por sempre acreditarem no meu potencial. Pela convivência e pelo amor sempre presente.

À minha querida esposa Franciele, por estar ao meu lado em todos os momentos e por ter se tornado parte inseparável de mim, uma necessidade e um amor infinito. Te amo!

Aos meus filhos, Lucca e Cecília. Obrigado por me mostrarem todos os dias que todo sofrimento e angústia são pequenos perto do que realmente importa. Isso me fortaleceu e permitiu que eu continuasse. Amo vocês!

Ao meu orientador, José Geraldo Peixoto de Faria, por ter aceitado o desafio de me orientar, por todo aprendizado, pela confiança depositada em mim e certeza de que tudo daria certo. Agradeço também pela paciência, compreensão e humanidade nesses anos de relacionamento. Não teria dado certo com outro orientador. Obrigado, Zé!

Ao meu coorientador, Thiago Gomes de Mattos, por todo aprendizado em suas aulas e pelas contribuições com o trabalho, principalmente nos momentos de mais incertezas.

Ao meu grande amigo e irmão Gessé Pereira, pelas contribuições no trabalho, mas principalmente pela amizade e companheirismo dedicados a mim nesta importante etapa da minha vida. Essa conquista também é sua, meu irmão.

Ao meu amigo Hélio Luiz Simonetti, pela amizade e por ter me acolhido desde minha chegada ao IFMG. Pela carta de recomendação para entrada no programa de doutorado e por sempre se preocupar. Obrigado, meu amigo!

Ao CEFET-MG, por ter me acolhido durante tanto tempo da minha vida, em momentos distintos, mas sempre muito importantes.

Ao IFMG, por ter permitido e contribuído para que esta capacitação acontecesse.

Agradeço a todos que compartilharam estes momentos, que acreditaram em mim e torceram pelo meu sucesso.

"Quando a vida enfim me quiser levar, pelo tanto que me deu... Sentir-lhe a barba me roçar, no derradeiro beijo seu... E ao sentir, também, sua mão vedar meu olhar dos olhos seus... Ouvir-lhe a voz a me embalar, num acalanto de adeus... Dorme, meu pai, sem cuidado, dorme que ao entardecer... Teu filho sonha acordado, com o filho que ele quer ter..."

(Antonio Pecci Filho / Marcus Vinicius Da Cruz De Mello Moraes)

Resumo

Neste trabalho, estudamos teoricamente um modelo optomecânico de dois modos finito e não amortecido que consiste em uma cavidade óptica de alta qualidade contendo uma membrana fina, elástica e dielétrica. O objetivo principal é investigar os precursores da transição de fase quântica em tal modelo, estudando o comportamento de alguns observáveis no estado fundamental. Ao controlar o acoplamento entre a membrana e os modos, descobrimos que os dois autoestados de menor energia tornam-se degenerados, como é indicado pelo comportamento do valor médio de alguns operadores e por outros quantificadores em função do acoplamento. Tais estados degenerados são caracterizados por uma superposição coerente de autoestados que descrevem um dos dois modos preferencialmente preenchido e a membrana deslocada de sua posição de equilíbrio, devido à pressão de radiação (estados de gato de Schrödinger). A deslocalização do sistema composto fótons+membrana resulta em um aumento nas flutuações medidas pelas relações de incerteza de Robertson-Schrödinger.

Palavras – chave : sistemas finitos; sistemas optomecânicos; Modelo de Dicke.

Abstract

In this work, we theoretically study a finite and undamped two-mode optomechanical model consisting of a high quality optical cavity containing a thin, elastic, and dielectric membrane. The main objective is to investigate the precursors of quantum phase transition in such a model by studying the behavior of some observables in the ground state. By controlling the coupling between membrane and modes, we find that the two lowest energy eigenstates become degenerate, as is indicated by the behavior of the mean value of some operators and by other quantifiers as a function of the coupling. Such degenerate states are characterized by a coherent superposition of eigenstates describing one of the two modes preferentially populated and the membrane dislocated from its equilibrium position due the radiation pressure (Schrödinger's cat states). The delocalization of the compound system photons+membrane results in an increase in fluctuations as measured by Robertson-Schrödinger uncertainty relations.

Keywords : finite systems; optomechanical systems; Dicke model.

Lista de Figuras

Figura 1 – Representação esquemática de transição de fase quântica de primeira e segunda ordem.	13
Figura 2 – Dispositivo optomecânico representado por um feixe de frequência ω_0 que é refletido por um espelho móvel e representação esquemática da cavidade de Fabry-Perot	14
Figura 3 – Configuração de um sistema optomecânico de dois modos. Uma membrana fina, elástica e dielétrica colocada no centro de uma cavidade óptica de alta qualidade.	16
Figura 4 – Diferença entre as energias dos estados fundamentais de $\hat{H}'$ e $\tilde{h}$, com $N_{max} = 15S$ como truncamento do número máximo de fônons.	28
Figura 5 – Gráfico dos módulos dos valores das duas contribuições para a força média na membrana $\hat{F}$ em função do parâmetro $\lambda(u)$ no estado fundamental para vários valores do truncamento do número de fônons N_{max}	29
Figura 6 – Separação de energia entre os estados fundamental e primeiro excitado em relação a $\lambda(u)$, $\delta(\lambda) = E_1(\lambda) - E_0(\lambda)$, para diferentes valores de S	30
Figura 7 – Valor médio do operador $\hat{S}_z$ (<i>imbalance</i>) em função do parâmetro $\lambda(u)$ no estado fundamental do hamiltoniano da para vários valores do número quântico S	31
Figura 8 – Valor médio do operador $\hat{S}_z^2$ (operador do <i>imbalance</i> de fótons ao quadrado) em função do parâmetro u no estado fundamental do hamiltoniano para vários valores do número quântico S	33
Figura 9 – Módulo do valor médio do operador $\hat{S}_z$ (<i>imbalance</i> de fótons) em função de u no estado fundamental do hamiltoniano para vários valores do número quântico S	34
Figura 10 – Módulos dos coeficientes c_{m,n_c} do estado fundamental de $\hat{H}'$ em relação à base computacional $\{ m, n_c\rangle\}_{m=-S\dots S, n_c\dots N_{max}}$ para $u = 0, 4$	35
Figura 11 – Distribuições de coeficientes para os dois autoestados de menor energia $\hat{H}'$ em relação à base computacional $\{ m, n_c\rangle\}_{m=-S\dots S, n_c\dots N_{max}}$ para $u = 0, 7$ (superior) e $u = 0, 7$ (inferior).	36
Figura 12 – Suscetibilidade de fidelidade χ_F entre os estados fundamentais do hamiltoniano em função do parâmetro $\lambda(u)$ para vários valores de S	38
Figura 13 – Flutuações dos observáveis $\hat{X}$ e $\hat{P}$ da membrana medidas pela relação de incerteza RS em função do parâmetro $\lambda(u)$ no estado fundamental do hamiltoniano H' , para vários valores de S	39

Figura 14 – Valores médios das duas contribuições para a força na membrana $\hat{F}$ como funções do parâmetro $\lambda(u)$ para vários valores de S no estado fundamental do hamiltoniano 41

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Fundamentação Teórica	6
2.1 Fundamentos de Mecânica Quântica	6
2.1.1 Os postulados da Mecânica Quântica	6
2.1.1.1 Postulado 1	6
2.1.1.2 Postulado 2	6
2.1.1.3 Postulado 3	6
2.1.1.4 Postulado 4	7
2.1.1.5 Postulado 5	8
2.1.1.6 Postulado 6	9
2.1.2 O Oscilador Harmônico	9
2.1.2.1 Oscilador Harmônico Clássico	9
2.1.2.2 Oscilador Harmônico Quântico	10
2.2 Transição de Fase Quântica	12
2.3 Sistemas Optomecânicos	13
2.3.1 O Modelo Optomecânico de Dois Modos	15
2.4 O Modelo de Dicke	17
2.4.1 Mapeamento do Modelo de Dois Modos no Modelo de Dicke	18
2.5 Força na Membrana	20
3 – Metodologia	21
4 – Resultados	22
4.1 O Limite Termodinâmico	22
4.1.1 Caracterização do ponto crítico λ_1	24
4.2 Precursores da Transição de Fase Quântica no Modelo Optomecânico de Dois Modos	26
4.2.1 Aspectos da Diagonalização do Hamiltoniano do Sistema Optomecânico de Dois Modos	27
4.2.2 A Degenerescência dos Estados Menos Energéticos	30
4.2.3 O Imbalance Entre os Modos Próximo ao Ponto de Degenerescência	31
4.2.4 Susceptibilidade de Fidelidade	37
4.2.5 Flutuações	38
4.3 Força Média na Membrana	40

5 – Conclusão	42
Referências	44

Capítulo 1

Introdução

Sistemas optomecânicos são caracterizados pelo acoplamento entre radiação e matéria. Em geral, esse acoplamento é estabelecido pela interação da pressão de radiação com algum grau de liberdade mecânico ([HOLLANDER; GOTTLIEB, 2021](#)), ([BOWEN; MILBURN, 2016](#)), ([VAHALA; KIPPENBERG, 2008](#)), ([ASPELMEYER; MEYSTRE; SCHWAB, 2012](#)). O estado da arte alcançado em óptica quântica experimental, entretanto, tem permitido controlar e manipular a interação de campos eletromagnéticos com dispositivos mecânicos macroscópicos em nível quântico ([BOWEN; MILBURN, 2016](#)). Exemplos de sistemas optomecânicos quânticos são numerosos. O mais simples é formado por um espelho móvel acoplado a uma mola, permitindo que o sistema oscile ao ser atingido por fótons. Para otimizar a interação entre a luz e o oscilador mecânico, os fótons são armazenados em cavidades ópticas onde um dos espelhos está livre para oscilar. Neste esquema, os fótons sofrem múltiplas reflexões entre os espelhos, prolongando o tempo de interação com o espelho em movimento e, conseqüentemente, aumentando a pressão de radiação sobre ele. Vale a pena notar que, em uma cavidade óptica com um espelho móvel, a frequência natural do modo eletromagnético armazenado dentro dela é determinado e controlado pelo comprimento da própria cavidade. Este fenômeno é chamado de acoplamento paramétrico.

Atualmente, os sistemas optomecânicos têm se tornado um objeto de crescente interesse no campo da Física. Por um lado, muitos experimentos têm sido propostos neste tipo de plataforma experimental para investigar a natureza da interação entre radiação e matéria e outros aspectos envolvendo sistemas mecânicos macroscópicos e campos eletromagnéticos no regime quântico. Como exemplos, pode-se citar medições quânticas de não demolição de uma quadratura mecânica ([CLERK; MARQUARDT; JACOBS, 2008](#)), ([HERTZBERG et al., 2010](#)), resfriamento de modos mecânicos ao estado fundamental ([BHATTACHARYA; MEYSTRE, 2007](#)), ([BHATTACHARYA; UYS; MEYSTRE, 2008](#)), ([TEUFEL et al., 2011](#)), ([CHAN et al., 2011](#)), transparência induzida optomecânicamente ([WEIS et al., 2010](#)), superposição quântica macroscópica em sistemas mecânicos ([MARSHALL et al., 2003](#)), ([KLECKNER et al., 2008](#)), ([ABDI et al., 2016](#)), controle quântico coerente de

oscilador mecânico usando campos ópticos (VERHAGEN et al., 2012) e emaranhamento quântico entre campos eletromagnéticos e um oscilador mecânico (VITALI et al., 2007). Por outro lado, sistemas optomecânicos são considerados dispositivos promissores para serem usados em aplicações práticas, como osciladores de radiofrequência (LIN et al., 2009), (MERCADE et al., 2020), memórias ópticas (WEIS et al., 2010), sondas de aceleração de alta sensibilidade (KRAUSE et al., 2012) e de campos magnéticos (FORSTNER et al., 2012). Finalmente, o estado da arte alcançado no controle e manipulação de sistemas mecânicos macroscópicos em nível quântico pode permitir testar experimentalmente a contextualidade quântica em tais sistemas. Como exemplo, nas referências (ASADIAN; BRUKNER; RABL, 2013) e (DEHGHANI et al., 2020), os autores propõem acoplar magneticamente um oscilador mecânico a um ponto quântico que atuará como um sensor de movimento mecânico. Esta proposta parece viável, uma vez que a realização experimental de uma detecção quântica do movimento mecânico de um ressonador já foi relatada na referência (KOLKOWITZ et al., 2012).

O interesse deste estudo está voltado para um modelo que consiste em uma cavidade óptica de alta qualidade com espelhos fixos, onde uma membrana elástica dielétrica é colocada em seu interior, dividindo a cavidade exatamente ao meio. Como resultado, dois modos eletromagnéticos são estabelecidos, um à esquerda e outro à direita da membrana. Esses modos são capazes de trocar fótons através da membrana. Sob a influência da pressão de radiação, a membrana vibra como a pele de um tambor e esta vibração é responsável por alterar as frequências dos modos à direita e à esquerda da membrana, dentro da cavidade, como consequência do acoplamento paramétrico (JAYICH et al., 2008), (MUMFORD; O'DELL; LARSON, 2015). Este tipo de sistema optomecânico de dois modos é particularmente interessante, pois pode ser considerado uma realização do modelo Dicke de N -átomos (DICKE, 1954), mapeando adequadamente os operadores de campo em operadores de momento angular. Procedendo desta forma, os dois modos são mapeados conjuntamente na parte atômica do modelo de Dicke, enquanto a membrana é associada com a parte do campo correspondente (MUMFORD; O'DELL; LARSON, 2015). Embora o modelo de Dicke seja um sistema simples, ele apresenta uma fenomenologia muito rica, como a ocorrência da transição de fase quântica (TFQ) e caos em seu análogo clássico (EMARY; BRANDES, 2003a), (EMARY; BRANDES, 2003b). Por outro lado, conforme apresentado em (AKRAM; SAIF, 2016), os autores mostram que um sistema optomecânico de dois modos pode ser efetivamente modelado por um oscilador harmônico chutado, desde que certas condições sejam observadas. Este modelo também apresenta uma dinâmica caótica.

As transições de fase são um fenômeno amplamente estudado na física. Ao passar por uma transição de fase, um sistema físico macroscópico muda qualitativamente de estado, quando se varia algum parâmetro, como pressão, temperatura ou campos magnéticos. Em

um sistema termodinâmico comum, próximo a uma transição de fase, as flutuações térmicas desempenham um papel importante. De fato, perto de uma transição de fase, as flutuações térmicas, que de outra forma seriam microscópicas em escala, são intensificadas e atingem tamanhos macroscópicos. À medida que a temperatura T de um sistema tende a zero, as flutuações térmicas tendem a desaparecer e, perto do limite de temperatura nula, elas deixam de existir. No entanto, mesmo neste caso, um sistema físico ainda pode exibir flutuações de um tipo diferente. Estas são chamadas de flutuações quânticas (SACHDEV, 2017). Assim, quando no sistema, $T \rightarrow 0$, as transições de fase são dominadas por flutuações quânticas e ocorrem quando um determinado parâmetro de controle do hamiltoniano deste sistema atinge um valor crítico (SACHDEV, 2017), (CEJNAR; STRÁNSKÝ, 2008). Existem alguns exemplos clássicos de modelos teóricos onde as transições de fase quântica (TFQ) são estudadas: o modelo de Heisenberg de ferromagnetismo e antiferromagnetismo (HEISENBERG, 1928), (HOLSTEIN; PRIMAKOFF, 1940), o modelo de Dicke (DICKE, 1954), (HEPP; LIEB, 1973), que descreve a interação de N átomos com um campo eletromagnético, o modelo de Lipkin-Meshkov-Glick (LIPKIN; MESHKOV; GLICK, 1965), (RIBEIRO; VIDAL; MOSSERI, 2007), que foi introduzido na Física Nuclear para reproduzir o comportamento de núcleos de camada fechada, que é um modelo simples com um grau quântico de liberdade. Esses modelos podem ser realizados em aparatos experimentais como sistemas semicondutores de bicamada (MOREIRA et al., 2008), conjuntos de spin de estado sólido acoplados a cavidades de supercondutores (ZOU et al., 2014), condensado de Bose-Einstein acoplado a uma cavidade óptica (BAUMANN et al., 2010) e condensados de polárítos em cavidades de semicondutores (FRAZAO et al., 2018).

No limite termodinâmico, sabe-se que, modelos tais como os apresentados acima, exibem transição de fase quântica (TFQ) e quebra espontânea da simetria, dependendo do valor dos parâmetros (BAUMANN et al., 2011), (WURL; ALVERMANN; FEHSKE, 2016), (MIRI; VERHAGEN; ALÙ, 2017). TFQ e quebra espontânea de simetria são fenômenos geralmente atribuídos a sistemas macroscópicos. O referido limite termodinâmico parte de um sistema finito, ou seja, um sistema formado por um número finito N de componentes, ocupando um volume finito V , tal que ao fazer os limites $N \rightarrow \infty$ e $V \rightarrow \infty$, tenha-se N/V mantido finito. No entanto, alguma atenção tem sido dada aos precursores desses fenômenos macroscópicos em seus sistemas finitos correspondentes, (BIRMAN; NAZMITDINOV; YUKALOV, 2013) (Birman et al., 2013), (RESLEN; QUIROGA; JOHNSON, 2005) (Reslen et al., 2005), (VIDAL; DUSUEL, 2006) (Vidal & Dusuel 2006), (PLASTINA; LIBERTI; CAROLLO, 2006) (Plastina et al., 2006), (LIBERTI; PIPERNO; PLASTINA, 2010) (Libert et al., 2010), (KÓNYA et al., 2012) (Kónya et al., 2010). Tais precursores estão relacionados com mudanças sofridas pelo sistema finito à medida que algum parâmetro ou potencial é variado. Esta é a situação aqui estudada, uma vez que consideramos um modelo optomecânico de dois modos com um número finito de fótons.

Neste trabalho, observamos como o estado fundamental do hamiltoniano correspondente do modelo optomecânico “cavidade com membrana no centro” é afetado à medida que um dos parâmetros do sistema é variado. Em geral, espera-se que o aparecimento de algum tipo de não analiticidade (descontinuidade da derivada) no estado fundamental ocorra no ponto crítico. Tal não-analiticidade pode manifestar-se nos valores médios de alguns observáveis escolhidos - por exemplo, o *imbalance* no número de fótons armazenados nos dois modos - e na suscetibilidade de fidelidade. Para este caso, existem dois parâmetros de interesse que poderiam ser utilizados para acessar os precursores da TFQ ou quebra espontânea de simetria: a refletividade da membrana e o acoplamento entre o campo e a membrana resultante da pressão de radiação. Optamos por manter constante a refletividade da membrana, enquanto o acoplamento campo-membrana é variado. Este estudo leva em consideração uma situação muito idealizada: o sistema optomecânico está perfeitamente isolado do ambiente, ou seja, não são consideradas fugas de fótons da cavidade ou entrada de fótons térmicos pelos espelhos ou forças dissipativas na membrana. Além disso, os campos ópticos dentro da cavidade não são bombeados por fontes externas. Reconhecemos que tais simplificações não são verificadas em experimentos envolvendo dispositivos optomecânicos. Apesar disso, o sistema optomecânico é estudado em um quadro quântico completo, sem recorrer a aproximações semiclássicas ou métodos similares.

Para identificar os precursores da transição de fase quântica em nosso modelo, elegemos alguns indicadores. Estudamos, por exemplo, como se comporta o valor médio de alguns observáveis como o *imbalance* e o quadrado deste observável, no estado fundamental, a medida em que variamos algum parâmetro de interesse do sistema, no caso, o acoplamento entre os modos e a própria membrana. Analisamos, também, outros quantificadores como a suscetibilidade de fidelidade, flutuações e a força resultante sobre a membrana. Verificamos que existem duas contribuições opostas para a força resultante na membrana: a primeira é a força elástica restauradora e, a segunda, como esperado, é devido à pressão de radiação e é proporcional ao *imbalance* de fótons entre os dois modos. Percebe-se que o hamiltoniano exibe degenerescência, mas nem todos os indicadores escolhidos são sensíveis ao aparecimento desta degenerescência. Analisamos, em particular, o *imbalance* de fótons próximo ao ponto crítico e verificamos que este observável não é sensível ao estabelecimento da degenerescência. Por outro lado, o quadrado deste observável já apresenta tal sensibilidade. Antes da ocorrência da degenerescência, o estado fundamental do hamiltoniano correspondente descreve os fótons, aproximadamente, distribuídos igualmente entre os dois modos. Após tal ocorrência, os modos, continuam, de forma aproximada, igualmente populados e, em ambos os casos, o valor do *imbalance* é aproximadamente nulo. No entanto, estes estados (antes e após o estabelecimento da degenerescência), são qualitativamente diferentes. O que observamos no segundo caso, é uma sobreposição coerente de dois estados: um estado representado por um modo preferencialmente populado e o outro vazio e um estado “oposto”, onde o modo que está vazio no primeiro estado está,

agora, preferencialmente populado e o que está populado no primeiro estado, está, agora, vazio. Este comportamento pode ser considerado como um precursor da transição de fase quântica em cavidades optomecânicas simétricas, para as quais um teste experimental recente foi relatado, como pode ser visto em ([XU et al., 2017](#)).

Esta tese está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2, será apresentada uma fundamentação teórica sobre conceitos fundamentais que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho. Este capítulo é dividido em seções que apresentam estudos teóricos e também uma explanação do modelo proposto como objeto de estudo deste projeto. O capítulo 3 trata da metodologia que será empregada para execução da pesquisa. O capítulo 4 trata da análise e da discussão dos resultados obtidos e, por fim, o capítulo 5 é reservado às considerações finais e conclusão.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Para construir uma fundamentação teórica que possa embasar o leitor deste trabalho, serão apresentados alguns conceitos básicos sobre fundamentos de mecânica quântica e transição de fase quântica, assim como uma explanação sobre sistemas optomecânicos, particularmente, sistemas de dois modos acoplados, separados por uma membrana móvel. Finalmente, será feita uma revisão sobre o modelo de Dicke e, posteriormente, o mapeamento do modelo de dois modos no modelo de Dicke e a determinação da força na membrana.

2.1 Fundamentos de Mecânica Quântica

2.1.1 Os postulados da Mecânica Quântica

A mecânica quântica está fundamentada em poucos princípios. Nesta seção serão apresentados os seis postulados para descrevê-la e fundamentá-la. Seguiremos com a apresentação destes postulados tal como é feito em (COHEN-TANNOUDJI; DUI; LALOE, 1977).

2.1.1.1 Postulado 1

Na mecânica quântica, cada estado físico possível é descrito por uma função de onda ψ . Em um instante de tempo t_0 , o estado de um sistema físico é definido especificando-se um ket $|\psi(t_0)\rangle$ que pertence ao espaço de estados ξ do sistema.

2.1.1.2 Postulado 2

Todo observável $\mathcal{A}$ é descrito por um operador autoadjunto $\hat{A}$ atuando em ξ .

2.1.1.3 Postulado 3

O único resultado possível em uma medida de uma quantidade física $\mathcal{A}$ é um dos autovalores do observável correspondente $\hat{A}$.

2.1.1.4 Postulado 4

No caso de um espectro discreto não-degenerado, quando a quantidade física $\mathcal{A}$, representada pelo operador autoadjunto $\hat{A}$ é medida em um sistema no estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade $P(a_n)$ de se obter o autovalor não-degenerado a_n do observável correspondente A é $P(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2$, onde $|u_n\rangle$ é o autovetor normalizado de $\hat{A}$ associado ao autovalor a_n . Quando há degenerescência de grau g_n de alguns autovalores de $\hat{A}$, temos

$$\hat{A} |u_n^i\rangle = a_n |u_n^i\rangle, i = 1, 2, \dots, g_n; \langle u_m^i | u_n^j \rangle = \delta_{mn} \delta_{ij}, \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i| = \hat{1} \quad (1)$$

onde $\hat{1}$ é o operador identidade e

$$|\psi\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i | \psi \rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle; \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 = 1. \quad (2)$$

Assim, fica postulado que: para um espectro discreto degenerado, quando a quantidade física $\mathcal{A}$ é medida em um sistema no estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade $P(a_n)$ de obter o autovalor a_n para o observável correspondente $\hat{A}$ é

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2 \quad (3)$$

onde g_n é o grau de degenerescência de a_n e $\{|u_n^i\rangle, i = 1, 2, \dots, g_n\}$ é um conjunto ortornormal de autovetores que forma uma base no sub-espço ξ_n associado ao autovalor a_n de $\hat{A}$.

A probabilidade $P(a_n)$ não depende da escolha da base em ξ_n . Definindo o projetor $\hat{P}_n$ no autosubespço de a_n como $\hat{P}_n = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i|$, podemos definir $|\psi_n\rangle$ como

$$|\psi_n\rangle = \hat{P}_n |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i | \psi \rangle = \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle \quad (4)$$

do que decorre

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2. \quad (5)$$

Portanto, a probabilidade $P(a_n)$ é dada por

$$P(a_n) = \langle \psi_n | \psi_n \rangle = \langle \psi | \hat{P}_n^\dagger \hat{P}_n | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_n^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle; \hat{P}_n^\dagger = \hat{P}_n, \hat{P}_n^2 = \hat{P}_n, \quad (6)$$

ou seja, qualquer base formada pela combinação linear dos g_n autovalores $|u_n^i\rangle$ no subespaço ξ_n fornece a mesma probabilidade $P(a_n)$.

Para um espectro contínuo não degenerado, tem-se que

$$\hat{A}|v_\alpha\rangle = \alpha|v_\alpha\rangle; \langle v_\alpha|v_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha - \alpha'); \int d\alpha |v_\alpha\rangle \langle v_\alpha| = \hat{1}. \quad (7)$$

Portanto, os possíveis resultados para uma medida de $\mathcal{A}$ não são mais discretos e, sim, contínuos. Define-se então, a probabilidade de se obter um valor entre α e $d\alpha$ como uma densidade de probabilidade dada por $dP(\alpha)$. Deste modo, esta densidade de probabilidade é expressa por

$$dP(\alpha) = \rho(\alpha) d\alpha = |c(\alpha)|^2 d\alpha = |\langle v_\alpha|\psi\rangle|^2 d\alpha. \quad (8)$$

Assim, ao medir uma quantidade física $\mathcal{A}$ em um sistema no estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade de se obter um resultado entre α e $\alpha + d\alpha$ é $dP(\alpha) = |\langle v_\alpha|\psi\rangle|^2 d\alpha$, onde $|v_\alpha\rangle$ é o autovetor de A associado ao autovalor α .

2.1.1.5 Postulado 5

Se a medida da quantidade física $\mathcal{A}$ em um sistema físico no estado $|\psi\rangle$ fornece o resultado a_n , o estado do sistema imediatamente após a medida é a projeção normalizada de $|\psi\rangle$, $\hat{P}_n|\psi\rangle / \sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle}$, no subespaço ξ_n associado a a_n . No caso de a_n não-degenerado, temos

$$\frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle}} = \frac{|u_n\rangle \langle u_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|u_n\rangle \langle u_n|\psi\rangle}} = \frac{c_n |u_n\rangle}{\sqrt{|c_n|^2}} = e^{(i\text{Arg}c_n)} |u_n\rangle \quad (9)$$

que difere de $|u_n\rangle$ por um fator de fase (global) e, portanto, representa o mesmo estado que $|u_n\rangle$.

Já no caso degenerado, temos

$$\hat{P}_n = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i| \quad (10)$$

e

$$\frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle}} = \frac{\sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i|\psi\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^{g_n} \langle\psi|u_n^i\rangle \langle u_n^i|\psi\rangle}} = \frac{\sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2}}. \quad (11)$$

2.1.1.6 Postulado 6

A evolução temporal do vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ é governada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (12)$$

onde $\hat{H}(t)$ é o observável associado com a energia total do sistema, conhecido como operador hamiltoniano ou, simplesmente, hamiltoniano.

2.1.2 O Oscilador Harmônico

Esta seção é dedicada às definições sobre o oscilador harmônico clássico e o oscilador harmônico quântico.

2.1.2.1 Oscilador Harmônico Clássico

O estudo do oscilador harmônico mostra uma ampla aplicabilidade em torno de seus princípios físicos. Todo sistema físico que oscila em torno de um ponto de equilíbrio estável, de forma que a força aplicada ao sistema dependa linearmente do deslocamento em relação ao ponto de equilíbrio, pode ser considerado um oscilador harmônico nas vizinhanças desse ponto de equilíbrio.

De acordo com (GRIFFITHS, 2011), o oscilador harmônico clássico pode ser representado, de forma mais simples, por um sistema massa-mola onde um corpo de massa m está preso a uma mola e, desta forma, sujeito a uma força restauradora que atua proporcionalmente a sua posição. Matematicamente, este sistema é representado pela Lei de Hooke, expressa por:

$$F = -kx, \quad (13)$$

onde k é a constante elástica da mola ou, em um caso mais geral, a constante de proporcionalidade entre a força em relação à posição do corpo e x é a posição do corpo em relação ao ponto de equilíbrio.

O potencial a que corpo oscilante está submetido, é dado por

$$V(x) = - \int F dx = \frac{1}{2} kx^2, \quad (14)$$

e sua frequência angular de oscilação ω é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (15)$$

De acordo com a segunda lei de Newton,

$$F = ma = \frac{md^2x}{dt^2} = m\ddot{x}, \quad (16)$$

logo, tem-se uma equação diferencial linear de segunda ordem, dada por

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (17)$$

cuja solução é dada por

$$x(t) = X_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (18)$$

onde X_m é a amplitude e φ é o ângulo de fase do oscilador.

A energia cinética K do sistema é dada por

$$K = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad (19)$$

onde p é o momento linear do corpo.

Já a energia total E do sistema é dada pela soma de suas energias cinética K e potencial V , sendo assim, representada por

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (20)$$

2.1.2.2 Oscilador Harmônico Quântico

Tomando como referência (COHEN-TANNOUDJI; DUI; LALOE, 1977), sejam os observáveis $\hat{x}$ e $\hat{p}$ os análogos das quantidades clássicas x e p . Atuando sobre a base das posições, estes operadores originam as relações

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle, \quad (21)$$

$$\hat{p} |x\rangle = i\hbar \frac{d}{dx} |x\rangle \quad (22)$$

e o comutador entre $\hat{x}$ e $\hat{p}$ é

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (23)$$

O problema do oscilador harmônico quântico consiste em resolver a equação de Schrödinger independente do tempo para o potencial, que pode ser escrito como

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (24)$$

e, conseqüentemente, o operador potencial é dado por

$$\hat{V}(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2. \quad (25)$$

O operador hamiltoniano do sistema é um análogo da energia para o oscilador harmônico clássico, então

$$\hat{h} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2. \quad (26)$$

É possível mostrar que o espectro de autovalores (níveis de energia) do oscilador harmônico é discreto e limitado inferiormente por 0, ou seja, os autovalores somente assumem valores positivos. Aqui, as autoenergias serão chamadas de E_n e os autoestados de $|\psi_n\rangle$, onde n é o índice que diferencia os autoestados e as autoenergias.

Como o hamiltoniano $\hat{h}$ independe do tempo, considerando $\Psi_n = \Psi_n(x)$, uma função de onda dependente unicamente da posição, tem-se a seguinte relação de autovalores e autovetores:

$$\hat{h} |\Psi_n\rangle = E_n |\Psi_n\rangle \quad (27)$$

que, projetada sobre a base das posições, se torna

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Psi = E\Psi. \quad (28)$$

Com o intuito de tornar esta relação adimensional, define-se $\hat{H} = \frac{\hat{h}}{\hbar\omega}$, obtendo, assim

$$\hat{H} |\Psi_n\rangle = \frac{E_n}{\hbar\omega} |\Psi_n\rangle. \quad (29)$$

Definindo, também, os operadores adimensionais $\hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}$ e $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}$, obtém-se

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{P}^2 + \hat{X}^2). \quad (30)$$

Os operadores aniquilação $\hat{a}$ e criação $\hat{a}^\dagger$ são definidos por

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \quad (31)$$

e

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}). \quad (32)$$

A ação dos operadores aniquilação $\hat{a}$ e criação $\hat{a}^\dagger$ em um autoestado $|\Psi_n\rangle$ com energia E_n leva a partícula aos estados de energia E_{n-1} e E_{n+1} , respectivamente. Assim, tem-se:

$$\hat{a} |\Psi_n\rangle = \sqrt{n} |\Psi_{n-1}\rangle \quad (33)$$

e

$$\hat{a}^\dagger |\Psi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\Psi_{n+1}\rangle. \quad (34)$$

O operador número $\hat{n}$ é definido pelo produto dos operadores criação e aniquilação. Assim, $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. A relação de $\hat{n}$ com o hamiltoniano $\hat{h}$ e dos autovalores de $\hat{n}$ com as autoenergias de $\hat{h}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\hat{h} = \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (35)$$

e

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega. \quad (36)$$

Assim, o estado quântico de menor energia, $|\Psi_0\rangle$ possui energia $\hbar\omega/2$.

Os comutadores de interesse na abordagem do oscilador harmônico quântico são: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, $[\hat{X}, \hat{P}] = i$, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ e $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$.

No estado fundamental, a função de onda do oscilador harmônico quântico pode ser obtida pela projeção $\langle x | \Psi_0 \rangle$, uma vez que o estado de menor energia é $|\Psi_0\rangle$, ou seja, $a |\Psi_0\rangle = 0$. Projetando sobre $|x\rangle$ e resolvendo a equação diferencial resultante, obtém-se:

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \quad (37)$$

Como os estados excitados podem ser obtidos pela ação de $a^\dagger$ no estado anterior, tem-se como regra geral:

$$\Psi_n(x) = C_n H_n(x) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}, \quad (38)$$

onde C_n são constantes de normalização para cada estado de energia n e $H_n(x)$ são chamados polinômios de Hermite.

2.2 Transição de Fase Quântica

Transição de fase é um fenômeno muito conhecido na Física Clássica no campo de estudo da Matéria Condensada, da Mecânica Estatística e da Termodinâmica. Estas transições são controladas por parâmetros termodinâmicos, ou seja, a transição de fase acontece devido à flutuações térmicas, quando a temperatura T do sistema se aproxima de uma temperatura crítica T_c . No entanto, à medida em que a temperatura do sistema diminui, as flutuações térmicas, seguindo o mesmo comportamento, também diminuem. Próximo ao limite inferior para a temperatura, ou seja, $T \rightarrow 0$, as flutuações térmicas deixam de existir, mas o sistema ainda apresenta flutuações de natureza quântica, em razão da relação de incerteza de Heisenberg. Considerando $T = 0$, pode-se afirmar que as transições não são mais controladas por temperatura e sim por outros parâmetros como, por exemplo, um campo magnético externo. Estas transições são, agora, de natureza quântica e acontecem quando tal parâmetro atinge um determinado valor, chamado de ponto crítico quântico (RIBEIRO; VIDAL; MOSSERI, 2007).

Partindo de um hamiltoniano $\hat{H}(g)$, em que g é um parâmetro de acoplamento entre as grandezas que se conservam no sistema, e que governa as transições de fase do mesmo, e considerando, ainda, o hamiltoniano do sistema em seu estado fundamental dependente de g , pode-se escrever $\hat{H}(g) = \hat{H}_0 + g\hat{H}_1$ e o comutador $[\hat{H}_0, \hat{H}_1] = 0$. Isso implica que $\hat{H}_0$ e $\hat{H}_1$ podem ser diagonalizados simultaneamente, obtendo autofunções

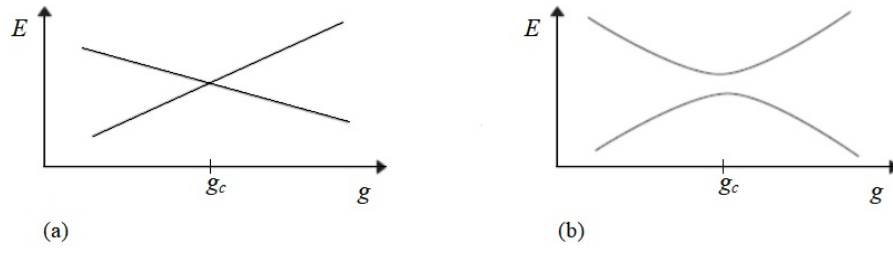


Figura 1 – (a) Representação esquemática de uma transição de fase quântica de primeira ordem, entre os níveis fundamental e primeiro estado excitado, caracterizada pela descontinuidade na derivada $\frac{\partial E}{\partial g}$ no gráfico do comportamento da energia do sistema em função do parâmetro adimensional g . (b) Transição de fase quântica de segunda ordem caracterizada pela aproximação entre os níveis e pela continuidade da derivada $\frac{\partial E}{\partial g}$ no sistema.

que são independentes de g , mesmo que seus autovalores apresentem essa dependência. Analisando o comportamento do sistema através da variação da energia em função do parâmetro g , pode-se observar, para determinados sistemas, que existe um cruzamento de níveis no ponto crítico g_c (SACHDEV, 2017). Nesta situação, tem-se uma descontinuidade na derivada $\frac{\partial E}{\partial g}$ que implica em uma transição de fase de primeira ordem, onde ocorre a transição do estado excitado para o estado fundamental, mostrada no gráfico da Fig. 1(a). Já o gráfico da Fig. 1(b) mostra uma situação em que observa-se uma aproximação dos níveis de energia dos estados fundamental e excitado à medida em que g se aproxima de g_c , sem haver, contudo, o cruzamento entre eles. Embora as energias não apresentem, neste caso, um ponto de degenerescência, existe um ponto mínimo de separação entre os níveis, onde ocorre a transição de fase quântica. Graficamente, pode-se observar tal comportamento pela continuidade da derivada $\frac{\partial E}{\partial g}$ que representa, neste caso, uma transição de fase de segunda ordem. Próximo ao limite termodinâmico, quando o número de partículas do sistema tende para o infinito, a repulsão entre os níveis fundamental e primeiro excitado, tende a diminuir, podendo tornar-se não analítico, criando um ponto de cruzamento entre eles e, neste ponto, ocorre a transição de fase quântica (CEJNAR; STRÁNSKÝ, 2008).

2.3 Sistemas Optomecânicos

Sistemas optomecânicos podem ser definidos como sistemas físicos onde a radiação interage com a matéria, proporcionando, através da pressão de radiação, uma troca de momentos entre fótons e graus de liberdade mecânicos (VAHALA; KIPPENBERG, 2008). Este fenômeno físico de interação mecânica entre luz e matéria foi observado e documentado, primeiramente, por Johannes Kepler, que atribuiu o fato da cauda de um cometa sempre apontar em direção oposta ao sol, à força que o mesmo, através de sua luz, exerce sobre as partículas que constituem o cometa (KEPLER, 1619). Mais tarde, James C. Maxwell

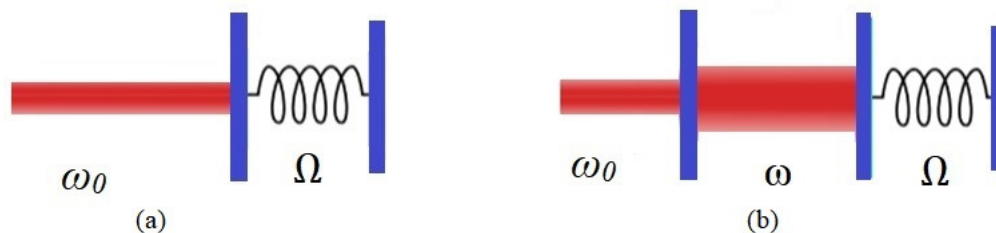


Figura 2 – (a) Dispositivo optomecânico representado por um feixe de frequência ω_0 que é refletido por um espelho móvel acoplado a um oscilador mecânico de frequência Ω . (b) Representação esquemática de uma cavidade de Fabry-Perot, onde o feixe de fótons é armazenado dentro da cavidade, aumentando a interação optomecânica e a troca de momento entre os fótons e o espelho.

tratou teoricamente o assunto na eletrodinâmica, que prevê que a radiação eletromagnética exerce força sobre os corpos nos quais ela incide, uma vez que a mesma possui momento (MAXWELL, 1954). A esta força deu-se o nome de pressão de radiação. Posteriormente, após muitos anos de estudos e experimentos no campo da interação entre radiação e matéria, teve origem o campo de pesquisa da optomecânica.

Existem vários tipos de sistemas optomecânicos. Um exemplo muito simples trata de um espelho móvel acoplado a um oscilador harmônico mecânico que é atingido por um feixe de fótons de frequência ω_0 e oscila com uma frequência Ω dependente da frequência do feixe (ASPELMEYER; MEYSTRE; SCHWAB, 2012). Este dispositivo está apresentado na Fig. 2(a). Como forma de otimizar a interação entre a luz e o oscilador mecânico, aumentando a pressão de radiação, foi sugerido que os fótons não incidissem diretamente no espelho e sim que fossem armazenados em uma cavidade óptica, onde o feixe de fótons, inicialmente com frequência ω_0 , sofreria reflexões sucessivas, aumentando o tempo de interação com o espelho móvel, aumentando, conseqüentemente, a transferência de momento entre eles. Este modelo de cavidade, mostrado na Fig. 2(b), pode ser representado por uma cavidade de Fabry-Perot modificada (BRAGINSKII; MANUKIN, 1967), de forma que um dos espelhos é livre para oscilar.

É interessante notar que, com o movimento do espelho móvel, o comprimento da cavidade é alterado, variando, assim, as frequências de ressonância da cavidade. Fora da ressonância, a troca de momento diminui, diminuindo a pressão de radiação e fazendo com que o espelho volte para a posição de equilíbrio (BRAGINSKY; MANUKIN; DOUGLASS, 1977). Este processo é chamado de acoplamento paramétrico (BRAGINSKY; VYATCHANIN, 2002).

O foco de estudo deste trabalho é um modelo que consiste em uma cavidade que é dividida exatamente ao meio por uma membrana dielétrica. Desta forma, otêm-se dois modos, a

e b , com frequências ω_a e ω_b respectivamente, de forma que os modos da cavidade são degenerados, ou seja, $\omega_a = \omega_b = \omega_0$.

2.3.1 O Modelo Optomecânico de Dois Modos

Um exemplo simples de um sistema multimodo consta de uma cavidade dividida ao meio por uma membrana flexível ou mesmo um espelho móvel, ambos dielétricos, que possuem graus de liberdade para se moverem ou vibrarem de acordo com a dinâmica do sistema (JAYICH et al., 2008). No presente estudo, foi adotado o esquema e nomenclatura adotados por (MUMFORD; O'DELL; LARSON, 2015). Será considerada uma cavidade óptica de alta qualidade e de comprimento L que possui uma membrana dielétrica altamente reflexiva colocada equidistante entre seus dois espelhos. A membrana é elástica e capaz de vibrar como a pele de um tambor. Dessa forma, considera-se apenas dois modos de cavidade neste estudo: um atribuído à direita, com frequência ω_a , e outro atribuído à esquerda da membrana, com frequência ω_b . Nas condições normais do sistema, essas frequências são iguais quando a membrana está localizada no centro da cavidade, ou seja, $\omega_a = \omega_b = \omega_0$. Em um experimento típico, os modos da cavidade são alimentados por lasers de frequência ω_0 , garantindo que, para a membrana no estado fundamental, não exista diferença entre os dois modos. No entanto, no modelo aqui estudado, como aproximação adicional, consideramos o sistema perfeitamente isolado. Assim, não será levado em conta as perdas por atrito e pelas imperfeições dos espelhos. Além disso, os modos da cavidade não são alimentados por nenhum tipo de bomba externa. Este sistema está representado na Fig. 3.

A pressão de radiação é proporcional à diferença de fótons (*imbalance*) entre os modos direito e esquerdo da cavidade e a membrana é modelada como um oscilador harmônico mecânico de frequência natural ω (BHATTACHARYA; UYS; MEYSTRE, 2008). Além disso, as frequências destes modos dependem instantaneamente da posição da membrana. O valor médio da diferença entre os números de fótons nos modos no estado fundamental apresenta um valor, predominantemente, próximo de zero, antes do estabelecimento da degenerescência. O acoplamento entre a pressão da radiação e o deslocamento da membrana depende da posição em que esta é colocada, considerando o comprimento total da cavidade. Assim, este acoplamento pode ser linear ou quadrático, caso a membrana seja posicionada em um nó ou um anti-nó do modo da cavidade, respectivamente (THOMPSON et al., 2008). Assumindo que as frequências modais dependem linearmente do deslocamento da membrana, a descrição quântica completa deste modelo é dada pelo hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} + \hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{b}^\dagger\hat{a}) + \frac{2}{L}\hbar\omega_0\hat{x}(\hat{n}_a - \hat{n}_b), \quad (39)$$

onde m representa a massa do oscilador mecânico, $\hat{x}$ e $\hat{p}$ são os operadores canônicos de posição e momento linear para a membrana que, na ausência de fótons, se encontra na posição média $x = 0$ (MUMFORD; O'DELL; LARSON, 2015). Os operadores $\hat{a}^\dagger$ e

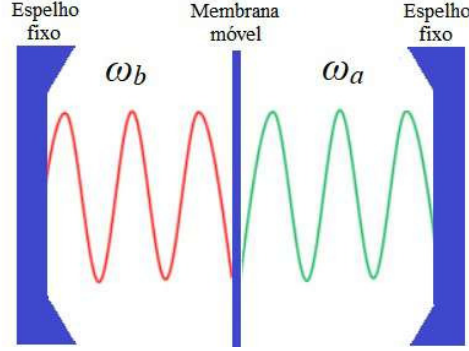


Figura 3 – Configuração do sistema optomecânico de dois modos. Uma membrana fina, elástica e dielétrica é colocada no meio de uma cavidade óptica de alta qualidade. Como resultado, dois modos são formados: um à esquerda e outro à direita da membrana, com frequências ω_a e ω_b . Se a posição de equilíbrio da membrana for simétrica em relação aos espelhos, podemos considerar $\omega_a = \omega_b = \omega_0$. Este sistema permite que fótons sejam transmitidos de um modo para outro a uma taxa g . O sistema é completamente isolado e a membrana não tem atrito: perdas ou bombeamento de fótons e fônons para o ambiente não são consideradas.

$\hat{b}^\dagger$ são operadores de criação de fótons nos modos a e b respectivamente, enquanto os operadores $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são operadores de aniquilação de fótons nos modos a e b , respectivamente. Estes operadores obedecem às relações de comutação bosônica, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ e $[\hat{a}, \hat{b}] = 0$. Os operadores número de fótons nos modos são dados por $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ e $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$. De agora em diante, por uma questão de brevidade, os modos direito e esquerdo da cavidade serão chamados de modos a e b , respectivamente. Finalmente, a constante de acoplamento g está relacionada com a refletividade da membrana e mede a taxa com que os modos trocam fótons, considerada, neste caso, próxima da unidade (MUMFORD; O'DELL; LARSON, 2015). Devido às suas propriedades, a membrana permite que fótons sejam transmitidos, a uma taxa $g > 0$, de uma cavidade para outra, dada por

$$g = \frac{c\sqrt{2(1-r)}}{L}, \quad (40)$$

onde c representa a velocidade da luz no vácuo, L é o comprimento total da cavidade e r é a intensidade da refletividade da membrana, que, por sua vez, depende do índice de refração e da espessura da membrana, de acordo com as referências (JAYICH et al., 2008) e (GRUNER; WELSCH, 1996). Foram suprimidas, neste hamiltoniano, as perdas em relação

à membrana e às paredes da cavidade, além do bombeio.

As transições de fase são definidas no limite termodinâmico, onde o sistema começa a ficar muito grande. Para estudá-las adequadamente, se faz necessário algumas alterações no hamiltoniano representado na Eq. (39) (KAC; UHLENBECK; HEMMER, 1963). Definindo os operadores adimensionais $\hat{X} = \hat{x}\sqrt{m\omega/\hbar}$ e $\hat{P} = \hat{p}/\sqrt{m\hbar\omega}$, os operadores aniquilação e criação de fônons são, respectivamente, dados por $\hat{c} = 1/\sqrt{2}(\hat{X} + i\hat{P})$ e $\hat{c}^\dagger = 1/\sqrt{2}(\hat{X} - i\hat{P})$. Além disso, o operador número de fônons é definido por $\hat{n}_c = \hat{c}^\dagger \hat{c}$. Com essas definições, o hamiltoniano da Eq. (39) pode ser reescrito como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left[\hat{n}_c + \frac{g}{\omega} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) + \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0^2}{m\omega^3}} (\hat{c} + \hat{c}^\dagger) (\hat{n}_a - \hat{n}_b) \right]. \quad (41)$$

Definindo $\hat{H}' = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega}$ e os parâmetros adimensionais $g' = g/\omega$ e $\lambda = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{\hbar\omega_0^2}{m\omega^3}}$, temos

$$\hat{H}' = \hat{n}_c + g' (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (\hat{c} + \hat{c}^\dagger) (\hat{n}_a - \hat{n}_b). \quad (42)$$

2.4 O Modelo de Dicke

O modelo de Dicke é bastante estudado no campo da óptica quântica, principalmente em estudos que tratam sistemas quânticos de muitos corpos e efeitos coletivos. Este modelo é também conhecido e explorado por apresentar transição de fase quântica. A proposta original deste modelo era descrever as emissões coletivas de luz por N átomos de dois níveis acoplados a um único modo do campo electromagnético. O fenômeno conhecido como superradiância foi introduzido por Dicke, em 1954, para descrever a emissão de luz por um grande conjunto de átomos. Dicke considerou um sistema com N átomos de dois níveis que são inicialmente preparados em seu estado excitado. Quando, em um determinado momento, um dos átomos decai emitindo um fóton, é induzida uma reação em cadeia que faz com que todos os N átomos decaiam emitindo N fótons no espaço livre. Estes fótons são indistinguíveis se todos os átomos estiverem confinados em uma região de tamanho da ordem do comprimento de onda da luz emitida. Este processo de emissão dá origem a um campo eletromagnético com amplitude proporcional ao número de fótons N e densidade de energia proporcional a N^2 (DICKE, 1954).

O modelo de Dicke descreve um único modo bosônico, que pode ser representado por um modo de campo eletromagnético em uma cavidade que interage com um conjunto de N átomos de dois níveis. Neste modelo, os operadores relativos a cada átomo são representados por σ_z^i , σ_+^i e σ_-^i , que são os respectivos operadores do i -ésimo átomo presente no sistema. Podemos, no entanto, a partir destes operadores individuais, definir operadores coletivos para o sistema, dados por S_z , S_+ e S_- e, assim, o hamiltoniano de

Dicke $\hat{H}_D$ é dado por

$$\hat{H}_D = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega \hat{S}_z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{S}_+ + \hat{S}_-), \quad (43)$$

onde λ é o parâmetro de acoplamento entre a matéria e o campo, os operadores $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ são os operadores de criação e aniquilação de fótons, $\hat{S}_z$ é o operador de população relativa atômica e $\hat{S}_+$ e $\hat{S}_-$ são operadores de transição atômica.

O modelo de Dicke pode ser considerado uma generalização multiátomo do modelo de Jaynes-Cummings, que é representado por um hamiltoniano quântico, completamente solúvel, de um átomo de dois níveis em um campo eletromagnético de um modo (JAYNES; CUMMINGS, 1963).

Uma característica muito importante do hamiltoniano de Dicke, descoberto por Hepp e Lieb, é a presença de uma transição de fase de comportamento normal para superradiante. Este fenômeno foi usado para descrever a radiação coerente, um efeito coletivo envolvendo todos os N átomos do sistema, onde a taxa de decaimento é proporcional a N^2 , diferentemente do resultado esperado para a emissão de átomos independentes, que é um decaimento proporcional a N (HEPP; LIEB, 1973). Embora essa transição para a fase superradiante tenha sido muito debatida na literatura, devido à baixa intensidade do valor da força de acoplamento campo-matéria, resultados experimentais recentes indicam que ela pode realmente ser observada (NAGY et al., 2010).

2.4.1 Mapeamento do Modelo de Dois Modos no Modelo de Dicke

Como será mostrado a seguir, o modelo optomecânico de dois modos em questão pode ser mapeado no conhecido modelo de Dicke, que descreve a interação entre um número de átomos de dois níveis com um campo eletromagnético. Vale ressaltar que a dissipação tem sido considerada teoricamente em estudos do modelo de Dicke, conforme visto em (BHASEEN et al., 2012), (GELHAUSEN; BUCHHOLD, 2018), (REITER et al., 2020) e (FUCHS et al., 2016), com base em aproximação de campo médio ou abordagens semiclássicas. Tais trabalhos revelam novas e interessantes propriedades ausentes no caso não amortecido. Por exemplo, se o amortecimento coletivo dos átomos for levado em conta, transições bicríticas ou coexistência de duas ou mais fases são previstas (BHASEEN et al., 2012), (GELHAUSEN; BUCHHOLD, 2018). Simulações experimentais do modelo dissipativo de Dicke foram realizadas usando átomos ultrafrios confinados em cavidades de alta finesse (ZHIQIANG et al., 2017), (KLINDER et al., 2015). Apesar do presente trabalho adotar a aproximação de sistema fechado, que é muito restritiva em modelos optomecânicos quânticos, vale ressaltar que foi considerado o caso de sistema de tamanho finito e empregou-se abordagem de mecânica quântica completa, como uma caracterização inicial do modelo optomecânico de dois modos. Os estudos no domínio do modelo dissipativo de Dicke citados acima apontam

a inclusão de dissipação e bomba óptica como uma extensão natural deste trabalho, e sugerem o modelo optomecânico de dois modos como uma plataforma promissora para realizar novos fenômenos, como histerese e transições multifásicas.

Para estudar o modelo de dois modos acoplados por uma membrana móvel proposto no hamiltoniano da Eq. (42), será feito um paralelo com o modelo de Dicke, cujo hamiltoniano pode ser escrito em função dos operadores de momento angular, dados por

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}), \quad (44)$$

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2i} (\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}), \quad (45)$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} (\hat{n}_a - \hat{n}_b). \quad (46)$$

Estes operadores obedecem às relações de comutação da álgebra do grupo SU(2), ou seja, $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k$, com i, j, k assumindo valores em $\{x, y, z\}$. Aqui, ε_{ijk} representa o símbolo de Lévi-Civita. O operador $\hat{S}_z$ possui autoestados $|S, m_s\rangle$, que estão relacionados com os operadores de número $\hat{n}_a$ e $\hat{n}_b$. Cada autoestado do operador $\hat{S}_z$ possui dois números quânticos: S , que é igual a metade do número total de fótons armazenados na cavidade $S = \frac{n_a + n_b}{2}$ e m_s , que é igual a metade da diferença do número de fótons no modo a pelo número de fótons no modo b , $m_s = \frac{n_a - n_b}{2}$.

Será realizada, por conveniência, uma reflexão no hamiltoniano de Dicke, de forma a trocar os papéis dos operadores $\hat{S}_x$ e $\hat{S}_z$ (MUMFORD; O'DELL; LARSON, 2015). Desconsiderando a parte relativa ao bombeio e às perdas, tem-se que o hamiltoniano do sistema optomecânico é dado por

$$\hat{H}' = \hat{n}_c + 2g'\hat{S}_x + \sqrt{2}\lambda (\hat{c} + \hat{c}^\dagger) \hat{S}_z, \quad (47)$$

onde, analogamente ao hamiltoniano original de Dicke, $\hat{n}_c = \hat{c}^\dagger \hat{c}$ representa o operador número de fônons. O hamiltoniano reescrito deste modo (Eq. (47)) é completamente análogo ao que representa o modelo de Dicke N -átomos, conforme visto em (DICKE, 1954), (HEPP; LIEB, 1973), (WANG; HIOE, 1973) e (KIRTON et al., 2019), exceto pela troca $\hat{S}_x \leftrightarrow \hat{S}_z$. Neste caso, o papel do campo do modelo de Dicke é representado pelo sistema mecânico, ou seja, pela membrana, enquanto o papel dos átomos no modelo de Dicke é representado, agora, pelos modos a e b .

Apesar do modelo proposto ser um sistema simples, o mesmo apresenta uma fenomenologia muito rica, uma vez que, em sua dinâmica, é observada transição de fase quântica. O valor médio do observável $\hat{S}_z$, que representa a diferença entre o número fótons nas cavidades a e b , varia quando variamos o parâmetro λ , e tal parâmetro apresenta um valor crítico para o sistema.

2.5 Força na Membrana

Para verificar o comportamento da força média que atua na membrana à medida em que se varia o parâmetro λ , tomando como referência o estado fundamental, foi feita uma analogia com a mecânica clássica. Pode-se considerar que o valor médio da força na membrana equivale ao valor médio da derivada temporal do momento linear da mesma, representado por $\dot{\hat{p}}$.

Da equação de Schrödinger expressa por

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = \hat{H}' |\Psi\rangle, \quad (48)$$

tem-se, supondo que o hamiltoniano $\hat{H}$ independa explicitamente do tempo t , que

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}], \quad (49)$$

onde $[\hat{A}, \hat{H}]$ é o comutador entre um operador $\hat{A}$ e $\hat{H}$.

Logo, para o caso do hamiltoniano dado pela Eq. (47),

$$\frac{d}{dt}\hat{p} = \dot{\hat{p}} = -\frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \hat{H}'] = -m\omega^2 \hat{x} - \frac{2}{L}\hbar\omega_0 (\hat{n}_a - \hat{n}_b). \quad (50)$$

Pode-se observar, pela Eq. (50), que existem duas contribuições para a “força” resultante na membrana, que é dada pela soma de um termo que depende da posição da membrana, representada pelo operador $\hat{x}$ com o termo que representa o *imbalance*, dado pelo operador $\hat{S}_z$. A primeira é chamada contribuição harmônica, uma vez que a membrana se comporta como um oscilador harmônico. A segunda contribuição para a força, que não é trivial, vem da interação do campo com a membrana e está diretamente relacionada com a diferença de pressão da radiação que atua na membrana, gerada pela diferença do número de fótons entre os modos, representada pelo termo $(\hat{n}_a - \hat{n}_b)$. Em termos de operadores e parâmetros adimensionais, temos

$$\frac{d}{d\tau}\hat{P} = -\hat{X} - \lambda (\hat{n}_a - \hat{n}_b) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{c} + \hat{c}^\dagger) - 2\lambda \hat{S}_z, \quad (51)$$

onde $\tau = \omega t$ é um tempo adimensional. Vamos definir o operador de força adimensional como $\hat{F} = \frac{d}{d\tau}\hat{P}$. Da mesma forma, percebe-se duas contribuições para $\hat{F}$ no lado direito da Eq. (51): o primeiro termo representa a força de restauração elástica, o segundo é devido à pressão de radiação atuando na membrana e é proporcional ao *imbalance* de fótons dos modos a e b .

Capítulo 3

Metodologia

A metodologia proposta é de caráter investigativo e exploratório, visando compreender o comportamento dos sistemas optomecânicos de dois modos acoplados que apresentam degenerescência, realizando seu estudo através de valores médios de alguns observáveis, da suscetibilidade de fidelidade, das flutuações do sistema e do comportamento da força resultante na membrana. Estudos teóricos foram realizados durante todo o processo com a finalidade de embasar e solidificar ao máximo os conhecimentos sobre o assunto. Estes se deram através de pesquisas e leituras de referências, buscando sempre a aplicação em sistemas optomecânicos, em questões específicas que foram objeto deste estudo.

A mecânica quântica assim como conceitos físicos relacionados e necessários para o entendimento dos fenômenos observados também foram bastante estudados. Já as simulações foram realizadas por meio de algoritmos e modelos matemáticos desenvolvidos para esta finalidade, além do uso de ferramentas já existentes.

Uma vez que trabalhamos com matrizes muito grandes, da ordem de $(2S + 1)(N_{max} + 1)$, o processo de diagonalização foi realizado por meio de um algoritmo que utiliza uma técnica conhecida como "dividir para conquistar". Esta técnica divide o problema, de forma recursiva, em subproblemas do mesmo tipo, que devem representar uma parte do problema original. Estes problemas são, então, resolvidos e as soluções combinadas, adequadamente, formulando a solução para o problema original, reduzindo, assim, a complexidade e o tempo de computação. Como ferramentas, utilizamos programas e linguagens de programação como o *Matlab* e o *Python*.

O desenvolvimento destas ferramentas faz parte da metodologia proposta e dos objetivos do trabalho. Posteriormente, será feita uma interpretação dos resultados encontrados, alcançando informações precisas e relevantes sobre os temas em questão, visando melhorias e sugestões que possibilitem e auxiliem possíveis trabalhos futuros sobre os assuntos estudados.

Capítulo 4

Resultados

O objetivo principal deste trabalho é observar e investigar os precursores da transição de fase quântica no modelo proposto, estudando o comportamento de alguns observáveis, pré-definidos, no estado fundamental, mediante a variação de parâmetros pertencentes ao hamiltoniano que rege o sistema, além de outros quantificadores. Para isto, utilizou-se de ferramentas matemáticas e computacionais, como algoritmos e programas de computação numérica, que possibilitaram a execução de tais processos.

Primeiramente, foi tomado o limite termodinâmico do sistema, aumentando o número de partículas de forma que $N \rightarrow \infty$. Neste limite, obtém-se um equivalente clássico a partir do hamiltoniano quântico do sistema dado pela Eq. (47). A partir de então, foi caracterizado o valor crítico do parâmetro λ , a partir do qual o hamiltoniano quântico exibe degenerescência.

Na seção seguinte, investigamos os precursores da transição de fase quântica no modelo optomecânico proposto. Foram, então, avaliados os aspectos da diagonalização do hamiltoniano do sistema, a degenerescência dos estados menos energéticos, o *imbalance* entre os modos próximo ao ponto crítico, a suscetibilidade de fidelidade e as flutuações no sistema como sinalizadores dos precursores da transição de fase quântica.

Já na última seção deste capítulo, foi discutido o comportamento da força média sobre a membrana, dada pelo operador $\hat{F}$, próximo ao ponto crítico. Todas as situações foram realizadas com o sistema em seu estado fundamental, mediante a variação do parâmetro de controle λ .

4.1 O Limite Termodinâmico

Com o intuito de observar o comportamento do sistema optomecânico de dois modos, descrito pelo hamiltoniano da Eq. (47), apresentado na subseção 2.4.1, fazendo analogia com modelos da física clássica, vamos aumentar o número quântico S na cavidade. Este

número é relacionado ao número total de fótons armazenados nos modos. Chamamos de limite termodinâmico quando, em um sistema, o número de partículas ou, neste caso, fótons, se torna grande o suficiente para considerarmos $S \rightarrow \infty$.

Lembrando que o hamiltoniano quântico do sistema, Eq. (47), é dado por

$$\hat{H}' = \hat{n}_c + 2g'\hat{S}_x + \sqrt{2}\lambda (\hat{c} + \hat{c}^\dagger) \hat{S}_z,$$

e definindo

$$\hat{\mathcal{H}} \equiv \frac{\hat{H}'}{S}, \quad (52)$$

temos os operadores normalizados

$$\hat{\gamma} \equiv \frac{\hat{c}}{\sqrt{S}}, \quad (53)$$

$$\hat{s}_x \equiv \frac{\hat{S}_x}{S}, \quad (54)$$

$$\hat{s}_z \equiv \frac{\hat{S}_z}{S} \quad (55)$$

e o parâmetro de acoplamento normalizado

$$u \equiv \lambda\sqrt{S}. \quad (56)$$

Em termos destes operadores e parâmetro de acoplamento, $\hat{\mathcal{H}}$ é dado por

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\gamma}^\dagger \hat{\gamma} + 2g'\hat{s}_x + \sqrt{2}u (\hat{\gamma}^\dagger + \hat{\gamma}) \hat{s}_z \quad (57)$$

O limite de $S \rightarrow \infty$, equivale ao número de fótons armazenados na cavidade indo até o infinito.

No limite termodinâmico, o hamiltoniano quântico $\hat{\mathcal{H}}$ se torna $\mathcal{H}$, em que

$$\mathcal{H} = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\hat{H}'}{S}, \quad (58)$$

onde S é igual a metade do número de fótons nos modos a e b . Da mesma forma, $\hat{\gamma} \rightarrow \gamma$, $\hat{s}_x \rightarrow s_x$ e $\hat{s}_z \rightarrow s_z$. Temos, então, que

$$\gamma = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\hat{\gamma}}{\sqrt{S}}, \quad (59)$$

$$s_x = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}_x}{\sqrt{S}} = \sqrt{1 - s_z^2} \cos \phi \quad (60)$$

e

$$s_z = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}_z}{\sqrt{S}}, \quad (61)$$

com $-1 \leq s_z \leq 1$, e ϕ , com $0 \leq \phi \leq \pi$, são as variáveis dinâmicas deste hamiltoniano clássico.

Sabendo que

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1, \quad (62)$$

temos que as relações de comutação são dadas por

$$\lim_{S \rightarrow \infty} [\hat{\gamma}^\dagger, \hat{\gamma}] = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} [\hat{c}^\dagger, \hat{c}] = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} = 0 \quad (63)$$

e

$$\lim_{S \rightarrow \infty} [\hat{s}_i, \hat{s}_j] = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S^2} [\hat{S}_i, \hat{S}_j] = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S^2} \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k = 0, \quad (64)$$

onde ε_{ijk} representa o símbolo antissimétrico de Levi-Civita. No limite $S \rightarrow \infty$, os operadores do hamiltoniano da Eq. (57) podem ser substituídos por funções *c-number*, dando origem ao hamiltoniano clássico

$$\mathcal{H} = \lim_{S \rightarrow \infty} \hat{\mathcal{H}} = \gamma^* \gamma + 2g' \sqrt{1 - s_z^2} \cos \phi + \sqrt{2}u (\gamma^* + \gamma) s_z. \quad (65)$$

Para manter o parâmetro de acoplamento renormalizado u finito, à medida que S vai para o infinito, λ vai para zero.

4.1.1 Caracterização do ponto crítico λ_1

A partir do estudo do limite termodinâmico do sistema, vamos utilizar este conceito para caracterizar seus pontos críticos. Mudanças na estrutura dos níveis de energia de um hamiltoniano quântico podem ser sinalizadas por mudanças na estrutura do espaço de fase clássico correspondente (HEISS; SCHOLTZ; GEYER, 2005), (MOREIRA et al., 2008). Como discutimos anteriormente, quando o parâmetro de acoplamento λ atinge o primeiro valor crítico λ_1 , o modelo optomecânico apresenta degenerescência. Para calcular o valor de λ_1 , recorreremos ao limite termodinâmico do hamiltoniano dada a Eq.(47), definindo na subseção anterior.

O hamiltoniano clássico na Eq. (65) depende de quatro variáveis dinâmicas. O espaço de fase clássico está inserido em um espaço quadridimensional, de modo que, à medida que os parâmetros variam, a estrutura das órbitas, juntamente com a natureza dos pontos críticos também muda. Os pontos críticos do hamiltoniano $\mathcal{H}$ podem ser obtidos tomando-se a sua derivada primeira no limite termodinâmico em relação às variáveis γ , γ^* , s_z e ϕ respectivamente, obtendo, assim

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma} = \gamma^* + \sqrt{2}us_z, \quad (66)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma^*} = \gamma + \sqrt{2}us_z, \quad (67)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s_z} = \frac{-2g's_z \cos \phi}{\sqrt{1-s_z^2}} + \sqrt{2}u(\gamma^* + \gamma) \quad (68)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = -2g'\sqrt{1-s_z^2} \sin \phi. \quad (69)$$

Tornando nulas ou indefinidas as derivadas nas Eq. (66)–(69), obtém-se o seguinte conjunto de pontos críticos:

$$\gamma = \gamma^* = 0, s_z = 0, \phi = 0 \text{ ou } \pi, \quad (70a)$$

$$\gamma = \gamma^* = \pm u \sqrt{2 \left(1 - \frac{g'^2}{4u^4} \right)}, s_z = \mp \sqrt{1 - \frac{g'^2}{4u^4}}, \phi = 0 \text{ ou } \pi, \text{ e} \quad (70b)$$

$$\gamma = \gamma^* = \pm \sqrt{2}u, s_z = \mp 1, \text{ e } \phi \text{ é indefinido.} \quad (70c)$$

Em nossas simulações, fizemos $g' = 1/2$. Assim, assumindo s_z real, o ponto crítico da Eq. (70b) só deve ser considerado para $u \geq 1/2$. Para $u = 1/2$, as Eq. (70a) e (70b) representam o mesmo ponto crítico e, a medida que u assume valores maiores que $1/2$, tais pontos críticos se separam.

Com o intuito de classificar os pontos críticos, foi construída a matriz Hessiana para estes valores, correspondentes ao hamiltoniano $\mathcal{H}$. Esta ficou representada da seguinte forma

$$\mathbf{H}(\gamma, \gamma^*, s_z, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2}u & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}u & 0 \\ \sqrt{2}u & \sqrt{2}u & -\frac{2g' \cos \phi}{(1-s_z^2)^{3/2}} & \frac{2g' s_z \sin \phi}{\sqrt{1-s_z^2}} \\ 0 & 0 & \frac{2g' s_z \sin \phi}{\sqrt{1-s_z^2}} & -2g' \sqrt{1-s_z^2} \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (71)$$

A Eq. (70a) fornece dois pontos críticos, um para $\phi = 0$ e outro para $\phi = \pi$. Para $g' = 1/2$, temos $\det \mathbf{H}(0, 0, 0, 0) = 1 + 4u^2$, que é sempre positivo qualquer que seja o valor de u . Mas, neste caso, a matriz Hessiana $\mathbf{H}$ não é definida positiva nem definida negativa, uma vez que a mesma apresenta autovalores positivos e negativos, e o ponto crítico na Eq. (70a) para $\phi = 0$ corresponde a um ponto de sela. No entanto, $\det \mathbf{H}(0, 0, 0, \pi) = 1 - 4u^2$, é positivo para $0 \leq u < 1/2$ e negativo para $u > 1/2$. Observa-se que a natureza deste último

ponto crítico muda se $u = 1/2$. Na verdade, para $0 \leq u < 1/2$, $\mathbf{H}$ é definida positiva (mínimo local), mas, para $u > 1/2$, a positividade/negatividade de $\mathbf{H}$ não é definida (ponto de sela).

Para o caso da Eq. (70b), definimos $\tilde{\gamma} = u\sqrt{2\left(1 - \frac{g'^2}{4u^4}\right)}$ e $\tilde{s}_z = \sqrt{1 - \frac{g'^2}{4u^4}}$. Esta equação fornece quatro pontos críticos dependendo do valor tomado para ϕ e do sinal escolhido para γ e s_z . Assim, para $g' = 1/2$, temos

$$\det \mathbf{H}(\pm\tilde{\gamma}, \pm\tilde{\gamma}^*, \mp\tilde{s}_z, 0) = 8u^4 - 1/2 \quad (72)$$

e

$$\det \mathbf{H}(\pm\tilde{\gamma}, \pm\tilde{\gamma}^*, \mp\tilde{s}_z, 0) = 8u^4 + 1/2. \quad (73)$$

Como mencionado acima, esses pontos críticos não têm sentido se $u < 1/2$. Para $u > 1/2$, os pontos críticos na Eq. (70b) para $\phi = 0$ são pontos de sela, uma vez que a positividade/negatividade de $\mathbf{H}$ não está definida. Contudo, para $\phi = \pi$ e para $u > 1/2$, os pontos críticos na Eq. (70b) são mínimos locais, em virtude da positividade de $\mathbf{H}$. Em suma, o ponto crítico $\gamma = \gamma^* = 0$, $s_z = 0$, $\phi = \pi$ é um mínimo local para $0 < u < 1/2$ e se transforma em um ponto de sela para $u > 1/2$, e dois novos mínimos locais, localizados simetricamente em torno dele, aparecem em $\gamma = \gamma^* = \pm u\sqrt{2\left(1 - \frac{g'^2}{4u^4}\right)}$, $s_z = \mp\sqrt{1 - \frac{g'^2}{4u^4}}$, $\phi = \pi$. Novamente, a natureza dos pontos críticos relacionados com $\phi = \pi$ muda quando u atinge o valor $1/2$. Em nossas simulações, a degenerescência ocorre para $u \approx 1/2$, de acordo com o valor crítico encontrado usando a versão clássica do hamiltoniano $\hat{H}'$.

4.2 Precursores da Transição de Fase Quântica no Modelo Optomecânico de Dois Modos

Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos pela diagonalização do hamiltoniano $\hat{H}'$. Vale ressaltar que o observável $\hat{n}_a + \hat{n}_b$ comuta com o hamiltoniano $\hat{H}'$ e o número quântico S está associado ao número total de fótons armazenados em ambos os modos. De fato, como os autovalores do operador de *imbalance* de fótons $\hat{S}_z$ definido na Eq. (47) vai de $-S$ (todos os fótons encontrados no modo b) até S (todos os fótons no modo a), o número de fótons armazenados na cavidade é igual a $2S$. Assim, ao estabelecer um dado valor para S , definimos um subespaço particular do espaço global de estados caracterizado para coletar os autoestados de $\hat{n}_a + \hat{n}_b$ com o mesmo autovalor $2S$. Quando nos referimos ao estado fundamental de $\hat{H}'$ para um valor fixo de S , nos referimos ao autoestado de menor energia de $\hat{H}'$ restrito a este subespaço particular.

Por outro lado, o número de fônons, representado por $\hat{n}_c$, não é preservado na dinâmica regida pelo hamiltoniano $\hat{H}'$. Este fato impõe alguns desafios à diagonalização numérica

de $\hat{H}'$, uma vez que a expansão exata de qualquer um de seus autoestados usando os autovetores de $\hat{n}_c$ produz um número infinito de coeficientes desconhecidos. Para que a diagonalização seja viável, o truncamento nessa expansão é imposto, limitando o número de autovetores de $\hat{n}_c$ em uma expansão de um autoestado de $\hat{H}'$. Definimos este truncamento como N_{max} , logo a base utilizada na diagonalização numérica é o conjunto $\{|m, n_c\rangle\}_{m=-S\dots S, n_c=0\dots N_{max}}$. No entanto, conforme discutido por (CHEN et al., 2008), a energia do estado fundamental de $\hat{H}'$ não converge rapidamente à medida que o número de termos incluídos na expansão do estado fundamental aumenta. Discutimos, também, como essa convergência afeta a avaliação dos valores médios dos observáveis associados ao subsistema mecânico.

4.2.1 Aspectos da Diagonalização do Hamiltoniano do Sistema Optomecânico de Dois Modos

Começamos com o hamiltoniano que descreve a interação de dois modos do campo eletromagnético com uma membrana, dado pela Eq. (47). Definimos o operador de deslocamento generalizado

$$\hat{D}(\hat{\xi}) = \exp(\hat{\xi}\hat{c}^\dagger - \hat{\xi}^\dagger\hat{c}), \quad (74)$$

que, de acordo com (PERELOMOV, 1986) ao atuar em $\hat{c}$ e $\hat{c}^\dagger$, produz

$$\hat{D}(\hat{\xi}) \hat{c} \hat{D}^\dagger(\hat{\xi}) = \hat{c} - \hat{\xi} \quad (75)$$

e

$$\hat{D}(\hat{\xi}) \hat{c}^\dagger \hat{D}^\dagger(\hat{\xi}) = \hat{c}^\dagger - \hat{\xi}^\dagger, \quad (76)$$

onde

$$\hat{\xi} = \alpha \hat{S}_z. \quad (77)$$

$\hat{D}(\hat{\xi})$ é unitário, pois $\hat{D}^\dagger(\hat{\xi}) = \hat{D}^{-1}(\hat{\xi}) = \hat{D}(-\hat{\xi})$. Considere, agora, o hamiltoniano

$$\hat{h} = \hat{n}_c - 2\lambda^2 \hat{S}_z^2. \quad (78)$$

Seja $\{|m, n_c\rangle \equiv |m\rangle \otimes |n_c\rangle\}$ com $n_c = 0, 1, \dots$, e $-S \leq m \leq S$, o conjunto de autoestados de $\hat{h}$ com autovalores $E_{n_c, m} = n_c - 2\lambda^2 m^2$. Fazendo $\alpha = \sqrt{2}\lambda$ na Eq. (77), definimos

$$\tilde{h} = \hat{D}^\dagger(\hat{\xi}) \hat{h} \hat{D}(\hat{\xi}) = (\hat{c}^\dagger + \sqrt{2}\lambda \hat{S}_z) (\hat{c} + \sqrt{2}\lambda \hat{S}_z) - 2\lambda^2 \hat{S}_z^2 = \hat{n}_c + \sqrt{2}\lambda \hat{S}_z (\hat{c} + \hat{c}^\dagger). \quad (79)$$

Observe que $\tilde{h} = \hat{H}' - 2g'\hat{S}_x$. Além disso, os autoestados de $\tilde{h}$ formam o conjunto $\{|m; -\xi_m, n_c\rangle \equiv |m\rangle \otimes |-\xi_m, n_c\rangle\}$, onde $|-\xi_m, n_c\rangle = \hat{D}^\dagger(\xi_m) |n_c\rangle$, com $\xi_m = \sqrt{2}\lambda m$, é um estado de número deslocado (OLIVEIRA et al., 1990). Os respectivos autovalores são

$$E_{n_c, m} = n_c - 2\lambda^2 m^2 = n_c - \xi_m^2. \quad (80)$$

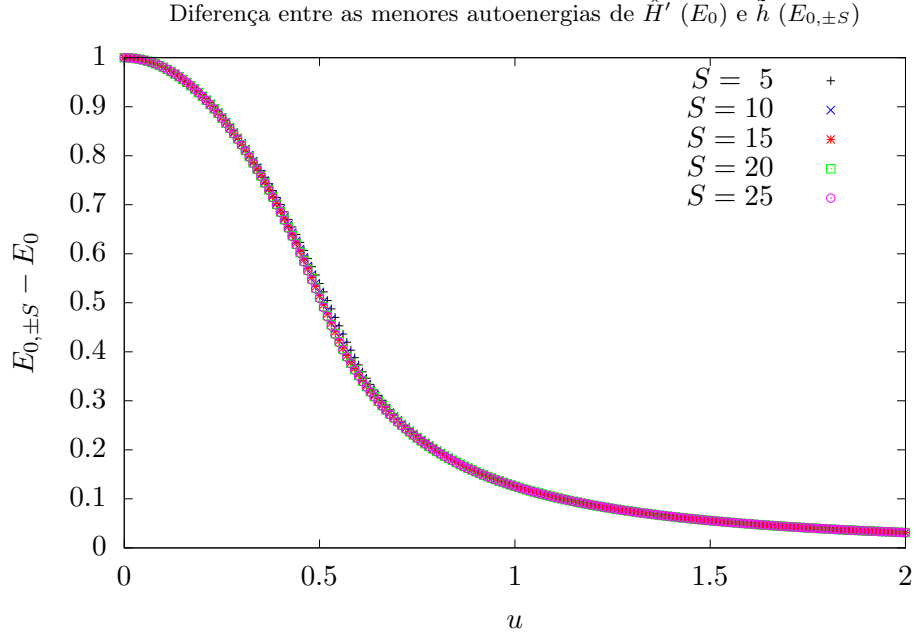


Figura 4 – Diferença entre as energias dos estados fundamentais de $\hat{H}'$ e $\tilde{h}$. Usamos $N_{max} = 15S$ como truncamento do número máximo de fônons considerados em nossas simulações. Aqui, $\lambda = u/\sqrt{S}$. Diferentes cores e símbolos foram atribuídos a diferentes valores de S : 5 (+ preto), 10 (x azul), 15 (* vermelho), 20 (□ verde) e 25 (○ magenta).

Vale notar que os autoestados com $m \neq 0$ são, pelo menos, duplamente degenerados. De fato, para um dado n_c , os estados $|m; -\xi_m, n_c\rangle$ e $| -m; -\xi_{-m}, n_c\rangle$, $m \neq 0$, têm a mesma energia $E_{n_c, m} = E_{n_c, -m}$. Em particular, o estado fundamental de $\tilde{h}$ é duplamente degenerado com energia $E_{0, -S} = E_{0, S} = -2\lambda^2 S^2$. Para ilustrar a convergência da autoenergia mais baixa de $\hat{H}'$ para a correspondente de $\tilde{h}$ à medida que λ cresce, a Fig. 4 mostra a diferença entre elas. Como $n_c = 0$, o estado fundamental de $\tilde{h}$ é $|\pm S, \pm\sqrt{2}\lambda S\rangle = |\pm S\rangle \otimes |\pm\sqrt{2}\lambda S\rangle$, onde $|\pm\sqrt{2}\lambda S\rangle$ representa o estado coerente $\hat{D}(\pm\sqrt{2}\lambda S)|0\rangle$.

Neste trabalho, escolhemos os autoestados do operador número de fônons $|n_c\rangle$ para diagonalizar o hamiltoniano $\hat{H}'$. Como a dimensão do espaço de Hilbert associado ao subsistema mecânico é infinita, deve-se adotar um truncamento para o número quântico n_c na diagonalização numérica de $\hat{H}'$. Assumindo

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-S}^S \sum_{n_c=0}^{N_{max}} c_{m, n_c} |m, n_c\rangle \quad (81)$$

como um autovetor desconhecido de $\hat{H}'$ associado a um autovalor desconhecido ϵ , $\hat{H}'|\psi\rangle = \epsilon|\psi\rangle$. A faixa de números quânticos n_c foi truncada por N_{max} , ou seja, $0 \leq n_c \leq N_{max}$. Existem $(2S+1)(N_{max}+1)$ coeficientes desconhecidos $\{c_{m, n_c}\}$ a se determinar, além do próprio ϵ . Essas incógnitas são obtidas numericamente resolvendo um sistema linear dado

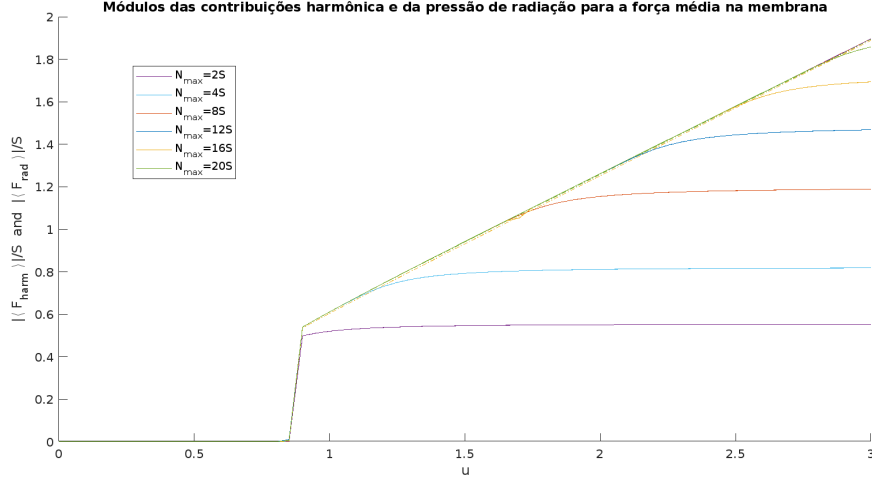


Figura 5 – Módulos dos valores das duas contribuições para a força média na membrana $\hat{F}$ em função do parâmetro $\lambda(u)$ no estado fundamental para vários valores do truncamento do número de fônons N_{max} . As curvas pontilhadas e tracejadas correspondem à contribuição da pressão de radiação, que depende do *imbalance* de fótons $\hat{S}_z$. As curvas contínuas correspondem à contribuição harmônica, que depende da posição da membrana. Nesse caso, o aparecimento de um platô para um dado valor de λ indica que a avaliação do valor médio falhou para valores maiores ou igual àquele valor de λ . Para todos os gráficos, $S = 10$.

pelas equações

$$\sum_{m=-S}^S \sum_{n_c=0}^{N_{max}} \hat{H}'_{m',n'_c;m,n_c} c_{m,n_c} = \epsilon c_{m',n'_c}. \quad (82)$$

Naturalmente, a escolha do truncamento do número de fônons N_{max} afeta o tempo de computação usado na diagonalização numérica. Além disso, esta escolha afeta a qualidade do cálculo dos valores médios dos observáveis no estado fundamental em relação ao parâmetro de acoplamento λ (ou seu equivalente u). Se o observável alvo atuar no espaço do subsistema de dois modos, o respectivo valor médio converge rapidamente com N_{max} , como acontece com o *imbalance* de fótons $\hat{S}_z$ nos modos. No entanto, a convergência é lenta se o observável visado atuar no espaço do subsistema da membrana. Isso pode ser verificado na 5, onde são traçados gráficos dos módulos dos valores médios das contribuições da força harmônica e da pressão de radiação para a força na membrana. Como a contribuição da pressão de radiação depende do *imbalance* dos fótons, a convergência é boa, mesmo para altos valores de λ . Isso não é observado para a contribuição harmônica. Quanto maior o valor de λ , maior o valor de N_{max} para obter uma boa avaliação do valor médio. Em outras palavras, o valor escolhido para N_{max} limita a faixa de variação para u ou λ . Em nossas simulações, adotamos $N_{max} = 5S$, o que se mostrou adequado para preservar a convergência dos valores médios dos observáveis à medida que u varia no intervalo $[0, 1]$.

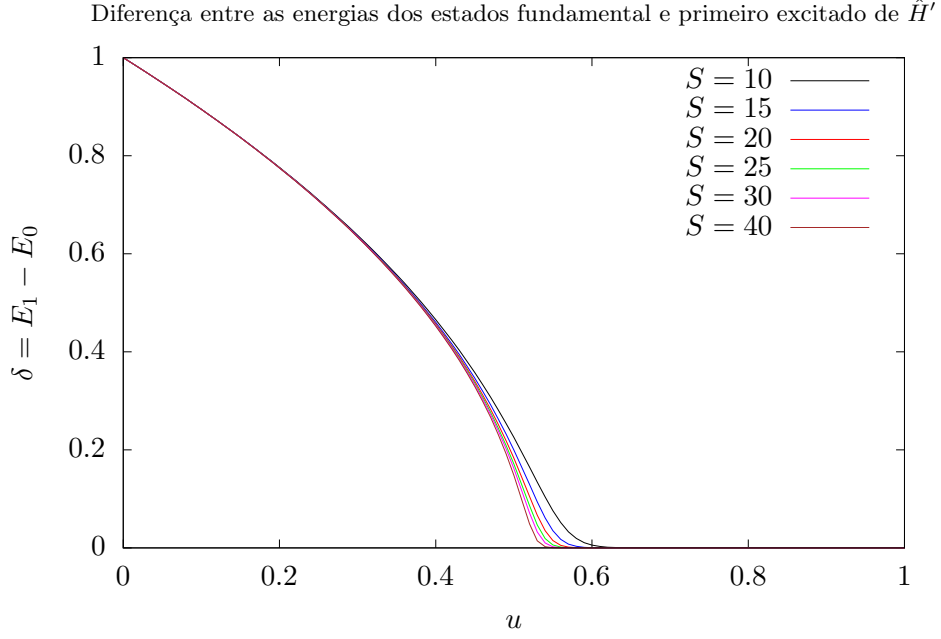


Figura 6 – Separação de energia entre os estados fundamental e primeiro excitado em relação a $\lambda(u)$, $\delta(\lambda) = E_1(\lambda) - E_0(\lambda)$, para diferentes valores de S . Observe que a separação de energia é zero para valores de λ maiores que um valor crítico. Para todas as curvas, $g' = 1/2$, $N_{max} = 5S$ e $\lambda = u/\sqrt{S}$.

4.2.2 A Degenerescência dos Estados Menos Energéticos

Outro ponto a ser considerado ao diagonalizar o hamiltoniano $\hat{H}'$ é o aparecimento de estados degenerados para valores suficientemente grandes de λ/g . Para valores de λ maiores que um valor crítico, tais estados têm a mesma energia. Para confirmar a presença da degenerescência, avaliamos a separação de energia dos estados fundamental e primeiro excitado em relação a λ , $\delta(\lambda) = E_1(\lambda) - E_0(\lambda)$, para diferentes valores de S . Na Fig. 6 traçamos curvas de $\delta(\lambda)$ para diferentes valores de S . Para um valor fixo de S , a separação de energia vai para zero conforme λ aumenta, atingindo zero em λ_1 , e é mantido igual a zero para $\lambda > \lambda_1$. Devido ao método numérico adotado, a degenerescência afeta a "escolha" de um dos estados degenerados como o estado fundamental. De fato, após a degenerescência ser estabelecida, para valores de λ maiores que λ_1 o algoritmo pode escolher, em um autosubespaço degenerado de dimensão 2, um autoestado que descreva os fótons ocupando preferencialmente o modo a , como sendo o estado fundamental mas, para outro valor de λ , o algoritmo pode escolher um outro autoestado, que descreva o modo b preferencialmente ocupado como sendo o estado fundamental. Para valores moderados, o estado fundamental é uma superposição coerente destes últimos.

O estado fundamental de $\hat{H}'$ é usado para avaliar os valores médios dos observáveis. No entanto, como dito anteriormente, o procedimento de diagonalização numérica de $\hat{H}'$, pode escolher como autoestados de menor energia, qualquer estado do subespaço bidimensional gerado como estado fundamental, entre eles, um estado que descreva um

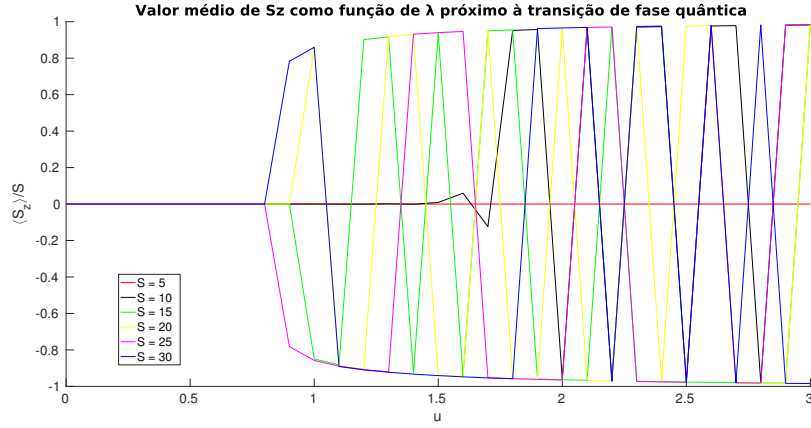


Figura 7 – Valor médio do operador $\hat{S}_z$ (*imbalance*) em função do parâmetro $\lambda(u)$ no estado fundamental do hamiltoniano da Eq. (47) para vários valores do número quântico S (5, 10, 15, 20, 25 e 30). Para todas as curvas, $g' = 1/2$, $N_{max} = 2S$ e $\lambda = u/\sqrt{S}$. É possível observar através do gráfico que as curvas apresentam saltos bruscos, aparentemente aleatórios, de $\langle \hat{S}_z \rangle$, após um valor crítico de λ , causados por estados degenerados no processo de diagonalização do hamiltoniano.

dos modos preferencialmente preenchido e o outro vazio. Assim, o aparecimento de estados degenerados pode se manifestar em observáveis que dependem do *imbalance*, $\langle \hat{S}_z \rangle$. O comportamento de $\langle \hat{S}_z \rangle / S$ em função de λ (ou, equivalentemente, u) é mostrado na Fig. 7. Para fins de comparação, fizemos o número quântico S assumir os seguintes valores: 5, 10, 15, 20, 25 e 30. Observamos que, para um valor fixo de S e para valores baixos de λ , $\langle \hat{S}_z \rangle / S$ é próximo de zero, o que aponta para uma distribuição igualitária do número de fótons em ambos os modos. Se λ assumir um valor maior que o valor crítico λ_1 (que depende de S), $\langle \hat{S}_z \rangle / S$ atinge valores próximos de 1 (máximo) ou -1 (mínimo), mostrando que um dos modos está preferencialmente ocupado e o outro está vazio. Além disso, as curvas exibem variações aparentemente aleatórias e abruptas entre tais valores negativos e positivos. Ressaltamos que este fenômeno é produzido pelo processo de diagonalização do hamiltoniano.

4.2.3 O Imbalance Entre os Modos Próximo ao Ponto de Degenerescência

Após a diagonalização do hamiltoniano do sistema dado pela Eq. (47), em um primeiro momento, foi tomado como indicador para estudo dos precursores da transição de fase quântica, o valor médio do operador $\hat{S}_z$ no estado de menor energia (estado fundamental), representado por $\langle \hat{S}_z \rangle = \langle \Psi_0 | \hat{S}_z | \Psi_0 \rangle$, em que Ψ_0 denota o estado fundamental do sistema. Este valor representa, no modelo proposto, a diferença de fótons entre os modos a e b e este desequilíbrio compõe uma das contribuições para a força na membrana. O parâmetro λ , que regula o acoplamento da membrana com os campos entre os modos, foi definido

como o parâmetro a ser variado para se observar o comportamento do operador $\langle \hat{S}_z \rangle$. O parâmetro g' foi mantido fixo, $g' = 1/2$. Assim, tem-se que o parâmetro λ varia em unidades do parâmetro g' . Como apontado por (MUMFORD; O'DELL; LARSON, 2015), em sistemas optomecânicos típicos, $g' \gg 1$, e a intensidade da refletividade r está muito próxima da unidade. Para atingir $g \simeq 1$, a frequência natural de vibração da membrana deve ser da ordem de dezenas de MHz, mesmo quando se trabalha com cavidades de microondas. Este fato pode impor alguns obstáculos à realização experimental deste modelo. A simulação é feita considerando o sistema em seu estado fundamental e, tal procedimento, é repetido para vários valores do número quântico S . A diagonalização numérica do hamiltoniano $\hat{H}'$ é viável definindo um truncamento do número de excitações (fônons) da parte mecânica, N_{max} . Para renormalizar o acoplamento entre membrana e modos, definimos $\lambda = u/\sqrt{S}$.

Conforme discutido na subseção anterior, para valores de λ maiores que o crítico λ_1 , os dois autoestados de menor energia de $\hat{H}'$ são degenerados. A degenerescência ocorre para um valor crítico dado por $\lambda_1 = 1/(2\sqrt{S})$. Este valor pode ser determinado usando o hamiltoniano clássico correspondente de $\hat{H}'$ obtido tomando o limite termodinâmico, com o número de fótons armazenados indo para infinito, conforme demonstrado na seção 4.1. A ocorrência de tal degenerescência pode ser detectada pela forma como o valor médio de alguns observáveis muda à medida que λ varia.

Para contornar os efeitos dos saltos abruptos e aleatórios de $\langle \hat{S}_z \rangle$, escolhemos um observável que não é afetado pela degenerescência mas cujo comportamento ainda sinaliza a transição de fase quântica, ou seja, tomou-se o quadrado do valor do observável $\hat{S}_z$ que representa o *imbalance* de fótons entre os modos, representado por $\langle \hat{S}_z^2 \rangle$. Este observável mostra, simplesmente, que um modo está preferencialmente ocupado e o outro está vazio, mas não faz distinção entre eles. A Fig. 8 mostra o valor médio do operador de *imbalance* ao quadrado $\hat{S}_z^2$ em função do parâmetro u , para diferentes valores de S . Como se pode observar, à medida em que u é aumentado, acontece uma mudança, em $u_c \approx 1/2$, onde $\langle \hat{S}_z^2 \rangle / S^2$ passa de pequenos valores positivos para um valor próximo de 1, independentemente do número de fótons armazenados na cavidade.

No entanto, existem observáveis que são insensíveis à ocorrência de degenerescência. Um exemplo particularmente interessante é o próprio operador de *imbalance* $\hat{S}_z$. A dependência do valor médio deste operador com parâmetro λ é mostrada na Fig. 9. À medida que o valor de u aumenta, $|\langle \hat{S}_z \rangle|$ muda abruptamente de zero para valores positivos para $u = u_2$, dependendo do número de fótons armazenados. Após esta mudança abrupta, $|\langle \hat{S}_z \rangle| / S$ tende a um valor próximo da unidade, o que significa que o estado fundamental escolhido descreve um dos dois modos preferencialmente ocupados. É importante ressaltar que tais mudanças abruptas não estão relacionadas a mudanças no sistema, pois resultam do processo de diagonalização. No entanto, elas lançam alguma luz sobre alguns aspectos

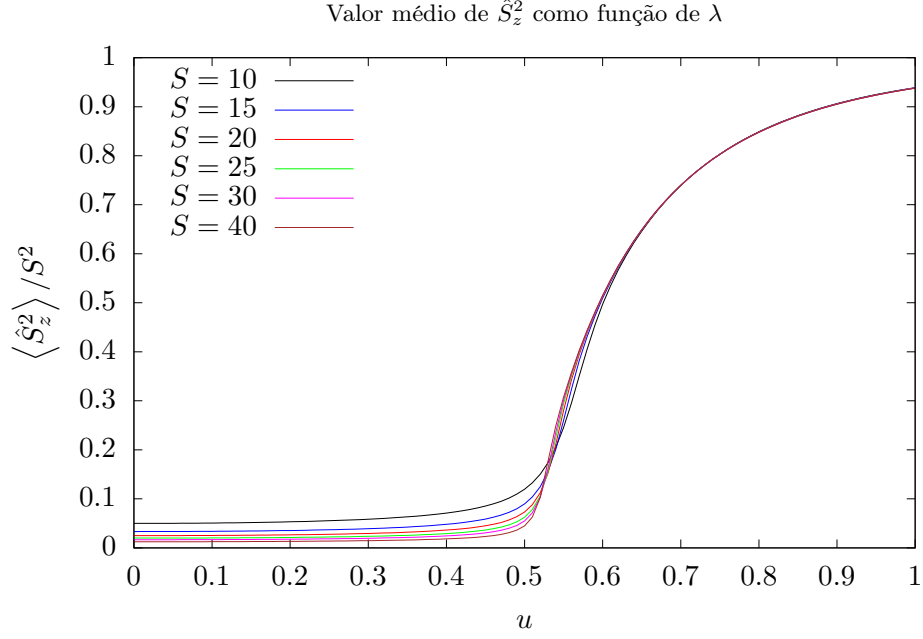


Figura 8 – Valor médio do operador $\hat{S}_z^2$ (operador do *imbalance* de fótons ao quadrado) em função do parâmetro u no estado fundamental do hamiltoniano da Eq. (47) para vários valores do número quântico S : 10 (preto), 15 (azul), 20 (vermelho), 25 (verde), 30 (magenta) e 40 (marrom). Para todas as curvas, $g' = 1/2$ e $N_{max} = 5S$.

dos dois autoestados degenerados de energia mais baixa, como será discutido abaixo.

Conforme discutido anteriormente, o procedimento de diagonalização numérica de $\hat{H}'$ pode pegar o autoestado que descreve o modo a preferencialmente preenchido, $\langle \hat{S}_z \rangle / S \simeq 1$, ou pegar aquele autoestado que descreve o modo b preenchido, $\langle \hat{S}_z \rangle / S \simeq -1$. Para cada valor de λ maior que λ_2 , tal procedimento pode escolher um ou outro autoestado para representar $|\Psi_0\rangle$.

Para suprimir saltos abruptos aleatórios na avaliação do valor médio de $\hat{S}_z$, uma ligeira modificação é implementada no algoritmo usado para diagonalizar $\hat{H}'$. Os dois autoestados degenerados de energia mais baixa, $|\Psi_0(\lambda_n)\rangle$ e $|\Psi_1(\lambda_n)\rangle$ obtidos para o valor atual do parâmetro de controle, λ_n , são comparados com o autoestado de referência anterior $|\Psi_r(\lambda_{n-1})\rangle$. Como λ_n está próximo de λ_{n-1} , um dos dois autoestados de energia mais baixa, $|\Psi_0(\lambda_n)\rangle$ ou $|\Psi_1(\lambda_n)\rangle$, tem sobreposição considerável com $|\Psi_r(\lambda_{n-1})\rangle$ enquanto o outro é quase ortogonal a este. Assim, o estado de energia mais baixa que apresenta maior sobreposição com o estado de referência anterior será escolhido como o autoestado de referência atual. Adotando este procedimento, o valor médio do operador de *imbalance* $\hat{S}_z$ em função de λ é avaliado no atual estado fundamental de $\hat{H}'$ e os resultados são mostrados na Fig. 9.

As mudanças abruptas nas curvas da Fig. 9 podem ser entendidas como resultado do processo de diagonalização. Elas ocorrem para valores do parâmetro de acoplamento

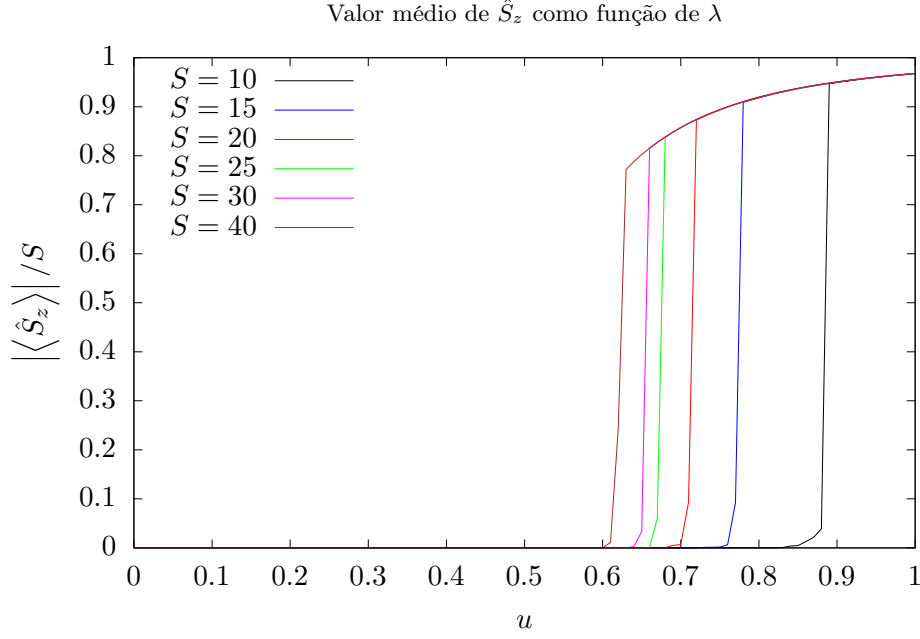


Figura 9 – Módulo do valor médio do operador $\hat{S}_z$ (*imbalance* de fótons) em função de u no estado fundamental do hamiltoniano da Eq. (47) para vários valores do número quântico S : 10 (preto), 15 (azul), 20 (vermelho), 25 (verde), 30 (magenta) e 40 (marrom). Para todas as curvas, $g' = 1/2$ e $N_{max} = 5S$.

λ_2 que depende de S , e é maior que o valor λ_1 , para o qual os dois autoestados de menor energia se tornam degenerados, ou seja, $\lambda_2 > \lambda_1$. Neste caso, os dois autoestados de energia mais baixa $|\Psi_0\rangle$ e $|\Psi_1\rangle$ definem um autosubespaço bidimensional, $\mathcal{W} = \text{span}\{|\Psi_0\rangle, |\Psi_1\rangle\}$. Qualquer estado pertencente a $\mathcal{W}$ pode ser considerado o estado fundamental pelo processo de diagonalização. Portanto, as mudanças abruptas observadas nas curvas da Fig. 9 ocorrem porque, após o processo de diagonalização, é escolhido em $\mathcal{W}$ um estado que descreve um dos dois modos preferencialmente ocupados. Isso pode ser melhor compreendido observando a distribuição dos coeficientes c_{m,n_c} dada pela expansão do estado fundamental na base computacional. As Fig. 10 e 11 mostram tal distribuição para três situações diferentes com $S = 15$. Para tanto, os estados da base computacional são organizados em ordem crescente da seguinte forma: $|m = -15, n_c = 0\rangle, |m = -15, n_c = 1\rangle, \dots, |m = -15, n_c = N_{max}\rangle, \dots, |m = 15, n_c = N_{max}\rangle$. Assim, os coeficientes associados aos valores negativos de m aparecem no lado esquerdo dos gráficos, enquanto os coeficientes associados aos valores positivos de m aparecem no lado direito. Antes da degenerescência, conforme mostrado na Fig. 10 para $u = 0.4$, os coeficientes são distribuídos simetricamente ao longo de todo o eixo horizontal, apresentando valores mais significativos na parte central, onde $m \sim 0$.

Após o aparecimento da degenerescência, a distribuição dos coeficientes muda de forma. Na verdade, os coeficientes desaparecem na parte central e são diferentes de zero nas extremidades dos gráficos, como pode ser visto na Fig. 11. Esta figura exhibe as distribuições

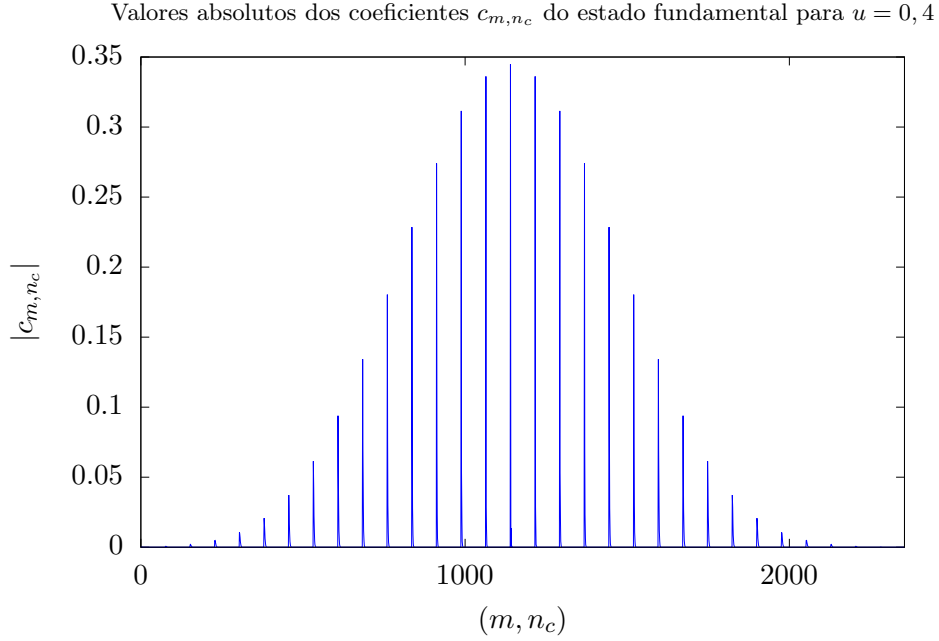


Figura 10 – Módulos dos coeficientes c_{m,n_c} do estado fundamental de $\hat{H}'$ em relação à base computacional $\{|m, n_c\rangle\}_{m=-S\dots S, n_c=0\dots N_{max}}$ para $u = 0,4$. Aqui, $S = 15$ e $N_{max} = 5S$. Os estados na base computacional são ordenados em ordem crescente, da seguinte forma: $|m = -15, n_c = 0\rangle, |m = -15, n_c = 1\rangle, \dots, |m = -15, n_c = 75\rangle, \dots, |m = 15, n_c = 75\rangle$. Os números no eixo horizontal rotulam os estados da base computacional seguindo esta ordem. As variáveis são discretas e as linhas são guias para melhor visualização.

dos coeficientes para ambos os autoestados degenerados de energia mais baixa em duas situações: após a degenerescência, mas antes da mudança abrupta observada na Fig. 9 ($u = 0,7$) e depois da mudança abrupta ($u = 0,9$). Na primeira situação, para ambos os autoestados, os coeficientes não nulos aparecem em ambas as extremidades do gráfico. Porém, para a outra situação, com $u = 0,9$, os coeficientes não nulos estão concentrados em uma extremidade do gráfico para um dos autoestados, enquanto para o outro autoestado, os coeficientes estão concentrados na outra extremidade. Assim, para $u = 0,9$, o autoestado com coeficientes distribuídos na extremidade esquerda produz $\langle \hat{S}_z \rangle / S \approx -1$ enquanto o autoestado com coeficientes distribuídos na extremidade direita produz $\langle \hat{S}_z \rangle / S \approx 1$. Na situação em que a degenerescência se estabeleceu, mas a mudança abrupta de $\langle \hat{S}_z \rangle$ ainda não ocorreu, o estado fundamental descreve uma superposição coerente desses dois autoestados (uma espécie de estado de gato de Schrödinger) que descrevem os fótons ocupando preferencialmente um dos modos.

Ressaltamos que a mudança abrupta observada nas curvas da Fig. 9 não é resultado de nenhum processo físico, mas sim produto do algoritmo de diagonalização. Por exemplo, se uma realização experimental deste sistema for realizada de tal forma que o parâmetro de

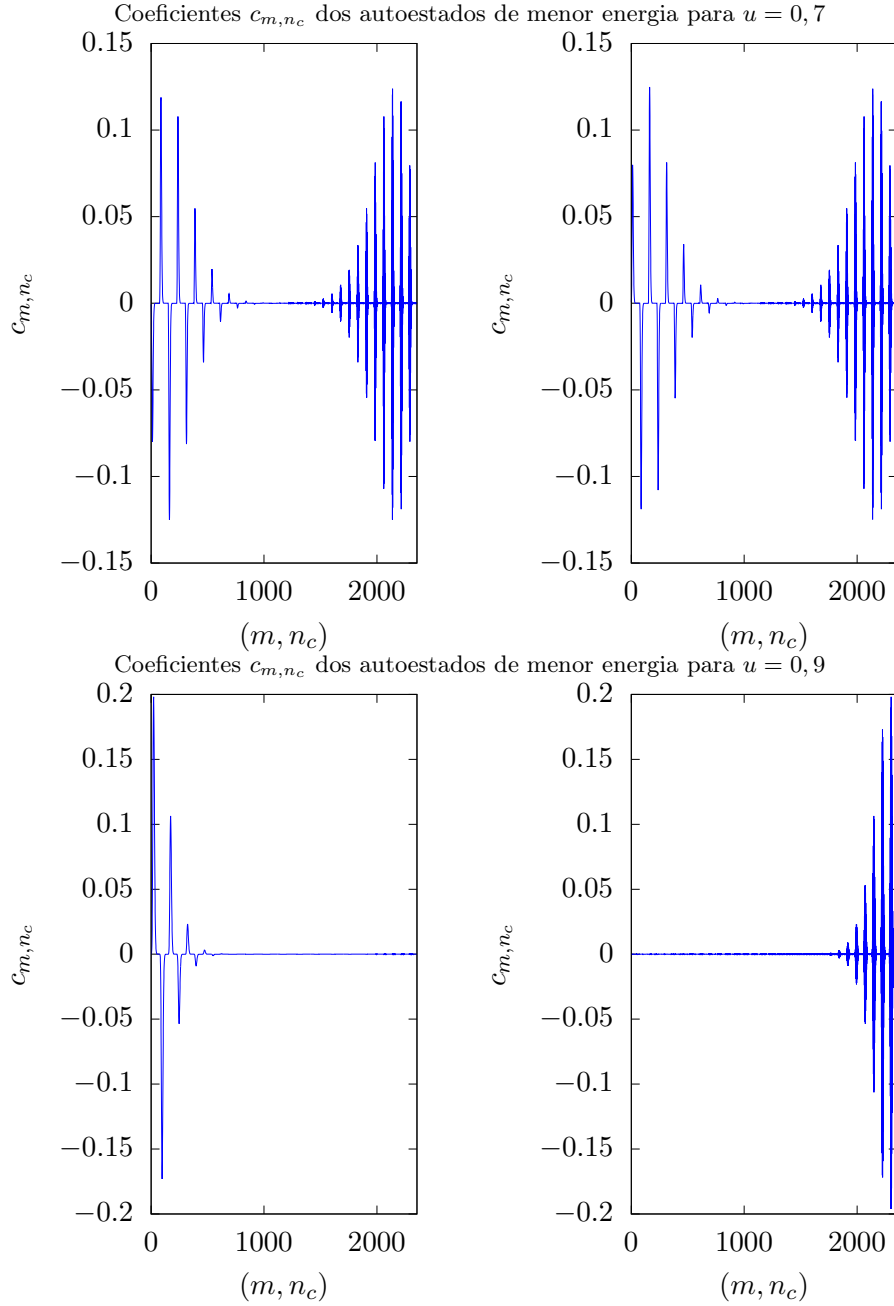


Figura 11 – Distribuições de coeficientes para os dois autoestados de menor energia $\hat{H}'$ em relação à base computacional $\{|m, n_c\rangle\}_{m=-S\dots S, n_c=0\dots N_{max}}$ para $u = 0,7$ (superior) e $u = 0,9$ (inferior). Aqui, $S = 15$ e $N_{max} = 5S$. Os estados na base computacional são ordenados em ordem crescente, da seguinte forma: $|m = -15, n_c = 0\rangle, |m = -15, n_c = 1\rangle, \dots, |m = -15, n_c = 75\rangle, \dots, |m = 15, n_c = 75\rangle$. Os números no eixo horizontal rotulam os estados da base computacional seguindo esta ordem. As variáveis são discretas e as linhas são guias para melhor visualização.

acoplamento λ seja variado adiabaticamente, não é razoável esperar que esta mudança abrupta ocorra.

4.2.4 Suscetibilidade de Fidelidade

A fidelidade entre os estados puros $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ mede quão indistinguíveis são esses estados. Esta fidelidade pode ser medida pela sobreposição destes estados

$$F(\psi, \phi) = |\langle\psi|\phi\rangle|. \quad (83)$$

Como discutido acima, para $\lambda < \lambda_1$, o estado fundamental $|\Psi_0\rangle$ do hamiltoniano H' descreve ambos os modos, aproximadamente, igualmente preenchidos, enquanto para $\lambda > \lambda_2$, $|\Psi_0\rangle$ descreve um dos dois modos preferencialmente preenchido. Como as situações físicas descritas por $|\Psi_0\rangle$ são muito diferentes para $\lambda < \lambda_1$ e para $\lambda > \lambda_2$, espera-se uma pequena sobreposição entre os estados fundamentais imediatamente antes e imediatamente após o início da degenerescência e a ocorrência da mudança abrupta mostrada na Fig. 9. Em outras palavras, considerando ϵ positivo e suficientemente pequeno, espera-se a fidelidade $F(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \equiv |\langle\Psi_0(\lambda - \epsilon)|\Psi_0(\lambda + \epsilon)\rangle|$ sofrendo um decaimento significativo para $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$ se comparado com outros valores de λ .

Para nossos propósitos, ao invés de usar fidelidade diretamente, optamos por trabalhar com a suscetibilidade de fidelidade, conforme feito em (MUMFORD; O'DELL; LARSON, 2015), (YANG, 2007) e (GU et al., 2008). Definindo a fidelidade entre os estados fundamentais $|\Psi_0(\lambda)\rangle$ e $|\Psi_0(\lambda + \delta)\rangle$ como $F(\lambda, \delta)$, a suscetibilidade de fidelidade é dada por

$$\chi_F(\lambda) \equiv -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F(\lambda, \delta)}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0}. \quad (84)$$

A Fig. 12 mostra os resultados da avaliação numérica da suscetibilidade de fidelidade em função do parâmetro λ para diversos valores do número quântico S . Para valores de $\lambda < \lambda_1$, χ_F é aproximadamente constante e próximo de zero. À medida que λ aumenta, surge uma saliência no valor de χ_F , em torno de $u = 1/2$, sinalizando o aparecimento de degenerescência dos dois autoestados de menor energia. No valor crítico λ_2 , χ_F apresenta um pico alto que cai rapidamente e, para $\lambda > \lambda_2$, torna-se aproximadamente constante. À medida que o número quântico S aumenta, esses picos parecem se acumular em torno de um determinado valor do parâmetro λ . O valor crítico λ_1 correspondente ao aparecimento de degenerescência. O pico sinaliza que os dois autoestados degenerados e de energia mais baixa agora descrevem fótons armazenados em um modo e o outro vazio, em vez de descrever uma superposição quântica de tais autoestados.

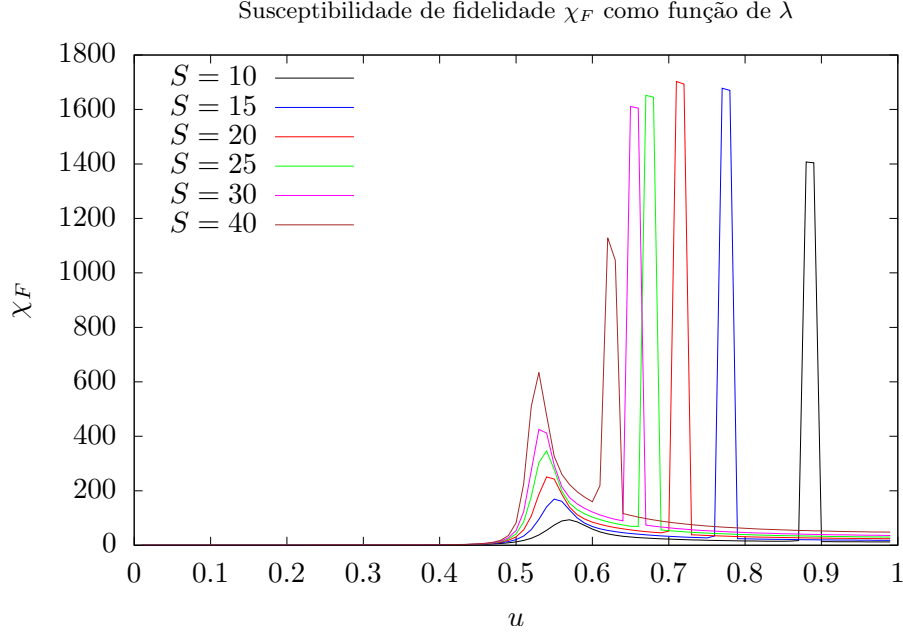


Figura 12 – Suscetibilidade de fidelidade χ_F entre os estados fundamentais do hamiltoniano da Eq. (47) em função do parâmetro $\lambda(u)$ para vários valores de S . Utilizou-se $N_{max} = 5S$ como truncamento do número máximo de fônons considerados nas simulações. Aqui, $\lambda = u/\sqrt{S}$. Diferentes cores foram atribuídas a diferentes valores de S : 10 (preto), 15 (azul), 20 (vermelho), 25 (verde), 30 (magenta) e 40 (marrom).

4.2.5 Flutuações

Parâmetros de ordem são grandezas selecionadas para distinguir duas fases diferentes de um determinado sistema macroscópico e, para serem mensuráveis, as flutuações dessas grandezas devem ser suaves em comparação com seus valores medidos quando o sistema é encontrado em qualquer uma de suas fases (BIRMAN; NAZMITDINOV; YUKALOV, 2013), (SACHDEV, 2017). No ponto de transição de fase, espera-se que tais flutuações diverjam. Uma questão que surge naturalmente é como as flutuações se comportam quando um sistema finito sofre alterações semelhantes às aquelas aplicadas ao sistema macroscópico correspondente, durante uma transição de fase.

A fim de esclarecer o papel das flutuações no modelo aqui estudado, avaliamos a relação de incerteza de Robertson-Schrödinger (RS) (ROBERTSON, 1929), (ANGELOW; BATONI, 1999) para os observáveis $\hat{X}$ e $\hat{P}$ da membrana, à medida que o parâmetro de acoplamento λ varia para diferentes valores de S . No modelo de Dicke, as flutuações foram usadas como um indicador de caos (SONG et al.,) e de transição de fase quântica na aproximação do campo médio (BAKEMEIER; ALVERMANN; FEHSKE,). No modelo aqui estudado, as variâncias desses observáveis foram calculadas no estado fundamental do hamiltoniano $\hat{H}'$. Os resultados são apresentados na Fig. 13. A incerteza RS é dada por

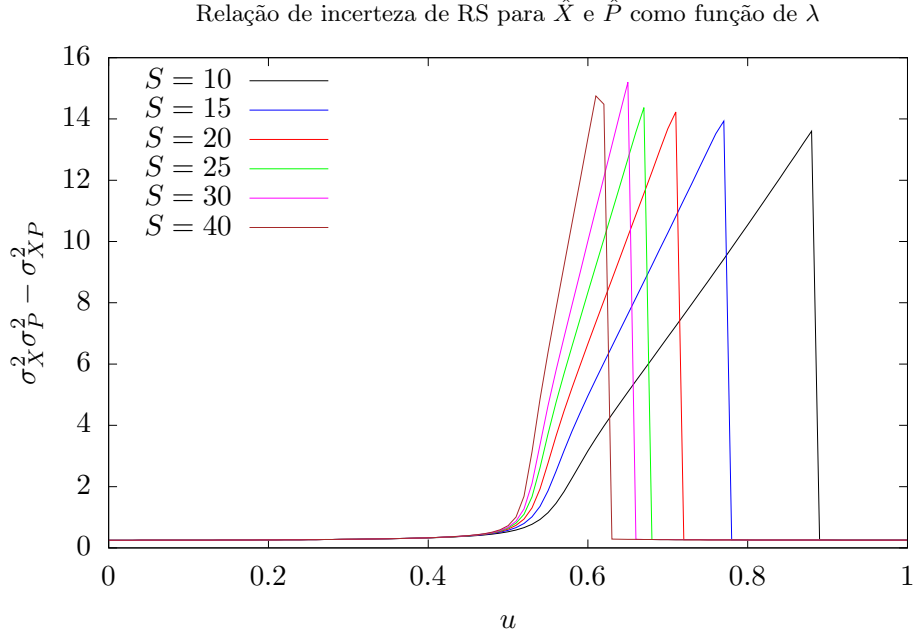


Figura 13 – Flutuações dos observáveis $\hat{X}$ e $\hat{P}$ da membrana medidas pela relação de incerteza RS em função do parâmetro $\lambda(u)$ no estado fundamental do hamiltoniano H' , para vários valores de S . Usamos $N_{max} = 5S$ como truncamento do número máximo de fônons considerados em nossas simulações. Aqui, $\lambda = u/\sqrt{S}$. Diferentes cores foram atribuídas a diferentes valores de S : 10 (preto), 15 (azul), 20 (vermelho), 25 (verde), 30 (magenta) e 40 (marrom).

$$\sigma_X^2 \sigma_P^2 - \sigma_{XP}^2 \geq \frac{1}{4}, \quad (85)$$

onde $\sigma_X^2 = \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2$ e $\sigma_P^2 = \langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2$ representam as variâncias dos operadores $\hat{X}$ e $\hat{P}$, enquanto $\sigma_{XP} = \frac{1}{2} \langle \hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X} \rangle - \langle \hat{X} \rangle \langle \hat{P} \rangle$ representa a covariância correspondente. De acordo com os resultados obtidos, mostrados na Fig. 13, se λ for inferior a λ_1 ou superior a λ_2 , as flutuações são relativamente pequenas. Porém, no valor crítico λ_1 , quando a degenerescência aparece, as flutuações começam a aumentar de forma quase linear até λ atingir o valor λ_2 , correspondendo a uma situação em que o estado fundamental descreve um dos modos preferencialmente ocupados. Quando este valor é atingido, as flutuações caem rapidamente e permanecem constantes depois disso. Observe que, à medida que o número quântico S aumenta, ou seja, à medida que o número de fótons armazenados aumenta, as flutuações crescem mais rapidamente com λ .

O estado fundamental é uma espécie de estado de gato de Schrödinger quando λ está na faixa $[\lambda_1, \lambda_2]$ e, devido à deslocalização, a relação de incerteza posição-momento aumenta. Nesta situação, o estado fundamental é uma superposição coerente de estados que descrevem fótons presos em um modo e a membrana deslocada de sua posição de repouso como resultado da pressão de radiação. Como subproduto do processo de diagonalização, quando $\lambda > \lambda_2$, o estado fundamental é agora um estado localizado, como

se a superposição esperada tivesse colapsado em um dos estados que a formam.

4.3 Força Média na Membrana

Conforme discutido na seção 2.5, reconhecemos duas contribuições para a força na membrana $\hat{F}$ dadas pela Eq. (51), a primeira devido à força restauradora proporcional a $\hat{X}$ (chamamos de contribuição harmônica), e a segunda atribuída à pressão de radiação que é proporcional ao *imbalance* dos fótons nos modos. Para analisar como a força sobre a membrana é afetada conforme o parâmetro λ varia, calculamos seu valor médio no estado fundamental do hamiltoniano dado pela Eq. (47).

A Fig. 14 mostra o valor médio das duas contribuições para a força na membrana, $\langle \hat{F}_{\text{harm}} \rangle = -\langle \hat{X} \rangle$ e $\langle \hat{F}_{\text{rad}} \rangle = -\lambda \langle \hat{n}_a - \hat{n}_b \rangle$, em função de λ . Para $\lambda < \lambda_2$, os valores médios dessas contribuições são próximos de zero e, quando o valor λ_2 é atingido, ambos sofrem um salto abrupto. O valor médio das contribuições harmônicas e de pressão de radiação crescem linearmente com λ para $\lambda > \lambda_2$. Neste caso, estas contribuições mantêm a mesma magnitude absoluta, mas sinais opostos. Assim, a força harmônica restauradora equilibra a força aplicada na membrana pela pressão de radiação, resultante do *imbalance* na população de fótons dos dois modos. Como consequência, para qualquer valor do parâmetro de acoplamento λ , o valor médio da força na membrana é nulo. Para $\lambda > \lambda_2$, para cada valor de λ , no estado fundamental escolhido, a membrana atinge uma posição de equilíbrio, cuja média é dada por

$$\langle \hat{X} \rangle = -\lambda \langle \hat{n}_a - \hat{n}_b \rangle \approx \pm 2\lambda S. \quad (86)$$

O sinal " $\pm$ " no lado direito da Eq. (86) é devido à degenerescência dos dois autoestados de menor energia. Conforme discutido, cada um destes autoestados descreve um dos dois modos preferencialmente preenchido para $\lambda > \lambda_2$.

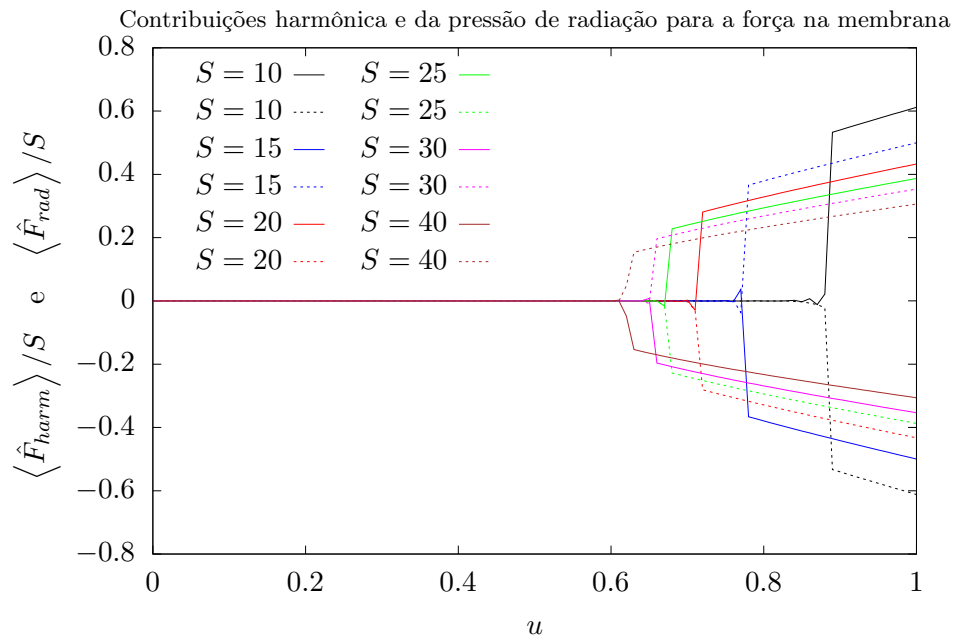


Figura 14 – Valores médios das duas contribuições para a força na membrana $\hat{F}$ como funções do parâmetro $\lambda(u)$ para vários valores de S no estado fundamental do hamiltoniano da Eq. (47): $\hat{F}_{harm}$ (contribuição harmônica - linha contínua) e $\hat{F}_{rad}$ (contribuição de pressão de radiação - linha tracejada). Usamos $N_{max} = 5S$ como truncamento do número máximo de fônons considerados em nossas simulações. Aqui, $\lambda = u/\sqrt{S}$. Diferentes cores foram atribuídas a diferentes valores de S : 10 (preto), 15 (azul), 20 (vermelho), 25 (verde), 30 (magenta) e 40 (marrom).

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho, estudamos um modelo optomecânico de dois modos que é equivalente ao conhecido modelo Dicke N -átomos da óptica quântica. O modelo de Dicke possui uma riqueza de fenômenos, como a transição de fase quântica, TFQ, e seu limite clássico pode exibir o caos. Utilizando tal equivalência, analisamos o comportamento dos valores médios de três observáveis escolhidos em relação ao parâmetro λ , que mede o acoplamento entre a membrana e os modos de luz no estado fundamental do hamiltoniano da Eq 47.

Os resultados numéricos apresentados na seção anterior mostram a existência de dois valores diferentes do parâmetro de acoplamento λ para os quais o sistema optomecânico de dois modos sofre alterações significativas. Para $\lambda = \lambda_1 \approx 1/(2\sqrt{S})$, os dois autoestados de menor energia do hamiltoniano $\hat{H}'$ tornam-se degenerados. Para um segundo valor $\lambda_2 > \lambda_1$, o estado fundamental descreve um dos dois modos de cavidade preferencialmente preenchidos. Na verdade, isto é produto do processo de diagonalização do hamiltoniano $\hat{H}'$. Após o início da degenerescência, para λ em $[\lambda_1, \lambda_2]$, o algoritmo usado para diagonalizar $\hat{H}'$ escolhe estados fundamentais que são caracterizados como superposições coerentes de autoestados que descrevem um dos dois modos preferencialmente ocupados. Vamos identificar tais autoestados como $|\Psi^+\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$, com cada um deles descrevendo fótons que povoam um dos modos, ou seja, $\langle \Psi^\pm | \hat{S}_z | \Psi^\pm \rangle \approx \pm S$ e $\langle \Psi^\pm | \Psi^\mp \rangle = 0$. Logo após a degenerescência, os dois autoestados de menor energia são superposições coerentes de $|\Psi^+\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$. No entanto, para $\lambda > \lambda_2$, os papéis desses autoestados de energia mais baixa são desempenhados pelos próprios $|\Psi^+\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$. O valor de λ_2 depende do número quântico S , ou seja, do número total de fótons armazenados na cavidade.

Conforme mostrado na Fig. 12, à medida que o parâmetro λ varia, a curva de suscetibilidade de fidelidade χ_F exibe um aumento seguido por um pico alto que cai rapidamente. Este ressalto indica o estabelecimento da degenerescência entre os dois autoestados de menor energia de $\hat{H}'$, enquanto o pico sinaliza que o estado fundamental descreve o aprisionamento de fótons em um dos dois modos, um efeito numérico, como apontado acima.

Observa-se que, à medida que o número de fótons armazenados aumenta, a distância entre o ressalto e o pico diminui. Tal comportamento é confirmado pelos cálculos numéricos de $\langle \hat{S}_z \rangle(\lambda)$ e $\chi_F(\lambda)$. O estabelecimento da degenerescência pode ser verificado na Fig. 6, que mostra a separação de energia δ entre os dois autoestados de menor energia em função de λ . Apesar de o *imbalance* $\hat{S}_z$ ser insensível ao surgimento de degenerescência, o *imbalance* ao quadrado $\hat{S}_z^2$ é sensível, como pode ser verificado na Fig. 8.

Finalmente, foi possível verificar como a força na membrana $\hat{F}$ é afetada próximo de λ_2 para diferentes valores de S . $\hat{F}$ é formada por duas contribuições opostas, análogas a um par de forças de ação-reação: uma delas proporcional à posição da membrana $\hat{X}$, relacionada à força harmônica restauradora e a outra proporcional ao *imbalance* de fótons $\hat{S}_z = \frac{1}{2}(\hat{n}_a - \hat{n}_b)$, atribuída à pressão de radiação. Para valores mais baixos de λ , ambas as contribuições para $\hat{F}$ são próximas de zero, porque ambos os modos estão igualmente ocupados. Em $\lambda = \lambda_2$, ambas as contribuições saltam para valores opostos não nulos com a mesma magnitude absoluta. Após esta mudança, no estado fundamental, ambas as contribuições crescem linearmente com λ , mantendo a mesma magnitude absoluta, mas com sinais opostos. Assim, o valor médio de $\hat{F}$ é mantido nulo, independentemente do valor de λ . Porém, nesta situação, a membrana atinge uma nova posição de equilíbrio que depende do número de fótons armazenados nos modos da cavidade. Este comportamento pode ser considerado como um correspondente de tamanho finito da transição de fase de flambagem em cavidades optomecânicas simétricas, para a qual, um teste experimental foi recentemente relatado na referência (XU et al., 2017).

Conforme enfatizado ao longo deste trabalho, consideramos a aproximação de sistema fechado em nosso modelo, o que pode dificultar seu teste experimental, considerando o atual estado da arte de experimentos envolvendo dispositivos optomecânicos. Um teste deste modelo poderia ser realizado em um dispositivo semelhante ao descrito na referência (XU et al., 2017). No entanto, uma cavidade supercondutora poderia ser necessária para aumentar a vida útil dos fótons ali armazenados. Portanto, tal dispositivo exigiria sistemas criogênicos e de vácuo. Além disso, a criogenia seria necessária para reduzir a presença de excitações térmicas tanto na cavidade quanto na membrana.

Referências

ABDI, M. et al. Dissipative optomechanical preparation of macroscopic quantum superposition states. v. 116, 2016. ISSN 0031-9007. Citado na página 1.

AKRAM, M. J.; SAIF, F. Complex dynamics of nano-mechanical membrane in cavity optomechanics. v. 83, p. 963–970, 2016. ISSN 0924-090X. Citado na página 2.

ANGELOW, a. b. A.; BATONI, M. C. About heisenberg uncertainty relation (by e.schrodinger). arXiv, 1999. Citado na página 38.

ASADIAN, A.; BRUKNER, C.; RABL, P. Probing macroscopic realism via ramsey correlations measurements. American Physical Society (APS), v. 112, n. 19, p. 190402, may 2013. Citado na página 2.

ASPELMEYER, M.; MEYSTRE, P.; SCHWAB, K. Quantum optomechanics. **Physics Today**, AIP Publishing, v. 65, n. 7, p. 29–35, jul 2012. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 14.

BAKEMEIER, L.; ALVERMANN, A.; FEHSKE, H. Quantum phase transition in the dicke model with critical and noncritical entanglement. v. 85. ISSN 1050-2947. Citado na página 38.

BAUMANN, K. et al. Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity. v. 464, p. 1301–1306, 2010. ISSN 0028-0836. Citado na página 3.

BAUMANN, K. et al. Exploring symmetry breaking at the dicke quantum phase transition. American Physical Society (APS), v. 107, n. 14, p. 140402, sep 2011. Citado na página 3.

BHASEEN, M. J. et al. Dynamics of nonequilibrium dicke models. American Physical Society (APS), v. 85, n. 1, p. 013817, jan 2012. Citado na página 18.

BHATTACHARYA, M.; MEYSTRE, P. Trapping and cooling a mirror to its quantum mechanical ground state. v. 99, 2007. ISSN 0031-9007. Citado na página 1.

BHATTACHARYA, M.; UYS, H.; MEYSTRE, P. Optomechanical trapping and cooling of partially reflective mirrors. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 77, n. 3, mar 2008. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 15.

BIRMAN, J. L.; NAZMITDINOV, R. G.; YUKALOV, V. I. Effects of symmetry breaking in finite quantum systems. **Physics Reports**, v. 526, p. 1–91, 2013. ISSN 0370-1573. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 38.

BOWEN, W.; MILBURN, G. In: _____. **Quantum optomechanics**. [S.l.]: CRC Press, 2016. Citado na página 1.

BRAGINSKII, V.; MANUKIN, A. Ponderomotive effects of electromagnetic radiation. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 52, n. 4, p. 986, 1967. Disponível em: <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_025_04_0653.pdf>. Citado na página 14.

BRAGINSKY, V.; VYATCHANIN, S. Low quantum noise tranquilizer for fabry–perot interferometer. **Physics Letters A**, Elsevier BV, v. 293, n. 5-6, p. 228–234, feb 2002. Citado na página 14.

BRAGINSKY, V. B.; MANUKIN, A. B.; DOUGLASS, D. H. E. **Measurement of Weak Forces in Physics Experiments**. Univ of Chicago Pr, 1977. ISBN 0226070700. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Measurement-Weak-Forces-Physics-Experiments/dp/0226070700?SubscriptionId=AKIAIOBINVZYXZQZ2U3A&tag=chimbori05-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0226070700>>. Citado na página 14.

CEJNAR, P.; STRÁNSKÝ, P. Impact of quantum phase transitions on excited-level dynamics. **Physical Review E**, American Physical Society (APS), v. 78, n. 3, sep 2008. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 13.

CHAN, J. et al. Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state. v. 478, p. 89–92, 2011. ISSN 0028-0836. Citado na página 1.

CHEN, Q.-H. et al. Numerically exact solution to the finite-size dicke model. v. 78, 2008. ISSN 1050-2947. Citado na página 27.

CLERK, A. A.; MARQUARDT, F.; JACOBS, K. Back-action evasion and squeezing of a mechanical resonator using a cavity detector. IOP Publishing, v. 10, n. 9, p. 095010, sep 2008. Citado na página 1.

COHEN-TANNOUDJI, C.; DUI, B.; LALOE, F. **Quantum Mechanics**. New York, NY: Wiley-Interscience Publication, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 10.

DEHGHANI, A. et al. Photon-added entangled barut–girardello coherent states: non-classicality and generation. v. 135, 2020. ISSN 2190-5444. Citado na página 2.

DICKE, R. H. Coherence in spontaneous radiation processes. **Physical Review**, American Physical Society (APS), v. 93, n. 1, p. 99–110, jan 1954. Citado 4 vezes nas páginas 2, 3, 17 e 19.

EMARY, C.; BRANDES, T. Chaos and the quantum phase transition in the dicke model. v. 67, 2003. ISSN 1063-651X. Citado na página 2.

EMARY, C.; BRANDES, T. Quantum chaos triggered by precursors of a quantum phase transition: The dicke model. v. 90, 2003. ISSN 0031-9007. Citado na página 2.

FORSTNER, S. et al. Cavity optomechanical magnetometer. v. 108, 2012. ISSN 0031-9007. Citado na página 2.

FRAZAO, H. M. et al. Quantum phase transition in an effective three-mode model of interacting bosons. American Physical Society (APS), v. 96, n. 6, p. 062146, dec 2018. Citado na página 3.

FUCHS, S. et al. Non-equilibrium dynamics of the dicke model for mesoscopic aggregates: signatures of superradiance. v. 49, p. 035501, 2016. ISSN 0953-4075. Citado na página 18.

GELHAUSEN, J.; BUCHHOLD, M. Dissipative dicke model with collective atomic decay: Bistability, noise-driven activation and non-thermal first order superradiance transition. American Physical Society (APS), v. 97, n. 2, p. 023807, feb 2018. Citado na página 18.

GRIFFITHS, D. J. **Mecânica Quântica**. São Paulo, SP: PearsonPrentice Hall, 2011. Citado na página 9.

GRUNER, T.; WELSCH, D.-G. Quantum-optical input-output relations for dispersive and lossy multilayer dielectric plates. v. 54, p. 1661–1677, 1996. ISSN 1050-2947. Citado na página 16.

GU, S.-J. et al. Fidelity susceptibility, scaling, and universality in quantum critical phenomena. v. 77, 2008. ISSN 1098-0121. Citado na página 37.

HEISENBERG, W. Zur theorie des ferromagnetismus. Springer Science and Business Media LLC, v. 49, n. 9-10, p. 619–636, 1928. Citado na página 3.

HEISS, W. D.; SCHOLTZ, F. G.; GEYER, H. B. The large n behaviour of the lipkin model and exceptional points. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 38, p. 1843–1851, 2005. ISSN 0305-4470. Citado na página 24.

HEPP, K.; LIEB, E. H. On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the dicke maser model. v. 76, p. 360–404, 1973. ISSN 0003-4916. Citado 3 vezes nas páginas 3, 18 e 19.

HERTZBERG, J. B. et al. Back-action-evading measurements of nanomechanical motion. v. 6, p. 213–217, 2010. ISSN 1745-2473. Citado na página 1.

HOLLANDER, E.; GOTTLIEB, O. Global bifurcations and homoclinic chaos in nonlinear panel optomechanical resonators under combined thermal and radiation stresses. v. 103, p. 3371–3405, 2021. ISSN 0924-090X. Citado na página 1.

HOLSTEIN, T.; PRIMAKOFF, H. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet. American Physical Society (APS), v. 58, n. 12, p. 1098–1113, 12 1940. Citado na página 3.

JAYICH, A. M. et al. Dispersive optomechanics: a membrane inside a cavity. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 10, n. 9, p. 095008, sep 2008. Citado 3 vezes nas páginas 2, 15 e 16.

JAYNES, E.; CUMMINGS, F. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. IEEE, v. 51, p. 89–109, 1963. ISSN 1558-2256. Citado na página 18.

KAC, M.; UHLENBECK, G. E.; HEMMER, P. C. On the van der waals theory of the vapor-liquid equilibrium. i. discussion of a one-dimensional model. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 4, n. 2, p. 216–228, feb 1963. Citado na página 17.

KEPLER, J. **De Cometis Libelli Tres**. [S.l.: s.n.], 1619. Citado na página 13.

KIRTON, P. et al. Introduction to the dicke model: From equilibrium to nonequilibrium, and vice versa. v. 2, p. 1800043, 2019. ISSN 2511-9044. Citado na página 19.

KLECKNER, D. et al. Creating and verifying a quantum superposition in a micro-optomechanical system. v. 10, p. 095020, 2008. ISSN 1367-2630. Citado na página 1.

KLINDER, J. et al. Dynamical phase transition in the open dicke model. v. 112, p. 3290–3295, 2015. ISSN 0027-8424. Citado na página 18.

KOLKOWITZ, S. et al. Coherent sensing of a mechanical resonator with a single-spin qubit. v. 335, p. 1603–1606, 2012. ISSN 0036-8075. Citado na página 2.

KRAUSE, A. G. et al. A high-resolution microchip optomechanical accelerometer. v. 6, p. 768–772, 2012. ISSN 1749-4885. Citado na página 2.

KÓNYA, G. et al. Finite-size scaling in the quantum phase transition of the open-system dicke model. **Physical Review A**, v. 86, 2012. ISSN 1050-2947. Citado na página 3.

LIBERTI, G.; PIPERNO, F.; PLASTINA, F. Finite-size behavior of quantum collective spin systems. **Physical Review A**, v. 81, 2010. ISSN 1050-2947. Citado na página 3.

LIN, Q. et al. Mechanical oscillation and cooling actuated by the optical gradient force. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 103, n. 10, aug 2009. Citado na página 2.

LIPKIN, H. J.; MESHKOV, N.; GLICK, A. J. Validity of many-body approximation methods for a solvable model. v. 62, p. 188–198, 1965. ISSN 0029-5582. Citado na página 3.

MARSHALL, W. et al. Publisher's note: Towards quantum superpositions of a mirror [phys. rev. lett.prltao0031-900791, 130401 (2003)]. v. 91, 2003. ISSN 0031-9007. Citado na página 1.

MAXWELL, J. C. **A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. 2**. Dover Publications Inc., 1954. ISBN 0486606376. Disponível em: <https://www.ebook.de/de/product/1915657/james_clerk_maxwell_a_treatise_on_electricity_and_magnetism_vol_2.html>. Citado na página 14.

MERCADE, L. et al. Microwave oscillator and frequency comb in a silicon optomechanical cavity with a full phononic bandgap. v. 9, p. 3535–3544, 2020. ISSN 2192-8614. Citado na página 2.

MIRI, M.-A.; VERHAGEN, E.; ALÙ, A. Optomechanically induced spontaneous symmetry breaking. v. 95, 2017. ISSN 2469-9926. Citado na página 3.

MOREIRA, T. et al. Entanglement and classical instabilities: Fingerprints of electron-hole-to-exciton phase transition in a simple model. v. 77, 2008. ISSN 1539-3755. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 24.

MUMFORD, J.; O'DELL, D. H. J.; LARSON, J. Dicke-type phase transition in a multimode optomechanical system. **Annalen der Physik**, Wiley, v. 527, n. 1-2, p. 115–130, jan 2015. Citado 6 vezes nas páginas 2, 15, 16, 19, 32 e 37.

NAGY, D. et al. Dicke-model phase transition in the quantum motion of a bose-einstein condensate in an optical cavity. v. 104, 2010. ISSN 0031-9007. Citado na página 18.

OLIVEIRA, F. A. M. de et al. Properties of displaced number states. **Physical Review A**, v. 41, p. 2645–2652, 1990. ISSN 1050-2947. Citado na página 27.

PERELOMOV, A. M. **Generalized coherent states and their applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1986. Citado na página 27.

PLASTINA, F.; LIBERTI, G.; CAROLLO, A. Scaling of berry's phase close to the dicke quantum phase transition. **Europhysics Letters**, v. 76, p. 182–188, 2006. ISSN 0295-5075. Citado na página [3](#).

REITER, F. et al. Cooperative breakdown of the oscillator blockade in the dicke model. American Physical Society (APS), v. 125, n. 23, p. 233602, nov 2020. Citado na página [18](#).

RESLEN, J.; QUIROGA, L.; JOHNSON, N. F. Direct equivalence between quantum phase transition phenomena in radiation-matter and magnetic systems: Scaling of entanglement. **Europhysics Letters**, v. 69, p. 8–14, 2005. ISSN 0295-5075. Citado na página [3](#).

RIBEIRO, P.; VIDAL, J.; MOSSERI, R. Thermodynamical limit of the lipkin-meshkov-glick model. v. 99, 2007. ISSN 0031-9007. Citado 2 vezes nas páginas [3](#) e [12](#).

ROBERTSON, H. P. The uncertainty principle. **Physical Review**, v. 34, p. 163–164, 1929. ISSN 0031-899X. Citado na página [38](#).

SACHDEV, S. **Quantum Phase Transitions**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. ISBN 0521514681. Citado 3 vezes nas páginas [3](#), [13](#) e [38](#).

SONG, L. et al. Spin squeezing as an indicator of quantum chaos in the dicke model. v. 79. ISSN 1539-3755. Citado na página [38](#).

TEUFEL, J. D. et al. Sideband cooling of micromechanical motion to the quantum ground state. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 475, n. 7356, p. 359–363, jul 2011. Citado na página [1](#).

THOMPSON, J. D. et al. Strong dispersive coupling of a high-finesse cavity to a micromechanical membrane. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 452, n. 7183, p. 72–75, mar 2008. Citado na página [15](#).

VAHALA, K.; KIPPENBERG, T. **Cavity opto-mechanics**. 2008. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [13](#).

VERHAGEN, E. et al. Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode. v. 482, p. 63–67, 2012. ISSN 0028-0836. Citado na página [2](#).

VIDAL, J.; DUSUEL, S. Finite-size scaling exponents in the dicke model. **Europhysics Letters**, v. 74, p. 817–822, 2006. ISSN 0295-5075. Citado na página [3](#).

VITALI, D. et al. Optomechanical entanglement between a movable mirror and a cavity field. v. 98, 2007. ISSN 0031-9007. Citado na página [2](#).

WANG, Y. K.; HIOE, F. T. Phase transition in the dicke model of superradiance. v. 7, p. 831–836, 1973. ISSN 0556-2791. Citado na página [19](#).

WEIS, S. et al. Optomechanically induced transparency. **Science**, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 330, n. 6010, p. 1520–1523, nov 2010. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [2](#).

WURL, C.; ALVERMANN, A.; FEHSKE, H. Symmetry-breaking oscillations in membrane optomechanics. American Physical Society (APS), v. 94, n. 6, p. 063860, dec 2016. Citado na página [3](#).

XU, H. et al. Observation of optomechanical buckling transitions. v. 8, 2017. ISSN 2041-1723. Citado 2 vezes nas páginas [5](#) e [43](#).

YANG, M.-F. Ground-state fidelity in one-dimensional gapless models. v. 76, 2007. ISSN 1098-0121. Citado na página [37](#).

ZHIQIANG, Z. et al. Nonequilibrium phase transition in a spin-1 dicke model. v. 4, p. 424, 2017. ISSN 2334-2536. Citado na página [18](#).

ZOU, L. et al. Implementation of the dicke lattice model in hybrid quantum system arrays. v. 113, 2014. ISSN 0031-9007. Citado na página [3](#).